ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Διάρκεια: 3 ώρες

Ρήτρα τελικού: 4.0/10.0

Θέμα 1ο - Περιοδικά Σήματα - 20 μονάδες
Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 4\cos(2\pi 600 t - \pi/3) + 2\cos(2\pi 900 t + \pi/8) + \cos(2\pi 1200 t) \tag{1}$$

(α΄) **(2.5 μ.)** Υπολογίστε την περίοδό του, T_0.

(β΄) **(15 μ.)** Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος.

(γ΄) **(2.5 μ.)** Ένα ιδανικό φίλτρο της μορφής $h(t) = 400\cos(2\pi 900 t)\mathrm{sinc}(200t)$ δέχεται ως είσοδο το παραπάνω σήμα. Βρείτε τη μαθηματική μορφή της εξόδου, $y(t)$.

Λύση:

(α΄) Η θεμελιώδης συχνότητα δίνεται από τη σχέση

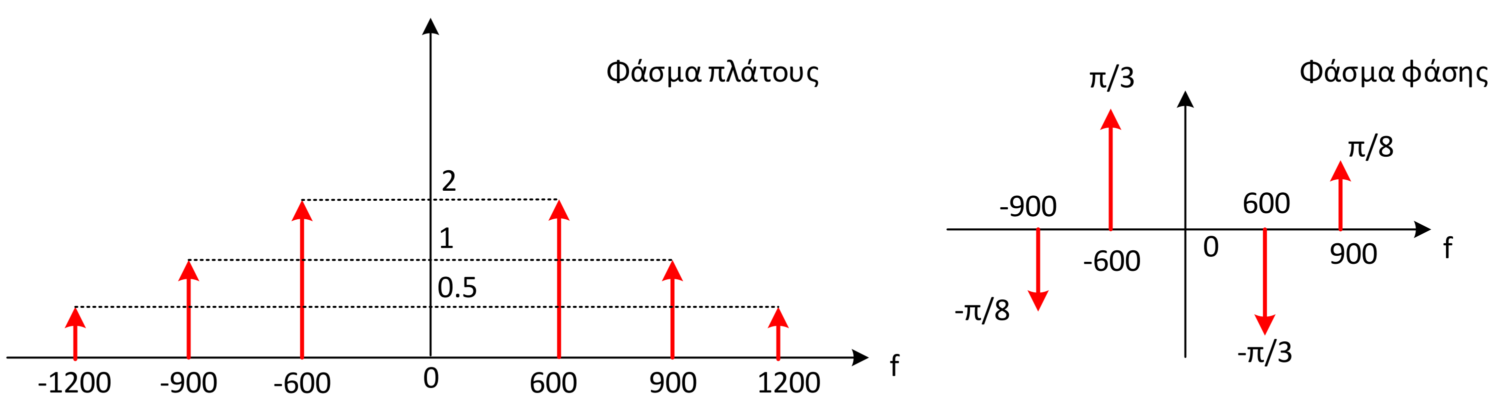
$$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ.}\{600, 900, 1200\} = 300 \text{ Hz} \tag{2}$$

Άρα η περίοδός του είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{300}$ s.

(β΄) Έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= 4\cos(2\pi 600 t - \pi/3) + 2\cos(2\pi 900 t + \pi/8) + \cos(2\pi 1200 t) && (3)\\ &= 2e^{j2\pi 600 t}e^{-j\pi/3} + 2e^{-j2\pi 600 t}e^{j\pi/3} + e^{j2\pi 900 t}e^{j\pi/8} + e^{-j2\pi 900 t}e^{-j\pi/8} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 1200 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 1200 t} && (4) \end{aligned}$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Φάσμα πλάτους και φάσης σήματος $x(t)$.

