ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Ρήτρα εξέτασης: 4.5/10.0

- **Διαθέσιμες μονάδες: 125 - Αριστα: 100**
- **Αιτιολογήστε ΠΛΗΡΩΣ όσα γράφετε. Απαντήσεις χωρίς δικαιολόγηση δε βαθμολογούνται.**

Θέμα 1ο - 25 μονάδες: overview
(**5 μ.** έκαστο) Σωστό ή Λαθος; **Δικαιολογήστε επαρκώς - απάντηση χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογείται**.

(i.) Το περιοδικό σήμα $x(t)$ με συντελεστές Fourier $X_0 = 1,\ \ X_k = \dfrac{j}{\pi^2 k^2}, \forall k \in \mathrm{Z} - \{0\}$ είναι πραγματικό.

(ii.) Για το σήμα $x(t) = \cos\left(2\pi 100 t + \frac{5\pi}{12}\right) + \sin\left(2\pi 500 t + \frac{7\pi}{11}\right)$ ισχύει $|\sphericalangle X_k| < \pi/2,\ \forall k \in \mathrm{Z}$, με X_k τους συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος και $\sphericalangle X_k$ τη φάση τους.

(iii.) Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \dfrac{e^{2s}}{s+1},\ \sigma > -1$ περιγράφει ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα.

(iv.) Αν $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, με $X(f)$ φάσμα που εκτείνεται σε *όλο* τον άξονα f, τότε το $y(t) = x(t) * \mathrm{sinc}(2Bt)$ έχει συχνότητα Nyquist ίση με $f_{max} = 2B$.

(v.) Για ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ που έχει μοναδικούς πόλους στο $s = j$ και στο $s = -j$, υπάρχουν δυο (2) δυνατά πεδία σύγκλισης.

<u>Λύση:</u>

i. Λάθος. Θα πρέπει να ισχύει $X_k = X^*_{-k}$, και $X^*_{-k} = -\frac{j}{\pi^2(-k)^2} = -\frac{j}{\pi^2 k^2} \neq X_k$.

ii. Σωστο. Με χρήση τριγωνομετρίας ή/και σχέσεων Euler καταλήγουμε ότι $\sphericalangle X_1 = 5\pi/12$, $\sphericalangle X_{-1} = -5\pi/12$ και $\sphericalangle X_5 = 7\pi/11 - \pi/2 = \frac{3\pi}{22}$, $\sphericalangle X_{-5} = -7\pi/11 + \pi/2 = -\frac{3\pi}{22}$. Προφανώς οι απόλυτες τιμές είναι μικρότερες του $\pi/2$.

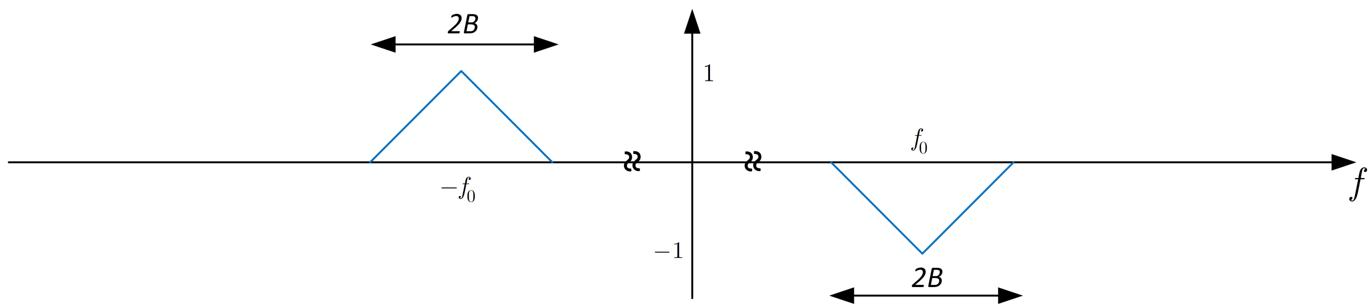
iii. Λάθος. Ισχύει $h(t) = L^{-1}\{1/(s+2)\} * L^{-1}\{e^{2s}\} = e^{-t}u(t) * \delta(t+2) = e^{-(t+2)}u(t+2)$, άρα $h(t) \neq 0, t < 0$, που είναι το κριτήριο αιτιατότητας.

iv. Λάθος. Είναι

$$y(t) = x(t) * \mathrm{sinc}(2Bt) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{2B}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2B}X(f), & f \in (-B, B) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι το $X(f)$ τμηματοποιείται στο διάστημα $(-B, B)$ Hz, και άρα $f_{max} = B$ Hz.

v. Σωστό. Οι πόλοι είναι συζυγείς, άρα βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία $\sigma = 0$. Υπάρχουν δυο πιθανά πεδία σύγκλισης: $\sigma > 0$, $\sigma < 0$.



