Πράξεις μεταξύ σημάτων και Μετασχηματισμός Fourier

Εχουμε ήδη δει ότι όταν $x(t) \leftrightarrow X(f)$ και $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ τότε

$$C_1 x(t) \pm C_2 y(t) \leftrightarrow C_1 X(f) \pm C_2 Y(f)$$

1. Πολλαπλασιασμός σημάτων.

   Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του γινομένου δύο σημάτων $x(t)$, $y(t)$:

   $$F\{x(t)y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{26}$$

   Αν χρησιμοποιήσουμε τον Α.Μ.Φ. του $x(t)$

   $$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut}du$$

   στην (26) τότε έχουμε [3]:

   $$\begin{aligned} F\{x(t)y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut}du]\, y(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)\, [\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-u)t}dt]\, du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)du \end{aligned}$$

   Το τελευταίο ολοκλήρωμα συνηθίζουμε να το συμβολίζουμε με

   $$X(f) \star Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)du$$

   και ονομάζεται ΣΥΝΕΛΙΞΗ (convolution) δύο σημάτων $X(f)$ και $Y(f)$. Η πράξη της συνέλιξης είναι πολύ σημαντική στη θεωρία σημάτων. Θα δούμε αυτή την έννοια αναλυτικά παρακάτω. Η μορφή της συνέλιξης όπως την είδαμε είναι στη συχνότητα. Ορίζεται όμως και στο χρόνο. Συνέλιξη δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ ονομάζεται η συνάρτηση

   $$x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du \tag{27}$$

[3] Εδώ θα έχουμε διπλό ολοκλήρωμα και θα χρειαστεί να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης. Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Για να μπορεί να συμβεί αυτό χρησιμοποιούμε το θεώρημα Fubini το οποίο λέει ότι η σειρά ολοκλήρωσης μπορεί να αλλάξει αν καθένα από αυτά τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα όταν στη θέση της $f(x,y)$ βάλουμε την $|f(x,y)|$. Μια τέτοια συνθήκη ισχύει για τα σήματα ενέργειας άρα μπορούμε εδώ να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης

Συνοπτικά έχουμε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα με πολλές χρήσεις:

$$x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) \star Y(f) \tag{28}$$

Επειδή $x(t)y(t) = y(t)x(t)$ έχουμε επίσης ότι

$$X(f) \star Y(f) = Y(f) \star X(f)$$

Επομένως για την συνέλιξη ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

2. Συνέλιξη σημάτων - Convolution.

Προηγούμενα είδαμε ότι η συνέλιξη δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ ορίζεται ως:

$$x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. της συνέλιξης δύο σημάτων[4]

$$\begin{aligned} F\{x(t) \star y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \underbrace{[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)e^{-j2\pi ft}dt]}_{Y(f)e^{-j2\pi fu}} du \\ &= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi fu} du \\ &= Y(f)\,X(f) = X(f)\,Y(f) \end{aligned} \tag{29}$$

Στην παραπάνω απόδειξη κάναμε χρήση της ιδιότητας

$$y(t-t_0) \leftrightarrow Y(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} x(t) \star y(t) &\leftrightarrow X(f)Y(f) \\ y(t) \star x(t) &\leftrightarrow Y(f)X(f) \end{aligned} \tag{30}$$

Από τις δύο αυτές πράξεις που μόλις είδαμε προκύπτει ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα. ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ indeed:

Πολλαπλασιασμός στο Χρόνο σημαίνει Συνέλιξη στη Συχνότητα

ΚΑΙ

Συνέλιξη στο Χρόνο σημαίνει Πολλαπλασιασμός στη Συχνότητα.

[4] Και εδώ θα χρησιμοποιήσουμε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} x(t)\, y(t) &\leftrightarrow X(f) \star Y(f) \\ x(t) \star y(t) &\leftrightarrow X(f)\, Y(f) \end{aligned}$$

3. <u>Αυτοσυχέτιση (autocorrelation)</u>

Η αυτοσυσχέτιση σημάτων ορίζεται ως η πράξη συσχέτισης ενός σήματος με τον εαυτό του, συμβολίζεται δε με $\phi_x(\tau)$ και υπολογίζεται ως:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \tag{31}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος[5]

$$\begin{aligned} F\{\phi_x(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt]\, e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, [\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau}_{X(f)e^{j2\pi ft}}]\, dt \\ &= X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j2\pi ft}dt \\ &= X(f)X^*(f) \quad \Rightarrow \\ F\{\phi_x(\tau)\} &= |X(f)|^2 \end{aligned}$$

Δηλαδή ο Μ.Φ. της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι πραγματική συνάρτηση (μιγαδικό μέρος μηδέν) και για όλες τις συχνότητες είναι θετική. Αρα η φάση του Μ.Φ. της αυτοσυχέτισης είναι μηδέν για όλες τις συχνότητες. Αυτό είναι επίσης σημαντικό: ο Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητος του φάσματος φάσης του σήματος. Εμείς γνωρίζουμε ότι μετατόπιση στο χρόνο σημαίνει φάση (φάση μετατόπισης). Επομένως, αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όπως και να μετακινηθεί το σήμα στον άξονα του χρόνου ο Μ.Φ. της αυτοσυχέτισης είναι ανεξάρτητος κάθε τέτοιας μετακίνησης. Μια τέτοια σημαντική συνάρτηση έχει βέβαια όνομα. Ονομάζεται Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας[6] (Energy Spectral Density) και συμβολίζεται ως:

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \tag{32}$$

που όπως δείξαμε ισούται με:

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 \tag{33}$$

[5] και εδώ αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης :)

[6] Ποιού νεκρού Ελληνα γλωσσολόγου θα τρίζουν τώρα τα κόκκαλα!!!!

