ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ - Ενδεικτικές Λύσεις

Διάρκεια: 3 ώρες

Ρήτρα τελικού: 4.5/10.0

Θέμα 1ο - 20 μονάδες

Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \cos\Big(20\pi(2k-1)t - \frac{\pi}{2}\Big) \tag{1}$$

(α') **(5 μ.)** Υπολογίστε την περίοδό του, T_0.

(β') **(10.0 μ.)** Ένα ιδανικό φίλτρο της μορφής $h(t) = 2f_c \mathrm{sinc}(2f_c t)$ δέχεται ως είσοδο το παραπάνω σήμα. Βρείτε μια συχνότητα f_c αν θέλουμε στην έξοδο να περάσει *όχι παραπάνω* από το 95% της συνολικής ισχύος του σήματος. Δίνεται ότι

$$P_x = 1 \tag{2}$$

(γ') **(5 μ.)** Ποιά είναι η συχνότητα Nyquist και ποιός ο ρυθμός Nyquist για το σήμα εξόδου;

Λύση:

(α') Από την έκφραση του $x(t)$ βρίσκουμε ότι $f_0 = 10$ Hz και άρα $T_0 = 1/f_0 = 1/10 = 0.1$ s.

(β') Το φίλτρο είναι ιδανικό χαμηλοπερατό, άρα θέλουμε να κρατήσει το πολύ το 95% της ισχύος του σήματος. Η ισχύς του σήματος δίνεται από το θεώρημα Parseval ως

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = 1 \tag{3}$$

Θέλουμε να βρούμε το k που δίνει τιμή στην ισχύ όχι μεγαλύτερη από 0.95. Ξέρουμε ότι για την τριγωνομετρική σειρά Fourier ισχύει

$$2|X_k| = \frac{4}{\pi(2k-1)} \Longleftrightarrow |X_k| = \frac{2}{\pi(2k-1)} \tag{4}$$

και άρα

$$|X_k|^2 = \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2} \tag{5}$$

Οπότε

$$P_x = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} |X_k|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|^2 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \tag{6}$$

Δοκιμάζοντας τιμές του k (ή ελέγχοντας το δοσμένο τυπολόγιο) έχουμε ότι

$$P_x(k=4) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{(2k-1)^2} = 0.81057 \times 1.1715 = 0.9496 \tag{7}$$

$$P_x(k=5) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{(2k-1)^2} = 0.81057 \times 1.1839 = 0.9596 \tag{8}$$

Άρα για $k = 4$ έχουμε ισχύ ίση με $P_x(k = 4) = 0.9496$ ενώ για $k = 5$, η ισχύς υπερβαίνει το ζητούμενο φράγμα του 0.95. Άρα η συχνότητα f_c που ζητείται πρέπει να είναι

$$(2 \times 4 - 1)f_0 < f_c < (2 \times 5 - 1)f_0 \Longleftrightarrow 70 < f_c < 90 \tag{9}$$

έτσι ώστε να μένουν στην έξοδο του φίλτρου μόνο οι 4 πρώτες (και οι αντίστοιχες αρνητικές) φασματικές συνιστώσες του σήματος $x(t)$. Μια επιλογή του f_c λοιπόν είναι $f_c = 80$ Hz.

(γ΄) Η συχνότητα Nyquist είναι $f_{max} = 7f_0 = 70$ Hz και ο ρυθμός Nyquist είναι $2f_{max} = 2 \times 70 = 140$ Hz.

Θέμα 2ο - 20 μονάδες

Δίνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t) \tag{10}$$

(α΄) **(7.5 μ.)** Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$.

(β΄) **(2.5 μ.)** Σχεδιάστε *όλους* τους πόλους και *όλα* τα μηδενικά του συστήματος.

(γ΄) **(10.0 μ.)** Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ που περιγράφει ένα *ευσταθές και αιτιατό* σύστημα.

