ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Ρήτρα τελικού: 4.5/10.0

- **ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ και 00 ΛΕΠΤΑ**
- **Διαθέσιμες μονάδες: 130 - Αριστα: 110**
- **Αναφέρετε ρητά ποιό θέμα και ποιό ερώτημα απαντάτε κάθε φορά.**
- **Αιτιολογήστε ΠΛΗΡΩΣ όσα γράφετε. Απαντήσεις χωρίς δικαιολόγηση δε βαθμολογούνται.**
- **Η εξέταση διεξάγεται με ανοιχτές σημειώσεις πάσης φύσεως, πλην ηλεκτρονικών βοηθημάτων.**
- **Ερωτήσεις απαντά μόνο ο διδάσκων, και μπορείτε να τις θέσετε σε κάποια από τις περιοδικές επισκέψεις του στην αίθουσά σας.**

Θέμα 1ο - 25 μονάδες: overview
(**2.5 μ.** έκαστο ερώτημα) Σωστό ή Λαθος; Δικαιολογήστε επαρκώς.

(i.) Αν ένα πραγματικό περιοδικό σήμα έχει έναν συντελεστή Fourier $X_{k_0} = 2e^{-j\pi/4}$, τότε στο ίδιο σήμα υπάρχει οπωσδήποτε κι ένας συντελεστής $X^*_{k_0} = -2e^{j\pi/4}$.

(ii.) Για το σήμα $x(t) = 3\cos(2\pi 100t - \pi/3) + 2\sin(2\pi 150t + \pi/12)$ ισχύει $|X_k| < 3$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(iii.) Ένα σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι αιτιατό.

(iv.) Αν $x(t) = \delta(t) - \dfrac{1}{j\pi t}$, τότε $X(f) = F\{x(t)\} = 2u(f)$.

(v.) Αν $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, $-\infty < t < +\infty$, τότε $X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$ γιατί ο μετασχ. Laplace $X(s)$ του $x(t)$ περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

(vi.) Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει έναν και μόνο έναν πόλο στο $s = 3$ και είναι αιτιατό, τότε το σύστημα είναι υποχρεωτικά ασταθές.

(vii.) Αν $H(s) = \dfrac{s-2}{s+3}$, $\sigma > -3$, τότε υπάρχει μοναδικό αντίστροφο σύστημα, το $H_{inv}(s) = \dfrac{s+3}{s-2}$, $\sigma > 2$.

(viii.) Η συνάρτηση $\phi_x(\tau) = e^{-|\tau|}$ είναι μια έγκυρη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (ικανοποιεί όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες) ενώ η $\phi_x(\tau) = \sin(2\tau)$ δεν είναι (δεν ικανοποιεί κάποια απαιτούμενη ιδιότητα).

(ix.) Ένα μη αντιμετωπίσιμο πρόβλημα στη διαδικασία της δειγματοληψίας είναι ότι κανένα πραγματικό (δηλ. υπαρκτό) σήμα δεν είναι αυστηρά βασικής ζώνης.

(x.) Αν $x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$, τότε η συχνότητα Nyquist για το σήμα αυτό είναι $f_{max} = 2 \cdot 4 = 8$ Hz.

Λύση:

i. Λάθος. Ο συντελεστής $X^*_{k_0}$ είναι ο συζυγής του X_{k_0} για πραγματικά σήματα, δηλ. $X^*_{k_0} = 2e^{j\pi/4}$.

ii. Σωστό. Είναι $|X_2| = |X_{-2}| = 3/2$ και $|X_3| = |X_{-3}| = 1$, όλα μικρότερα του 3. Προφανώς τα υπόλοιπα X_k είναι μηδενικά.

iii. Λάθος. Δεν μπορεί να είναι αιτιατό. Οι μη μηδενικές συνθήκες "ενεργοποιούν" την απόκριση μηδενικής εισόδου, που αποτελεί έξοδο του συστήματος απουσία εισόδου, κάτι που κάνει το σύστημα μη αιτιατό.

iv. Σωστό. Είναι

$$x(t) = 2u(t) \longleftrightarrow X(f) = \delta(f) + \frac{1}{j\pi f} \tag{1}$$

και από δυικότητα

$$X(t) = \delta(t) + \frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow x(-f) = 2u(-f) \tag{2}$$

Επίσης από ιδιότητα αντιστροφής στο χρόνο

$$X(-t) = \delta(-t) - \frac{1}{j\pi t} = \delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow x(-(-f)) = 2u(f) \tag{3}$$

v. Λάθος. Το σήμα δεν έχει καν μετασχηματισμό Laplace, άρα η σχέση $X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$ δεν έχει νόημα.

