ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Διάρκεια: 3 ώρες

Ρήτρα τελικού: 4.0/10.0

Θέμα 1ο - Περιοδικά Σήματα - 15 μονάδες
Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 4\cos(2\pi 600t - \pi/3) + 2\sin(2\pi 900t + \pi/4) + \sin(2\pi 1200t) \tag{1}$$

(α') **(5 μ.)** Υπολογίστε την περίοδό του, T_0.

(β') **(10 μ.)** Ένα ιδανικό φίλτρο της μορφής $h(t) = \delta(t) - 600\cos(2\pi 550t)\mathrm{sinc}(300t)$ δέχεται ως είσοδο το παραπάνω σήμα, και η έξοδος $y(t)$ πολλαπλασιάζεται με το σήμα $z(t) = \delta(t+1)$. Δείξτε ότι

$$w(t) = y(t)z(t) = \sqrt{2}\delta(t+1) \tag{2}$$

<u>Λύση:</u>

(α') Είναι $f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{600, 9001200\} = 300$ Hz, οπότε $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{300}$ Hz.

(β') Σύμφωνα με τη θεωρία και το τυπολόγιο των ιδανικών φίλτρων, το ιδανικό φίλτρο είναι ζωνοφρακτικό φίλτρο με $f_{c_1} = \pm 400$ Hz και $f_{c_2} = \pm 700$ Hz. Άρα θα κοπούν στην έξοδο όσες συχνότητες ανήκουν στα διαστήματα $[400, 700]$ και $[-700, -400]$ Hz. Οπότε η έξοδος θα ειναι της μορφής

$$y(t) = 2\sin(2\pi 900t + \pi/4) + \sin(2\pi 1200t) \tag{3}$$

Ο πολλαπλασιασμός με το $z(t)$ δίνει

$$\begin{aligned} w(t) = y(t)z(t) &= \big(2\sin(2\pi 900t + \pi/4) + \sin(2\pi 1200t)\big)\delta(t+1) && (4)\\ &= \left(2\sin(2\pi 900t + \pi/4)\Big|_{t=-1} + \sin(2\pi 1200t)\Big|_{t=-1}\right)\delta(t+1) && (5)\\ &= \left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0\right)\delta(t+1) = \sqrt{2}\delta(t+1) && (6) \end{aligned}$$

Θέμα 2ο - Διαφορικές Εξισώσεις - 25 μονάδες
Δίνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t) \tag{7}$$

(α') **(5 μ.)** Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$.

(β΄) (**20 μ.**) Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h(t) = e^{-2t}\sin(t)u(t) \tag{8}$$

Λύση:

(α΄) Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη έχουμε

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 5Y(s) = X(s) \tag{9}$$

$$(s^2 + 4s + 5)Y(s) = X(s) \tag{10}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5} \tag{11}$$

Οι ρίζες του παρονομαστή είναι οι $s_{1,2} = -2 \pm j$, άρα $\Re\{s\} > -2$, εφ'οσον το σύστημα είναι αιτιατό.

(β΄) Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5} = \frac{1}{s^2 + 4s + 4 + 1} = \frac{1}{(s+2)^2 + 1},\ \ \Re\{s\} > -2 \tag{12}$$

και από το τυπολόγιο Μετασχηματισμών Laplace έχουμε

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)^2 + 1},\ \ \Re\{s\} > -2 \longleftrightarrow h(t) = e^{-2t}\sin(t)u(t) \tag{13}$$

Θέμα 3ο - Μετασχηματισμός Fourier - 20 μονάδες

i. (**10 μ.**) Δείξτε ότι για το μετασχ. Fourier που δίνεται ως

$$X(f) = -2e^{-j2\pi f}\frac{j2\pi f - 2}{-j2\pi f + 2} \tag{14}$$

ισχύει ότι

(α΄) το μέτρο $|X(f)|$ είναι σταθερή συνάρτηση του f.

