ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Διάρκεια: 3 ώρες

Ρήτρα τελικού: 4.5/10.0

Θέμα 1ο - 25 μονάδες

Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 2\cos(2\pi 200t - \pi/3) + \cos(2\pi 300t + \pi/7) + \sin(2\pi 400t) \tag{1}$$

(α΄) **(5 μ.)** Υπολογίστε την περίοδο του σήματος.

(β΄) **(10 μ.)** Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

(γ΄) **(10 μ.)** Αν το παραπάνω σήμα δοθεί ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t) - 800\text{sinc}(400t)\cos(2\pi 300t) \tag{2}$$

τότε ποιά είναι η έξοδος $y(t)$;

Λύση:

(α΄) Η περίοδος του σήματος υπολογίζεται εύκολα πρώτα μέσω της θεμελιώδους συχνότητας, δηλ.

$$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{200, 300, 400\} = 100 \text{ Hz} \tag{3}$$

Η περίοδος ισούται με $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.01$ s.

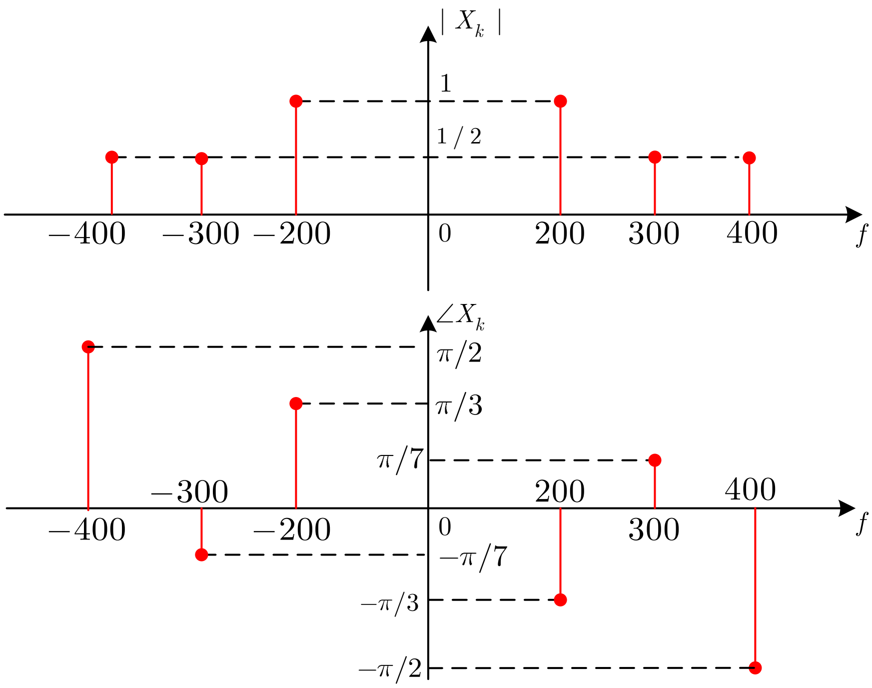
(β΄) Το σήμα γράφεται ως

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos(2\pi 200t - \pi/3) + \cos(2\pi 300t + \pi/7) + \sin(2\pi 400t) &(4)\\ &= e^{-j\pi/3}e^{j2\pi 200t} + e^{j\pi/3}e^{-j2\pi 200t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/7}e^{j2\pi 300t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/7}e^{-j2\pi 300t} + \frac{1}{2j}e^{j2\pi 400t} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi 400t} &(5)\\ &= e^{-j\pi/3}e^{j2\pi 200t} + e^{j\pi/3}e^{-j2\pi 200t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/7}e^{j2\pi 300t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/7}e^{-j2\pi 300t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{j2\pi 400t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{-j2\pi 400t} &(6) \end{aligned}$$

οπότε τα φασματα θα είναι όπως στο Σχήμα 1.

(γ΄) Από τις σημειώσεις σας αναγνωρίζετε ότι το σύστημα είναι ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο με συχνότητες αποκοπής $f_{c_1} = \pm 100$ και $f_{c_2} = \pm 500$ Hz. Ως εκ τούτου, αποκόπτει τις συχνότητες που βρίσκονται στο διάστημα $(-500, -100) \cup (100, 500)$ Hz. Όλες οι συχνότητες του σήματος εισόδου βρίσκονται σε αυτό το εύρος, κι έτσι στην έξοδο θα έχουμε το μηδενικό σήμα, δηλ.

$$y(t) = 0 \ \forall t \tag{7}$$



Σχήμα 1: *Φάσματα Θέματος 1.*

Θέμα 2ο - 25 μονάδες

Δείξτε ότι ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}\Big(\frac{t-kT_0}{2}\Big) \tag{8}$$

για $T_0 = 6$ είναι

$$X(f) = \frac{1}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\Big(\frac{k}{3}\Big)\delta\Big(f-\frac{k}{6}\Big) \tag{9}$$

Λύση:

(α') **1ος τρόπος:** Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος βρίσκοντας το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος και δειγματοληπτώντας το ανά kf_0. Μια περίοδος του σήματος γράφεται ως

$$x(t, T_0) = \mathrm{tri}\Big(\frac{t}{2}\Big) \tag{10}$$

και έχει μετασχ. Fourier

$$X(f, T_0) = 2\mathrm{sinc}^2(2f) \tag{11}$$

Η σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0}X(f, T_0)\Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{6}2\mathrm{sinc}^2(2k/6) = \frac{1}{3}\mathrm{sinc}^2\Big(\frac{k}{3}\Big) \tag{12}$$

μας δίνει τους συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος. Έτσι, το περιοδικό σήμα θα έχει συντελεστές Fourier ως

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\delta(f-kf_0) = \frac{1}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\Big(\frac{k}{3}\Big)\delta\Big(f-\frac{k}{6}\Big) \tag{13}$$

(β΄) **2ος τρόπος:** Το περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = x(t, T_0) * \delta_{T_0}(t) \tag{14}$$

με

$$x(t, T_0) = \mathrm{tri}(t/2) \tag{15}$$

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \tag{16}$$

γιατί

$$x(t) = x(t, T_0) * \delta_{T_0}(t) = \mathrm{tri}(t/2) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \tag{17}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}\Big(\frac{t}{2}\Big) * \delta(t - kT_0) \tag{18}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}\Big(\frac{t - kT_0}{2}\Big) \tag{19}$$

από την ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \tag{20}$$

Κάνοντας μετασχ. Fourier στην Εξίσωση (17), έχουμε

$$X(f) = F\Big\{\mathrm{tri}(t/2) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)\Big\} \tag{21}$$

$$= F\{\mathrm{tri}(t/2)\} F\Big\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)\Big\} \tag{22}$$

αφού η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στη συχνότητα. Από γνωστά ζεύγη

$$X(f) = 2\mathrm{sinc}^2(2f) \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\Big(f - \frac{k}{T_0}\Big) \tag{23}$$

$$= \frac{2}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(2f) \delta\Big(f - \frac{k}{T_0}\Big) \tag{24}$$

$$= \frac{2}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\Big(\frac{2k}{T_0}\Big) \delta\Big(f - \frac{k}{T_0}\Big) \tag{25}$$

αφού

$$X(f)\delta(f - f_0) = X(f_0)\delta(f - f_0) \tag{26}$$

Τέλος, για $T_0 = 6$ έχουμε

$$X(f) = \frac{2}{6} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\Big(\frac{2k}{6}\Big) \delta\Big(f - \frac{k}{6}\Big) = \frac{1}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\Big(\frac{k}{3}\Big) \delta\Big(f - \frac{k}{6}\Big) \tag{27}$$

Θέμα 3ο - 25 μονάδες

Έστω η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος ως

$$h(t) = 1 - 3e^{-2t}u(t) \tag{28}$$

(α') (**10 μ.**) Υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$.

(β') (**15 μ.**) Δείξτε ότι η έξοδος του συστήματος αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα

$$x(t) = 4e^{-t}u(t) \tag{29}$$

θα είναι

$$y(t) = 4 - 12e^{-t}u(t) + 12e^{-2t}u(t) \tag{30}$$

Λύση:

(α') Η απόκριση σε συχνότητα είναι ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης. Οπότε

$$H(f) = F\{h(t)\} = \delta(f) - 3\frac{1}{2 + j2\pi f} \tag{31}$$

i. 1ος τρόπος: Στο χώρο του χρόνου,

$$y(t) = x(t) * h(t) = (1 - 3e^{-2t}u(t)) * 4e^{-t}u(t) = 1 * 4e^{-t}u(t) - 12e^{-2t}u(t) * e^{-t}u(t) \tag{32}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-\tau}u(\tau)d\tau - 12\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \tag{33}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} 4e^{-\tau}ud\tau - 12e^{-t}\int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau \tag{34}$$

$$= -4e^{-\tau}\Big|_0^{+\infty} - 12e^{-t}(-e^{-\tau})\Big|_0^{t} \tag{35}$$

$$= -4(0-1) + 12e^{-t}(e^{-t} - 1) \tag{36}$$

$$= 4 + 12e^{-2t} - 12e^{-t}, \quad \text{με } t > 0 \text{ για τα δυο τελευταία εκθετικά} \tag{37}$$

ή αλλιώς

$$y(t) = 4 - 12e^{-t}u(t) + 12e^{-2t}u(t) \tag{38}$$

ii. 2ος τρόπος: Στο χώρο της συχνότητας,

$$Y(f) = X(f)H(f) = \Big(\delta(f) - 3\frac{1}{2 + j2\pi f}\Big)\frac{4}{1 + j2\pi f} \tag{39}$$

$$= \frac{4}{1 + j2\pi f}\delta(f) - 12\frac{1}{(2 + j2\pi f)(1 + j2\pi f)} \tag{40}$$

$$= \frac{4}{1 + j2\pi f}\Big|_{f=0}\delta(f) - 12\Big(\frac{A}{2 + j2\pi f} + \frac{B}{1 + j2\pi f}\Big) \tag{41}$$

$$= 4\delta(f) - 12\frac{1}{1 + j2\pi f} + 12\frac{1}{2 + j2\pi f} \tag{42}$$

κάνοντας ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. Από γνωστά ζεύγη

$$y(t) = F^{-1}\{Y(f)\} = 4 - 12e^{-t}u(t) + 12e^{-2t}u(t) \tag{43}$$

Θέμα 4ο - 20 μονάδες

Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$H(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+\frac{3}{4}s+\frac{1}{8}} \tag{44}$$