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 2.*

Θέμα 2ο - 20 μονάδες: ο χώρος του μετασχ. Fourier και οι ιδιότητές του
Έστω ο μετασχ. Fourier $X(f)$ του Σχήματος 1.

(α΄) **(5 μ.)** Υπολογίστε το σήμα στο χρόνο, $x(t) = F^{-1}\{X(f)\}$.

(β΄) **(5 μ.)** Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$.

(γ΄) **(5 μ.)** Σχεδιάστε το σήμα $Y(f) = F\{y(t)\}$ στο χώρο της συχνότητας.

(δ΄) **(5 μ.)** Ποιά είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος $x(t)$ και ποιά του $y(t)$, ώστε να μπορούμε να τα ανακατασκευάσουμε από τα δείγματά τους;

Λύση:

(α΄) Είναι

$$X(f) = -\mathrm{tri}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{f+f_0}{B}\right), \quad \text{με } f_0 \gg 0 \text{ και } 0 < B \ll f_0. \tag{2}$$

Είναι

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = -B\mathrm{sinc}^2(Bt)e^{j2\pi f_0 t} + B\mathrm{sinc}^2(Bt)e^{-j2\pi f_0 t} = -j2B\sin(2\pi f_0 t)\mathrm{sinc}^2(Bt) \tag{3}$$

(β΄) Θα είναι

$$Y(f) = F\{y(t)\} = F\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\} = X(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right) = \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0) \tag{4}$$

και αντικαθιστώντας το $X(f)$ παίρνουμε

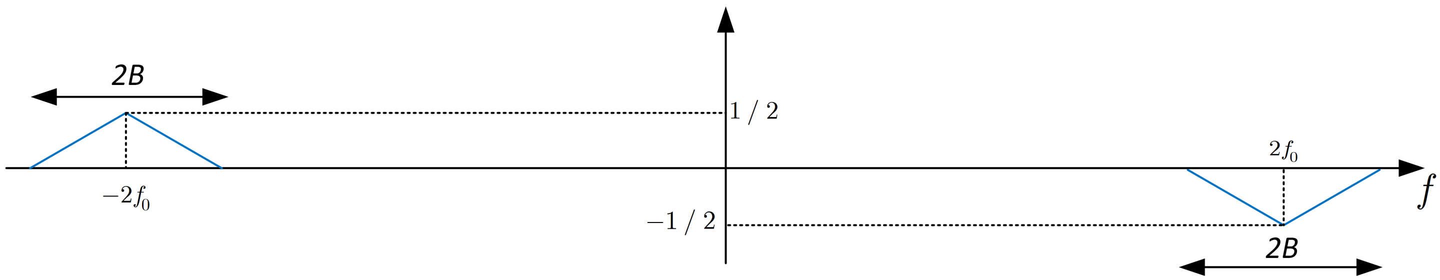
$$Y(f) = \frac{1}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{f+2f_0}{B}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{f-2f_0}{B}\right) \tag{5}$$

(γ΄) Το σήμα φαίνεται στο Σχήμα 2.

(δ΄) Από τα σχήματα βλέπουμε ότι $f_s^x = 2(f_0 + B)$ και ότι $f_s^y = 2(2f_0 + B)$.

Θέμα 3ο - 25 μονάδες: συστήματα στο χώρο του μετασχ. Fourier
Έστω η απόκριση σε συχνότητα ενός ΓΧΑ συστήματος

$$H(f) = \frac{j2\pi f + 2}{(j2\pi f)^2 + 5j2\pi f + 4} \tag{6}$$



Σχήμα 2: *Σχήμα του $Y(f)$ Θέματος 2.*

(α΄) **(10 μ.)** Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

(β΄) **(5 μ.)** Αν $j2\pi f = s$, υπάρχει συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ που να αντιστοιχεί σε ευσταθές και αιτιατό σύστημα;

(γ΄) **(2.5 μ.)** Στην αλγεβρική μορφή του αντιστρόφου συστήματος $H_{inv}(s)$, πόσοι πόλοι και πόσα μηδενικά υπάρχουν; Αναφέρετέ ρητά και καθαρά.

(δ΄) **(7.5 μ.)** Βρείτε μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το παραπάνω σύστημα.