Λύση:

(α΄) Από ιδιότητες του μετασχ. Laplace έχουμε

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t) \longleftrightarrow s^2Y(s) + 5Y(s) + 4Y(s) = sX(s) - 2X(s) \tag{11}$$

Οπότε

$$(s^2 + 5s + 4)Y(s) = (s - 2)X(s) \tag{12}$$

$$H(s) = \frac{s - 2}{s^2 + 5s + 4} \tag{13}$$

$$= \frac{s - 2}{(s + 4)(s + 1)} \tag{14}$$

με πιθανά πεδία σύγκλισης (προαιρετικό)

- $\Re\{s\} > -1$
- $\Re\{s\} < -4$
- $-4 < \Re\{s\} < -1$

(β΄) Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $s = -4$, $s = -1$ και τα μηδενικά στις θέσεις $s = 2$ και $s = \infty$.

(γ΄) Για να είναι ευσταθές και αιτιατό, πρέπει το πεδίο σύγκλισης να είναι το $\Re\{s\} > -1$, αφού είναι δεξιόπλευρο και περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Άρα

$$H(s) = \frac{s - 2}{(s + 4)(s + 1)} = \frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s + 1} \tag{15}$$

με

$$A = \frac{s-2}{s+1}\Big]_{s=-4} = \frac{-6}{-3} = 2 \tag{16}$$

$$B = \frac{s-2}{s+4}\Big]_{s=-1} = \frac{-3}{3} = -1 \tag{17}$$

οπότε

$$H(s) = \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+1} \longleftrightarrow h(t) = 2e^{-4t}u(t) - e^{-t}u(t) \tag{18}$$

Θέμα 3ο - 20 μονάδες

Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$ ως

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2}, & |f| < 1 \\ 0, & |f| > 1 \end{cases} \tag{19}$$

Έστω το σήμα

$$y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \tag{20}$$

Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{8}{5} \tag{21}$$

Λύση:

Ζητείται να δείξουμε ότι η ενέργεια του $y(t)$ ισούται με $8/5$. Γνωρίζουμε από το θεώρημα του Parseval ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df \tag{22}$$

Από ιδιότητες του Μετασχ. Fourier έχουμε

$$Y(f) = (j2\pi f)^2 X(f) = -4\pi^2 f^2 X(f) = \begin{cases} -4\pi^2 f^2 \frac{1}{2\pi^2}, & |f| < 1 \\ 0, & |f| > 1 \end{cases} = \begin{cases} -2f^2, & |f| < 1 \\ 0, & |f| > 1 \end{cases} \tag{23}$$

Άρα

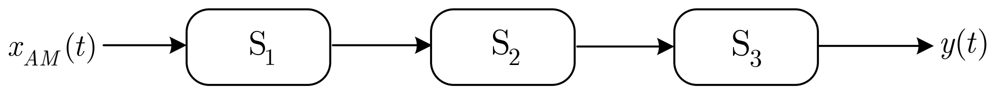
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-1}^{1} |-2f^2|^2 df = 4\int_{-1}^{1} f^4 df = \frac{4}{5} f^5\Big]_{-1}^{1} = \frac{8}{5} \tag{24}$$

Θέμα 4ο - 20 μονάδες

Ένας από τους πρώτους τρόπους αποδιαμόρφωσης σημάτων διαμόρφωσης πλάτους (AM) στις τηλεπικοινωνίες φαίνεται στο Σχήμα 1. Θεωρήστε πως η είσοδος δίνεται ως

$$x_{AM}(t) = (A + m(t))\cos(2\pi f_c t) \tag{25}$$

με $m(t)$ το επιθυμητό σήμα που θέλουμε να ανακτήσουμε (σήμα πληροφορίας) και $f_c \gg f_{max}^{m(t)}$.