(γ΄) Το φίλτρο αυτό είναι ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο, με $f_d = f_{c_2} - f_{c_1} = 200$ και $f_c = \frac{f_{c_1}+f_{c_2}}{2} = 900$, οπότε η απόκριση σε συχνότητα θα είναι

$$H(f) = \begin{cases} 1, & 800 < f < 1000 \\ 1, & -1000 < f < -800 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{5}$$

Άρα η έξοδος του φίλτρου είναι

$$y(t) = 2\cos(2\pi 900 t + \pi/8) \tag{6}$$

Ακόμα κι αν δεν μπορέσατε να το "ταυτοποιήσετε" από τις σημειώσεις σας, μπορείτε να το δείξετε ρητά:

$$\begin{align} H(f) &= \mathrm{F}\{400\cos(2\pi 900 t)\mathrm{sinc}(200t)\} \tag{7}\\ &= \Big(\frac{1}{2}\delta(f-900) + \frac{1}{2}\delta(f+900)\Big) * 2\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{200}\Big) \tag{8}\\ &= \mathrm{rect}\Big(\frac{f-900}{200}\Big) + \mathrm{rect}\Big(\frac{f+900}{200}\Big) \tag{9} \end{align}$$

που είναι ένα ζωνοπερατό φίλτρο γύρω από τη συχνότητα $f = 900$ Hz, με συχνότητες αποκοπής $f_{c_1} = 800$ Hz και $f_{c_2} = 1000$ Hz.

Θέμα 2ο - Διαφορικές Εξισώσεις - 25 μονάδες

Δίνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) \tag{10}$$

(α΄) (**10 μ.**) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$.

(β΄) (**12.5 μ.**) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

(γ΄) (**2.5 μ.**) Μπορείτε να βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(f)$ του συστήματος μέσω της συνάρτησης μεταφοράς; Αν ναι, βρείτε τη. Αν όχι, αιτιολογήστε.

Λύση:

(α΄) Εφαρμοζοντας μετασχ. Laplace στη διαφορική εξίσωση, έχουμε

$$\begin{align} \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) &= 2\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) \tag{11}\\ s^2Y(s) - 6sY(s) + 8Y(s) &= 2sX(s) + 3X(s) \tag{12}\\ H(s) &= \frac{2s+3}{s^2-6s+8} \tag{13} \end{align}$$

με πόλους στις θέσεις $s = 2$, $s = 4$. Άρα το πεδίο σύγκλισης είναι $\{\Re\{s\} > 4\}$.

(β΄) Είναι

$$\begin{align} H(s) &= \frac{2s+3}{s^2-6s+8} \tag{14}\\ &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-4} \tag{15} \end{align}$$

με

$$A = \frac{2s+3}{s-4}\Big|_{s=2} = -\frac{7}{2} \tag{16}$$

$$B = \frac{2s+3}{s-2}\Big|_{s=4} = \frac{11}{2} \tag{17}$$

Οπότε

$$H(s) = -\frac{7}{2}\frac{1}{s-2} + \frac{11}{2}\frac{1}{s-4} \tag{18}$$

και έτσι, αφού η διαφορική εξίσωση περιγράφει ένα αιτιατό σύστημα

$$h(t) = -\frac{7}{2}e^{2t}u(t) + \frac{11}{2}e^{4t}u(t) \tag{19}$$

(γ΄) Όχι, δεν μπορούμε να βρούμε το μετασχ. Fourier απ'το μετασχ. Laplace γιατί το πεδίο σύγκλισης δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

Θέμα 3ο - Μετασχηματισμός Fourier - 35 μονάδες

(α΄) **(5 μ.)** Ως γνωστόν, η φάση $\angle X(f)$ ενός μετασχηματισμού Fourier $X(f)$ δίνεται ως

$$\angle X(f) = \tan^{-1}\frac{X_I(f)}{X_R(f)} \tag{20}$$

με $X_R(f)$, $X_I(f)$ το πραγματικό και φανταστικό μέρος του $X(f)$. Δείξτε ότι για $X(f) = a - e^{j\theta(f)}$, με $a \in \mathrm{R}$, ισχύει

$$\angle X(f) = -\tan^{-1}\frac{\sin(\theta(f))}{a - \cos(\theta(f))} \tag{21}$$

(β΄) **(10 μ.)** Βρείτε το μέτρο $|H(f)|$ και τη φάση $\angle H(f)$ του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την απόκριση σε συχνότητα

$$H(f) = e^{j2\pi f}\frac{2 - e^{j2\pi f}}{2 - e^{-j2\pi f}} \tag{22}$$

(γ΄) **(20 μ.)** Η *καθυστέρηση ομάδας* $\tau(f)$ είναι μια συχνά χρησιμοποιούμενη μετρική στην επεξεργασία σήματος για την ανάλυση της επίδρασης φάσης ενός συστήματος. Ο ορισμός της καθυστέρησης ομάδας δίνεται ως