(β΄) η φάση $\angle X(f)$ είναι γραμμική συνάρτηση του f.

ii. (**10 μ.**) Αν ο μετασχ. Fourier $X(f)$ είναι πραγματική και θετική συνάρτηση για κάθε $f \in \Re$, τότε αποδείξτε ότι για τον αντίστροφο μετασχ. Fourier $x(t)$ ισχύει

$$|x(t)| \leq x(0) \tag{15}$$

Λύση:

i. Παρατηρούμε ότι

$$X(f) = -2e^{-j2\pi f}\frac{j2\pi f - 2}{-j2\pi f + 2} = 2e^{-j2\pi f}\frac{j2\pi f - 2}{j2\pi f - 2} = 2e^{-j2\pi f} \tag{16}$$

(α΄) Για το μέτρο

$$|X(f)| = |2e^{-j2\pi f}| = 2 \tag{17}$$

(β') Για τη φάση θα έχουμε

$$\angle X(f) = \angle e^{-j2\pi f} = -2\pi f \tag{18}$$

ii. Έχουμε

$$|x(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f) e^{j2\pi ft}| df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)| df \tag{19}$$

εφόσον $|e^{j\theta}| = 1$, για κάθε θ. Αφού $X(f) \in \Re$ και $X(f) > 0 \ \forall f$, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$|x(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \Big|_{t=0} = x(t) \Big|_{t=0} = x(0) \tag{20}$$

Θέμα 4ο - ΓΧΑ Συστήματα και Μετασχ. Laplace - 30 μονάδες

Έστω ότι σας δίνονται οι ακόλουθες πληροφορίες για ένα *ευσταθές και αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ και ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$:

(α') $H(1) = 1/5$

(β') Όταν η είσοδος είναι $x(t) = u(t)$, η έξοδος είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

(γ') Όταν η είσοδος είναι $x(t) = tu(t)$, η έξοδος δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

(δ') Το σήμα $p(t) = \frac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας.

(ε') Στο άπειρο, το $H(s)$ έχει ακριβώς ένα μηδενικό.

Υποθέτοντας ότι το $H(s)$ είναι της μορφής $H(s) = A\dfrac{N(s)}{D(s)}$, με $A \in \Re$ και $N(s)$, $D(s)$ πολυώνυμα του s, βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και την περιοχή σύγκλισής της.

Λύση:

- Το σήμα $p(t)$ μπορεί να γραφεί στο χώρο του Laplace ως

$$P(s) = s^2 H(s) + 2sH(s) + 2H(s) \Longrightarrow H(s) = \frac{P(s)}{s^2 + 2s + 2} \tag{21}$$

Αφού το $P(s)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε δε θα έχει πόλους στο μιγαδικό επίπεδο, και άρα θα είναι της μορφής

$$P(s) = AQ(s) = A\prod_{i=1}^{M}(s - s_i) \tag{22}$$

με s_i τα μηδενικά του σήματος αυτού. Άρα το $H(s)$ είναι της μορφής

$$H(s) = \frac{A\prod_{i=1}^{M}(s - s_i)}{s^2 + 2s + 2} \tag{23}$$

- Αφού το σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό, το $H(s)$ θα έχει πεδίο σύγκλισης $\Re\{s\} > a$, με $a < 0$ να είναι ο πόλος με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος. Επίσης, όλοι οι πόλοι θα βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Έτσι, ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται σε αυτό το πεδίο σύγκλισης. Αφού η έξοδος είναι απολύτως ολοκληρώσιμη όταν

$$x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(s) = 1/s, \;\; \Re\{s\} > 0 \tag{24}$$

τότε σημαίνει ότι η έξοδος έχει πεδίο σύγκλισης που περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Η έξοδος εκφράζεται ως

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{A\prod_{i=1}^{M}(s-s_i)}{s(s^2+2s+2)} \tag{25}$$

όμως ο πόλος στη θέση $s = 0$ πρέπει να ακυρώνεται από κάποιον όρο του αριθμητή

$$A\prod_{i=1}^{M}(s-s_i)$$

Αν αυτό δε συνέβαινε, η έξοδος δε θα ήταν απολύτως ολοκληρώσιμη (αφού υπάρχει αυτός ο πόλος επάνω στον φανταστικό άξονα). Άρα ο αριθμητής

$$A\prod_{i=1}^{M}(s-s_i)$$

έχει ένα τουλάχιστον ένα μηδενικό στο $s = 0$, είναι δηλ. της μορφής

$$As^n\prod_{i=1}^{N}(s-s_i)$$

με N το πλήθος των υπόλοιπων μηδενικών του αριθμητή.