vi. Σωστό. Το πεδίο σύγκλισης θα είναι $\sigma > 3$, δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, άρα είναι ασταθές.

vii. Λάθος. Δεν είναι το μοναδικό αντίστροφο σύστημα, εξίσου έγκυρο είναι και το

$$H_{inv}(s) = \frac{s+3}{s-2}, \ \ \sigma < 2 \tag{4}$$

viii. Σωστό. Ικανοποιούνται οι ιδιότητες

$$\phi_x(\tau) = \phi_x(-\tau) \tag{5}$$

$$\phi_x(0) \geq \phi_x(\tau) \tag{6}$$

από την πρώτη συνάρτηση ενώ δεν ικανοποιούνται από τη δεύτερη.

ix. Λάθος. Δεν είναι μη αντιμετωπίσιμο, καθώς με ένα χαμηλοπερατό φίλτρο μπορούμε να το μετατρέψουμε σε βασικής ζώνης.

x. Λάθος. Είναι

$$X(f) = 8\mathrm{sinc}(4f) \tag{7}$$

το οποίο δεν έχει μέγιστη συχνότητα, έτσι δεν μπορούμε μονοσήμαντα να ορίσουμε μια συχνότητα Nyquist.

Θέμα 2ο - 30 μονάδες: ο χώρος του μετασχ. Fourier και οι ιδιότητές του

Έστω το σήμα

$$X(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right), \quad \text{με } f_0 \gg 0 \text{ και } 0 < B \ll f_0. \tag{8}$$

(α') **(5 μ.)** Σχεδιάστε το σήμα στο χώρο της συχνότητας.

(β') **(5 μ.)** Υπολογίστε το σήμα στο χρόνο, $x(t) = F^{-1}\{X(f)\}$.

(γ') **(5 μ.)** Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t)$.

(δ') **(5 μ.)** Σχεδιάστε το σήμα $Y(f) = F\{y(t)\}$ στο χώρο της συχνότητας.

(ε') **(10 μ.)** Δείξτε ότι

$$4B\int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2(2\pi f_0 t)\mathrm{sinc}(Bt)dt = 2 \tag{9}$$

Λύση:

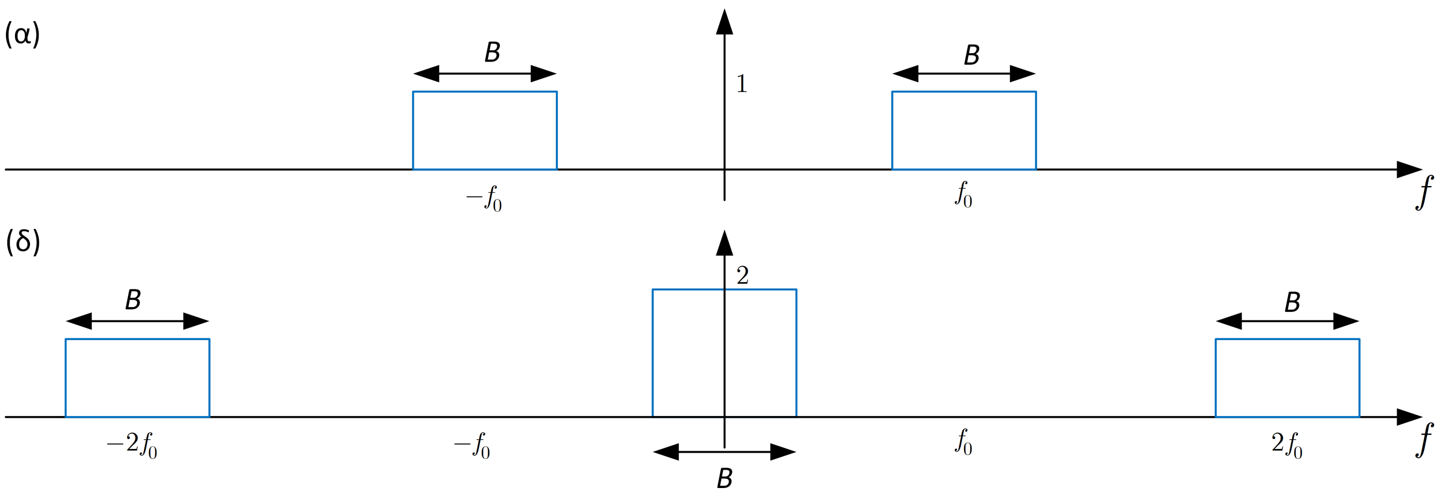
(α') Το σήμα φαίνεται στο Σχήμα 1(α).