(α΄) **(5 μ.)** Για ποιό πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα ευσταθές και αιτιατό;

(β΄) **(7.5 μ.)** Έχει το σύστημα αυτό ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα; Αν όχι, εξηγήστε. Αν ναι, βρείτε το.

(γ΄) **(7.5 μ.)** Γράψτε μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα αυτό.

Λύση:

(α΄) Οι πόλοι του συστήματος βρίσκονται στις θέσεις $s = -\frac{1}{2}$, $s = -\frac{1}{4}$. Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει το πεδίο σύγκλισης να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Για να είναι αιτιατό πρέπει το πεδίο σύγκλισης να είναι δεξιόπλευρο. Οι δυο αυτές ιδιότητες ικανοποιούνται για

$$\mathrm{Re}\{s\} > -\frac{1}{4} \tag{45}$$

(β΄) Το αντίστροφο σύστημα δίνεται ως

$$H_{inv}(s) = \frac{(s+0.5)(s+0.25)}{(s+2)(s+1)} \tag{46}$$

και έχει πόλους στις θέσεις $s = -2$, $s = -1$. Αφού το αντίστροφο σύστημα έχει όλους τους πόλους στο αριστερο μιγαδικό ημιεπίπεδο μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό. Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα

- $\sigma > -1$
- $\sigma < -2$
- $-2 < \sigma < -1$

Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει το πεδίο σύγκλισης να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Για να είναι αιτιατό πρέπει το πεδίο σύγκλισης να είναι δεξιόπλευρο. Οι δυο αυτές ιδιότητες ικανοποιούνται για

$$\mathrm{Re}\{s\} > -1 \tag{47}$$

(γ΄) Έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+\frac{3}{4}s+\frac{1}{8}} \Longleftrightarrow (s^2+\frac{3}{4}s+\frac{1}{8})Y(s) = (s^2+3s+2)X(s) \tag{48}$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{3}{4}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{8}y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t) + 2x(t) \tag{49}$$

Θέμα 5ο - 25 μονάδες

Βρείτε τη συχνότητα Nyquist για το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{t}\mathrm{sinc}^2(2t-1)\sin(\pi t) \tag{50}$$

Λύση:
Χρειαζόμαστε τη μέγιστη συχνότητα του σήματος (συχνότητα Nyquist). Το σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{t}\operatorname{sinc}^2(2t-1)\sin(\pi t) && (51)\\ &= \operatorname{sinc}^2(2t-1)\frac{\sin(\pi t)}{t} && (52)\\ &= \pi\operatorname{sinc}^2(2t-1)\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} && (53)\\ &= \pi\operatorname{sinc}^2(2t-1)\operatorname{sinc}(t) && (54)\end{aligned}$$

Η μετατόπιση κατά $t_0 = 1$ δεν παίζει ρόλο στη μέγιστη συχνότητα, όπως και το πλάτος π, οπότε το σήμα $x(t)$ θα έχει την ίδια μέγιστη συχνότητα με το

$$x'(t) = \operatorname{sinc}^2(2t)\operatorname{sinc}(t) \tag{55}$$

Επειδή

$$a\operatorname{sinc}(at) \longleftrightarrow \operatorname{rect}\left(\frac{f}{a}\right) \tag{56}$$

και

$$a\operatorname{sinc}^2(at) \longleftrightarrow \operatorname{tri}\left(\frac{f}{a}\right) \tag{57}$$

στο χώρο του Fourier το σήμα $x'(t)$ γράφεται ως

$$X'(f) = \frac{1}{2}\operatorname{tri}(f/2) * \operatorname{rect}(f) \tag{58}$$

Από την ιδιότητα του εύρους της συνέλιξης γνωρίζουμε ότι ένα σήμα που είναι μη μηδενικό στο $[a, b]$ και γίνεται συνέλιξη με ένα άλλο μη μηδενικό στο $[c, d]$, το αποτέλεσμα είναι μη μηδενικό στο $[a + c, b + d]$. Εφαρμόζοντας αυτήν την ιδιότητα δυο φορές στο χώρο του Fourier, έχουμε ότι το $X'(f)$ είναι μη μηδενικό στο $[-5/2, 5/2]$. Οπότε η συχνότητα Nyquist είναι $f_{max} = 2.5$ Hz.

Συνολικές Μονάδες: 120 - Άριστα: 100

Καλή Επιτυχία!