- Επίσης, αφού η έξοδος δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη όταν

$$x(t) = tu(t) \longleftrightarrow X(s) = 1/s^2, \;\; \Re\{s\} > 0 \tag{26}$$

τότε σημαίνει ότι η έξοδος έχει πεδίο σύγκλισης που **δεν** περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Η έξοδος εκφράζεται ως

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{H(s)}{s^2} = \frac{As^n\prod_{i=1}^{N}(s-s_i)}{s^2(s^2+2s+2)} \tag{27}$$

όμως ο διπλός πόλος στη θέση $s = 0$ **δεν** πρέπει να ακυρώνεται εξ' ολοκλήρου από κάποιον όρο του αριθμητή $P(s)$. Αν αυτό συνέβαινε, η έξοδος θα ήταν ξανά απολύτως ολοκληρώσιμη, αφού δε θα υπήρχε κανένας πόλος στο $s = 0$. Άρα ο αριθμητής έχει *μόνο* ένα μηδενικό στο $s = 0$, είναι δηλ. της μορφής

$$As\prod_{i=1}^{N}(s-s_i)$$

με s_i πιθανά άλλα μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο.

- Επιπλέον, αφού υπάρχει ένα μόνο μηδενικό στο άπειρο, τότε ο βαθμός του αριθμητή θα είναι ακριβώς κατά ένα μεγαλύτερος από αυτόν του παρονομαστή. Αφού ο παρονομαστής είναι δευτεροβάθμιος, ο αριθμητής θα είναι πρωτοβάθμιος, οπότε τελικά $P(s) = As$. Οπότε τελικά το σύστημα γράφεται ως

$$H(s) = A\frac{s}{s^2+2s+2} \tag{28}$$

- Αφού $H(1) = 1/5$, θα είναι $H(1) = \frac{A}{5}$ και άρα $A = 1$. Οπότε τελικά

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} \tag{29}$$

με πεδίο σύγκλισης $\Re\{s\} > -1$, αφού λύνοντας το τριώνυμο του παρονομαστή, οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $s_{1,2} = -1 \pm j$.

Θέμα 5ο - Δειγματοληψία - 20 μονάδες

Θεωρήστε ένα πραγματικο περιοδικό σήμα που εκφράζεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(2\pi k t) \tag{30}$$

Έστω $\hat{x}(t)$ ένα σήμα που προέρχεται από ιδανική δειγματοληψία του παραπάνω σήματος, με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 2/11$ δευτερόλεπτα.

(α΄) **(2.5 μ.)** Ποιά η θεμελιώδης συχνότητα f_0 του σήματος $x(t)$;

(β΄) **(5 μ.)** Συμβαίνει το φαινόμενο του aliasing κατά τη δειγματοληψία;

(γ΄) **(10 μ.)** Αν το σήμα $\hat{x}(t)$ περάσει μέσα από ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 3_+$ Hz[1], ποιά είναι η έξοδος του φίλτρου;

(δ΄) **(2.5 μ.)** Επαληθεύστε ή διαψεύστε την ακόλουθη πρόταση: *"Η έξοδος του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου είναι μια Σειρά Fourier με θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 0.5$ Hz"*. Σε κάθε περίπτωση, δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση:

(α΄) Από την εξίσωση της Σειράς παρατηρούμε ότι $f_0 = 1$ Hz.

(β΄) Ναι, γιατί $2f_{max} = 2 \times 3 = 6$ Hz και η συχνότητα δειγματοληψίας είναι

$$f_s = 1/T_s = 11/2 = 5.5 \,\text{Hz} \tag{31}$$

που είναι μικρότερη της $2f_{max}$.

