ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

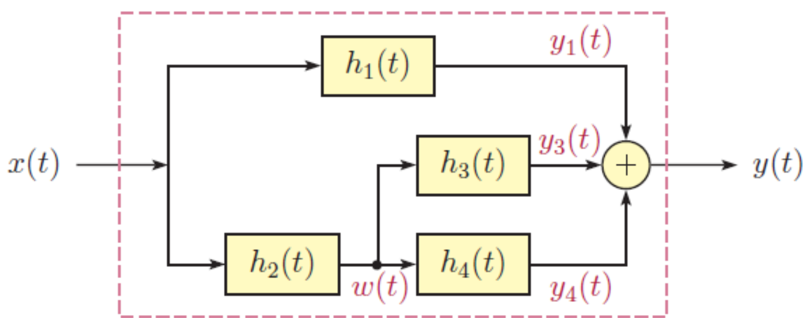
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Προφανώς δεν μπορούν να υπάρξουν εντελώς αναλυτικές λύσεις καθώς ο/η καθένας/καθεμιά σας είχε γραπτό θεμάτων που διέφερε με των υπολοίπων είτε στην αρίθμηση των θεμάτων είτε στα δεδομένα τους - είναι ένας τρόπος διασφάλισης της αδιαβλητότητας της εξέτασης: διαφορετικά θέματα για σχεδόν όλους/ες, στην ίδια όμως φιλοσοφία για να μην υπάρξουν αδικίες.

Σε αυτό το κείμενο θα συζητήσουμε για τις γενικές λύσεις των θεμάτων.

Η αρίθμηση των θεμάτων είναι τυχαία.

Θέμα 1ο - 25 μονάδες
Έστω το σύστημα του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: *Σχήμα Θέματος 1.*

(α΄) (**5 μ.**) Εκφράστε την κρουστική απόκριση του συστήματος ως συνάρτηση των επιμέρους κρουστικών αποκρίσεων των υποσυστημάτων.

(β΄) (**20 μ.**) Έστω

$$h_1(t) = (A + D)e^{-(B+1)t}u(t) \tag{1}$$
$$h_2(t) = u(t) - u(t-1) \tag{2}$$
$$h_3(t) = u(t) + u(t-1) \tag{3}$$
$$h_4(t) = \delta(t-1) \tag{4}$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h_{tot}(t)$ του συνολικού συστήματος (εκτελέστε όλες τις συνελίξεις που απαιτούνται).

Λύση:

(α΄) Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$h_{tot}(t) = h_1(t) + (h_2(t) * (h_3(t) + h_4(t))) \tag{5}$$

(β΄) Αντικαθιστώντας θα είναι

$$h_{tot}(t) = (A+D)e^{-(B+1)t}u(t) + [u(t) - u(t-1)] * [u(t) + u(t-1) + \delta(t-1)] \tag{6}$$

Βλέπετε ότι ο όρος $(A+D)e^{-(B+1)t}u(t)$ δε θα αλλάξει ως το τέλος, καθώς δεν εμπλέκεται σε κάποια συνέλιξη. Οπότε

$$\begin{aligned}
h_{tot}(t) &= (A+D)e^{-(B+1)t}u(t) + [u(t) - u(t-1)] * [u(t) + u(t-1) + \delta(t-1)] && (7)\\
&= (A+D)e^{-(B+1)t}u(t) + [u(t) - u(t-1)] * [u(t) + u(t-1)] + u(t-1) - u(t-2) && (8)\\
&= (A+D)e^{-(B+1)t}u(t) + u(t) * u(t) + u(t) * u(t-1) - u(t) * u(t-1) && (9)\\
&- u(t-1) * u(t-1) + u(t-1) - u(t-2) && (10)\\
&= (A+D)e^{-(B+1)t}u(t) + u(t) * u(t) - u(t-1) * u(t-1) + u(t-1) - u(t-2) && (11)
\end{aligned}$$

Είναι

$$u(t) * u(t) = tu(t) \tag{12}$$

και

$$u(t-1) * u(t-1) = (t-2)u(t-2) \tag{13}$$

και έτσι

$$\begin{aligned}
h_{tot}(t) &= (A+D)e^{-(B+1)t}u(t) + tu(t) - (t-2)u(t-2) + u(t-1) - u(t-2) && (14)\\
&= (A+D)e^{-(B+1)t}u(t) + tu(t) - tu(t-2) + 2u(t-2) + u(t-1) - u(t-2) && (15)\\
&= (A+D)e^{-(B+1)t}u(t) + tu(t) + u(t-1) - (t-1)u(t-2) && (16)
\end{aligned}$$

