ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**
**Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής**

**ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ**

**Διάρκεια: 3 ώρες**

**Ρήτρα τελικού: 4.5/10.0**

- **ΑΝΤΙΓΡΑΨΤΕ ΣΤΟ ΠΑΝΩ ΜΕΡΟΣ ΚΑΘΕ ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ τον παρακάτω πίνακα, βάζοντας τα 4 ψηφία του ΑΜ σας κάτω από τις σταθερές** $a, b, c, d$:

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

- **Αντικαταστήστε πριν οποιαδήποτε λύση σας τις σταθερές** $a, b, c, d$ **όπου εμφανίζονται στα παρακάτω θέματα (μόνο με μικρά γράμματα) με τα αντίστοιχα ψηφία του ΑΜ σας.**

- **Λύσεις ΧΩΡΙΣ αντικατάσταση ή με ΛΑΘΟΣ αντικατάσταση ψηφίων ΔΕΝ είναι αποδεκτές και ΜΗΔΕΝΙΖΟΝΤΑΙ.**

- **ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ και 00 ΛΕΠΤΑ**

- **ΠΡΟΘΕΣΜΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ: 21:15 ΑΥΣΤΗΡΑ μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου στο**

kafentz@csd.uoc.gr

- **Απαγορεύεται η συνεργασία με οποιοδήποτε φυσικό πρόσωπο ή πρόσωπα και η μεταξύ σας ή με τρίτους αντιγραφή. Οι διδάσκοντες διατηρούν, μετά το πέρας της εξέτασης, το δικαίωμα (α) να μηδενίσουν κατ΄ ευθείαν γραπτό ή γραπτά με προφανείς ομοιότητες και (β) να καλέσουν σε προφορική εξέταση μέσω Zoom αν υπάρξουν όποιες υποψίες.**

- **Αιτιολογήστε ΠΛΗΡΩΣ όσα γράφετε. Απαντήσεις χωρίς δικαιολόγηση δε βαθμολογούνται.**

- **Δεν επιτρέπονται ερωτήσεις. Γράφετε μόνοι/ες σας με βάση όσα γνωρίζετε.**

**Θέμα 1ο - 30 μονάδες: overview: χώροι Laplace, Fourier, και χρόνου**
Σας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος

$$H(s) = \frac{2as}{a^2 - s^2}, \ \ -a < \sigma < a \tag{1}$$

(α΄) **(10 μ.)** Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος χρησιμοποιώντας είτε γνωστά ζεύγη και ιδιότητες είτε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα και γνωστά ζεύγη.

(β΄) **(12.5 μ.)** Μπορείτε να βρείτε την απόκριση συχνότητας του συστήματος, $H(f)$, από τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$; Αν ναι, για ποιά *θετική* συχνότητα η απόκριση πλάτους $|H(f)|$ είναι μέγιστη αν σας δίνεται ότι για $f \in (0, +\infty)$, το μέγιστο αυτό είναι μοναδικό; Αν όχι, εξηγήστε.

(γ΄) **(2.5 μ.)** Να βρεθεί η περίφημη *βηματική απόκριση* του συστήματος, δηλ. η έξοδος, $y(t)$, του συστήματος για είσοδο $x(t) = u(t)$.

(δ΄) **(5 μ.)** Να βρεθεί η έξοδος, $y(t)$, του συστήματος όταν στην είσοδο του βρεθεί το σήμα $x(t) = \cos\left(at + \frac{\pi}{d+3}\right)$, $-\infty < t < +\infty$.

