ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Επαναληπτική Τελική Εξέταση 2020-21
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Θέμα 1ο: Συνέλιξη - Μονάδες: 25

Έστω $f(t), g(t)$ δυο σήματα και με $\star$ συμβολίζουμε την πράξη της συνέλιξης.

(α΄) **(10 μ.)** Αποδείξτε ότι αν $c(t) = f(t) \star g(t)$, τότε $A_c = A_f A_g$, με

$$A_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt, A_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt, \text{ και } A_c = \int_{-\infty}^{\infty} c(t)dt \tag{1}$$

(β΄) **(5 μ.)** Αποδείξτε οτι αν $c(t) = f(t) \star g(t)$, τότε $f(at) \star g(at) = \frac{1}{|a|}c(at)$, $a \in \Re$.

(γ΄) **(10 μ.)** Σχεδιάστε τα σήματα

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1}, \quad g(t) = u(t) \tag{2}$$

Υπολογίστε τη συνέλιξή τους.

Δίνεται ότι: $\int \frac{1}{t^2+1}dt = \tan^{-1} t + c, \ \lim_{t\to -\infty} \tan^{-1} t = \frac{\pi}{2}$

Λύση:

(α΄) Μεταφέροντας τη συνέλιξη στο χώρο του Fourier έχουμε

$$c(t) = f(t) \star g(t) \longleftrightarrow C(f) = F(f)G(f) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} c(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi ft}dt \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{3}$$

Για $f = 0$, παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(t)e^{-j2\pi ft}dt\Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi ft}dt\Big|_{f=0} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt\Big|_{f=0} \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt \tag{5}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα.

(β΄) Είναι

$$c(t) = f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{6}$$

και θεωρώντας $f(at), g(at)$, με $a > 0$ τότε

$$y(t) = f(at) * g(at) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a\tau)g(a(t-\tau))d\tau \tag{7}$$

Με αλλαγή μεταβλητής $u = a\tau \Longrightarrow du = ad\tau \Longrightarrow d\tau = \frac{du}{a}$, έχουμε

$$y(t) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(at-u)du = \frac{1}{a}c(at) \tag{8}$$

λόγω της Σχέσης (6). Ακριβώς όμοια αποδεικνυεται και για $a < 0$ ότι

$$y(t) = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(at-u)du = -\frac{1}{a}c(at) \tag{9}$$

οπότε πράγματι ισχύει η ζητούμενη σχέση. Εναλλακτικά, μεταφέροντας τη σχέση στο χώρο του Fourier έχουμε

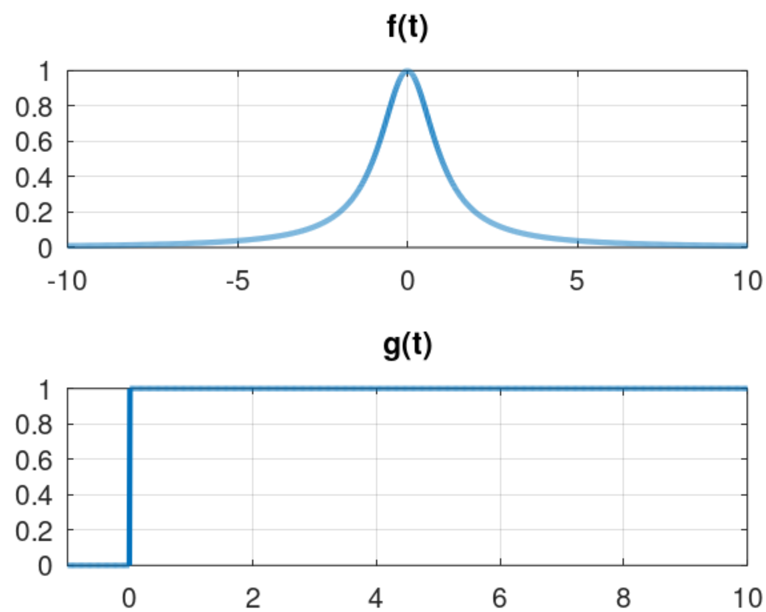
$$f(at) * g(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F\Big(\frac{f}{a}\Big)\frac{1}{|a|}G\Big(\frac{f}{a}\Big) = \frac{1}{|a|^2}F\Big(\frac{f}{a}\Big)G\Big(\frac{f}{a}\Big) \tag{10}$$

Επίσης, ισχύει

$$\frac{1}{|a|}c(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}\frac{1}{|a|}C\Big(\frac{f}{a}\Big) = \frac{1}{|a|^2}C\Big(\frac{f}{a}\Big) = \frac{1}{|a|^2}F\Big(\frac{f}{a}\Big)G\Big(\frac{f}{a}\Big) \tag{11}$$

Οι δυο σχέσεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα στο χώρο του Fourier, οπότε και οι σχέσεις τους στο χώρο του χρόνου είναι ισοδύναμες.