Θέμα 2ο - 25 μονάδες

Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = (A - (B+1)t)[u(t) - u((D+1)t - 1)] \tag{17}$$

Λύση: Αρχικά μπορούμε να γράψουμε ότι

$$u((D+1)t-1) = \begin{cases} 1, & (D+1)t - 1 > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & t > \frac{1}{D+1} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = u\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big) \tag{18}$$

και έτσι

$$x(t) = (A - (B+1)t)\Big[u(t) - u\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big)\Big] \tag{19}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
x(t) &= (A - (B+1)t)\Big[u(t) - u\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big)\Big] && (20)\\
&= Au(t) - Au\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big) - (B+1)tu(t) + (B+1)tu\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big) && (21)
\end{aligned}$$

με τους παρακάτω μετασχ. Laplace:

$$Au(t) \longleftrightarrow \frac{A}{s},\ \ \sigma > 0 \tag{22}$$

$$-Au\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big) \longleftrightarrow -\frac{A}{s}e^{-\frac{1}{D+1}s},\ \ \sigma > 0 \tag{23}$$

$$-(B+1)tu(t) \longleftrightarrow -(B+1)\frac{1}{s^2},\ \ \sigma > 0 \tag{24}$$

$$(B+1)tu\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big) \longleftrightarrow \ \ ?? \tag{25}$$

Ο τελευταίος μετασχηματισμός μπορεί να υπολογιστεί εύκολα αν γράψουμε το σήμα στο χρόνο ως

$$(B+1)tu\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big) = (B+1)\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big)u\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big) + \frac{B+1}{D+1}u\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big) \tag{26}$$

Έτσι, ο μετασχηματισμός γράφεται

$$(B+1)\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{D+1}s} + \Big[\frac{B+1}{D+1}\Big]\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{D+1}s},\ \ \sigma > 0 \tag{27}$$

Συνολικά

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{s} - \frac{A}{s}e^{-\frac{s}{D+1}} - (B+1)\frac{1}{s^2} + (B+1)\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{D+1}s} + \Big[\frac{B+1}{D+1}\Big]\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{D+1}s} && (28)\\ &= \frac{A}{s}(1 - e^{-\frac{s}{D+1}}) - \frac{B+1}{s^2}(1 - e^{-\frac{s}{D+1}}) + \Big[\frac{B+1}{D+1}\Big]\frac{1}{s}e^{-\frac{s}{D+1}} && (29)\\ &= \Big(1 - e^{-\frac{s}{D+1}}\Big)\Big(\frac{A}{s} - \frac{B+1}{s^2}\Big) + \Big[\frac{B+1}{D+1}\Big]\frac{1}{s}e^{-\frac{s}{D+1}} && (30) \end{aligned}$$

Ανάλογα με τις τιμές των σταθερών, μπορείτε να απλοποιήσετε περισσότερο την παραπάνω έκφραση. Το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού είναι όλο το $s-$επίπεδο γιατί το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας.

Εναλλακτικά, μπορείτε αν υπολογίσετε το μετασχηματισμό από τη σχέση

$$x(t) = (A - (B+1)t)\Big[u(t) - u\Big(t - \frac{1}{D+1}\Big)\Big] = \begin{cases} A - (B+1)t, & 0 < t < \frac{1}{D+1} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{31}$$

ως

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\frac{1}{D+1}} (A - (B+1)t)e^{-st}dt && (32)\\ &= A\int_0^{\frac{1}{D+1}} e^{-st}dt - (B+1)\int_0^{\frac{1}{D+1}} te^{-st}dt && (33)\\ &= -\frac{A}{s}e^{-st}\Big|_0^{\frac{1}{D+1}} - (B+1)e^{-st}\Big(\frac{-st-1}{s^2}\Big)\Big|_0^{\frac{1}{D+1}} && (34)\\ &= -\frac{A}{s}\Big(e^{-\frac{s}{D+1}} - 1\Big) - (B+1)\frac{1}{s^2}\left(e^{-\frac{s}{D+1}}\Big(-\frac{s}{D+1} - 1\Big) + 1\right) && (35)\\ &= \frac{A}{s}\Big(1 - e^{-\frac{s}{D+1}}\Big) - (B+1)\frac{1}{s^2}\left(-e^{-\frac{s}{D+1}}\frac{s}{D+1} - e^{-\frac{s}{D+1}} + 1\right) && (36)\\ &= \frac{A}{s}\Big(1 - e^{-\frac{s}{D+1}}\Big) + \Big[\frac{B+1}{D+1}\Big]\frac{1}{s}e^{-\frac{s}{D+1}} + \frac{B+1}{s^2}e^{-\frac{s}{D+1}} - \frac{B+1}{s^2} && (37)\\ &= \Big(1 - e^{-\frac{s}{D+1}}\Big)\Big(\frac{A}{s} - \frac{B+1}{s^2}\Big) + \Big[\frac{B+1}{D+1}\Big]\frac{1}{s}e^{-\frac{s}{D+1}} && (38) \end{aligned}$$