<u>Λύση:</u>

(α΄) Ένας τρόπος είναι να γράψουμε

$$H(s) = s\frac{2a}{a^2 - s^2} = sH_p(s) \tag{2}$$

με

$$H_p(s) = \frac{2a}{a^2 - s^2}, \ \ -a < \sigma < a \tag{3}$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης να πάρουμε

$$h(t) = \frac{d}{dt}h_p(t) = \frac{d}{dt}e^{-a|t|} = \frac{d}{dt}\left[e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)\right] \tag{4}$$

και να κάνουμε την παραγώγιση. Ένας άλλος τρόπος είναι

$$H(s) = \frac{A}{a-s} + \frac{B}{a+s} \tag{5}$$

με

$$A = H(s)(a-s)\Big|_{s=a} = \frac{2a^2}{2a} = a \tag{6}$$

$$B = H(s)(a+s)\Big|_{s=-a} = \frac{-2a^2}{2a} = -a \tag{7}$$

και άρα

$$H(s) = \frac{a}{a-s} - \frac{a}{a+s} = -\frac{a}{s-a} - \frac{a}{s+a}, \ \ -a < \sigma < a \tag{8}$$

Οπότε

$$h(t) = ae^{at}u(-t) - ae^{-at}u(t) \tag{9}$$

(β΄) Ναι, μπορούμε γιατί ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης για κάθε τιμή του $a \neq 0$. Είναι

$$H(f) = \frac{j4\pi a f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{10}$$

και

$$|H(f)| = \frac{4\pi a|f|}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{11}$$

Για να βρούμε το μέγιστο για $f > 0$ θα έχουμε κατάρχάς $|f| = f$ και πρέπει να θέσουμε την παράγωγο ίση με το μηδέν, δηλ.

$$\frac{d}{df}|H(f)| = \frac{d}{df}\frac{4\pi a f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = 0 \tag{12}$$

$$= \frac{4\pi a(a^2 + 4\pi^2 f^2) - 4\pi a f(8\pi^2 f)}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = 0 \tag{13}$$

Ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός οπότε αρκεί

$$4\pi a(a^2 + 4\pi^2 f^2) - 4\pi a f(8\pi^2 f) = 0 \tag{14}$$

δηλ.

$$a^2 + 4\pi^2 f^2 - 8\pi^2 f^2 = 0 \Longleftrightarrow a^2 - 4\pi^2 f^2 = 0 \Longleftrightarrow f^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} \tag{15}$$

και αφού ψάχνουμε τη θετική συχνότητα

$$f = \frac{a}{2\pi} \text{ Hz} \tag{16}$$

(γ΄) Στο χώρο του Laplace έχουμε

$$x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s},\ \ \sigma > 0 \tag{17}$$

και η έξοδος θα είναι

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2as}{a^2 - s^2}\frac{1}{s} = \frac{2a}{a^2 - s^2},\ \ -a < \sigma < a \tag{18}$$

και από πίνακες έχουμε

$$y(t) = e^{-a|t|} \tag{19}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να κάνουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα στη Σχέση (18) καταλήγοντας στο ίδιο αποτέλεσμα με χρήση πινάκων. Ένας τρίτος τρόπος - που θέλει προσοχή - είναι μέσω μετασχ. Fourier, καθώς

$$H(f) = \frac{j4\pi a f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{20}$$

και

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \tag{21}$$

οπότε

$$Y(f) = X(f)H(f) = \left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right]H(f) \tag{22}$$

$$= \frac{H(f)}{j2\pi f} + \frac{H(f)}{2}\delta(f) \tag{23}$$

$$= \frac{H(f)}{j2\pi f} + \frac{H(0)}{2}\delta(f) \tag{24}$$

και από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης στο χρόνο έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} [ae^{a\tau}u(-\tau) - ae^{-a\tau}u(\tau)]d\tau \tag{25}$$

Ανάλογα με την τιμή του $t$ θα έχουμε:

- $t > 0$: τότε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [ae^{a\tau}u(-\tau) - ae^{-a\tau}u(\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{0} ae^{a\tau}u(-\tau)d\tau - \int_{0}^{t} ae^{-a\tau}u(\tau)d\tau \tag{26}$$

$$= \frac{1}{a}ae^{a\tau}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{a}ae^{-a\tau}\Big|_{0}^{t} = (1-0) + (e^{-at} - 1) = e^{-at} \tag{27}$$

- $t < 0$: τότε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [ae^{a\tau}u(-\tau) - ae^{-a\tau}u(\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{t} ae^{a\tau}u(-\tau)d\tau = \frac{1}{a}ae^{a\tau}\Big|_{-\infty}^{t} = (e^{at} - 0) = e^{at} \tag{28}$$

