ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Ρήτρα τελικού: 4.5/10.0

- **Διαθέσιμες μονάδες: 125 - Αριστα: 100**
- **Αιτιολογήστε ΠΛΗΡΩΣ όσα γράφετε. Απαντήσεις χωρίς δικαιολόγηση δε βαθμολογούνται.**
- **Η εξέταση διεξάγεται με ανοιχτές σημειώσεις πάσης φύσεως, πλην ηλεκτρονικών βοηθημάτων.**

Θέμα 1ο - 25 μονάδες: overview
(**5 μ.** έκαστο ερώτημα) Σωστό ή Λαθος; Δικαιολογήστε επαρκώς.

(i.) Το περιοδικό σήμα με συντελεστές Fourier $X_1 = e^{j\pi/2}$ και $X_{-1} = -j$, και $X_k = 0$, $\forall k \in \mathrm{Z} - \{\pm 1\}$ είναι πραγματικό.

(ii.) Για το σήμα $x(t) = 2\cos(2\pi 200t - 5\pi/6) + 2\cos(2\pi 450t - 7\pi/8)$ ισχύει $\sphericalangle X_k < \pi/2$, $\forall k \in \mathrm{Z}$.

(iii.) Η κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-(t+2)}u(t)$ περιγράφει ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα.

(iv.) Αν $x(t) = \dfrac{1}{j\pi t}$, τότε $X(f) = F\{x(t)\} = -\mathrm{sgn}(-f)$.

(v.) Για ένα ΓΧΑ σύστημα με μοναδικούς πόλους στο $s = -1$ και στο $s = 2$, υπάρχουν τέσσερα (4) δυνατά πεδία σύγκλισης.

Λύση:

i. Σωστό. Ο συντελεστής X_1 είναι ο συζυγής του X_{-1}, κάτι που ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα.

ii. Λάθος. Είναι $\sphericalangle X_4 = -5\pi/6$, $\sphericalangle X_{-4} = 5\pi/6$ και $\sphericalangle X_9 = -7\pi/8$, $\sphericalangle X_{-9} = 7\pi/8$, προφανώς οι θετικές τιμές δεν είναι μικρότερα του $\pi/2$.

iii. Σωστό. Ισχύει $h(t) = 0, t < 0$, που είναι το κριτήριο αιτιατότητας.

iv. Λάθος. Είναι

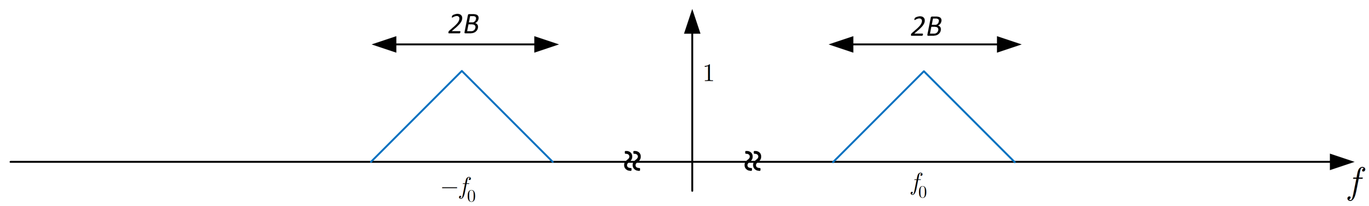
$$x(t) = \mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{j\pi f} \tag{1}$$

και από δυικότητα

$$X(t) = \frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow x(-f) = \mathrm{sgn}(-f) \tag{2}$$

v. Λάθος. Υπάρχουν τρια πιθανά πεδία σύγκλισης: $\sigma > 2$, $-1 < \sigma < 2$, $\sigma < -1$.

Θέμα 2ο - 20 μονάδες: ο χώρος του μετασχ. Fourier και οι ιδιότητές του
Έστω ο μετασχ. Fourier $X(f)$ του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 2.*

(α') **(5 μ.)** Υπολογίστε το σήμα στο χρόνο, $x(t) = F^{-1}\{X(f)\}$.

(β') **(5 μ.)** Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$.

(γ') **(5 μ.)** Σχεδιάστε το σήμα $Y(f) = F\{y(t)\}$ στο χώρο της συχνότητας.

