ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Διάρκεια: 3 ώρες

Ρήτρα τελικού: 4.5/10.0

Θέμα 1ο - 25 μονάδες
Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 που αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)} e^{-j\pi} e^{j(2k-1)\pi 10t} \tag{1}$$

(α΄) (**5 μ.**) Βρείτε την περίοδο και τη θεμελιώδη συχνότητά του.

(β΄) (**15 μ.**) Έστω ότι το περιοδικό σήμα περνά μέσα από ένα ιδανικό σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = 20\text{sinc}(10t)\cos(70\pi t) \tag{2}$$

i. (**5 μ.**) Βρείτε πώς συμπεριφέρεται το ιδανικό σύστημα στο χώρο της συχνότητας.

ii. (**10 μ.**) Δείξτε αναλυτικά ότι η έξοδος του συστήματος είναι η

$$y(t) = \frac{16}{7\pi} \cos\Big(2\pi 35t - \pi\Big) \tag{3}$$

(γ΄) (**5 μ.**) Δείξτε ότι το ποσοστό της ισχύος του αρχικού σήματος που περνά στην έξοδο είναι μόλις (!) $\approx 1.6\%$.

Λύση:

(α΄) Από την εξίσωση διαπιστώνουμε ότι $f_0 = 5$ Hz και άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.2$ s.

(β΄) Από γνωστό τυπολόγιο, το σύστημα αυτό αποτελεί ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο με παραμέτρους

$$f_d = 10 \text{ Hz}, \quad f_c = 35 \text{ Hz} \tag{4}$$

Άρα το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο περνά ανέπαφες τις συχνότητες που βρίσκονται στο διάστημα $[-40, -30]$, $[30, 40]$ Hz και αποκόπτει όλες τις άλλες.

Η έξοδος θα αποτελείται από συχνότητες της εισόδου που βρίσκονται στο παραπάνω διάστημα. Οι συχνότητες της εκθετικής σειράς Fourier της εισόδου είναι $f_k = \pm 5, 15, 25, 35, 45$ Hz κ.ο.κ. Άρα μόνο η συχνότητα των ± 35 Hz περνά στην έξοδο. Η συχνότητα αυτή δίνεται για $k = -3, 4$. Οπότε

$$y(t) = \frac{8}{\pi(2\cdot(-3)-1)} e^{-j\pi} e^{j(2\cdot(-3)-1)\pi 10t} + \frac{8}{\pi(2\cdot 4-1)} e^{-j\pi} e^{j(2\cdot 4-1)\pi 10t} = \frac{16}{7\pi}\cos(2\pi 35t - \pi) \tag{5}$$

(γ΄) Από τυπολόγιο, η συνολική ισχύς του σήματος είναι

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^2} = 16 \tag{6}$$

Η ισχύς της εξόδου δίνεται ως

$$P_y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = \left(\frac{8}{7\pi}\right)^2 + \left(\frac{8}{7\pi}\right)^2 = \frac{128}{49\pi^2} \tag{7}$$

Άρα το ποσοστό της ισχύος που περνά στην έξοδο είναι

$$p = \frac{P_y}{P_x} = 0.0165 \text{ ή } 1.6\% \tag{8}$$

Θέμα 2ο - 35 μονάδες

Δίνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) - 4x(t) \tag{9}$$

(α΄) **(7.5 μ.)** Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$.

(β΄) **(5 μ.)** Σχεδιάστε *όλους* τους πόλους και *όλα* τα μηδενικά του συστήματος.

(γ΄) **(12.5 μ.)** Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ που περιγράφει ένα *ευσταθές και αιτιατό* σύστημα δίνεται ως

$$h(t) = \delta(t) - 4e^{-4t}u(t) - e^{-t}u(t) \tag{10}$$

(δ΄) **(10 μ.)** Βρείτε ένα *ευσταθές και αιτιατό* σύστημα $G(s)$ τέτοιο ώστε

$$|G(f)H(f)| = 1 \tag{11}$$

Λύση:

(α΄) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγου στη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = s^2X(s) - 4X(s) \tag{12}$$

$$(s^2 + 5s + 4)Y(s) = (s^2 - 4)X(s) \tag{13}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 5s + 4} \tag{14}$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 5s + 4} \tag{15}$$

$$= \frac{(s-2)(s+2)}{(s+1)(s+4)} \tag{16}$$

(β΄) Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $s_p = -1, -4$ και τα μηδενικά στις θέσεις $s_z = \pm 2$.

