ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Διάρκεια: 3 ώρες

Ρήτρα τελικού: 4.5/10.0

Θέμα 1ο - 25 μονάδες
Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 2\cos(2\pi 500t - \pi/2) + 2\cos(2\pi 900t + \pi/3) + \cos(2\pi 1400t) \tag{1}$$

(α΄) **(5 μ.)** Υπολογίστε την περίοδο του σήματος.

(β΄) **(10 μ.)** Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

(γ΄) **(10 μ.)** Αν το παραπάνω σήμα δοθεί ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$H(f) = \begin{cases} 2.5, & |f| < 600 \text{ Hz} \\ 4.5, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{2}$$

τότε ποιά είναι η έξοδος $y(t)$;

Λύση:

(α΄) Η περίοδος του σήματος υπολογίζεται εύκολα πρώτα μέσω της θεμελιώδους συχνότητας, δηλ.

$$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{500, 900, 1400\} = 100 \text{ Hz} \tag{3}$$

Η περίοδος ισούται με $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.01$ s.

(β΄) Το σήμα γράφεται ως

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos(2\pi 500t - \pi/2) + 2\cos(2\pi 900t + \pi/3) + \cos(2\pi 1400t) & (4)\\ &= e^{-j\pi/2}e^{j2\pi 500t} + e^{j\pi/2}e^{-j2\pi 500t} + e^{j\pi/3}e^{j2\pi 900t} + e^{-j\pi/3}e^{-j2\pi 900t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 1400t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 1400t} & (5) \end{aligned}$$

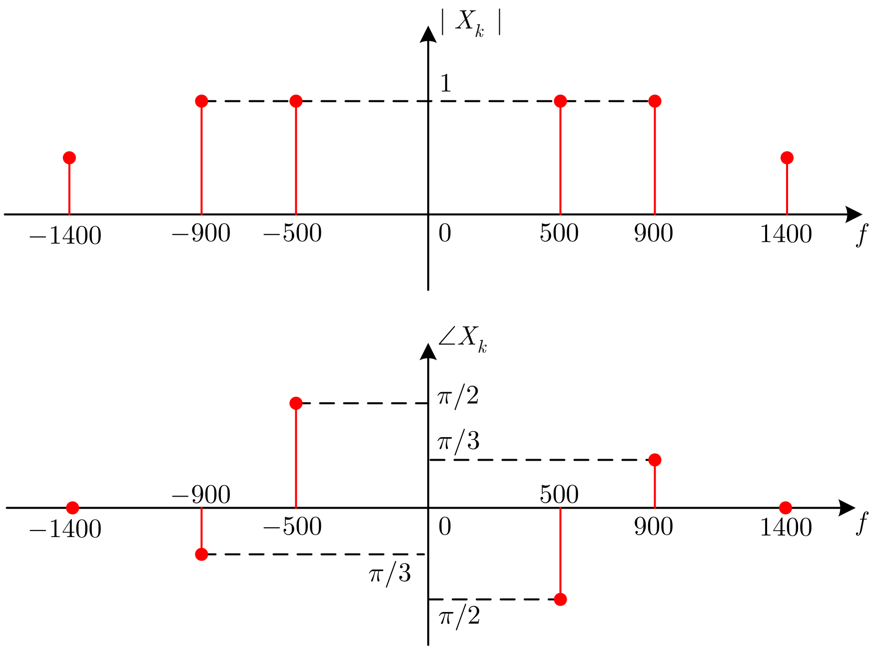
οπότε τα φασματα θα είναι όπως στο Σχήμα 1.

(γ΄) Προφανώς το σύστημα γράφεται ως

$$H(f) = \begin{cases} 2.5, & -600 < f < 600 \\ 4.5, & f < -600 \text{ και } f > 600 \end{cases} \tag{6}$$

οπότε

$$\begin{aligned} y(t) = 2.5e^{-j\pi/2}e^{j2\pi 500t} + 2.5e^{j\pi/2}e^{-j2\pi 500t} + 4.5e^{j\pi/3}e^{j2\pi 900t} + & \quad (7)\\ + 4.5e^{-j\pi/3}e^{-j2\pi 900t} + 4.5\frac{1}{2}e^{j2\pi 1400t} + 4.5\frac{1}{2}e^{-j2\pi 1400t} & \quad (8)\\ = 5\cos(2\pi 500t - \pi/2) + 9\cos(2\pi 900t + \pi/3) + 4.5\cos(2\pi 1400t) & \quad (9) \end{aligned}$$



Σχήμα 1: *Φάσματα Θέματος 1.*

Θέμα 2ο - 25 μονάδες

Δείξτε ότι ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\Big(\frac{t-kT_0}{2}\Big) \tag{10}$$