(δ') **(5 μ.)** Ποιά είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος $x(t)$ και ποιά του $y(t)$;

Λύση:

(α') Είναι

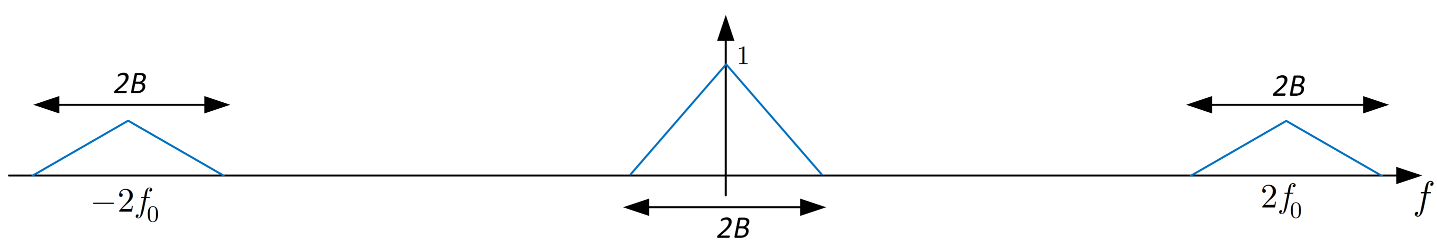
$$X(f) = \mathrm{tri}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{f+f_0}{B}\right), \quad \text{με } f_0 \gg 0 \text{ και } 0 < B \ll f_0. \tag{3}$$

Είναι

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = B\mathrm{sinc}^2(Bt)e^{j2\pi f_0 t} + B\mathrm{sinc}^2(Bt)e^{-j2\pi f_0 t} = 2B\cos(2\pi f_0 t)\mathrm{sinc}^2(Bt) \tag{4}$$

(β') Θα είναι

$$Y(f) = F\{y(t)\} = F\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\} = X(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right) = \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0) \tag{5}$$



Σχήμα 2: *Σχήμα του $Y(f)$ Θέματος 2.*

(γ') Το σήμα φαίνεται στο Σχήμα 2.

(δ') Από τα σχήματα βλέπουμε ότι $f_s^x = 2(f_0 + B)$ και ότι $f_s^y = 2(2f_0 + B)$.

Θέμα 3ο - 30 μονάδες: συστήματα στο χώρο του μετασχ. Fourier

Έστω η απόκριση σε συχνότητα ενός ΓΧΑ συστήματος

$$H(f) = \frac{1}{(j2\pi f)^2 + 5j2\pi f + 6} \tag{6}$$

(αʹ) **(15 μ.)** Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

(βʹ) **(5 μ.)** Είναι το σύστημα ευσταθές; Αιτιολογήστε.

(γʹ) **(5 μ.)** Βρείτε μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το παραπάνω σύστημα.

(δʹ) **(5 μ.)** Αποδείξτε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = \frac{1}{6}$.

Λύση:

(αʹ) Το σύστημα έχει βαθμό πολυωνύμου του $j2\pi f$ στον αριθμητή μικρότερο από τον αντίστοιχο στον παρονομαστή, άρα μπορούμε να αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα. Έτσι

$$H(f) = \frac{A}{2+j2\pi f} + \frac{B}{3+j2\pi f} \tag{7}$$

με

$$A = H(f)(2+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f:=-2} = 1 \tag{8}$$

$$B = H(f)(3+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f:=-3} = -1 \tag{9}$$

Οπότε εν τέλει

$$H(f) = \frac{1}{2+j2\pi f} - \frac{1}{3+j2\pi f} \tag{10}$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο

$$h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t) \tag{11}$$

(βʹ) Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι αρνητικές $(-2, -3)$. Εναλλακτικά, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s) = L\{e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)\} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \;\; R_H = \{\sigma > -2\} \tag{12}$$

που σημαίνει ότι ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς και άρα είναι ευσταθές το σύστημα. Εναλλακτικά, η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος υπάρχει (μας δίνεται στην εκφώνηση) και είναι ρητή συνάρτηση του $j2\pi f$, άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