(γ΄) Τα δυο σήματα φαίνονται στο Σχήμα 1. Είναι



Σχήμα 1: *Σήματα Θέματος 1.*

$$c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau^2+1}u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\tau^2+1}d\tau \tag{12}$$

$$= \tan^{-1}(\tau)\Big|_{\tau=-\infty}^{t} = \tan^{-1}(t) - \lim_{\tau\to-\infty}\tan^{-1}(\tau) = \tan^{-1}(t) - \frac{\pi}{2} \tag{13}$$

Θέμα 2ο: Σειρές Fourier - Μονάδες: 25

Η τριγωνομετρική σειρά Fourier ενός περιοδικού σηματος γράφεται ως

$$x(t) = 3 + \sqrt{3}\cos(2t) + \sin(4t) - 2\cos(5t + \frac{\pi}{3}) \tag{14}$$

(α΄) (**5 μ.**) Βρείτε την περίοδο T_0 του σήματος.

(β΄) (**10 μ.**) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους της σειράς.

(γ΄) (**10 μ.**) Σχεδιάστε το φάσμα φάσης της σειράς.

Λύση:

(α΄) Η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος δίνεται ως

$$\omega_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{2,4,5\} = 1 \text{ rad/s} \tag{15}$$

οπότε

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \text{ sec} \tag{16}$$

(β΄) Το σήμα γράφεται ως

$$x(t) = 3 + \sqrt{3}\cos(2t) + \sin(4t) - 2\cos(5t + \frac{\pi}{3}) \tag{17}$$

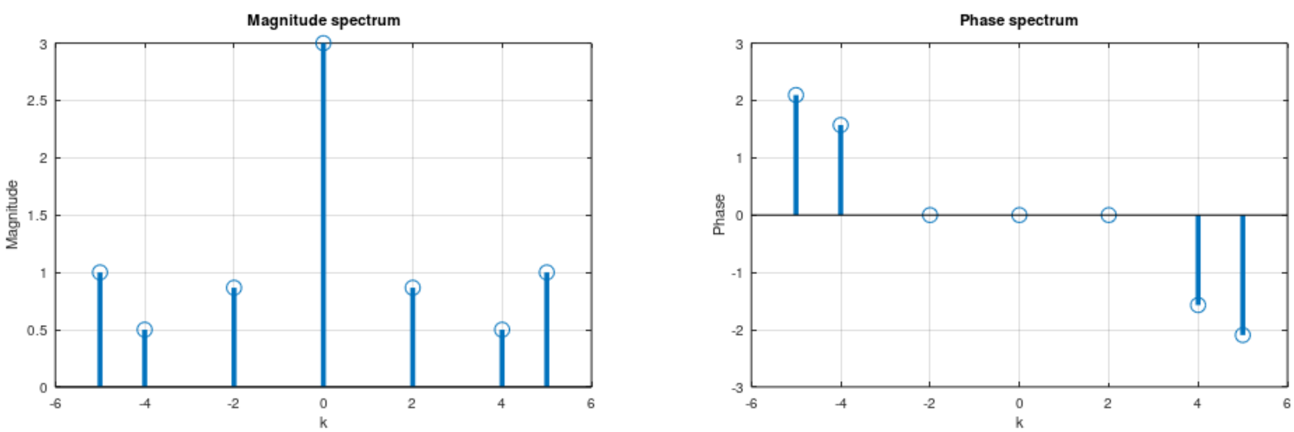
$$= 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{j2t} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-j2t} + \frac{1}{2j}e^{j4t} - \frac{1}{2j}e^{-j4t} - e^{j5t}e^{j\pi/3} - e^{-j5t}e^{-j\pi/3} \tag{18}$$

$$= 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{j2t} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-j2t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{-j4t} + e^{j5t}e^{j(-\pi+\pi/3)} + e^{-j5t}e^{j(\pi-\pi/3)} \tag{19}$$

$$= 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{j2t} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-j2t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{-j4t} + e^{j5t}e^{-j2\pi/3} + e^{-j5t}e^{j2\pi/3} \tag{20}$$

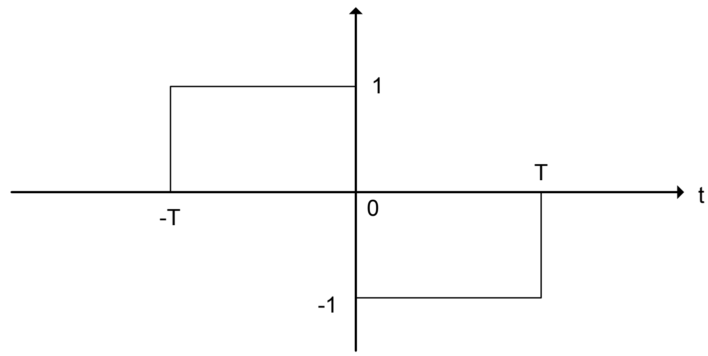
Το φάσμα πλάτους φαίνεται στο Σχήμα 2.