για $T_0 = 4$ είναι

$$X(f) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{2}\Big)\delta\Big(f-\frac{k}{4}\Big) \tag{11}$$

Λύση:

(α') **1ος τρόπος:** Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος βρίσκοντας το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος και δειγματοληπτώντας το ανά kf_0. Μια περίοδος του σήματος γράφεται ως

$$x(t, T_0) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t}{2}\Big) \tag{12}$$

και έχει μετασχ. Fourier

$$X(f, T_0) = 2\mathrm{sinc}(2f) \tag{13}$$

Η σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0}X(f, T_0)\Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{4}2\mathrm{sinc}(2k/4) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{2}\Big) \tag{14}$$

μας δίνει τους συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος. Έτσι, το περιοδικό σήμα θα έχει συντελεστές Fourier ως

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\delta(f-kf_0) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{2}\Big)\delta\Big(f-\frac{k}{4}\Big) \tag{15}$$

(β΄) **2ος τρόπος:** Το περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = x(t, T_0) * \delta_{T_0}(t) \tag{16}$$

με

$$x(t, T_0) = \mathrm{rect}(t/2) \tag{17}$$

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \tag{18}$$

γιατί

$$x(t) = x(t, T_0) * \delta_{T_0}(t) = \mathrm{rect}(t/2) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \tag{19}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\Big(\frac{t}{2}\Big) * \delta(t - kT_0) \tag{20}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\Big(\frac{t - kT_0}{2}\Big) \tag{21}$$

από την ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \tag{22}$$

Κάνοντας μετασχ. Fourier στην Εξίσωση (19), έχουμε

$$X(f) = F\Big\{\mathrm{rect}(t/2) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)\Big\} \tag{23}$$

$$= F\{\mathrm{rect}(t/2)\}F\Big\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)\Big\} \tag{24}$$

αφού η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στη συχνότητα. Από γνωστά ζεύγη

$$X(f) = 2\mathrm{sinc}(2f)\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\Big(f - \frac{k}{T_0}\Big) \tag{25}$$

$$= \frac{2}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(2f)\delta\Big(f - \frac{k}{T_0}\Big) \tag{26}$$

$$= \frac{2}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\Big(\frac{2k}{T_0}\Big)\delta\Big(f - \frac{k}{T_0}\Big) \tag{27}$$

αφού

$$X(f)\delta(f - f_0) = X(f_0)\delta(f - f_0) \tag{28}$$

Τέλος, για $T_0 = 4$ έχουμε

$$X(f) = \frac{2}{4}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\Big(\frac{2k}{4}\Big)\delta\Big(f - \frac{k}{4}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\Big(\frac{k}{2}\Big)\delta\Big(f - \frac{k}{4}\Big) \tag{29}$$

Θέμα 3ο - 25 μονάδες

Έστω η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος ως

$$h(t) = \delta(t) - 2e^{-t}u(t) \tag{30}$$

(α') (**10 μ.**) Υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$.

(β') (**10 μ.**) Βρείτε και σχεδιάστε την απόκριση πλάτους, $|H(f)|$.

(γ') (**5 μ.**) Δείξτε ότι η έξοδος του συστήματος αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα

$$x(t) = 2\cos(t) \tag{31}$$

θα είναι

$$y(t) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{32}$$

Λύση:

(α') (α') **1ος τρόπος:** Η απόκριση σε συχνότητα είναι ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης.

$$H(f) = F\{1\} - 2F\{e^{-t}u(t)\} = 1 - 2\frac{1}{1+j2\pi f} = \frac{1+j2\pi f - 2}{1+j2\pi f} = \frac{-1+j2\pi f}{1+j2\pi f} \tag{33}$$

(β') **2ος τροπος:** Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

$$H(s) = L\{1\} - 2L\{e^{-t}u(t)\} = 1 - 2\frac{1}{s+1} = \frac{s+1-2}{s+1} = \frac{s-1}{s+1}, \ \Re\{s\} > -1 \tag{34}$$

Ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης άρα μπορούμε να βρούμε

$$H(f) = H(s)\Big|_{s=j2\pi f} = \frac{j2\pi f - 1}{j2\pi f + 1} \tag{35}$$

(β') (α') **1ος τρόπος:** Η απόκριση πλάτους είναι

$$|H(f)| = \frac{|-1+j2\pi f|}{|1+j2\pi f|} = \frac{|-(1-j2\pi f)|}{|1+j2\pi f|} = \frac{|1-j2\pi f|}{|1+j2\pi f|} = 1 \tag{36}$$

αφού $1 - j2\pi f = (1+j2\pi f)^*$ και $|z(f)| = |z^*(f)|$. Η απόκριση πλάτους φαίνεται στο Σχήμα 2.