(γʹ) Έχουμε

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \Longleftrightarrow (j2\pi f)^2 Y(f) + 5(j2\pi f)Y(f) + 6Y(f) = X(f) \tag{13}$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης επιστρέφουμε στο χρόνο

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) \tag{14}$$

(δʹ) Είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt\Big|_{f=0} = H(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \tag{15}$$

Θέμα 4ο - 25 μονάδες: συσχετίσεις και φασματικές πυκνότητες

Το σήμα

$$x(t) = \text{tri}\left(\frac{t-2}{2}\right) \tag{16}$$

περνά από ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = \text{sinc}(2t)$. Υπολογίστε (**12.5 μ.**) και σχεδιάστε (**12.5 μ.**) τη φασματική πυκνότητα ενέργειας της εξόδου, $\Phi_y(f)$.

Λύση:

Το σήμα $x(t)$ είναι σήμα ενέργειας με μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = 2\text{sinc}^2(2f)e^{-j2\pi 2f} \tag{17}$$

Η φασματική πυκνότητα ενέργειας της εισόδου θα είναι

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = 4\text{sinc}^4(2f) \tag{18}$$

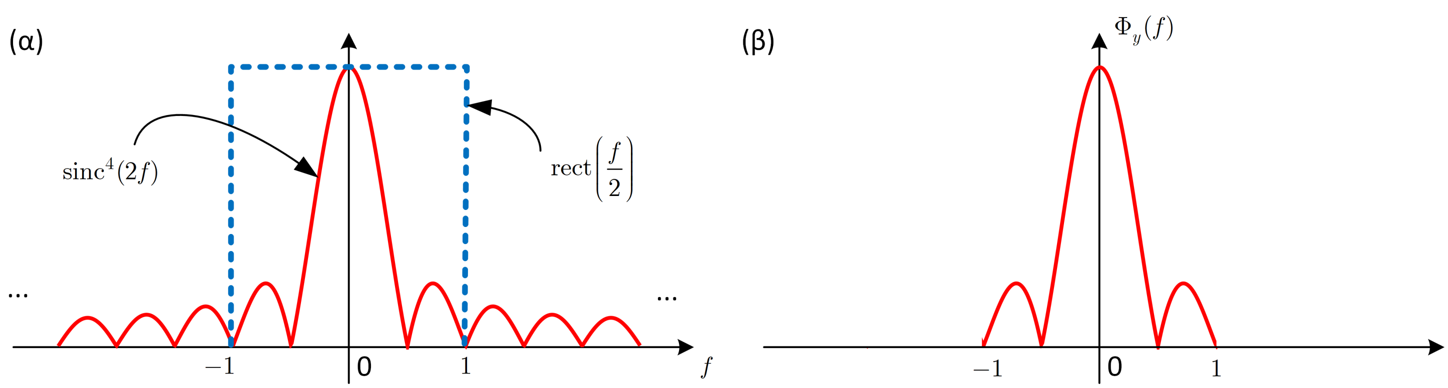
Το σύστημα έχει απόκριση σε συχνότητα

$$H(f) = \frac{1}{2}\text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \tag{19}$$

δηλ. είναι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο με πλάτος 0.5 και συχνότητα αποκοπής $f_c = 1$ Hz. Αρα στην έξοδο θα περάσουν μόνο οι συχνότητες που ανήκουν στο διάστημα $(-1, 1)$. Ξέρουμε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας της εξόδου θα είναι

$$\Phi_y(f) = |H(f)|^2\Phi_x(f) = \frac{1}{4}\text{rect}\left(\frac{f}{2}\right)\cdot 4\text{sinc}^4(2f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right)\text{sinc}^4(2f) \tag{20}$$

Τα σημεία μηδενισμού του $\text{sinc}^4(2f)$ είναι ίδια με του $\text{sinc}(2f)$, τα οποία γνωρίζουμε, και βρίσκονται στις θέσεις $f_k = \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Άρα το φίλτρο $H(f)$ θα κόβει το σήμα $\text{sinc}^4(2f)$ στο δεύτερο σημείο μηδενισμού εκατέρωθεν του $f = 0$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3(α). Οπότε η παραπάνω φασματική πυκνότητα θα είναι της μορφής του Σχήματος 3(β).