(γ΄) Το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Φάσματα Θέματος 2.*

Θέμα 3ο: Μετασχ. Fourier - Μονάδες: 30
Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος που δίνεται στο Σχήμα 3 με τρεις διαφορετικούς τρόπους.



Σχήμα 3: *Σχήμα θέματος 3.*

(α΄) (**10 μ.**) Με απευθείας υπολογισμό του ορισμού του μετασχηματισμού.

(β΄) (**10 μ.**) Με χρήση της ιδιότητας της χρονικής μετατοπισης και γνωστών ζευγών μετασχηματισμών.

(γ΄) (**10 μ.**) Με χρηση της ιδιότητας της παραγώγισης.

Δίνεται οτι: $1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$.

Λύση:

(α΄) Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-T}^{0} e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{T} (-1)e^{-j2\pi ft}dt \quad (21)$$
$$= \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_{-T}^{0} - \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_{0}^{T} \quad (22)$$
$$= -\frac{1}{j2\pi f}(1 - e^{j2\pi fT}) + \frac{1}{j2\pi f}(e^{-j2\pi fT} - 1) = \frac{1}{j2\pi f}(e^{j2\pi fT} - 1 + e^{-j2\pi fT} - 1) \quad (23)$$
$$= \frac{1}{j2\pi f}(2\cos(2\pi fT) - 2) = \frac{1}{j\pi f}(\cos(2\pi fT) - 1) \quad (24)$$
$$= -\frac{2}{j\pi f}\sin^2(\pi fT) \quad (25)$$

(β΄) Το σήμα αποτελείται από δυο μετατοπισμένα τετραγωνικά παράθυρα με κέντρο τις χρονικές στιγμές $t = \pm T/2$. Μπορούμε να γράψουμε

$$x(t) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t + T/2}{T}\Big) - \mathrm{rect}\Big(\frac{t - T/2}{T}\Big) \quad (26)$$

με μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = T\mathrm{sinc}(fT)e^{j2\pi fT/2} - T\mathrm{sinc}(fT)e^{-j2\pi fT/2} = T\mathrm{sinc}(fT)(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) = T\mathrm{sinc}(fT)2j\sin(\pi fT) \quad (27)$$

Μπορείτε να δείξετε ότι η παραπάνω έκφραση είναι ίδια με αυτή του πρώτου ερωτήματος.

(γ΄) Ξανά, το σήμα γράφεται ως

$$x(t) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t + T/2}{T}\Big) - \mathrm{rect}\Big(\frac{t - T/2}{T}\Big) \quad (28)$$

το οποίο παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{d}{dt}x(t) = \delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T) \tag{29}$$

Το σήμα αυτό έχει μετασχ. Fourier

$$X_d(f) = e^{j2\pi fT} - 2 + e^{-j2\pi fT} \tag{30}$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης παίρνουμε

$$j2\pi f X(f) = X_d(f) = e^{j2\pi fT} - 2 + e^{-j2\pi fT} \tag{31}$$

και από αυτό

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f}(e^{j2\pi fT} - 2 + e^{-j2\pi fT}) = \frac{1}{j2\pi f}(2\cos(2\pi fT) - 2) \tag{32}$$

$$= \frac{1}{j\pi f}(\cos(2\pi fT) - 1) = -\frac{2}{j\pi f}\sin^2(\pi fT) \tag{33}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με το πρώτο ερώτημα.

Θέμα 4ο: Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις - Μονάδες: 20

Δίνεται το σύστημα μηδενικών αρχικών συνθηκών που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) - 2\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) - 2\frac{d}{dt}x(t) - 8x(t) \tag{34}$$

(α΄) (**10 μ.**) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος.