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}\angle H(f) \tag{23}$$

Δείξτε ότι η καθυστέρηση ομάδας του παραπάνω συστήματος είναι

$$\tau(f) = \frac{8\cos(2\pi f) - 7}{5 - 4\cos(2\pi f)} \tag{24}$$

Λύση:

(α΄) Είναι

$$X(f) = a - e^{j\theta(f)} = a - \cos(\theta(f)) - j\sin(\theta(f)) \tag{25}$$

$$= (a - \cos(\theta(f)) - j\sin(\theta(f)) \tag{26}$$

οπότε

$$\angle X(f) = \tan^{-1}\frac{X_I(f)}{X_R(f)} = \tan^{-1}\frac{-\sin(\theta(f))}{a - \cos(\theta(f))} = -\tan^{-1}\frac{\sin(\theta(f))}{a - \cos(\theta(f))} \tag{27}$$

(β') Για το μέτρο,

$$|H(f)| = |e^{j2\pi f}| \frac{|2 - e^{j2\pi f}|}{|2 - e^{-j2\pi f}|} = 1 \cdot 1 = 1 \tag{28}$$

αφού $|Z(f)|/|Z^*(f)| = 1$. Για τη φάση,

$$\angle H(f) = \angle e^{j2\pi f} + \angle \frac{2 - e^{j2\pi f}}{2 - e^{-j2\pi f}} = \angle e^{j2\pi f} + \angle(2 - e^{j2\pi f}) + \angle \frac{1}{2 - e^{-j2\pi f}} \tag{29}$$

Αν $Z(f) = 2 - e^{j2\pi f} = |Z(f)|e^{j\phi(f)}$, τότε

$$\frac{1}{Z^*(f)} = \frac{1}{2 - e^{-j2\pi f}} = \frac{1}{|Z(f)|e^{-j\phi(f)}} = \frac{1}{|Z(f)|} e^{j\phi(f)} \tag{30}$$

οπότε

$$\angle H(f) = \angle e^{j2\pi f} + \angle(2 - e^{j2\pi f}) + \angle(2 - e^{j2\pi f}) \tag{31}$$

και άρα, από το προηγούμενο ερώτημα

$$\begin{aligned}
\angle H(f) &= \angle e^{j2\pi f} + \angle(2 - e^{j2\pi f}) + \angle(2 - e^{j2\pi f}) && (32)\\
&= 2\pi f - \tan^{-1} \frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)} - \tan^{-1} \frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)} && (33)\\
&= 2\pi f - 2\tan^{-1} \frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)} && (34)
\end{aligned}$$

(γ') Είναι

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}\angle H(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}\Big(2\pi f - 2\tan^{-1}\frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)}\Big) && (35)\\
&= -1 + \frac{1}{2\pi} 2 \frac{d}{df}\Big(\tan^{-1}\frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)}\Big) && (36)\\
&= -1 + \frac{2}{2\pi}\Big(\frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)}\Big)' \frac{1}{1 + \Big(\frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)}\Big)^2} && (37)\\
&= -1 + \frac{2}{2\pi}\frac{\sin(2\pi f)'(2 - \cos(2\pi f)) - (2 - \cos(2\pi f)' \sin(2\pi f)}{(2 - \cos(2\pi f))^2} \frac{1}{1 + \Big(\frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)}\Big)^2} && (38)\\
&= -1 + \frac{2}{2\pi}\frac{2\pi\cos(2\pi f)(2 - \cos(2\pi f)) - 2\pi\sin(2\pi f)\sin(2\pi f)}{(2 - \cos(2\pi f))^2} \frac{1}{1 + \Big(\frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)}\Big)^2} && (39)\\
&= -1 + 2\frac{\cos(2\pi f)(2 - \cos(2\pi f)) - \sin(2\pi f)\sin(2\pi f)}{(2 - \cos(2\pi f))^2} \frac{1}{1 + \Big(\frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)}\Big)^2} && (40)\\
&= -1 + 2\frac{2\cos(2\pi f) - \cos^2(2\pi f) - \sin^2(2\pi f)}{(2 - \cos(2\pi f))^2} \frac{1}{1 + \Big(\frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)}\Big)^2} && (41)\\
&= -1 + \frac{4\cos(2\pi f) - 2}{(2 - \cos(2\pi f))^2} \frac{1}{1 + \Big(\frac{\sin(2\pi f)}{2 - \cos(2\pi f)}\Big)^2} && (42)\\
&= -1 + \frac{4\cos(2\pi f) - 2}{(2 - \cos(2\pi f))^2 + \sin^2(2\pi f)} && (43)
\end{aligned}$$