Οπότε συνολικά

$$y(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = e^{-a|t|} \tag{29}$$

Τέλος, υπάρχει και ο τρόπος του πεδίου του χρόνου

$$y(t) = h(t) * x(t) = [ae^{at}u(-t) - ae^{-at}u(t)] * u(t) \tag{30}$$

που δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

(δ΄) Για το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \cos\left(at + \frac{\pi}{d+3}\right) \tag{31}$$

γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα είναι

$$y(t) = |H(a/2\pi)| \cos\left(at + \angle H(a/2\pi) + \frac{\pi}{d+3}\right) \tag{32}$$

με

$$H\left(\frac{a}{2\pi}\right) = \frac{j4\pi a\frac{a}{2\pi}}{a^2 + 4\pi^2(a/2\pi)^2} = \frac{j2a^2}{a^2+a^2} = j\frac{2a^2}{2a^2} = 1j = 1e^{j\pi/2} \tag{33}$$

οπότε

$$y(t) = \cos\left(at + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{d+3}\right) \tag{34}$$

Εναλλακτικά - αλλά δε συνίσταται - μπορεί κανείς να δουλέψει στο χώρο του Fourier. Το σήμα $x(t)$ γράφεται

$$x(t) = \cos\left(at + \frac{\pi}{d+3}\right) = \frac{1}{2}e^{j\pi/(d+3)}e^{jat} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/(d+3)}e^{-jat} \tag{35}$$

και στο χώρο της συχνότητας

$$X(f) = \frac{1}{2}e^{j\pi/(d+3)}\delta\left(f - \frac{a}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}e^{-j\pi/(d+3)}\delta\left(f + \frac{a}{2\pi}\right) \tag{36}$$

και αφού

$$H(f) = \frac{j4\pi af}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{37}$$

έχουμε

$$Y(f) = H(f)X(f) = H(f)\Big[\frac{1}{2}e^{j\pi/(d+3)}\delta\Big(f - \frac{a}{2\pi}\Big) + \frac{1}{2}e^{-j\pi/(d+3)}\delta\Big(f + \frac{a}{2\pi}\Big)\Big] \tag{38}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j\pi/(d+3)}H(f)\delta\Big(f - \frac{a}{2\pi}\Big) + \frac{1}{2}e^{-j\pi/(d+3)}H(f)\delta\Big(f + \frac{a}{2\pi}\Big) \tag{39}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j\pi/(d+3)}H\Big(\frac{a}{2\pi}\Big)\delta\Big(f - \frac{a}{2\pi}\Big) + \frac{1}{2}e^{-j\pi/(d+3)}H\Big(-\frac{a}{2\pi}\Big)\delta\Big(f + \frac{a}{2\pi}\Big) \tag{40}$$

Όμως

$$H\Big(\pm\frac{a}{2\pi}\Big) = \pm\frac{j4\pi a\frac{a}{2\pi}}{a^2 + 4\pi^2(\pm a/2\pi)^2} = \pm\frac{j2a^2}{a^2+a^2} = \pm j\frac{2a^2}{2a^2} = \pm 1j = 1e^{\pm j\pi/2} \tag{41}$$

οπότε

$$Y(f) = \frac{1}{2}e^{j\pi/(d+3)}e^{j\pi/2}\delta\Big(f - \frac{a}{2\pi}\Big) + \frac{1}{2}e^{-j\pi/(d+3)}e^{-j\pi/2}\delta\Big(f + \frac{a}{2\pi}\Big) \tag{42}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j(\pi/2+\pi/(d+3))}\delta\Big(f - \frac{a}{2\pi}\Big) + \frac{1}{2}e^{-j(\pi/2+\pi/(d+3))}\delta\Big(f + \frac{a}{2\pi}\Big) \tag{43}$$

Γυρνώντας στο πεδίο του χρόνου

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{j(\pi/2+\pi/(d+3))}e^{jat} + \frac{1}{2}e^{-j(\pi/2+\pi/(d+3))}e^{-jat} = \cos\Big(at + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{d+3}\Big) \tag{44}$$

**Θέμα 2ο - 25 μονάδες: ο χώρος του μετασχ. Fourier και οι ιδιότητές του I**

Έστω το σήμα $y(t) \longleftrightarrow Y(f)$ που δίνεται ως

$$y(t) = \begin{cases} \Big(\frac{d+1}{T}\Big)t & , \ -T < t < T \\ 0 & , \ \text{αλλού} \end{cases} \tag{45}$$

με $Z(f) = 2\pi f Y(f)$.

