ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Ρήτρα εξέτασης: 4.5/10.0

- **Διαθέσιμες μονάδες: 110 - Αριστα: 100**
- **Αιτιολογήστε ΠΛΗΡΩΣ όσα γράφετε. Απαντήσεις χωρίς δικαιολόγηση δε βαθμολογούνται.**

Θέμα 1ο - 25 μονάδες: overview
(**5 μ.** έκαστο) Σωστό ή Λαθος; **Δικαιολογήστε επαρκώς - απάντηση χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογείται**.

(i.) Αν $\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$ τότε $\frac{d}{dt}(u(t) - u(t-1)) = \delta(t) + \delta(t-1)$.

(ii.) Για το σήμα $x(t) = \cos\left(2\pi 100t + \frac{5\pi}{12}\right) + 2\cos\left(2\pi 500t + \frac{4\pi}{11}\right)$ ισχύει $|\sphericalangle X_k| < \pi/2,\ \forall k \in \mathbb{Z}$, με X_k τους συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος και $\sphericalangle X_k$ τη φάση τους.

(iii.) Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \dfrac{s-1}{s+1},\ \sigma > -1$ περιγράφει ένα σύστημα με μοναδιαία απόκριση πλάτους.

(iv.) Η συχνότητα Nyquist για το σήμα $x(t) = \cos(2\pi 100t) + \sin\left(2\pi 500t - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(1200\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$ είναι ίση με 1200 Hz.

(v.) Για ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ που έχει μοναδικούς πόλους στο $s = 1 - 2j$, στο $s = -1$, και στο $s = 1 + 2j$, υπάρχουν ακριβώς τρια (3) πιθανά πεδία σύγκλισης.

<u>Λύση:</u>

i. Λάθος. Είναι $\frac{d}{dt}(u(t) - u(t-1)) = \delta(t) - \delta(t-1)$

ii. Σωστο. Με χρήση τριγωνομετρίας ή/και σχέσεων Euler καταλήγουμε ότι $\sphericalangle X_1 = 5\pi/12$, $\sphericalangle X_{-1} = -5\pi/12$ και $\sphericalangle X_5 = 4\pi/11$, $\sphericalangle X_{-5} = -4\pi/11$. Προφανώς οι απόλυτες τιμές είναι μικρότερες του $\pi/2$.

iii. Σωστό. Ισχύει $|H(f)| = |H(s)|_{s=j2\pi f} = \left|\frac{j2\pi f - 1}{j2\pi f + 1}\right| = \frac{\sqrt{(2\pi f)^2 + (-1)^2}}{\sqrt{(2\pi f)^2 + 1^2}} = 1$,

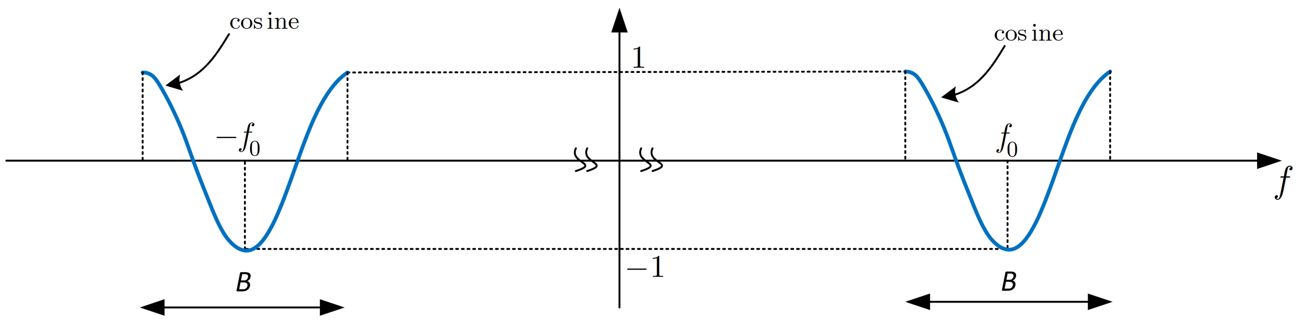
iv. Λάθος. Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι η 600 Hz.

v. Σωστό. Οι δυο πόλοι είναι συζυγείς, άρα βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία $\sigma = 1$. Υπάρχουν τρια πιθανά πεδία σύγκλισης: $\sigma > 1$, $\sigma < -1$, $-1 < \sigma < 1$.