$$= -1 + \frac{4\cos(2\pi f) - 2}{4 - 4\cos(2\pi f) + \cos^2(2\pi f) + \sin^2(2\pi f)} \tag{44}$$

$$= -1 + \frac{4\cos(2\pi f) - 2}{5 - 4\cos(2\pi f)} \tag{45}$$

$$= \frac{4\cos(2\pi f) - 2}{5 - 4\cos(2\pi f)} - \frac{5 - 4\cos(2\pi f)}{5 - 4\cos(2\pi f)} \tag{46}$$

$$= \frac{8\cos(2\pi f) - 7}{5 - 4\cos(2\pi f)} \tag{47}$$

Θέμα 4ο - ΓΧΑ Συστήματα - 20 μονάδες

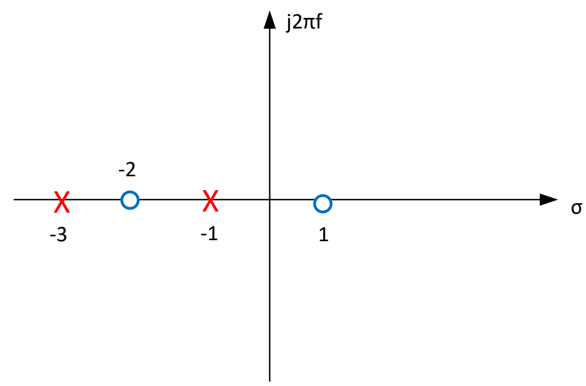
Έστω το διάγραμμα πόλων-μηδενικών που φαίνεται στο Σχήμα 2 για μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$.

(α') **(2.5 μ.)** Ποιά είναι τα δυνατά πεδία σύγκλισης;

(β') **(5 μ.)** Γράψτε μια πιθανή μαθηματική μορφή για τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$.

(γ') **(2.5 μ.)** Υπάρχει ευσταθές και αιτιατό σύστημα που να έχει αυτό το διάγραμμα πόλων-μηδενικών; Αιτιολογήστε.

(δ') **(10 μ.)** Το *αντίστροφο σύστημα* $H_i(s)$ ενός συστήματος $H(s)$ ικανοποιεί τη σχέση $H_i(s)H(s) = 1,\ \ R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$. Υπάρχει *ευσταθές και αιτιατό* αντίστροφο σύστημα για το σύστημα που έχει το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 2;



Σχήμα 2: Σχήμα Θέματος 4.

Λύση:

(α') Τα δυνατά πεδία σύγκλισης είναι τρία:

- $\Re\{s\} > -1$
- $\Re\{s\} < -3$
- $-3 < \Re\{s\} < -1$

(β') Μια πιθανή μαθηματική μορφή για την $H(s)$ είναι η

$$H(s) = \frac{(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+1)} \tag{48}$$

(γ') Ναι, υπάρχει ευσταθές και αιτιατό σύστημα που να έχει το διάγραμμα αυτό, και είναι το σύστημα με πεδίο σύγκλισης $\Re\{s\} > -1$, αφού είναι δεξιόπλευρο και περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

(δ') Το αντίστροφο σύστημα θα είναι της μορφής

$$H_i(s) = \frac{(s+3)(s+1)}{(s+2)(s-1)} \tag{49}$$

άρα θα έχει έναν πόλο στη θέση $s = -2$ και έναν πόλο στη θέση $s = 1$. Για να είναι ευσταθές, θα πρέπει να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, άρα το πεδίο σύγκλισης $-2 < \Re\{s\} < 1$ είναι υποψήφιο. Όμως ένα τέτοιο πεδίο σύγκλισης αντιστοιχεί σε αμφίπλευρο σήμα στο χρόνο, δηλ. μη αιτιατό. Άρα δεν υπάρχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα για το σύστημα με το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 2.