(α') **(12.5 μ.)** Βρείτε το $z(t)$.

(β') **(5 μ.)** Υπολογίστε το $Y(0)$

(γ') **(2.5 μ.)** Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} Y(f)df$

(δ') **(5 μ.)** Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$

<u>Λύση:</u>

(α') Είναι

$$y(t) = \Big(\frac{d+1}{T}\Big)t\,\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{2T}\Big) \tag{46}$$

και από τη σχέση

$$Z(f) = 2\pi f Y(f) \Longleftrightarrow jZ(f) = j2\pi f Y(f) \longleftrightarrow jz(t) = \frac{d}{dt}y(t) \tag{47}$$

οπότε

$$z(t) = -j\frac{d}{dt}y(t) = -j\left(\frac{d+1}{T}\right)\frac{d}{dt}\left[t\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\right] \tag{48}$$

Οπότε

$$\frac{d}{dt}\left[t\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\right] = \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + t(\delta(t+T) - \delta(t-T)) = \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) - T\delta(t+T) - T\delta(t-T) \tag{49}$$

Άρα συνολικά

$$z(t) = -j\left(\frac{d+1}{T}\right)\left[\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) - T\delta(t+T) - T\delta(t-T)\right] \tag{50}$$

(β΄) Είναι

$$Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}dt\Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt = \frac{d+1}{T}\int_{-T}^{T} tdt = \frac{d+1}{T}\frac{t^2}{2}\Big|_{t=-T}^{T} = 0 \tag{51}$$

(γ΄) Είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f)e^{j2\pi ft}df\Big|_{t=0} = y(0) = 0 \tag{52}$$

(δ΄) Είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \tag{53}$$

από το θεώρημα Parseval. Οπότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \left(\frac{d+1}{T}\right)^2 \int_{-T}^{T} t^2 dt = \left(\frac{d+1}{T}\right)^2 \frac{t^3}{3}\Big|_{t=-T}^{T} = \left(\frac{d+1}{T}\right)^2 \frac{2T^3}{3} = \frac{2T(d+1)^2}{3} \tag{54}$$

**Θέμα 3ο - 25 μονάδες: ο χώρος του μετασχ. Fourier και οι ιδιότητές του II**

Το *κέντρο βαρύτητας*, $C_g$, ενός σήματος, $x(t)$, ορίζεται ως

$$C_g = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt} \tag{55}$$

και έχει πολλές πρακτικές χρήσεις, μια εκ των οποίων περιλαμβάνει την "ευθυγράμμιση" των διαδοχικών τμημάτων ομιλίας κατά τις πρώτες απόπειρες σύνθεσης ομιλίας από κείμενο[1].

(α΄) **(10 μ.)** Βρείτε μια έκφραση για το $C_g$ ως συνάρτηση του μετασχ. Fourier, $X(f)$, του σήματος $x(t)$, αξιοποιώντας ιδιότητες του μετασχ. Fourier στον αριθμητή και τον παρονομαστή.