Τέλος, μπορούμε εξ' αρχής να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X(s/a) \tag{39}$$

μαζί με την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow X(s)e^{-st_0} \tag{40}$$

για το σήμα $u((D+1)t-1)$, που θα μας δώσει

$$u((D+1)t-1) \longleftrightarrow \frac{1}{D+1}\frac{1}{s}e^{-s}\Big|_{s:=\frac{s}{D+1}} = \frac{1}{D+1}\frac{1}{\frac{s}{D+1}}e^{-\frac{s}{D+1}} = \frac{1}{s}e^{-\frac{s}{D+1}} \tag{41}$$

και να συνεχίσετε όπως παραπάνω.

Θέμα 3ο - 25 μονάδες
Έστω η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος ως

$$h(t) = A - (B+1)e^{-(A+1)t}u(t) \tag{42}$$

(α΄) (**10 μ.**) Υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$.

(β΄) (**15 μ.**) Βρείτε την έξοδο του συστήματος αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα

$$x(t) = (D+1)e^{-(C+1)t}u(t) \tag{43}$$

Λύση:

(α΄) Από γνωστούς πίνακες έχουμε ότι

$$H(f) = F\{A - (B+1)e^{-(A+1)t}u(t)\} = A\delta(f) - \frac{B+1}{(A+1)+j2\pi f} \tag{44}$$

(β΄) Η είσοδος έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{D+1}{C+1+j2\pi f} \tag{45}$$

Από τη θεωρία συστημάτων έχουμε

$$\begin{aligned} Y(f) = H(f)X(f) &= \Big(A\delta(f) - \frac{B+1}{(A+1)+j2\pi f}\Big)\frac{D+1}{C+1+j2\pi f} && (46)\\ &= A\delta(f)\frac{D+1}{C+1+j2\pi f} - \frac{B+1}{A+1+j2\pi f}\frac{D+1}{C+1+j2\pi f} && (47)\\ &= \frac{A(D+1)}{C+1}\delta(f) - \frac{(B+1)(D+1)}{(A+1+j2\pi f)(C+1+j2\pi f)} && (48)\end{aligned}$$

λόγω της ιδιότητας

$$X(f)\delta(f-f_0) = X(f_0)\delta(f-f_0) \tag{49}$$

Ο δεύτερος όρος αναπτύσσεται σε μερικά κλάσματα ως

$$\frac{(B+1)(D+1)}{(A+1+j2\pi f)(C+1+j2\pi f)} = \frac{a}{A+1+j2\pi f} + \frac{b}{C+1+j2\pi f} \tag{50}$$

με a, b σταθερές που προκύπτουν από το ανάπτυγμα. Συνολικά, το σήμα εξόδου $y(t)$ θα είναι

$$y(t) = \frac{A(D+1)}{(C+1)} - ae^{-(A+1)t}u(t) - be^{-(C+1)t}u(t) \tag{51}$$

Θέμα 4ο - 20 μονάδες
Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$H(s) = \frac{As^2 + Bs + C}{Ds^2 + Cs + B + 1} \tag{52}$$

(α') **(5 μ.)** Σχεδιάστε όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά του συστήματος. Για ποιό πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα ευσταθές και αιτιατό;

(β') **(7.5 μ.)** Αν $H_i(s) = 1/H(s)$ είναι το περίφημο *αντίστροφο σύστημα*, είναι αυτό ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα; Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση.

(γ') **(7.5 μ.)** Γράψτε μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει το *αντίστροφο* σύστημα.