(γ΄) Για να είναι ευσταθές και αιτιατό το σύστημα, πρέπει η συνάρτηση μεταφοράς του να έχει πεδίο σύγκλισης ένα ημιεπίπεδο προς τα δεξιά και να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Από όλα τα δυνατά πεδία σύγκλισης

- $\Re\{s\} > -1$
- $\Re\{s\} < -4$

- $-4 < \Re\{s\} < -1$

αυτό που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις είναι το $R_H = \{\Re\{s\} > -1\}$. Άρα

$$H(s) = \frac{(s-2)(s+2)}{(s+1)(s+4)} = 1 - \frac{5s+8}{(s+1)(s+4)} \tag{17}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα έχουμε

$$H(s) = 1 - \frac{5s+8}{(s+1)(s+4)} = 1 - \Big(\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+4}\Big) \tag{18}$$

με

$$A = \frac{5s+8}{s+4}\Big|_{s=-1} = \frac{3}{3} = 1 \tag{19}$$

$$B = \frac{5s+8}{s+1}\Big|_{s=-4} = \frac{-12}{-3} = 4 \tag{20}$$

Οπότε

$$H(s) = 1 - \frac{1}{s+1} - \frac{4}{s+4} \tag{21}$$

και λόγω του πεδίου σύγκλισης, από γνωστά ζεύγη θα έχουμε

$$h(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t) - 4e^{-4t}u(t) \tag{22}$$

(δ΄) Έχουμε

$$|H(f)G(f)| = 1 \Longleftrightarrow |G(f)| = \frac{1}{|H(f)|} \tag{23}$$

Ουσιαστικά θέλουμε ένα σύστημα που να έχει το ίδιο μέτρο με το αντίστροφο σύστημα του $H(f)$ και να είναι ευσταθές και αιτιατό. Αν κατασκευάσουμε το $G(s) = 1/H(s)$ θα έχουμε

$$G(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{\frac{(s-2)(s+2)}{(s+1)(s+4)}} = \frac{(s+1)(s+4)}{(s-2)(s+2)} \tag{24}$$

το οποίο δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό ταυτόχρονα, καθώς κανένα από τα πεδία σύγκλισής του δεν αντιστοιχεί σε δεξιό ημιεπίπεδο το οποίο θα περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Όμως μπορούμε να βρούμε ένα σύστημα που θα έχει

$$|G(f)| = \frac{1}{|H(f)|} \tag{25}$$

και θα είναι ευσταθές και αιτιατό: αυτό δεν είναι άλλο από το σύστημα

$$\frac{1}{H_{min}(f)} \tag{26}$$

για το οποίο ξέρουμε ότι ισχυει

$$\Big|\frac{1}{H(f)}\Big| = \Big|\frac{1}{H_{min}(f)}\Big| \tag{27}$$

Άρα πρεπει να βρούμε το $H_{min}(s)$, το οποίο είναι - κάνοντας διάσπαση σε ελάχιστης φάσης και allpass - το

$$H_{min}(s) = \frac{(s+2)^2}{(s+1)(s+4)} \tag{28}$$

Οπότε τελικά

$$G(s) = \frac{1}{H_{min}(s)} = \frac{1}{\frac{(s+2)^2}{(s+1)(s+4)}} = \frac{(s+1)(s+4)}{(s+2)^2},\ \ \Re\{s\} > -2 \tag{29}$$

Θέμα 3ο - 15 μονάδες

Αν

$$Y(f) = \frac{1}{4}X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f(j2\pi f + 2)} \tag{30}$$

είναι ο μετασχ. Fourier της εξόδου $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος, δείξτε ότι

(α΄) (**10 μ.**) είναι

$$H(f) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{j2\pi f + 2}\Big]\delta(f) + \frac{\Big[\frac{1}{j2\pi f+2}\Big]}{j2\pi f} \tag{31}$$

με $H(f)$ την απόκριση συχνότητας του συστήματος

(β΄) (**5 μ.**) είναι

$$h(t) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}\Big)u(t) \tag{32}$$

με $h(t)$ την κρουστική απόκριση του συστήματος.

<u>Λύση:</u>

(α΄) Έχουμε

$$Y(f) = \frac{1}{4}X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f(j2\pi f + 2)} = \frac{1}{4}X(f)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f(j2\pi f + 2)} \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[X(f)\frac{1}{j2\pi f + 2}\Big]\delta(f) + \frac{X(f)\frac{1}{j2\pi f+2}}{j2\pi f} = \left(\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{j2\pi f + 2}\Big]\delta(f) + \frac{\Big[\frac{1}{j2\pi f+2}\Big]}{j2\pi f}\right)X(f) \tag{34}$$

Άρα

$$H(f) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{j2\pi f + 2}\Big]\delta(f) + \frac{\Big[\frac{1}{j2\pi f+2}\Big]}{j2\pi f} \tag{35}$$

(β΄) Είναι

$$H(f) = \Big(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\Big)\frac{1}{j2\pi f + 2} \longleftrightarrow h(t) = u(t) * e^{-2t}u(t) \tag{36}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{37}$$

$$= \int_{0}^{t} e^{-2\tau}d\tau \tag{38}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2\tau}\Big]_0^t \tag{39}$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-2t} - 1) \tag{40}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}, \ \ t > 0 \tag{41}$$

Πιο συνοπτικά

$$h(t) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}\Big)u(t) \tag{42}$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει και άμεσα από τους πίνακες συνέλιξης, χωρίς πράξεις.