(β΄) (**10 μ.**) Αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε βρειτε την έξοδο του συστήματος για είσοδο

$$x(t) = e^{4t}u(t) \tag{35}$$

Λύση:

(α΄) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγισης θα έχουμε

$$s^3Y(s) - 2s^2Y(s) - sY(s) + 2Y(s) = s^2X(s) - 2sX(s) - 8X(s) \iff Y(s)(s^3 - 2s^2 - s + 2) = X(s)(s^2 - 2s - 8) \tag{36}$$

και άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 - 2s - 8}{s^3 - 2s^2 - s + 2} \tag{37}$$

(β΄) Η είσοδος θα έχει μετασχ. Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s-4} \tag{38}$$

οπότε

$$Y(s) = X(s)H(s) = \left[\frac{s^2 - 2s - 8}{s^3 - 2s^2 - s + 2}\right]\frac{1}{s-4} \tag{39}$$

Οι ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς είναι $s_1 = -1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$, ενώ του αριθμητή είναι $s_4 = 4$, $s_5 = -2$, οπότε

$$Y(s) = \frac{(s-4)(s+2)}{(s-1)(s+1)(s-2)}\frac{1}{(s-4)} = \frac{s+2}{(s-1)(s+1)(s-2)} \tag{40}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, έχουμε

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \tag{41}$$

με

$$A = Y(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{s+2}{(s-1)(s-2)}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{6} \tag{42}$$

$$B = Y(s)(s-1)\Big|_{s=1} = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)}\Big|_{s=1} = -\frac{3}{2} \tag{43}$$

$$C = Y(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)}\Big|_{s=2} = \frac{4}{3} \tag{44}$$

οπότε

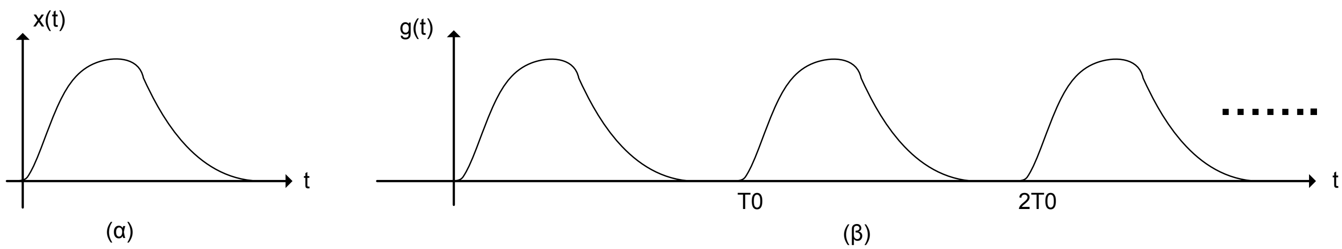
$$Y(s) = \frac{\frac{1}{6}}{s+1} - \frac{\frac{3}{2}}{s-1} + \frac{\frac{4}{3}}{s-2} \tag{45}$$

και επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, από γνωστά ζεύγη θα έχουμε

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{-t}u(t) - \frac{3}{2}e^{t}u(t) + \frac{4}{3}e^{2t}u(t) \tag{46}$$

Θέμα 5ο: Μετασχ. Laplace - Μονάδες: 25

Ο μετασχ. Laplace ενός *αιτιατού* περιοδικού σήματος μπορεί να υπολογιστεί από τη γνώση του μετασχ. Laplace της περιόδου του. Αν ο μετασχ. Laplace του Σχήματος 2(α) είναι $X(s)$, τότε δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace $G(s)$



Σχήμα 4: *Σχήμα Θέματος 5.*

του Σχήματος 2(β) είναι

$$G(s) = \frac{X(s)}{1-e^{-sT_0}}, \;\; \Re\{s\} > 0 \tag{47}$$

<u>Δίνεται ότι:</u> $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}, \;\; |x| < 1.$

<u>Λύση:</u>

Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(t-kT_0) \tag{48}$$

οπότε λόγω γραμμικότητας

$$G(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} X(s)e^{-skT_0} = X(s)\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-skT_0} = X(s)\Big[1 + e^{-sT_0} + e^{-2sT_0} + \cdots\Big] \tag{49}$$

το οποίο γράφεται

$$G(s) = X(s)\Big[1 + e^{-sT_0} + (e^{-sT_0})^2 + \cdots\Big] = X(s)\frac{1}{1-e^{-sT_0}} \tag{50}$$

αν θεωρήσουμε ότι

$$|e^{-sT_0}| = |e^{-(\sigma+j\omega)T_0}| = |e^{-\sigma T_0}||e^{-j\omega T_0}| = |e^{-\sigma T_0}| < 1 \tag{51}$$

μόνο αν $\sigma > 0 \Longleftrightarrow \Re\{s\} > 0$ (αφού η περίοδος T_0 είναι πάντα θετική).