ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Διάρκεια: 3 ώρες - Ημερομηνία: 30/5/2016

Θέμα 1ο - Περιοδικά Σήματα - 20 μονάδες
Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 4\cos(2\pi 400t - \pi/3) + 2\cos(2\pi 900t + \pi/8) + \cos(2\pi 1200t)$$

(α΄) **(2.5 μ.)** Υπολογίστε την περίοδό του, T_0.

(β΄) **(5 μ.)** Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος.

(γ΄) **(10 μ.)** Αν το $x(t)$ δίνεται ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = 2000\mathrm{sinc}(2000t)$$

να βρείτε την έξοδο $y(t)$.

(δ΄) **(2.5 μ.)** Ποιά είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας f_s η οποία απαιτείται για να μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως και ακριβώς το σήμα $x(t)$ από τα δείγματά του;

Λύση:

(α΄) Η θεμελιώδης συχνότητα δίνεται ως

$$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{f_1, f_2, f_3\} = \text{Μ.Κ.Δ}\{400, 900, 1200\} = 100 \text{ Hz} \tag{1}$$

και άρα

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{100} \text{ s} = 0.01 \text{ s} \tag{2}$$

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= 4\cos(2\pi 400t - \pi/3) + 2\cos(2\pi 900t + \pi/8) + \cos(2\pi 1200t) \\ &= 2e^{-j\pi/3}e^{j2\pi 400t} + 2e^{j\pi/3}e^{-j2\pi 400t} + e^{j\pi/8}e^{j2\pi 900t} + e^{-j\pi/8}e^{-j2\pi 900t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 1200t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 1200t} \end{aligned} \tag{3}$$

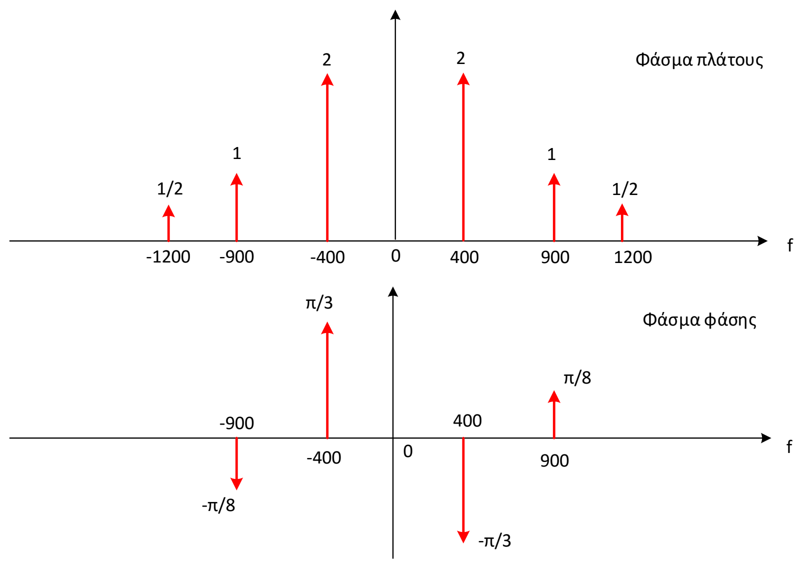
οπότε το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνονται στο Σχήμα 1.

(γ΄) Είναι

$$h(t) = 2000\mathrm{sinc}(2000\mathrm{t}) \longleftrightarrow \mathrm{H(f)} = \mathrm{rect}\Big(\frac{\mathrm{t}}{2000}\Big) \tag{4}$$

που είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 1000$ Hz. Οπότε οι συχνότητες μεγαλύτερες από 1000 Hz της εισόδου θα χαθούν, και θα παραμείνουν ανεπηρέαστες οι συχνότητες μικρότερες από 1000 Hz. Οπότε

$$y(t) = 4\cos(2\pi 400t - \frac{\pi}{3}) + 2\cos(2\pi 900t + \frac{\pi}{8}) \tag{5}$$



Σχήμα 1: Φάσματα πλάτους και φάσης Θέματος 1.