Λύση:

(α') Ανάλογα με τις σταθερές, μπορείτε να βρείτε τους πόλους και τα μηδενικά. Το σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό για ένα πεδίο σύγκλισης (αν υπάρχει) της μορφης $\sigma > \max\Re\{s_k\}$, με s_k τους πόλους που βρήκατε. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι πόλοι είναι μιγαδικοί συζυγείς αριθμοί και βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, οπότε πάντα θα υπάρχει πεδίο σύγκλισης αιτιατό και ευσταθές. Στις λίγες περιπτώσεις που πόλοι υπάρχουν επάνω στο φανταστικό άξονα, δεν υπάρχει ευσταθές σύστημα. Στις περιπτώσεις που ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι διαφορετικός από του παρανομαστή, πρέπει να υποδείξετε που υπάρχουν τα missing μηδενικά ή πόλοι (προφανώς στο άπειρο), και ανάλογα να προσαρμόσετε την απάντηση σας σχετικά με το πεδίο σύγκλισης (που δεν πρέπει να περιέχει πόλους).

(β') Το αντίστροφο σύστημα θα είναι της μορφής

$$H_{inv}(s) = \frac{Ds^2 + Cs + B + 1}{As^2 + Bs + C} \tag{53}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό για ένα πεδίο σύγκλισης (αν υπάρχει) της μορφης $\sigma > \max\Re\{s_k\}$, με s_k τα μηδενικά του αρχικού συστήματος. Ισχύουν οι ίδιες παρατηρήσεις με παραπάνω.

(γ') Η γενική μορφή της διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$H_{inv}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ds^2 + Cs + B + 1}{As^2 + Bs + C} \tag{54}$$

και μετά από πράξεις και ιδιότητες του μετασχηματισμού έχουμε

$$A\frac{d^2}{dt^2}y(t) + B\frac{d}{dt}y(t) + Cy(t) = D\frac{d^2}{dt^2}x(t) + C\frac{d}{dt}x(t) + (B+1)x(t) \tag{55}$$

Θέμα 5ο - 25 μονάδες
Για τα συστήματα του Σχήματος 2 (**με την είσοδο και τα ημίτονα να είναι εν γένει διαφορετικά για τον καθένα/καθεμιά από σας**), σχεδιάστε προσεκτικά τις συναρτήσεις $A(f)$, $B(f)$, $C(f)$, και $Y(f)$. Με ποιά συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να δειγματοληπτήσετε τα σήματα $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $y(t)$ για να μπορείτε να τα ανακτήσετε από τα δείγματά τους; Θεωρήστε τα σήματα ως βασικής ζώνης και θεωρήστε ιδανική δειγματοληψία.

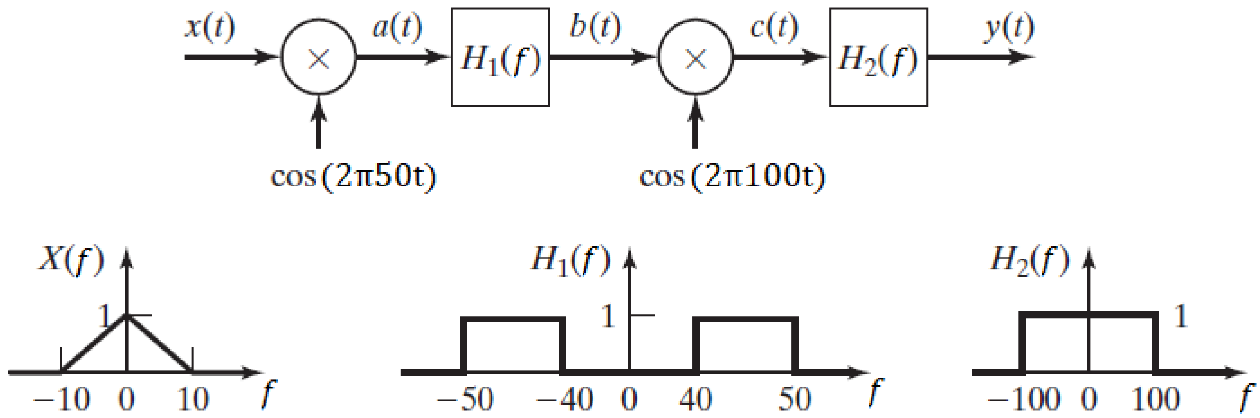
Λύση: Θα έχουμε διαδοχικά

$$a(t) = x(t)\cos(2\pi 50t) \longleftrightarrow A(f) = \frac{1}{2}X(f-50) + \frac{1}{2}X(f+50) \tag{56}$$