Θέμα 5ο - Δειγματοληψία - 10 μονάδες

(α΄) **(2 μ.)** Έστω το σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t), \quad -\infty < t < +\infty \tag{50}$$

Επαληθεύστε ή διαψεύστε την πρόταση: *"Ο ρυθμός Nyquist για το παραπάνω σήμα είναι f_0."* Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(β΄) **(4 μ.)** Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t), & -T < t < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{51}$$

Επαληθεύστε ή διαψεύστε την πρόταση: *"Η μοναδική συχνότητα που υπάρχει στο σήμα είναι η $f = f_0$. Άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $2f_0$."* Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(γ΄) **(4 μ.)** Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους του σήματος του β) ερωτήματος και προτείνετε μια "καλή" συχνότητα δειγματοληψίας. Δικαιολογήστε την επιλογή σας.

Λύση:

(α΄) Ο ρυθμός Nyquist είναι διπλάσιος της μέγιστης συχνότητας που υπάρχει στο σήμα. Το σήμα $x(t)$ είναι ένα συνημίτονο άπειρης διάρκειας με μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \tag{52}$$

και έχει μοναδική συχνότητα την f_0, άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $2f_{max} = 2f_0$, οπότε η πρόταση είναι λανθασμένη.

(β΄) Το σήμα $x(t)$ γράφεται ως

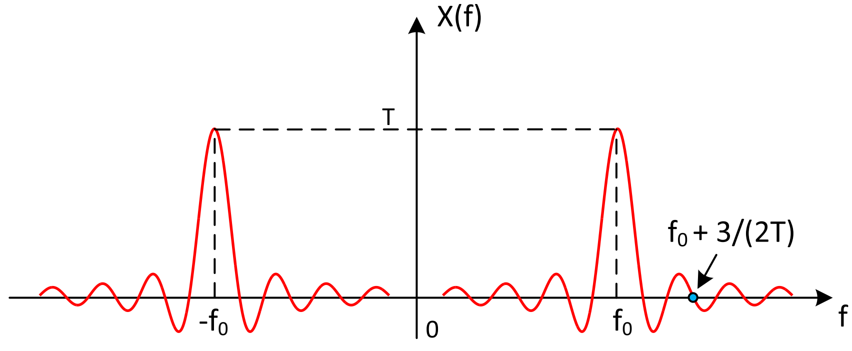
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \tag{53}$$

και έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = \left(\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)\right) * 2T\mathrm{sinc}(2Tf) = T\mathrm{sinc}(2T(f - f_0)) + T\mathrm{sinc}(2T(f + f_0)) \tag{54}$$

Προφανώς, λόγω των συναρτήσεων sinc, η μοναδική συχνότητα που υπάρχει δεν είναι η $f = f_0$. Άρα η πρόταση είναι λανθασμένη.

(γ΄) Το φάσμα του παραπάνω σήματος φαίνεται στο Σχήμα 3. Μια καλή πιθανή επιλογή ως μέγιστη συχνότητα



Σχήμα 3: Φάσμα σήματος $x(t)$.

του σήματος είναι το σημείο του τρίτου μηδενισμού, δηλ. $f_{max} = f_0 + \frac{3}{2T}$, θεωρώντας ότι το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος από εκεί και έπειτα δεν είναι σημαντικό. Οπότε η συχνότητα δειγματοληψίας θα είναι η $f_s = 2(f_0 + \frac{3}{2T_0}) = 2f_0 + \frac{3}{T}$. Οποιαδήποτε παρόμοια απάντηση που βασίζεται σε μια καλή θεώρηση του εύρους της σημαντικής πληροφορίας είναι αποδεκτή (όπως για παράδειγμα, $f_{max} = f_0 + \frac{1}{2T}$, $f_0 + \frac{2}{2T}$, κλπ., αλλά όχι κάποια συχνότητα μικρότερη της f_0 ή μικρότερη του πρώτου μηδενισμού).