Θέμα 4ο - 20 μονάδες

Η έξοδος $y(t)$ ενός αιτιατού ΓΧΑ συστήματος σχετίζεται με την είσοδό του σύμφωνα με τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)z(t-u)du \right) - x(t) \tag{43}$$

με

$$z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t) \tag{44}$$

(α΄) (**12.5 μ.**) Βρείτε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ του συστήματος.

(β΄) (**7.5 μ.**) Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος δίνεται ως

$$h(t) = \frac{1}{9}e^{-t}u(t) + \frac{17}{9}e^{-10t}u(t) \tag{45}$$

Λύση:

(α΄) Θα είναι

$$\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)z(t-u)du \right) - x(t) \tag{46}$$

$$\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = x(t) * z(t) - x(t) \tag{47}$$

και εφαρμόζοντας την ιδιότητα παραγώγισης θα είναι

$$j2\pi fY(f) + 10Y(f) = X(f)Z(f) - X(f) \tag{48}$$

$$(j2\pi f + 10)Y(f) = (Z(f) - 1)X(f) \tag{49}$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{Z(f) - 1}{j2\pi f + 10} \tag{50}$$

$$H(f) = \frac{\frac{1}{j2\pi f+1} + 3 - 1}{j2\pi f + 10} \tag{51}$$

$$= \frac{\frac{1}{j2\pi f+1} + 2}{j2\pi f + 10} \tag{52}$$

$$= \frac{1}{(j2\pi f + 10)(j2\pi f + 1)} + 2\frac{1}{j2\pi f + 10} \tag{53}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα έχουμε

$$H(f) = -\frac{1}{9}\frac{1}{j2\pi f + 10} + \frac{1}{9}\frac{1}{j2\pi f + 1} + 2\frac{1}{j2\pi f + 10} \tag{54}$$

που δίνει

$$H(f) = \frac{17}{9}\frac{1}{j2\pi f + 10} + \frac{1}{9}\frac{1}{j2\pi f + 1} \longleftrightarrow h(t) = \frac{17}{9}e^{-10t}u(t) + \frac{1}{9}e^{-t}u(t) \tag{55}$$

λόγω αιτιατότητας.

Θέμα 5ο - 15 μονάδες
Ένα σήμα $y(t)$ προέρχεται από συνέλιξη στο χρόνο δυο σημάτων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ για τα οποία ισχύει

$$X_1(f) = 0, \quad |f| > 500 \text{ Hz} \tag{56}$$
$$X_2(f) = 0, \quad |f| > 1000 \text{ Hz} \tag{57}$$

(α΄) **(5 μ.)** Δειγματοληπτούμε το παραπάνω σήμα $y(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας T_s. Βρείτε το εύρος τιμών της T_s για το οποίο εγγυάστε ότι μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το σήμα από τα δείγματά του.

(β΄) **(10 μ.)** Πώς αλλάζει η παραπάνω απάντησή σας αν πριν τη δειγματοληψία πολλαπλασιάσουμε το σήμα $y(t)$ με το σήμα $\cos(2\pi 1000 t)$;

Λύση:

(α΄) Η συνέλιξη των δυο σημάτων μεταφράζεται σε γινόμενο στη συχνότητα, δηλ.

$$Y(f) = X_1(f)X_2(f) = 0, \; |f| > 500 \tag{58}$$

Άρα η μέγιστη συχνότητα του σήματος $y(t)$ είναι η $f_{max} = 500$ Hz. Οπότε εγγυημένα μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το σήμα από τα δείγματά του αν επιλέξουμε $f_s > 2f_{max}$, δηλ. $f_s > 1000$ Hz ή ισοδύναμα $T_s < \frac{1}{1000}$ sec.

(β΄) Το γινόμενο των σημάτων στο χρόνο μεταφράζεται σε συνέλιξη στη συχνότητα, δηλ.

$$Z(f) = Y(f) * F\{\cos(2\pi 1000t)\} = Y(f)\Big(\frac{1}{2}\delta(f-1000)+\frac{1}{2}\delta(f+1000)\Big) = \frac{1}{2}Y(f-1000)+\frac{1}{2}Y(f+1000) \tag{59}$$

Πλέον η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι η $f_{max} = 1500$ Hz. Οπότε αρκεί να επιλέξουμε συχνότητα δειγματοληψίας $f_s > 3000$ Hz ή ισοδύναμα $T_s < \frac{1}{3000}$ sec.