(δ΄) Η μέγιστη συχνότητα που υπάρχει στο σήμα είναι η $x(t) = 1200$ Hz, άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι η $f_s = 2 \times 1200 = 2400$ Hz.

Θέμα 2ο - Ανάλυση Fourier και Συστήματα - 15 μονάδες

Έστω το *ευσταθές* σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}x(t) - x(t)$$

(α΄) **(8 μ.)** Δείξτε ότι

$$|H(f)| = 1, \ \forall f \quad \text{και} \quad \theta_h(f) = \tan^{-1}\left(\frac{4\pi f}{4\pi^2 f^2 - 1}\right)$$

Τέτοια συστήματα ονομάζονται - όπως ξέρετε από τη θεωρία σας - all-pass συστήματα.

(β΄) **(7 μ.)** Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος δίνεται ως

$$h(t) = \delta(t) - 2e^{-t}\epsilon(t)$$

<u>Λύση:</u>

(α΄) Είναι

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}x(t) - x(t) \longleftrightarrow j2\pi f Y(f) + Y(f) = j2\pi f X(f) - X(f) \tag{6}$$

$$Y(f)(j2\pi f + 1) = X(f)(j2\pi f - 1) \tag{7}$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{j2\pi f - 1}{j2\pi f + 1} \tag{8}$$

Το μέτρο της απόκρισης σε συχνότητα είναι

$$|H(f)| = \frac{|j2\pi f - 1|}{|j2\pi f + 1|} = \frac{\sqrt{4\pi^2 f^2 + 1}}{\sqrt{4\pi^2 f^2 + 1}} = 1, \ \forall f \tag{9}$$

ενώ για τη φάση πρέπει να γράψουμε το $H(f)$ ως

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{j2\pi f - 1}{j2\pi f + 1} \\ &= \frac{-(1-j2\pi f)(1-j2\pi f)}{|1+j2\pi f|^2} \\ &= \frac{4\pi^2 f^2 - 1}{1+4\pi^2 f^2} + j\frac{4\pi f}{1+4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

οπότε

$$\theta_h(f) = \tan^{-1}\frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}} = \tan^{-1}\frac{4\pi f}{4\pi^2 f^2 - 1} \tag{10}$$

(β΄) Είναι

$$H(f) = j2\pi f\frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{j2\pi f + 1} \longleftrightarrow h(t) = \frac{d}{dt}e^{-t}\epsilon(t) - e^{-t}\epsilon(t) \tag{11}$$

$$= -e^{-t}\epsilon(t) + e^{-t}\delta(t) - e^{-t}\epsilon(t) \tag{12}$$

$$= \delta(t) - 2e^{-t}\epsilon(t) \tag{13}$$

Θέμα 3ο - Συσχέτιση - 25 μονάδες

Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων ενέργειας

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-2t}\cos(t)\epsilon(t) \\ y(t) &= e^{-2t}\epsilon(t) \end{aligned}$$

Σας δίνεται ότι $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} e^{at}\cos(t)dt = \frac{e^{at}}{a^2+1}\Big(a\cos(t)+\sin(t)\Big)\Big]_{t_1}^{t_2}$

Λύση:

Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}\cos(t)\epsilon(t)e^{-2(t+\tau)}\epsilon(t+\tau)dt \tag{14}$$

$$= e^{-2\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t}\cos(t)\epsilon(t)\epsilon(t+\tau)dt \tag{15}$$

Όμως

$$\epsilon(t)\epsilon(t+\tau) = \begin{cases} 1, & t\geq 0 \text{ και } t \geq -\tau \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{16}$$

Άρα έχουμε τις περιπτώσεις:

- $-\tau \leq 0 \Longrightarrow \tau \geq 0$:

$$\phi_{xy}(\tau) = e^{-2\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t}\cos(t)\epsilon(t)\epsilon(t+\tau)dt \tag{17}$$

$$= e^{-2\tau}\int_{0}^{+\infty} e^{-4t}\cos(t)\epsilon(t)\epsilon(t+\tau)dt \tag{18}$$

$$= \frac{1}{17}e^{-2\tau}\Big(e^{-4t}(-4\cos(t)+\sin(t))\Big)\Big|_0^{+\infty} \tag{19}$$

$$= \frac{4}{17}e^{-2\tau} \tag{20}$$

- $-\tau > 0 \Longrightarrow \tau < 0$:

$$\phi_{xy}(\tau) = e^{-2\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t}\cos(t)\epsilon(t)\epsilon(t+\tau)dt \tag{21}$$

$$= e^{-2\tau}\int_{-\tau}^{+\infty} e^{-4t}\cos(t)\epsilon(t)\epsilon(t+\tau)dt \tag{22}$$

$$= \frac{1}{17}e^{-2\tau}\Big(e^{-4t}(-4\cos(t)+\sin(t))\Big)\Big|_{-\tau}^{+\infty} \tag{23}$$

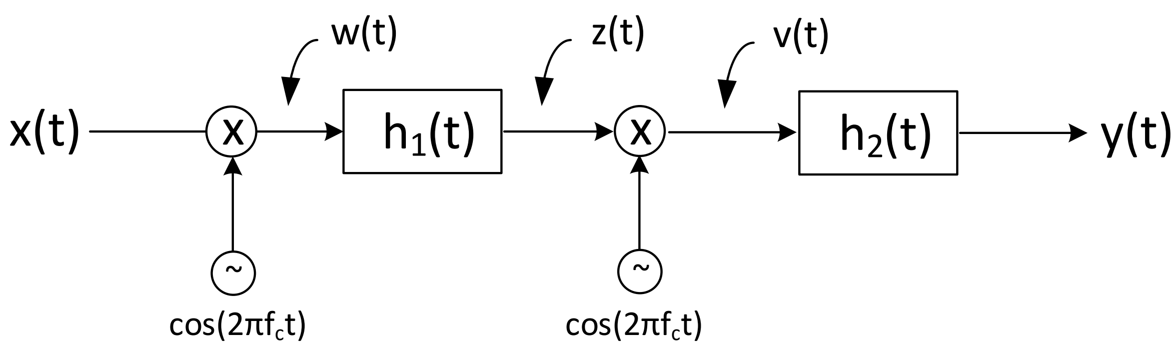
$$= \frac{4}{17}e^{2\tau}\cos(\tau) + \frac{1}{17}e^{2\tau}\sin(\tau) \tag{24}$$

Άρα συνολικά

$$\phi_{xy}(\tau) = \begin{cases} \frac{4}{17}e^{-2\tau}, & \tau \geq 0 \\ \frac{4}{17}e^{2\tau}\cos(\tau) + \frac{1}{17}e^{2\tau}\sin(\tau), & \tau < 0 \end{cases} \tag{25}$$

Θέμα 4ο - Μετασχ. Fourier - 30 μονάδες

Έστω η διάταξη του Σχήματος 2, με το σήμα εισόδου $x(t)$ να έχει μετασχ. Fourier όπως στο Σχήμα 3.

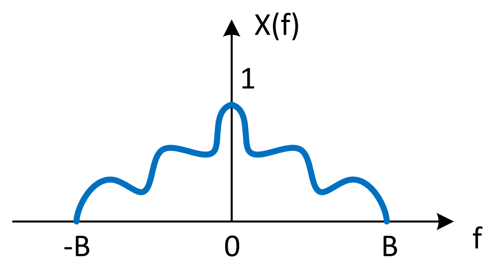


Σχήμα 2: Διάταξη Θέματος 4.

Τα συστήματα $h_i(t)$ δίνονται ως:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= 4f_c\text{sinc}(2f_ct) \\ h_2(t) &= 8B\text{sinc}(2Bt) \end{aligned}$$

και η συχνότητα f_c είναι $f_c \gg B$.



Σχήμα 3: Σήμα $X(f)$ Θέματος 4.

(α') **(5 μ.)** Σχεδιάστε το σήμα $W(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_1(t)$ συναρτήσει του $X(f)$.

