

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΕΜΒΟΛΙΜΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Διάρκεια: 3 ώρες

Θέμα 1ο - Περιοδικά Σήματα - 20 μονάδες

Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 4 \cos(2\pi 600t - \pi/3) + 2 \sin(2\pi 900t + \pi/8) + \sin(2\pi 1200t) \quad (1)$$

(α) **(2.5 μ.)** Υπολογίστε την περίοδο του, T_0 .

(β) **(15 μ.)** Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος.

(γ) **(2.5 μ.)** Ποιά είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας f_s η οποία απαιτείται για να μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως και ακριβώς το σήμα $x(t)$ από τα δείγματά του;

Θέμα 2ο - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier - 25 μονάδες

Βρείτε τον *αιτιατό* αντίστροφο μετασχ. Fourier $x(t)$ του

$$X(f) = \frac{4 + 10(j2\pi f)}{-(2\pi f)^2 + 6(j2\pi f) + 8} \quad (2)$$

Θέμα 3ο - Συστήματα - 30 μονάδες

(α) **(10 μ.)** Ως γνωστόν, η φάση $\angle X(f)$ ενός μετασχηματισμού Fourier $X(f)$ δίνεται ως

$$\angle X(f) = \tan^{-1} \frac{X_I(f)}{X_R(f)} \quad (3)$$

με $X_R(f)$, $X_I(f)$ το πραγματικό και φανταστικό μέρος του $X(f)$. Δείξτε ότι για $X(f) = a - e^{-j2\pi f}$, ισχύει

$$\angle X(f) = \tan^{-1} \frac{\sin(2\pi f)}{a - \cos(2\pi f)} \quad (4)$$

με $a \in \mathbb{R}$.

(β) **(10 μ.)** Βρείτε το μέτρο $|H(f)|$ και τη φάση $\angle H(f)$ του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την απόκριση σε συχνότητα

$$H(f) = e^{j2\pi f} \frac{2 - e^{j2\pi f}}{2 - e^{-j2\pi f}} \quad (5)$$

(γ) **(10 μ.)** Η *καθυστέρωση ομάδας* $\tau(f)$ είναι μια συχνά χρησιμοποιούμενη μετρική στην επεξεργασία σήματος, και σχετίζεται με την αρνητική παράγωγο της συνάρτησης φάσης. Ο ορισμός της καθυστέρησης ομάδας δίνεται ως

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \angle H(f) \quad (6)$$

Βρείτε την καθυστέρωση ομάδας του παραπάνω συστήματος.

Δίνεται ότι

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1}(g(x)) = \frac{d}{dx} g(x) \cdot \frac{1}{1 + g^2(x)}$$

Θέμα 4ο - Συστήματα στο χώρο του Laplace - 25 μονάδες

Δίνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) \quad (7)$$

(α) **(10 μ.)** Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$.

(β) **(12.5 μ.)** Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

(γ) **(2.5 μ.)** Μπορείτε να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $H(f)$ του σήματος μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, βρείτε τον. Αν όχι, αιτιολογήστε.

Καλή Επιτυχία !