$$b(t) = a(t) * h_1(t) \longleftrightarrow B(f) = A(f)H_1(f) \tag{57}$$

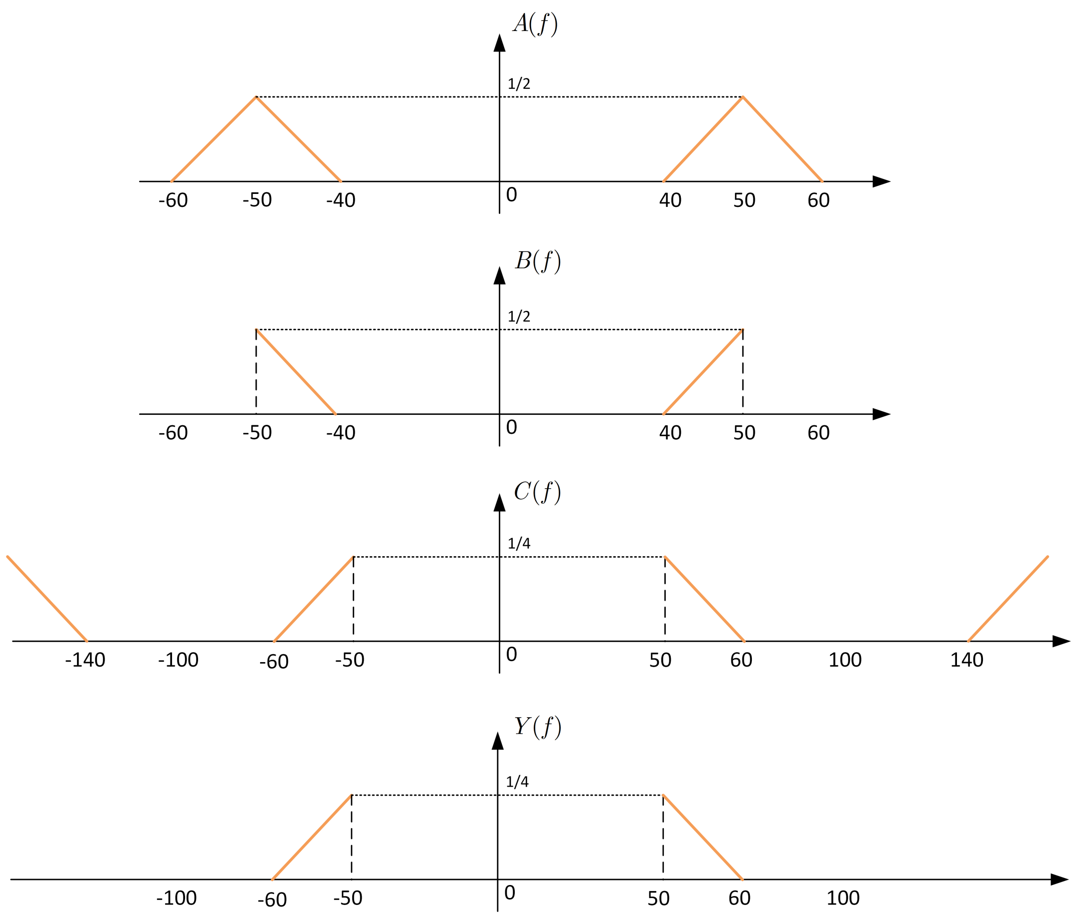
$$c(t) = b(t)\cos(2\pi 100t) \longleftrightarrow C(f) = \frac{1}{2}B(f-100) + \frac{1}{2}B(f+100) \tag{58}$$

$$y(t) = c(t) * h_2(t) \longleftrightarrow Y(f) = C(f)H_2(f) \tag{59}$$



Σχήμα 2: *Σχήμα Θέματος 5.*

αφού κάθε πολλαπλασιασμός ενος σήματος με ένα συνημίτονο μεταφέρει το φάσμα του σήματος από το μηδέν γύρω από τη συχνότητα του ημιτόνου (θετική και αρνητική). Τα σχήματα που ζητούνται φαίνονται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: *Σχήματα Θέματος 5.*

Εξετάζοντας τα σχήματα, βρίσκοντας εύκολα τις μέγιστες μη μηδενικές συχνότητές τους, και θεωρώντας τα σηματα ως βασικής ζώνης, μπορούμε να βρούμε ότι οι κατάλληλες συχνότητες ιδανικής δειγματοληψίας θα είναι

$$a(t) \longrightarrow f_s > 120 \text{ Hz} \tag{60}$$
$$b(t) \longrightarrow f_s > 100 \text{ Hz} \tag{61}$$
$$c(t) \longrightarrow f_s > 300 \text{ Hz} \tag{62}$$
$$y(t) \longrightarrow f_s > 120 \text{ Hz} \tag{63}$$