(β') **(5 μ.)** Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier του συστήματος $h_1(t)$.

(γ') **(5 μ.)** Σχεδιάστε το σήμα $Z(f)$ που προκύπτει ως έξοδος από το σύστημα $h_1(t)$.

(δ') **(5 μ.)** Σχεδιάστε το σήμα $V(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_2(t)$.

(ε΄) **(5 μ.)** Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier, $H_2(f)$,του δεύτερου συστήματος, $h_2(t)$.

(στ΄) **(5 μ.)** Σχεδιάστε την τελική έξοδο της όλης διάταξης στο χώρο της συχνότητας, $Y(f)$, και γράψτε τη μαθηματική μορφή του $y(t)$ συναρτήσει του $x(t)$.

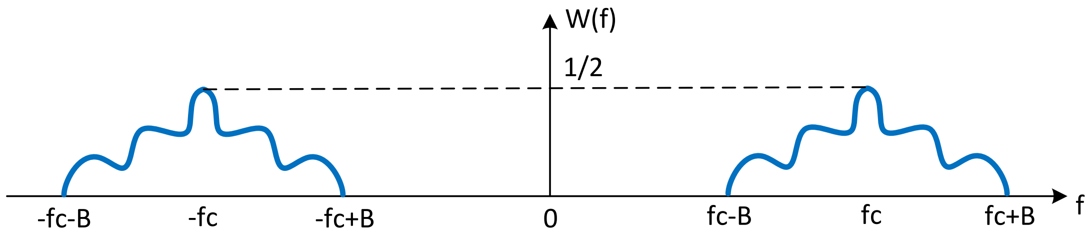
Λύση:

(α΄) Είναι

$$w(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c)\right) \tag{26}$$

$$= \frac{1}{2}X(f - f_c) + \frac{1}{2}X(f + f_c) \tag{27}$$

Το φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.

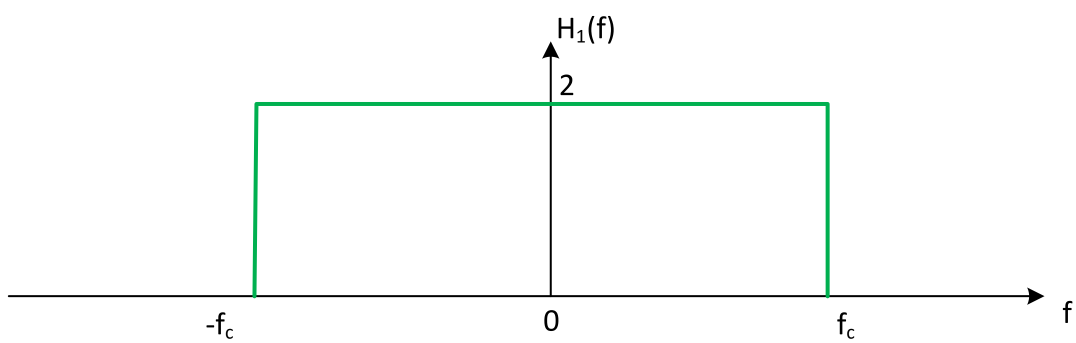


Σχήμα 4: Φάσμα $W(f)$.

(β΄) Είναι

$$h_1(t) = 4f_c\mathrm{sinc}(2\mathrm{f_c t}) \longleftrightarrow \mathrm{H_1(f) = 2rect}\left(\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{2f_c}}\right) \tag{28}$$

το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 5.