Θέμα 2ο - 30 μονάδες: ο χώρος του μετασχ. Fourier και οι ιδιότητές του
Έστω ο μετασχ. Fourier $Y(f)$ του Σχήματος 1.

(α') (**5 μ.**) Αποδείξτε ότι για ένα οποιοδήποτε ζεύγος $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ ισχύει

$$X(f - f_0) + X(f + f_0) \longleftrightarrow 2\cos(2\pi f_0 t)x(t) \tag{1}$$



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 2.*

(β') (**10 μ.**) Βρείτε τη μαθηματική μορφή του μετασχηματισμού $Y(f)$.

(γ') (**15 μ.**) Βρείτε το σήμα στο χρόνο, $y(t)$.

Λύση:

(α') Από ιδιότητες του μετασχηματισμού ισχύει

$$X(f-f_0)+X(f+f_0) \longleftrightarrow x(t)e^{j2\pi f_0 t}+x(t)e^{-j2\pi f_0 t}=(e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t})x(t)=2\cos(2\pi f_0 t)x(t) \quad (2)$$

(β') Έχουμε από το σχήμα

$$Y(f)=-\cos\left(2\pi\frac{1}{B}(f-f_0)\right)\text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right)-\cos\left(2\pi\frac{1}{B}(f+f_0)\right)\text{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right) \quad (3)$$

(γ') Με βάση τα δυο προηγούμενα ερωτήματα, αν

$$\begin{aligned} Y(f)&=X(f-f_0)+X(f+f_0) && (4)\\ &=-\cos\left(2\pi\frac{1}{B}(f-f_0)\right)\text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right)-\cos\left(2\pi\frac{1}{B}(f+f_0)\right)\text{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right) && (5)\end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} y(t)=2\cos(2\pi f_0 t)x(t)&=2\cos(2\pi f_0 t)\left(-\frac{B}{2}\text{sinc}(Bt-1)-\frac{B}{2}\text{sinc}(Bt+1)\right) && (6)\\ &=-B\left(\text{sinc}(Bt-1)\cos(2\pi f_0 t)+\text{sinc}(Bt+1)\cos(2\pi f_0 t)\right) && (7)\end{aligned}$$

αφού

$$\begin{aligned} x(t)&=F^{-1}\{X(f)\} && (8)\\ &=F^{-1}\left\{-\cos\left(2\pi\frac{1}{B}f\right)\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)\right\} && (9)\\ &=-\left(\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{1}{B}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(t+\frac{1}{B}\right)\right)*B\text{sinc}(Bt) && (10)\\ &=-\frac{B}{2}\text{sinc}(Bt-1)-\frac{B}{2}\text{sinc}(Bt+1) && (11)\end{aligned}$$

Θέμα 3ο - 25 μονάδες: συστήματα στο χώρο του μετασχ. Fourier
Έστω η απόκριση σε συχνότητα ενός ΓΧΑ συστήματος

$$H(f) = \frac{e^{-j2\pi 4f}}{(j2\pi f)^2 + 5j2\pi f + 4} \tag{12}$$

(α΄) (**15 μ.**) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

(β΄) (**10 μ.**) Βρείτε μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το παραπάνω σύστημα.

<u>Λύση:</u>

(α΄) Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως

$$H(f) = e^{-j2\pi 4f} G(f) \tag{13}$$

με

$$G(f) = \frac{1}{(j2\pi f)^2 + 5j2\pi f + 4} \tag{14}$$

Το υποσύστημα $G(f)$ έχει βαθμό πολυωνύμου του $j2\pi f$ στον αριθμητή μικρότερο από τον αντίστοιχο στον παρονομαστή, άρα μπορούμε να αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα. Έτσι

$$G(f) = \frac{A}{1 + j2\pi f} + \frac{B}{4 + j2\pi f} \tag{15}$$

με

$$A = G(f)(1 + j2\pi f)\Big|_{j2\pi f := -1} = \frac{1}{3} \tag{16}$$

$$B = G(f)(4 + j2\pi f)\Big|_{j2\pi f := -4} = -\frac{1}{3} \tag{17}$$

Οπότε εν τέλει

$$G(f) = \frac{1/3}{1 + j2\pi f} - \frac{1/3}{4 + j2\pi f} \tag{18}$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο

$$h(t) = g(t-4) = \frac{1}{3} e^{-(t-4)} u(t-4) - \frac{1}{3} e^{-4(t-4)} u(t-4) \tag{19}$$