Λύση:

(α΄) Το σύστημα έχει βαθμό πολυωνύμου του $j2\pi f$ στον αριθμητή μικρότερο από τον αντίστοιχο στον παρονομαστή, άρα μπορούμε να αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα. Έτσι

$$H(f) = \frac{A}{1 + j2\pi f} + \frac{B}{4 + j2\pi f} \tag{7}$$

με

$$A = H(f)(1 + j2\pi f)\Big|_{j2\pi f := -2} = \frac{1}{3} \tag{8}$$

$$B = H(f)(4 + j2\pi f)\Big|_{j2\pi f := -3} = \frac{2}{3} \tag{9}$$

Οπότε εν τέλει

$$H(f) = \frac{1/3}{1 + j2\pi f} + \frac{2/3}{4 + j2\pi f} \tag{10}$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{2}{3}e^{-4t}u(t) \tag{11}$$

(β΄) Αν θέσουμε $j2\pi f = s$ τότε

$$H(s) = \frac{s + 2}{(s + 4)(s + 1)} \tag{12}$$

οπότε έχουμε δυο πόλους στις θέσεις $s = -1$, $s = -4$. Τα πιθανά πεδία σύγκλισης θα είναι τα $\sigma > -1$, $-4 < \sigma < -1$, $\sigma < -4$. Από αυτά, το $\sigma > -1$ οδηγεί σε ευσταθές, λόγω συμπερίληψης του φανταστικού άξονα εντός του, και αιτιατό, λόγω δεξιάς πλευρικότητας του, σύστημα.

(γ΄) Το αντίστροφο σύστημα θα έχει μορφή

$$H_{inv}(s) = \frac{(s + 1)(s + 4)}{s + 2} \tag{13}$$

και άρα θα έχει δυο μηδενικά στις θέσεις $s = -1$, $s = -4$, και δυο πόλους, στο $s = -2$ και $s = \infty$, καθώς $\lim_{s\to\infty} H(s) = \infty$.

(δ΄) Έχουμε

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \Longleftrightarrow (j2\pi f)^2 Y(f) + 5(j2\pi f)Y(f) + 4Y(f) = 2X(f) + j2\pi f X(f) \tag{14}$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης επιστρέφουμε στο χρόνο

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 2x(t) \tag{15}$$

Θέμα 4ο - 25 μονάδες: συσχετίσεις και φασματικές πυκνότητες
Το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{t-8}{2}\right) \tag{16}$$

περνά από ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = \delta(t) - 2\mathrm{sinc}(2t)$. Υπολογίστε (**12.5 μ.**) και σχεδιάστε (**12.5 μ.**) τη φασματική πυκνότητα ενέργειας της εξόδου, $\Phi_y(f)$.

Λύση:
Το σήμα $x(t)$ είναι σήμα ενέργειας με μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = \mathrm{sinc}^2(2f)e^{-j2\pi 8f} \tag{17}$$

Η φασματική πυκνότητα ενέργειας της εισόδου θα είναι

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = |\mathrm{sinc}^2(2f)e^{-j2\pi 8f}|^2 = \mathrm{sinc}^4(2f) \tag{18}$$

Το σύστημα έχει απόκριση σε συχνότητα

$$H(f) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \tag{19}$$

δηλ. είναι ένα ιδανικό υψιπερατό φίλτρο με πλάτος 1 και συχνότητα αποκοπής $f_c = 1$ Hz. Αρα στην έξοδο θα περάσουν μόνο οι συχνότητες που ανήκουν στο διάστημα $f \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Ξέρουμε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας της εξόδου θα είναι

$$\Phi_y(f) = |H(f)|^2\Phi_x(f) = \left(1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)\right)\mathrm{sinc}^4(2f) = \begin{cases} \mathrm{sinc}^4(2f), & f \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ 0, & f \in (-1, 1) \end{cases} \tag{20}$$

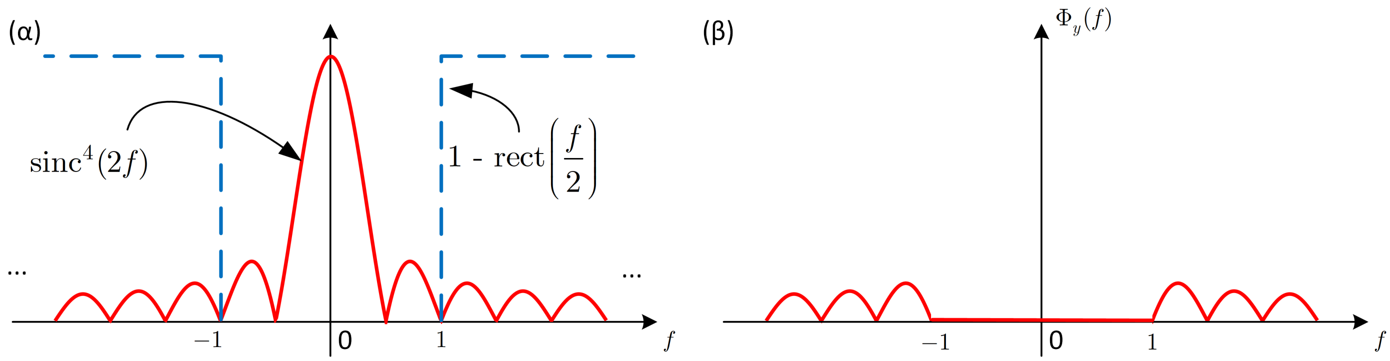
Τα σημεία μηδενισμού του $\mathrm{sinc}^4(2f)$ είναι ίδια με του $\mathrm{sinc}(2f)$, τα οποία γνωρίζουμε, και βρίσκονται στις θέσεις $f_k = \frac{k}{2}$, $k \in \mathrm{Z} - \{0\}$. Άρα το φίλτρο $H(f)$ θα κόβει το σήμα $\mathrm{sinc}^4(2f)$ στο δεύτερο σημείο μηδενισμού εκατέρωθεν του $f = 0$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3(α). Οπότε η παραπάνω φασματική πυκνότητα θα είναι της μορφής του Σχήματος 3(β).