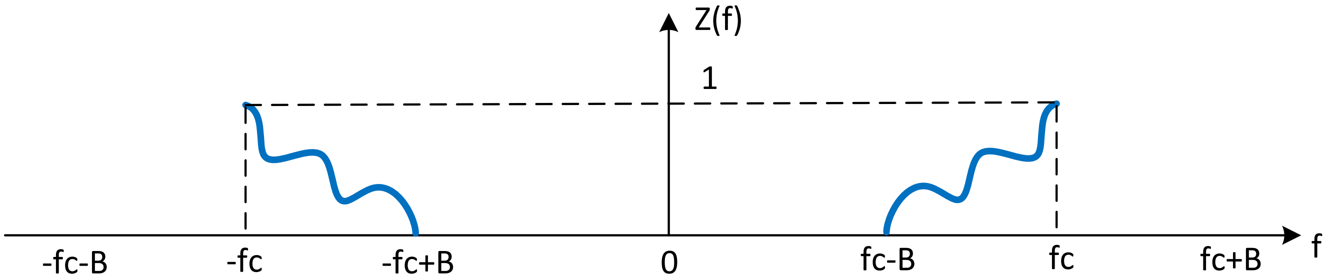


Σχήμα 5: Φάσμα $H_1(f)$.

(γ΄) Είναι

$$Z(f) = W(f)H_1(f) = \frac{1}{2}X(f - f_c)H_1(f) + \frac{1}{2}X(f + f_c)H_1(f) \tag{29}$$

που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα κομμάτι του αρχικού φάσματος $W(f)$ όπως στο Σχήμα 6, αφού το $H_1(f)$ είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο.

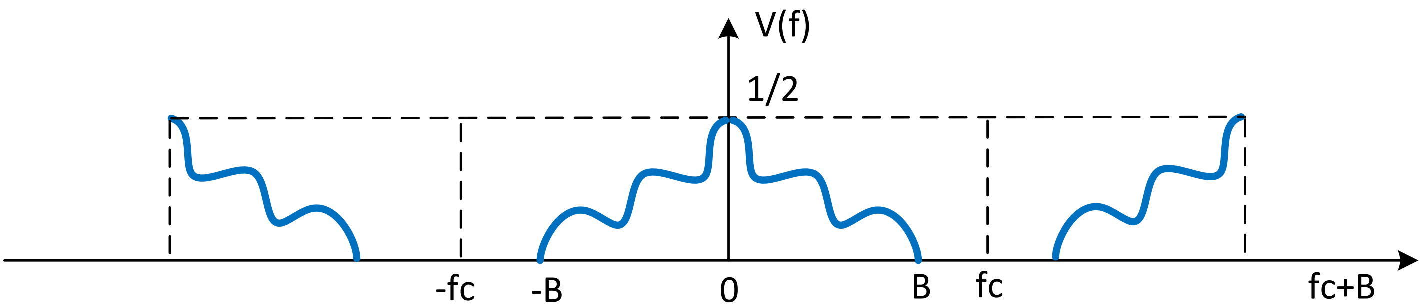


Σχήμα 6: Φάσμα $Z(f)$.

(δ') Το $V(f)$ θα είναι το φάσμα του $Z(f)$ μετατοπισμένο στις συχνότητες $\pm f_c$, δηλ.

$$v(t) = z(f)\cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow V(f) = \frac{1}{2}Z(f - f_c) + \frac{1}{2}Z(f + f_c) \tag{30}$$

όπως στο Σχήμα 7.

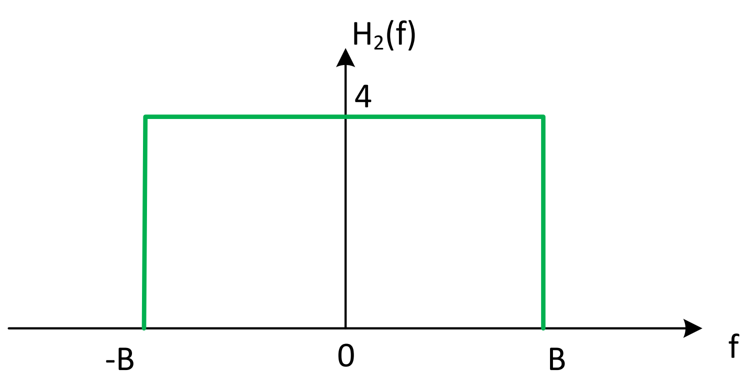


Σχήμα 7: Φάσμα $V(f)$.