(β΄) **(12.5 μ.)** Υπολογίστε το $C_g$ για το σήμα που έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος μετασχ. Fourier ως

$$X_R(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \tag{56}$$

$$X_I(f) = \text{tri}(f+1) - \text{tri}(f-1) \tag{57}$$

(γ΄) **(2.5 μ.)** Παρατηρείτε κάποιο πρόβλημα στον παραπάνω ορισμό του κέντρου βαρύτητας; Εξηγήστε.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Speech_synthesis#Concatenation_synthesis

<u>Λύση:</u>

(α) Ο αριθμητής μπορεί να γραφεί ως

$$\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} tx(t)e^{-j2\pi ft}dt\Big|_{f=0} = F\{tx(t)\}\Big|_{f=0} = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f)\Big|_{f=0} = \frac{j}{2\pi}X'(0) \tag{58}$$

ενώ ο παρονομαστής

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\Big|_{f=0} = X(0) \tag{59}$$

Άρα

$$C_g = \frac{j}{2\pi}\frac{X'(0)}{X(0)} \tag{60}$$

(β) Χρειαζόμαστε τα $X'(0)$, $X(0)$. Είναι

$$X(0) = X_R(0) + jX_I(0) = 1 + j0 = 1 \tag{61}$$

και

$$X'(0) = \frac{d}{df}X(f)\Big|_{f=0} = \frac{d}{df}(X_R(f) + jX_I(f))\Big|_{f=0} = \frac{d}{df}X_R(f)\Big|_{f=0} + jX_I(f)\Big|_{f=0} \tag{62}$$

Χωρίς να υπολογίσουμε αναλυτικά τις παραγώγους, και απλά σχεδιάζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, βλέπουμε ότι

$$X_R'(0) = 0 \tag{63}$$
$$X_I'(0) = -1 \tag{64}$$

γιατί ζητάμε την παράγωγο γύρω από το μηδέν στα δυο σήματα, και στο $X_R'(f)$ αυτή είναι μηδέν (ως παράγωγος σταθεράς), ενώ στο $X_I'(0)$ αυτή είναι ίση με την κλίση μιας ευθείας, που είναι ίση με $-1$. Άρα

$$C_g = \frac{j}{2\pi}\frac{-j}{1} = \frac{1}{2\pi} \tag{65}$$

(γ) Ο παρονομαστής μπορεί να μηδενίζεται αν το σήμα είναι μηδενικής μέσης τιμής (ή εναλλακτικά, αν $X(0) = 0$).

### Θέμα 4ο - 30 μονάδες: συσχετίσεις και φασματικές πυκνότητες

(α) **(10 μ.)** Σωστό ή λάθος: "Υπάρχουν τουλάχιστον δυο διαφορετικά σήματα, $x(t) \neq y(t)$, που να έχουν την ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, $\phi_x(\tau) = \phi_y(\tau)$". Δικαιολογήστε κάθε απάντησή σας.

(β) **(20 μ.)** Έστω το σήμα $x(t)$ με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$\phi_x(\tau) = \frac{2(b+1)}{(b+1)^2 + \tau^2} \tag{66}$$

και φασματική πυκνότητα ενέργειας $\Phi_x(f)$. Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος $x(t)$ που κατανέμεται στο διάστημα συχνοτήτων $\left[-\frac{1}{b+1}, \frac{1}{b+1}\right]$.

Λύση:

(α΄) Σωστό. Δεδομένου ότι η αυτοσυσχέτιση είναι "τυφλή" στην αρχική φάση (μετατόπιση) του σήματος, τα σήματα

$$x(t) \text{ και } y(t) = x(t-t_0),\ \ \forall t_0 \in \mathrm{R} \tag{67}$$

έχουν την ίδια αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau) = \phi_y(\tau)$. Άρα υπάρχουν άπειρα σήματα $x(t) \neq y(t)$ με $\phi_x(\tau) = \phi_y(\tau)$. Εναλλακτικά, τα σήματα

$$x(t) \text{ και } y(t) = -x(t) \tag{68}$$

έχουν την ίδια αυτοσυσχέτιση, καθώς για το $y(t)$ το πρόσημο εξουδετερώνεται μέσα στον ορισμό της αυτοσυσχέτισης.