Σημείωση: οι πλευρικοί λοβοί είναι σημαντικά χαμηλότεροι σε πλάτος απ΄ ό,τι φαίνεται στο σχήμα, στο οποίο χάριν σχεδίασης και κατανόησης φαίνονται πολύ μεγαλύτεροι.

Θέμα 5ο - 30 μονάδες: συστήματα και μετασχ. Laplace
Έστω το *αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 4.

(α΄) (**5 μ.**) Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του συστήματος;

(β΄) (**10 μ.**) Αν γνωρίζετε ότι $H(0) = 9$, βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος.

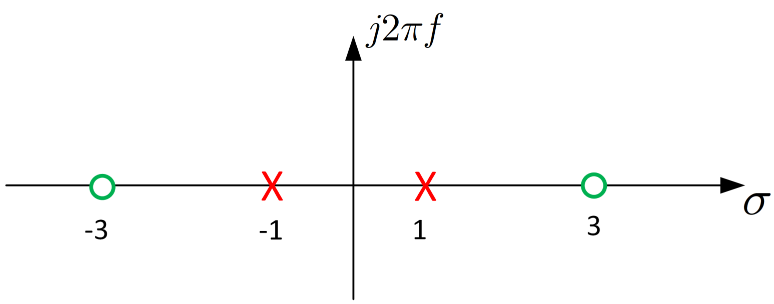


Σχήμα 3: *Σχήμα Θέματος 4.*

(γ΄) **(5 μ.)** Μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ από την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς; Αν ναι, βρείτε τη. Αν όχι, γιατί; Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση.

(δ΄) **(5 μ.)** Υπάρχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα, $H_{inv}(s)$, για το παραπάνω σύστημα;

(ε΄) **(5 μ.)** Αν η αιτιατότητα δε μας ενδιαφέρει, υπάρχει ευσταθές αντίστροφο σύστημα, $H_{inv}(s)$, για το παραπάνω σύστημα; Αν ναι, βρείτε το. Αν όχι, εξηγήστε. Σε κάθε περίπτωση, αιτιολογήστε επαρκώς.



Σχήμα 4: *Διάγραμμα πόλων-μηδενικών Θέματος 5.*

Λύση:

(α΄) Το πεδίο σύγκλισης θα είναι υποχρεωτικά το $\sigma > 1$, ως αιτιατό σύστημα (δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης).

(β΄) Θα έχουμε

$$H(s) = A\frac{(s+3)(s-3)}{(s+1)(s-1)} \tag{21}$$

από το διάγραμμα, και επειδή $H(0) = 9$, παίρνουμε $A = 1$. Οπότε

$$H(s) = \frac{(s+3)(s-3)}{(s+1)(s-1)}, \quad \sigma > 1 \tag{22}$$

(γ΄) Όχι, δεν μπορεί να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας αφού ο φανταστικός άξονας $\sigma = 0$ ΔΕΝ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης.

(δ΄) Για να υπάρχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα πρέπει όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωσή μας, άρα δεν υπάρχει τέτοιο σύστημα.

(ε΄) Στο αντίστροφο σύστημα, οι πόλοι γίνονται μηδενικά και τα μηδενικά πόλοι. Άρα θα έχουμε πόλους στο $s = -3$, $s = 3$ και μηδενικά στα $s = -1$, $s = 1$. Τότε υπάρχει ευσταθές αντίστροφο σύστημα, το

$$H_{inv}(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+3)(s-3)} \tag{23}$$

με πεδίο σύγκλισης $-3 < \sigma < 3$, που περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.