(ε') Είναι

$$h_2(t) = 8B\mathrm{sinc}(2\mathrm{Bt}) \longleftrightarrow \mathrm{H}_2(\mathrm{f}) = 4\mathrm{rect}\left(\frac{\mathrm{f}}{2\mathrm{B}}\right) \tag{31}$$

το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 8.

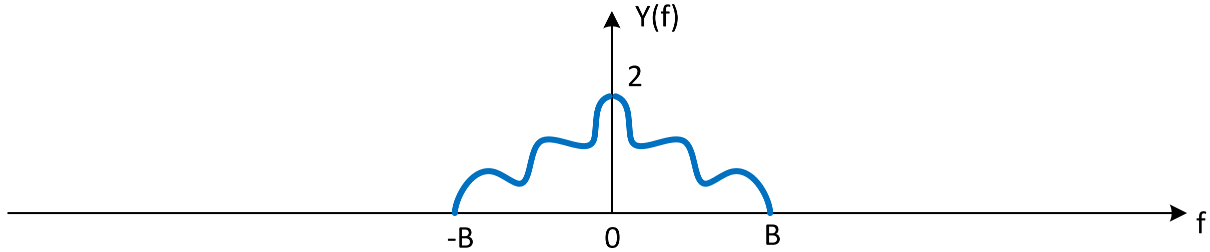


Σχήμα 8: Φάσμα $H_2(f)$.

(στ') Η έξοδος $Y(f)$ θα είναι της μορφής

$$Y(f) = V(f)H_2(f) = \frac{1}{2}Z(f-f_c)H_2(f) + \frac{1}{2}Z(f+f_c)H_2(f) \tag{32}$$

όπως στο Σχήμα 9, αφού το $H_2(f)$ είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο. δηλ. είναι ίδιο με το αρχικό σήμα



Σχήμα 9: Φάσμα $Y(f)$.

εισόδου $x(t)$, πολλαπλασιασμένο επί 2, δηλ.

$$y(t) = 2x(t) \tag{33}$$

Θέμα 5ο - Συστήματα στο χώρο του Laplace - 25 μονάδες

Ένα *αιτιατό* σύστημα έχει ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$. Το σύστημα ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- Το σήμα
$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 3\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t)$$
ισούται με μια κατανομή Δέλτα αγνώστου πλάτους, $a\delta(t)$, και μια μοναδιαία βηματική συνάρτηση $\epsilon(t)$.
- Ισχύει $H(1) = \frac{1}{2}$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.

Λύση:

Είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 3\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) = a\delta(t) + \epsilon(t) \longleftrightarrow s^2H(s) + 3sH(s) + 2H(s) = a + \frac{1}{s} \tag{34}$$

$$(s^2+3s+2)H(s) = \frac{as+1}{s} \tag{35}$$

$$H(s) = \frac{as+1}{s(s^2+3s+2)} \tag{36}$$

$$= \frac{as+1}{s(s+1)(s+2)} \tag{37}$$

Από δεδομένα

$$H(1) = \frac{1}{2} \tag{38}$$

$$\frac{a+1}{6} = \frac{1}{2} \tag{39}$$

$$a = 2 \tag{40}$$

Οπότε τελικά

$$H(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)} \tag{41}$$

Αναπτύσσοντάς το σε μερικά κλάσματα, έχουμε

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \tag{42}$$

με

$$A = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \tag{43}$$

$$B = \frac{2s+1}{s(s+2)}\Big|_{s=-1} = 1 \tag{44}$$

$$C = \frac{2s+1}{s(s+1)}\Big|_{s=-2} = -\frac{3}{2} \tag{45}$$

οπότε

$$H(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+2} \tag{46}$$

και αφού το σύστημα είναι αιτιατό, το πεδίο σύγκλισής του θα είναι δεξιόπλευρο και συγκεκριμένα $\Re\{s\} > 0$, οπότε η κρουστική απόκριση θα είναι (με χρήση γνωστών ζευγών)

$$h(t) = \frac{1}{2}\epsilon(t) + e^{-t}\epsilon(t) - \frac{3}{2}e^{-2t}\epsilon(t) \tag{47}$$