(β΄) Η φασματική πυκνότητα ενέργειας δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = 2\pi e^{-2\pi(b+1)|-f|} = 2\pi e^{-2\pi(b+1)|f|} \tag{69}$$

γιατί ξέρουμε ότι

$$e^{-\psi|t|} \longleftrightarrow \frac{2\psi}{\psi^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{70}$$

οπότε από δυικότητα

$$\frac{2\psi}{\psi^2 + 4\pi^2 t^2} \longleftrightarrow e^{-\psi|-f|} = e^{-\psi|f|} \tag{71}$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας τη δοσμένη σχέση με $4\pi^2$ έχουμε

$$2\pi\frac{2(2\pi(b+1))}{(2\pi(b+1))^2 + 4\pi^2 t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-2\pi(b+1)|f|} \tag{72}$$

Άρα η ζητούμενη ενέργεια είναι

$$\begin{aligned}
E_{int} &= \int_{-\frac{1}{b+1}}^{\frac{1}{b+1}} \Phi_x(f)df = 2\pi \int_{-\frac{1}{b+1}}^{\frac{1}{b+1}} e^{-2\pi(b+1)|f|}df && (73)\\
&= 2\pi \int_{-\frac{1}{b+1}}^{0} e^{2\pi(b+1)f}df + 2\pi \int_{0}^{\frac{1}{b+1}} e^{-2\pi(b+1)f}df && (74)\\
&= \frac{1}{b+1}e^{2\pi(b+1)f}\Big|_{-1/b+1}^{0} - \frac{1}{b+1}e^{-2\pi(b+1)f}\Big|_{0}^{1/b+1} && (75)\\
&= \frac{1}{b+1}(1-e^{-2\pi}) - \frac{1}{b+1}(e^{-2\pi}-1) = \frac{2}{b+1}(1-e^{-2\pi}) && (76)
\end{aligned}$$

**Θέμα 5ο - 20 μονάδες: δειγματοληψία και φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**

Έστω το σήμα εισόδου

$$w(t) = 2\cos(2(a\cdot 10)\pi t) - \cos\left(2[(b+6)\cdot 10]\pi t + \frac{\pi}{c+3}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(110\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{77}$$

(α΄) **(5 μ.)** Βρείτε την ισχύ, $P_w$, και τη συχνότητα Nyquist για το παραπάνω σήμα.

(β΄) **(5 μ.)** Βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου $w[n]$ αν η συχνότητα δειγματοληψίας του είναι η $f_s = 240$ Hz.

(γ΄) **(10 μ.)** Αν το παραπάνω σήμα $w(t)$ περάσει από ένα σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = 120\mathrm{sinc}(60t)\cos(2\pi 65 t) \tag{78}$$

πόση είναι η ισχύς στην έξοδο του συστήματος και ποιός ο ρυθμός Nyquist για το σήμα εξόδου;

Λύση:

(α΄) Η ισχύς του $w(t)$ ισούται με

$$P_w = \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k^2}{2} \tag{79}$$

με $A_k$ τα πλάτη των ημιτονοειδών. Άρα

$$P_w = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{21}{8} \tag{80}$$

ενώ η συχνότητα Nyquist είναι

$$f_{max} = \mathbf{max}\{a \cdot 10, (b+6) \cdot 10, 55\} \text{ Hz} \tag{81}$$

(β΄) Θέτουμε $t := \frac{n}{f_s}$ και έχουμε

$$w[n] = 2\cos\left(a\pi\frac{n}{12}\right) - \cos\left([(b+6)]\pi\frac{n}{12} + \frac{\pi}{c+3}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(11\pi\frac{n}{24} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{82}$$

(γ΄) Το σύστημα με τη δοσμένη κρουστική απόκριση είναι ένα ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο με κεντρική συχνότητα $f_{center} = 65$ Hz και εύρος ζώνης $60$ Hz, δηλ. περνά αναλλοίωτες τις συχνότητες $(-95, -35) \cup (35, 95)$. Οπότε περνά σίγουρα το ημίτονο $-\frac{1}{2}\sin\left(110\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ και όποια άλλα, ανάλογα με τα ψηφία του ΑΜ σας. Τόσο η ισχύς όσο και ο ρυθμός Nyquist εξαρτώνται από το πόσες συνιστώσες της εισόδου περνούν στην έξοδο στην περίπτωσή σας.