(β') Είναι

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = B\mathrm{sinc}(Bt)e^{j2\pi f_0 t} + B\mathrm{sinc}(Bt)e^{-j2\pi f_0 t} = 2B\cos(2\pi f_0 t)\mathrm{sinc}(Bt) \tag{10}$$

(γ') Θα είναι

$$Y(f) = F\{y(t)\} = F\{2x(t)\cos(2\pi f_0 t)\} = 2X(f)*\left(\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right) = X(f-f_0)+X(f+f_0) \tag{11}$$



Σχήμα 1: *Σχήματα Θέματος 2.*

(δ') Το σήμα φαίνεται στο Σχήμα 1(δ).

(ε') Έχουμε από το (γ) ερώτημα ότι

$$y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t) = 2\cdot 2B\cos(2\pi f_0 t)\mathrm{sinc}(Bt)\cdot\cos(2\pi f_0 t) = 4B\cos^2(2\pi f_0 t)\mathrm{sinc}(Bt) \tag{12}$$

Άρα

$$4B\int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2(2\pi f_0 t)\mathrm{sinc}(Bt)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}y(t)e^{-j2\pi ft}dt\Big|_{f=0} = Y(0) \tag{13}$$

και από το προηγ. ερώτημα έχουμε

$$Y(0) = X(-f_0) + X(f_0) = 1 + 1 = 2 \tag{14}$$

κάτι που επιβεβαιώνεται και από το Σχήμα 1(δ).

Θέμα 3ο - 25 μονάδες: συστήματα στο χώρο του μετασχ. Fourier
Έστω η απόκριση σε συχνότητα ενός ΓΧΑ συστήματος

$$H(f) = \frac{(j2\pi f)^2 + 5j2\pi f + 6}{(j2\pi f)^2 + \frac{3}{2}j2\pi f + \frac{1}{2}} \tag{15}$$

(α΄) **(15 μ.)** Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι $h(t) = \delta(t) - 4e^{-t}u(t) + 7.5e^{-t/2}u(t)$.

(β΄) **(5 μ.)** Είναι το σύστημα ευσταθές; Αιτιολογήστε.

(γ΄) **(5 μ.)** Βρείτε μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το παραπάνω σύστημα.

Λύση:

(α΄) Το σύστημα έχει βαθμό πολυωνύμου του $j2\pi f$ στον αριθμητή ίσο με τον αντίστοιχο στον παρονομαστή, άρα θα διαιρέσουμε πρώτα τα πολυώνυμα. Θέτοντας $x = j2\pi f$,

$$H(f) = \left.\frac{(j2\pi f)^2 + 5j2\pi f + 6}{(j2\pi f)^2 + \frac{3}{2}j2\pi f + \frac{1}{2}}\right|_{j2\pi f := x} \Longrightarrow H(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{7}{2}x + \frac{11}{2}}{x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}} \tag{16}$$

άρα

$$H(f) = 1 + \frac{\frac{7}{2}j2\pi f + \frac{11}{2}}{(j2\pi f + 1)\left(j2\pi f + \frac{1}{2}\right)} \tag{17}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα

$$H(f) = 1 + \frac{A}{1 + j2\pi f} + \frac{B}{\frac{1}{2} + j2\pi f} \tag{18}$$

με

$$A = \left.\frac{\frac{7}{2}j2\pi f + \frac{11}{2}}{(j2\pi f + 1)\left(j2\pi f + \frac{1}{2}\right)}(j2\pi f + 1)\right|_{j2\pi f := -1} = -4 \tag{19}$$

$$B = \left.\frac{\frac{7}{2}j2\pi f + \frac{11}{2}}{(j2\pi f + 1)\left(j2\pi f + \frac{1}{2}\right)}(j2\pi f + \frac{1}{2})\right|_{j2\pi f := -\frac{1}{2}} = 7.5 \tag{20}$$

Οπότε εν τέλει

$$H(f) = 1 - \frac{4}{1 + j2\pi f} + \frac{7.5}{\frac{1}{2} + j2\pi f} \tag{21}$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο

$$h(t) = \delta(t) - 4e^{-t}u(t) + 7.5e^{-t/2}u(t) \tag{22}$$

(β΄) Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί αποτελείται από μια συνάρτηση Δέλτα (χωρίς κάποια παράγωγο) και οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι αρνητικές $(-1, -1/2)$.

(γ΄) Έχουμε

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \Longleftrightarrow (j2\pi f)^2 Y(f) + \frac{3}{2}(j2\pi f)Y(f) + \frac{1}{2}Y(f) = (j2\pi f)^2 X(f) + 5(j2\pi f)X(f) + 6X(f) \tag{23}$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης επιστρέφουμε στο χρόνο

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{3}{2}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{2}y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 5\frac{d}{dt}x(t) + 6x(t) \tag{24}$$

Θέμα 4ο - 20 μονάδες: συσχετίσεις και φασματικές πυκνότητες
Το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{tri}\left(\frac{t-6k}{2}\right) \tag{25}$$

περνά από ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = 12\text{sinc}(3t)$. Υπολογίστε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου, $\Phi_y(f)$.