(β') **2ος τρόπος - δε συνίσταται:** Έχουμε

$$H(f) = \frac{(-1+j2\pi f)(1-j2\pi f)}{|1+j2\pi f|^2} = \frac{-(1-j2\pi f)^2}{1+4\pi^2 f^2} \tag{37}$$

$$= \frac{-(1-j4\pi f - 4\pi^2 f^2)}{1+4\pi^2 f^2} = \frac{4\pi^2 f^2 - 1}{1+4\pi^2 f^2} + j\frac{4\pi f}{1+4\pi^2 f^2} \tag{38}$$

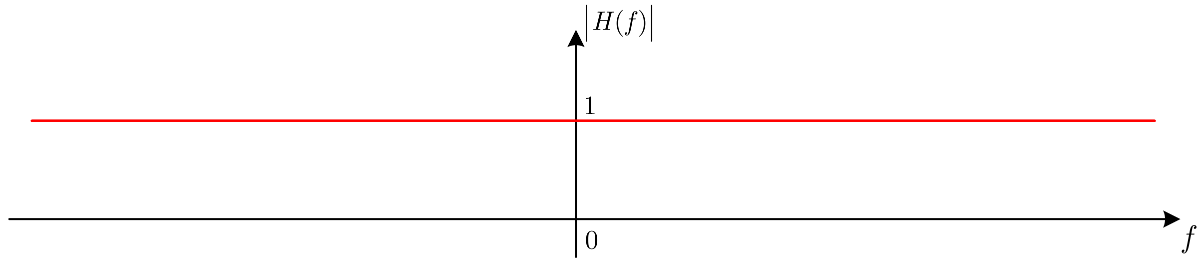
$$= X_R(f) + jX_I(f) \tag{39}$$

οπότε

$$|H(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 f^2 - 1}{1+4\pi^2 f^2}\right)^2 + \left(\frac{4\pi f}{1+4\pi^2 f^2}\right)^2} \tag{40}$$

$$= \sqrt{\frac{(4\pi f)^2 + (4\pi^2 f^2)^2 - 2\cdot 4\pi^2 f^2 + 1}{(1+4\pi^2 f^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+4\pi^2 f^2)^2}{(1+4\pi^2 f^2)^2}} = 1 \tag{41}$$

Η απόκριση πλάτους φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Απόκριση Πλάτους Θέματος 3.*

(γ΄) (α΄) **1ος τρόπος:** Η είσοδος είναι περιοδική, οπότε ξέρουμε ότι η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y(t) = 2|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \sphericalangle H(f_0)) \tag{42}$$

με $f_0 = \frac{1}{2\pi}$. Ξέρουμε ότι $|H(f)| = 1$, για κάθε f, οπότε μένει να βρούμε τη φάση $\sphericalangle H\left(\frac{1}{2\pi}\right)$. Είναι

$$H\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{j-1}{j+1} = \frac{(j-1)(1-j)}{|j+1|^2} = \frac{2j}{2} = \frac{-2}{2} = j = e^{j\pi/2} \tag{43}$$

οπότε

$$\sphericalangle H\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \pi/2 \tag{44}$$

Έτσι, η έξοδος θα είναι

$$y(t) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{45}$$

(β΄) **2ος τρόπος:** Η είσοδος έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = \delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right) \tag{46}$$

και ξέρουμε ότι η έξοδος του συστήματος στο χώρο της συχνότητας σχετίζεται με την είσοδο ως

$$Y(f) = X(f)H(f) = \left[\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)\right]\left[\frac{-1+j2\pi f}{1+j2\pi f}\right] \tag{47}$$

και από τη σχέση

$$X(f)\delta(f-f_0) = X(f_0)\delta(f-f_0) \tag{48}$$

θα έχουμε

$$Y(f) = \left[\frac{-1+j2\pi f}{1+j2\pi f}\right]\Bigg|_{f=1/(2\pi)}\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) + \left[\frac{-1+j2\pi f}{1+j2\pi f}\right]\Bigg|_{f=-1/(2\pi)}\delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right) \tag{49}$$

$$= \frac{-1+j}{1+j}\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) + \frac{-1-j}{1-j}\delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right) \tag{50}$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{j-1}{1+j} = e^{j\pi/2} \tag{51}$$

$$\frac{-1-j}{1-j} = e^{-j\pi/2} \tag{52}$$

οπότε

$$Y(f) = e^{j\pi/2}\delta\Big(f - \frac{1}{2\pi}\Big) + e^{-j\pi/2}\delta\Big(f + \frac{1}{2\pi}\Big) \tag{53}$$

και γυρίζοντας πίσω στο χρόνο

$$Y(f) = e^{j\pi/2}e^{jt} + e^{-j\pi/2}e^{-jt} = 2\cos\Big(t + \frac{\pi}{2}\Big) \tag{54}$$

Θέμα 4ο - 20 μονάδες
Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$H(s) = \frac{(s-2)(s+1)}{(s+2)(s+0.25)} \tag{55}$$

(α΄) **(5 μ.)** Για ποιό πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα ευσταθές και αιτιατό;

(β΄) **(7.5 μ.)** Έχει το σύστημα αυτό ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα; Αν όχι, εξηγήστε. Αν ναι, βρείτε το.