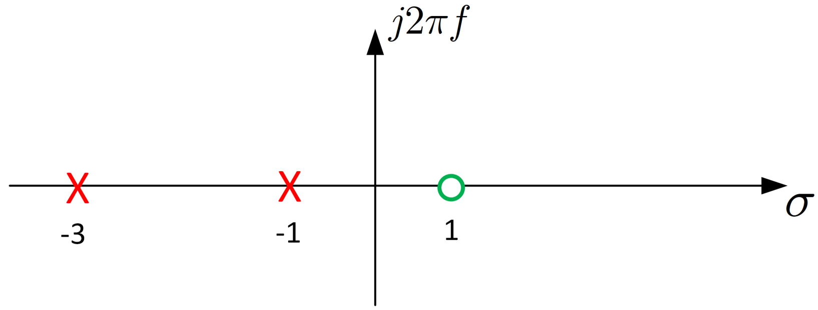


Σχήμα 3: *Σχήμα Θέματος 4.*

Σημείωση: οι πλευρικοί λοβοί είναι σημαντικά χαμηλότεροι σε πλάτος απ' ό,τι φαίνεται στο σχήμα, στο οποίο χάριν σχεδίασης και κατανόησης φαίνονται πολύ μεγαλύτεροι.

Θέμα 5ο - 25 μονάδες: συστήματα και μετασχ. Laplace

Έστω το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 4.



Σχήμα 4: *Διάγραμμα πόλων-μηδενικών Θέματος 5.*

(αʹ) **(2.5 μ.)** Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του συστήματος;

(βʹ) **(7.5 μ.)** Αν γνωρίζετε ότι $H(0) = -1$, βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος.

(γʹ) **(5 μ.)** Μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ από την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς; Αν ναι, βρείτε τη. Αν όχι, γιατί; Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση.

(δʹ) **(5 μ.)** Υπάρχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα, $H_{inv}(s)$, για το παραπάνω σύστημα;

(εʹ) **(5 μ.)** Αν η ευστάθεια δε μας ενδιαφέρει, υπάρχει αιτιατό αντίστροφο σύστημα, $H_{inv}(s)$, για το παραπάνω σύστημα; Θυμηθείτε ότι "# πόλων = # μηδενικών" σε οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση μεταφοράς.

Λύση:

(αʹ) Το πεδίο σύγκλισης θα είναι υποχρεωτικά το $\sigma > -1$, ως αιτιατό σύστημα (δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης).

(βʹ) Θα έχουμε

$$H(s) = A\frac{s-1}{(s+1)(s+3)} \tag{21}$$

από το διάγραμμα, και επειδή $H(0) = -1$, παίρνουμε $A = 3$. Οπότε

$$H(s) = 3\frac{s-1}{(s+1)(s+3)}, \quad \sigma > -1 \tag{22}$$

(γʹ) Ναι, μπορεί να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας αφού ο φανταστικός άξονας $\sigma = 0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης. Θα είναι

$$H(f) = H(s)\Big|_{s=j2\pi f} = 3\frac{j2\pi f - 1}{(j2\pi f+1)(j2\pi f+3)} \tag{23}$$

(δʹ) Για να υπάρχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα πρέπει όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωσή μας, άρα δεν υπάρχει τέτοιο σύστημα.

(εʹ) Στο αντίστροφο σύστημα, οι πόλοι γίνονται μηδενικά και τα μηδενικά πόλοι. Άρα θα έχουμε πόλους στο $s = 1$ και μηδενικά στα $s = -1$, $s = -3$. Όμως πρέπει ο αριθμός των πόλων να ισούται με τον αριθμό των μηδενικών, οπότε υπάρχει ένας πόλος στο $s = \infty$, αφού

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \frac{1}{3}\lim_{s\to\infty}\frac{s\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(1+\frac{3}{s}\right)}{1-\frac{1}{s}} = \infty \tag{24}$$

Άρα - λόγω αυτού του πόλου στο άπειρο - δεν υπάρχει δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης του τύπου $\sigma > \sigma_0$, έτσι ώστε το αντίστροφο σύστημα να είναι αιτιατό.