<u>Λύση:</u>
Το περιοδικό σήμα περιγράφεται σε μια περίοδό του, $T_0 = 6$, ως

$$x_{T_0}(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{2}\right) \tag{26}$$

με μετασχ. Fourier ως

$$X_{T_0}(f) = 2\text{sinc}^2(2f) \tag{27}$$

Οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος δίνονται ως

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(f)\Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{6} 2\text{sinc}^2\left(\frac{2k}{6}\right) = \frac{1}{3}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{3}\right) \tag{28}$$

και άρα η είσοδος θα μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi\frac{k}{6}t} = \frac{1}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{3}\right) e^{j2\pi\frac{k}{6}t} \tag{29}$$

Το σύστημα έχει απόκριση σε συχνότητα

$$H(f) = 4\text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) \tag{30}$$

δηλ. είναι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο με πλάτος 4 και συχνότητα αποκοπής $f_c = \frac{3}{2}$ Hz. Αρα στην έξοδο θα περάσουν μόνο οι συχνότητες που ανήκουν στο διάστημα $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, δηλ.

$$Y_k = 4X_k, \quad \left\{k : \frac{k}{6} \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \ \ k \in \mathrm{Z}\right\} \tag{31}$$

οι οποίες είναι για $k = -8$ ως $k = 8$. Η φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου δίνεται ως

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=\infty}^{+\infty} |Y_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = \sum_{k=-8}^{8} |4X_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{6}\right) = \frac{16}{9}\sum_{k=-8}^{8} \text{sinc}^4\left(\frac{k}{3}\right)\delta\left(f - \frac{k}{6}\right) \tag{32}$$

Θέμα 5ο - 30 μονάδες: μετασχ. Laplace
Έστω το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) - x(t-2) \tag{33}$$

(α') **(10 μ.)** Δείξτε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η $H(s) = \dfrac{1-e^{-2s}}{s}, \ \ \sigma \in \mathrm{R}$.

(β') **(5 μ.)** Μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ από την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς; Αν ναι, βρείτε τη. Αν όχι, γιατί; Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση.

(γ') **(15 μ.)** Αν στην είσοδο του συστήματος εμφανιστεί το σήμα $x(t) = e^{-3t}u(t)$, ποιά είναι η έξοδος του συστήματος;

Λύση:

(α') Θα έχουμε

$$sY(s) = X(s) - X(s)e^{-2s} = X(s)(1 - e^{-2s}) \Longleftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1 - e^{-2s}}{s} \tag{34}$$

με πεδίο σύγκλισης όλο το μιγαδικό επίπεδο, αφού

$$\lim_{s\to 0} H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2e^{-2s}}{1} = 2 \tag{35}$$

από κανόνα του De L'Hospital.

(β') Ναι, μπορεί να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας αφού ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης. Θα είναι

$$H(f) = H(s)\Big|_{s=j2\pi f} = \frac{1 - e^{-j2\pi 2f}}{j2\pi f} = e^{-j2\pi f}\frac{e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}}{j2\pi f} = e^{-j2\pi f}2j\frac{\sin(2\pi f)}{j2\pi f} = 2e^{-j2\pi f}\mathrm{sinc}(2f) \tag{36}$$

(γ') Θα είναι

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s}\frac{1}{s+3} = \frac{1}{s(s+3)} - \frac{1}{s(s+3)}e^{-2s} = G(s) - G(s)e^{-2s},\ \ \sigma > -3 \tag{37}$$

με $G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$. Γυρίζοντας πίσω στο χρόνο

$$y(t) = g(t) - g(t-2) \tag{38}$$

Είναι

$$G(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+3} \longleftrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-3\tau}u(\tau)d\tau = \int_0^t e^{-3\tau}d\tau = -\frac{1}{3}e^{-3\tau}\Big|_{\tau=0}^{t} = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}),\ \ t > 0 \tag{39}$$

ή εναλλακτικά

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} \tag{40}$$

με

$$A = G(s)s\Big|_{s=0} = \frac{1}{s+3}\Big|_{s=0} = \frac{1}{3} \tag{41}$$

$$B = G(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{1}{s}\Big|_{s=-3} = -\frac{1}{3} \tag{42}$$

που δίνει τελικά

$$G(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+3} \tag{43}$$

Είτε με τον έναν είτε με τον άλλο τρόπο,

$$g(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})u(t) \tag{44}$$

και τελικά

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})u(t) - \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-2)})u(t-2) \tag{45}$$