(γ΄) **(7.5 μ.)** Γράψτε μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα αυτό.

Λύση:

(α΄) Οι πόλοι του συστήματος βρίσκονται στις θέσεις $s = -2$, $s = -\frac{1}{4}$. Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει το πεδίο σύγκλισης να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Για να είναι αιτιατό πρέπει το πεδίο σύγκλισης να είναι δεξιόπλευρο. Οι δυο αυτές ιδιότητες ικανοποιούνται για

$$\text{Re}\{s\} > -\frac{1}{4} \tag{56}$$

(β΄) Το αντίστροφο σύστημα δίνεται ως

$$H_{inv}(s) = \frac{(s+2)(s+0.25)}{(s-2)(s+1)} \tag{57}$$

και έχει πόλους στις θέσεις $s = 2$, $s = -1$. Αφού υπάρχει πόλος στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο ($s = 2$) το σύστημα αυτό δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό.

(γ΄) Έχουμε

$$H(s) = \frac{(s-2)(s+1)}{(s+2)(s+0.25)} = \frac{s^2 + s - 2s - 2}{s^2 + \frac{1}{4}s + 2s + \frac{1}{2}} = \frac{s^2 - s - 2}{s^2 + \frac{9}{4}s + \frac{1}{2}} \tag{58}$$

οπότε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 - s - 2}{s^2 + \frac{9}{4}s + \frac{1}{2}} \Longleftrightarrow (s^2 + \frac{9}{4}s + \frac{1}{2})Y(s) = (s^2 - s - 2)X(s) \tag{59}$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{9}{4}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{2}y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) - \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t) \tag{60}$$

Θέμα 5ο - 25 μονάδες
Βρείτε το ρυθμό Nyquist για το σήμα

$$x(t) = \text{sinc}^3(4 - 2t) \tag{61}$$

Λύση:
Χρειαζόμαστε τη μέγιστη συχνότητα του σήματος. Το σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \mathrm{sinc}^3(4-2t) = \mathrm{sinc}(4-2t)\mathrm{sinc}(4-2t)\mathrm{sinc}(4-2t) \tag{62}$$

Η μετατόπιση κατά $t_0 = 4$ δεν παίζει ρόλο στη μέγιστη συχνότητα, οπότε το σήμα $x(t)$ θα έχει την ίδια μέγιστη συχνότητα με το

$$x(t) = \mathrm{sinc}^3(-2t) = \mathrm{sinc}(-2t)\mathrm{sinc}(-2t)\mathrm{sinc}(-2t) \tag{63}$$

Επειδή

$$a\mathrm{sinc}(at) \longleftrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right) \tag{64}$$

και η χρονική αντιστροφή δεν παίζει ρόλο (το σήμα στη συχνότητα είναι άρτιο). Έτσι, ζητάμε τη μέγιστη συχνότητα του σήματος

$$x(t) = \mathrm{sinc}^3(2t) = \mathrm{sinc}(2t)\mathrm{sinc}(2t)\mathrm{sinc}(2t) \tag{65}$$

που στο χώρο του Fourier γράφεται ως

$$X(f) = \frac{1}{8}\mathrm{rect}(f/2) * \mathrm{rect}(f/2) * \mathrm{rect}(f/2) \tag{66}$$

Από την ιδιότητα του εύρους της συνέλιξης γνωρίζουμε ότι ένα σήμα που είναι μη μηδενικό στο $[a, b]$ και γίνεται συνέλιξη με ένα άλλο μη μηδενικό στο $[c, d]$, το αποτέλεσμα είναι μη μηδενικό στο $[a+c, b+d]$. Εφαρμόζοντας αυτήν την ιδιότητα δυο φορές στο χώρο του Fourier, έχουμε ότι το $X(f)$ είναι μη μηδενικό στο $[-3, 3]$. Οπότε η μέγιστη συχνότητα είναι $f_{max} = 3$ Hz, και άρα ο ρυθμός Nyquist θα είναι

$$2f_{max} = 2 \times 3 = 6 \text{ Hz} \tag{67}$$

Συνολικές Μονάδες: 120 - Άριστα: 100

Καλή Επιτυχία!