(γ΄) Λόγω του aliasing, θα υπάρχουν ψευδώνυμες συχνότητες στο αρχικό φάσμα (aliasing). Γύρω από τη συχνότητα f_s θα βρίσκονται οι συχνότητες

$$f_s \pm 1 = 5.5 \pm 1, \;\; f_s \pm 2 = 5.5 \pm 2, \;\; f_s \pm 3 = 5.5 \pm 3$$

Όμοια ακριβώς και για τη συχνότητα $-f_s$. Άρα στο αρχικό φάσμα που περιελάμβανε το εύρος συχνοτήτων $[-3, 3]$ Hz προέκυψε η συχνότητα $f = \pm 2.5$ Hz, από τις επικαλύψεις των γειτονικών φασμάτων που προκύπτουν λόγω της μη τήρησης του κριτηρίου του Shannon. Το χαμηλοπερατό φίλτρο θα κρατήσει τις συχνότητες στο διάστημα $[-3, 3]$ Hz. Οι συχνότητες αυτές είναι οι

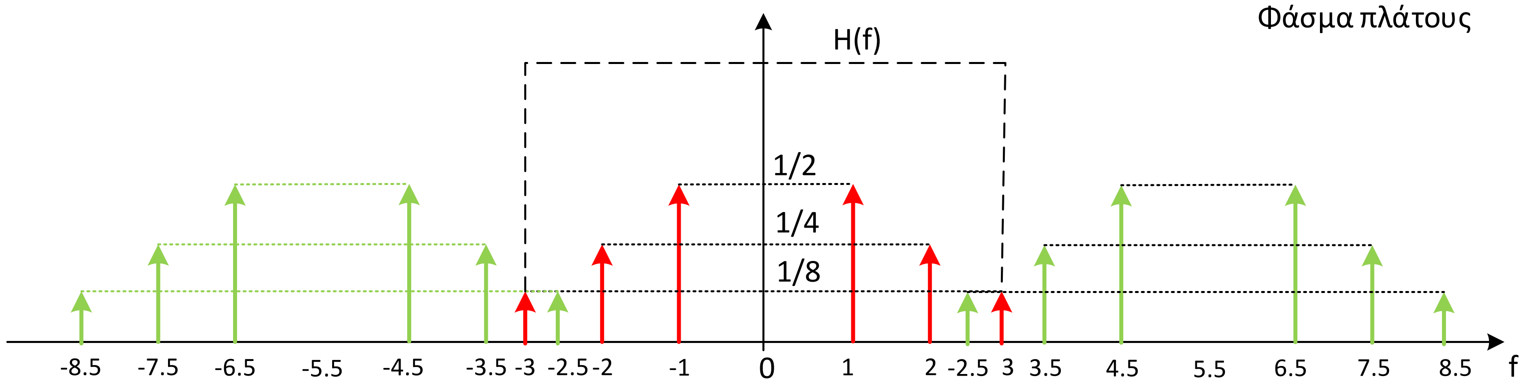
$$\pm 1, \pm 2, \pm 2.5, \pm 3 \;\text{ Hz}$$

με πλάτη $1/2, 1/4, 1/8, 1/8$. Άρα η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{4}\sin(2\pi 2t) + \frac{1}{8}\sin(2\pi 2.5t) + \frac{1}{8}\sin(2\pi 3t) \tag{32}$$

Όλη η παραπάνω συζήτηση φαίνεται σχηματικά στο φάσμα πλάτους του Σχήματος 1.

[1] Το $_+$ δηλώνει ότι συμπεριλαμβάνεται η συχνότητα $f = 3$ Hz στο φίλτρο.



Σχήμα 1: Σχήμα Θέματος 5.

(δ΄) Οι συχνότητες στο σήμα εξόδου είναι οι $1, 2, 2.5, 3$, οι οποίες έχουν Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη το 0.5. Άρα η Σχέση (32) αποτελεί ένα περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0 = 2$ s, και οι συχνότητες των επιμέρους ημιτόνων αποτελούν ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας

$$f_0 = 1/T_0 = 0.5 \text{ Hz}$$

Άρα πράγματι η πρόταση είναι αληθής.

Συνολικές Μονάδες: 110 - Άριστα: 100

Καλή Επιτυχία!