Σχήμα 1: *Αποδιαμορφωτής Συνήθους Διαμόρφωσης Πλάτους.*

Τα συστήματα S_i, $i = 1, 2, 3$ δίνονται ως εξής: το σύστημα S_1 υψώνει στο τετράγωνο την είσοδό του, το σύστημα S_2 αποτελεί ένα χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής f_c, και το σύστημα S_3 αποκόπτει όποια σταθερά σήματα υπάρχουν στο σήμα εισόδου του.

(α΄) **(12.5 μ.)** Υπολογίστε την έξοδο από κάθε σύστημα.

(β΄) **(7.5 μ.)** Δείξτε ότι αν η ποσότητα $\left(\frac{m(t)}{A}\right)^2$ είναι αμελητέα, τότε η έξοδος είναι μια καλή προσέγγιση του σήματος πληροφορίας $m(t)$, δηλ. ότι

$$y(t) \approx Am(t) \tag{26}$$

Λύση:

(α΄) Έστω $y_1(t)$ και $y_2(t)$ οι επιμέρους έξοδοι από τα συστήματα S_1 και S_2. Θα είναι

$$y_1(t) = x_{AM}^2(t) = \Big[(A + m(t))\cos(2\pi f_c t)\Big]^2 = (A + m(t))^2 \cos^2(2\pi f_c t) \tag{27}$$

$$= (A + 2Am(t) + m^2(t))\frac{1 + \cos(2\pi 2 f_c t)}{2} \tag{28}$$

$$= \frac{1}{2}(A + 2Am(t) + m^2(t)) + \frac{1}{2}(A + 2Am(t) + m^2(t))\cos(2\pi 2 f_c t) \tag{29}$$

και

$$y_2(t) = y_1(t) * h_{LP}(t) \longleftrightarrow Y_2(f) = Y_1(f)H_{LP}(f) \tag{30}$$

Είναι

$$Y_1(f) = \frac{1}{2}(A\delta(f) + 2AM(f) + M(f) * M(f)) + \tag{31}$$

$$+ \frac{1}{2}(A\delta(f) + 2AM(f) + M(f) * M(f)) * \left(\frac{1}{2}\delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + 2f_c)\right) \tag{32}$$

$$= \frac{1}{2}(A\delta(f) + 2AM(f) + M(f) * M(f)) + \tag{33}$$

$$+ \frac{1}{4}(A\delta(f - 2f_c) + 2AM(f - 2f_c) + M(f - 2f_c) * M(f - 2f_c)) + \tag{34}$$

$$+ \frac{1}{4}(A\delta(f + 2f_c) + 2AM(f + 2f_c) + M(f + 2f_c) * M(f + 2f_c))) \tag{35}$$

Το χαμηλοπερατό φίλτρο έχει συχνότητα αποκοπής f_c και αφού $f_c \gg f_{max}^{m(t)}$, όλες οι συνιστώσες γύρω από τη συχνότητα $\pm 2f_c$ (με κόκκινο) αποκόπτονται από την έξοδο του δεύτερου συστήματος. Άρα

$$Y_2(f) = \frac{1}{2}(A\delta(f) + 2AM(f) + M(f) * M(f)) \longleftrightarrow y_2(t) = \frac{1}{2}(A + 2Am(t) + m^2(t)) \tag{36}$$

Τέλος, το τελευταίο σύστημα αποκόπτει τις σταθερές της εισόδου του, άρα

$$y(t) = \frac{1}{2}(2Am(t) + m^2(t)) \tag{37}$$

(β') Η $y(t)$ γράφεται ως

$$y(t) = Am(t) + \frac{1}{2}m^2(t) = Am(t) + \frac{A^2}{2}\frac{m^2(t)}{A^2} = Am(t) + \frac{A^2}{2}\Big(\frac{m(t)}{A}\Big)^2 \approx Am(t) \tag{38}$$

δεδομένου ότι ο δεύτερος όρος είναι αμελητέος.