(β΄) Έχουμε

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \Longleftrightarrow (j2\pi f)^2 Y(f) + 5(j2\pi f) Y(f) + 4Y(f) = e^{-j2\pi 4f} X(f) \tag{20}$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης επιστρέφουμε στο χρόνο

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5\frac{d}{dt} y(t) + 4y(t) = x(t-4) \tag{21}$$

Θέμα 4ο - 30 μονάδες: συστήματα και μετασχ. Laplace
Έστω το *αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 2.

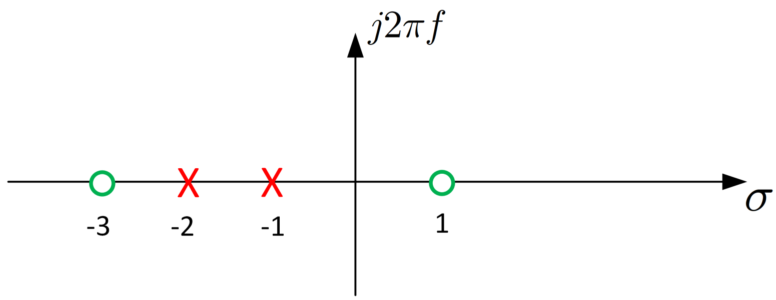
(α΄) (**5 μ.**) Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του συστήματος;

(β΄) **(10 μ.)** Αν γνωρίζετε ότι $H(0) = -1$, βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος.

(γ΄) **(5 μ.)** Μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ από την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς; Αν ναι, βρείτε τη. Αν όχι, γιατί; Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση.

(δ΄) **(5 μ.)** Υπάρχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα, $H_{inv}(s)$, για το παραπάνω σύστημα;

(ε΄) **(5 μ.)** Αν η αιτιατότητα δε μας ενδιαφέρει, υπάρχει ευσταθές αντίστροφο σύστημα, $H_{inv}(s)$, για το παραπάνω σύστημα; Αν ναι, βρείτε το. Αν όχι, εξηγήστε. Σε κάθε περίπτωση, αιτιολογήστε επαρκώς.



Σχήμα 2: *Διάγραμμα πόλων-μηδενικών Θέματος 5.*

<u>Λύση:</u>

(α΄) Το πεδίο σύγκλισης θα είναι υποχρεωτικά το $\sigma > -1$, ως αιτιατό σύστημα (δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης).

(β΄) Θα έχουμε

$$H(s) = A\frac{(s-1)(s+3)}{(s+1)(s+2)} \tag{22}$$

από το διάγραμμα, και επειδή $H(0) = -1$, παίρνουμε $A = 2/3$. Οπότε

$$H(s) = \frac{2}{3}\frac{(s-1)(s+3)}{(s+1)(s+2)}, \ \ \sigma > -1 \tag{23}$$

(γ΄) Ναι, μπορεί να υπολογιστεί γιατί ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, και άρα

$$H(f) = \frac{2}{3}\frac{(-1+j2\pi f)(3+j2\pi f)}{(j2\pi f+1)(j2\pi f+2)} \tag{24}$$

(δ΄) Για να υπάρχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα πρέπει όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωσή μας, άρα δεν υπάρχει τέτοιο σύστημα.

(ε΄) Στο αντίστροφο σύστημα, οι πόλοι γίνονται μηδενικά και τα μηδενικά πόλοι. Άρα θα έχουμε πόλους στο $s = -3$, $s = 1$ και μηδενικά στα $s = -2$, $s = -1$. Τότε υπάρχει ευσταθές αντίστροφο σύστημα, το

$$H_{inv}(s) = \frac{3}{2}\frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s+3)} \tag{25}$$

με πεδίο σύγκλισης $-3 < \sigma < 1$, που περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.