Θέμα 5ο - 20 μονάδες

Έστω ότι σας δίνεται η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

$$\Phi_h(f) = \frac{(2\pi f)^2 + 100}{(2\pi f)^2 + 25} \tag{39}$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση *δυο αιτιατών και ευσταθών* ΓΧΑ συστημάτων $h_1(t)$, $h_2(t)$, με ρητή απόκριση συχνότητας, των οποίων η αυτοσυσχέτιση έχει την παραπάνω Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας. Ποιό σύστημα από τα δυο έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα;

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι για τις φασματικές πυκνότητες ενέργειας έχουμε

$$\Phi_h(f) = |H(f)|^2 = H(f)H^*(f) = H(f)H(-f) = H(s)H(-s)\Big]_{s=j2\pi f} = |H(s)|^2\Big]_{s=j2\pi f} \tag{40}$$

Άρα

$$|H(s)|^2 = \frac{(s/j)^2 + 100}{(s/j)^2 + 25} = \frac{-s^2 + 100}{-s^2 + 25} = \frac{(10 - s)}{(5 + s)}\frac{(10 + s)}{(5 - s)} \tag{41}$$

Έχουμε συνολικά 4 πόλους και μηδενικά. Αν ένας πόλος/μηδενικό s_1 ανήκει στην $H(s)$, τότε ο $-s_1$ ανήκει υποχρεωτικά στην $H(-s)$. Άρα θα έχουν η καθεμία έναν πόλο κι ένα μηδενικό. Για να είναι το $H(s)$ ευσταθές και αιτιατό, θα πρέπει να έχει τον πόλο στο αριστερό ημιεπίπεδο, και το μηδενικό οπουδήποτε:

$$H(s) = \frac{10 \pm s}{5 + s} \tag{42}$$

και άρα

$$H(f) = \frac{10 \pm j2\pi f}{5 + j2\pi f} \tag{43}$$

Οπότε τα δυο συστήματα που είναι ευσταθή και αιτιατά είναι

$$H_1(f) = \frac{10 + j2\pi f}{5 + j2\pi f} \tag{44}$$

$$H_2(f) = \frac{10 - j2\pi f}{5 + j2\pi f} \tag{45}$$

με κρουστικές αποκρίσεις (από τους Πίνακες ζευγών μετ. Fourier)

$$h_1(t) = F^{-1}\Big\{j2\pi f\frac{1}{j2\pi f + 5} + \frac{10}{j2\pi f + 5}\Big\} = \frac{d}{dt}e^{-5t}u(t) + 10e^{-5t}u(t) \tag{46}$$

$$= \delta(t) + 5e^{-5t}u(t) \tag{47}$$

$$h_2(t) = F^{-1}\Big\{-j2\pi f\frac{1}{j2\pi f + 5} + \frac{10}{j2\pi f + 5}\Big\} = -\frac{d}{dt}e^{-5t}u(t) + 10e^{-5t}u(t) \tag{48}$$

$$= -\delta(t) + 15e^{-5t}u(t) \tag{49}$$

Για να υπάρχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα πρέπει να έχουμε όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, να είναι δηλ. σύστημα ελάχιστης φάσης. Έχουμε

$$H_1(s) = \frac{10+s}{5+s}, \ \Re\{s\} > -5 \tag{50}$$

$$H_2(s) = \frac{10-s}{5+s}, \ \Re\{s\} > -5 \tag{51}$$

Το $H_1(s)$ είναι το μόνο σύστημα που έχει πόλους και μηδενικά στο αριστερό ημιεπίπεδο, είναι δηλ. ελάχιστης φάσης, οπότε έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα, το οποίο (προαιρετικά, δε ζητείται στην άσκηση) είναι το

$$H_{1,inv}(s) = \frac{1}{H_1(s)} = \frac{s+5}{s+10}, \ \Re\{s\} > -10 \tag{52}$$

και στο χώρο του Fourier είναι

$$H_{1,inv}(f) = \frac{j2\pi f + 5}{j2\pi f + 10} \tag{53}$$

Συνολικές Μονάδες: 100 - Άριστα: 100

Καλή Επιτυχία!