Από την Εξίσωση (32) έχουμε επίσης ότι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df \tag{34}$$

Αν στην Εξίσωση (34) θέσουμε $\tau = 0$ θα έχουμε το περίφημο θεώρημα του Parseval (τον είχατε ξεχασμένο ε;;!) για τον Μ.Φ. σημάτων ενέργειας:

$$\phi_x(0) = W_x = ||x||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \tag{35}$$

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό τότε

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f)$$

Αν το σήμα είναι σε $Volts$ η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας της ενέργειας εκφράζεται σε $Volts^2 sec^2 = Volts^2\, sec/Hz$ και η αυτοσυσχέτιση σε $Volts^2\, sec$.

Από τα παραπάνω είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι

ο Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης μας υπολογίζει την Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

ΚΑΙ ότι

ο Α.Μ.Φ. της Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας μας υπολογίζει την αυτοσυσχέτιση

4. Ετεροσυσχέτιση cross-correlation

   Η ετεροσυσχέτιση δύο σημάτων ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt \tag{36}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. της ετεροσυσχέτισης δύο σημάτων

$$\begin{aligned} F\{\phi_{xy}(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt\,]\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= X^*(f) Y(f) \end{aligned}$$

Δεν αναπτύξαμε αναλυτικά τα ολοκλήρωματα μιας και η διαδικασία είναι ανάλογη αυτής που ακολουθήσαμε παραπάνω για την αυτοσυσχέτιση.

Ο Μ.Φ. της ετεροσυσχέτισης δύο σημάτων ονομάζεται Συνάρτηση Διαφασματικής Πυκνότητα Ενέργειας[7] - Energy InterSpectral Density και ορίζεται ως

$$\Phi_{xy}(f) = F\{\phi_{xy}(\tau)\} = X^*(f) Y(f)$$

[7] Εδώ πια θα σπάσανε τα κόκκαλα

Η $\Phi_{xy}(f)$ είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση και μη συμμετρική ως προς τη συχνότητα μηδέν.

Παρατηρείστε ότι <u>δεν</u> ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην ετεροσυσχέτιση

$$\phi_{xy}(\tau) \neq \phi_{yx}(\tau)$$

Ο Μ.Φ. της $\phi_{yx}(\tau)$

$$\Phi_{yx}(f) = F\{\phi_{yx}(\tau)\} = Y^*(f)X(f)$$

Δηλαδή

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}^*(f)$$

επειδή

$$(Y^*(f)X(f))^* = X^*(f)Y(f)$$

Επίσης

$$\phi_{xy}(\tau) \neq \phi_{yx}(\tau)$$

αλλά μπορούμε να δείξουμε ότι <u>ισχύει</u>

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}^*(-\tau)$$

Αν τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$ μετριούνται σε $Volts$ τότε οι μονάδες μέτρησης της ετεροσυσχέτισης και της Διαφασματικής Πυκνότητα Ενέργειας είναι αντίστοιχα: $Volts^2\,sec$ και $Volts^2 sec^2 = Volts^2\,sec/Hz$

5. <u>Θεώρημα του γινομένου</u>

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\phi_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xy}(f)df$$

Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)Y(f)df$$

και για πραγματικά σήματα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)Y(f)df$$

ΠΡΟΣΕΞΤΕ: Τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι δύο απλοί αριθμοί (είτε είναι πραγματικά τα σήματα είτε είναι μιγαδικά). Δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε δύο σήματα στο χρόνο

$(x(t)y(t))$ και μετά ολοκληρώσουμε ως προς t θα λάβουμε έναν αριθμό (π.χ. 5). Τον ΙΔΙΟ αριθμό (π.χ. 5) θα λάβουμε όταν πολλαπλασιάσουμε αυτά τα σήματα στη συχνότητα $(X^*(f)Y(f))$ και ολοκληρώσουμε (ως προς f). Εχουμε λοιπόν ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ του γινομένου μεταξύ του χώρου του χρόνου και του χώρου της συχνότητας!! Αυτό δείχνει, με το δικό του τρόπο, την ισοδυναμία των δύο χώρων!!

6. Σχόλιο: Σχέση συσχέτισης και συνέλιξης.

   Είναι προφανές από τον ορισμό τους ότι η συσχέτιση και η συνέλιξη δεν είναι το ίδιο πράγμα. Ομως και από την άλλη μοιάζουν πολύ. Υπάρχει λοιπόν σχέση που να συνδέει αυτές τις δύο πράξεις; Υπάρχει!!

   Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης είναι:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

   Θέτουμε $t' = -t$, οπότε

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(-t')y(-t+\tau)dt'$$

   Ας συγκρίνουμε τώρα με την συνέλιξη των δύο σημάτων

$$x(\tau) \star y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(-t+\tau)dt$$

   Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) \star y(\tau)$$

   Παρόμοια σχέση προκύπτει και για την αυτοσυσχέτιση

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) \star x(\tau)$$

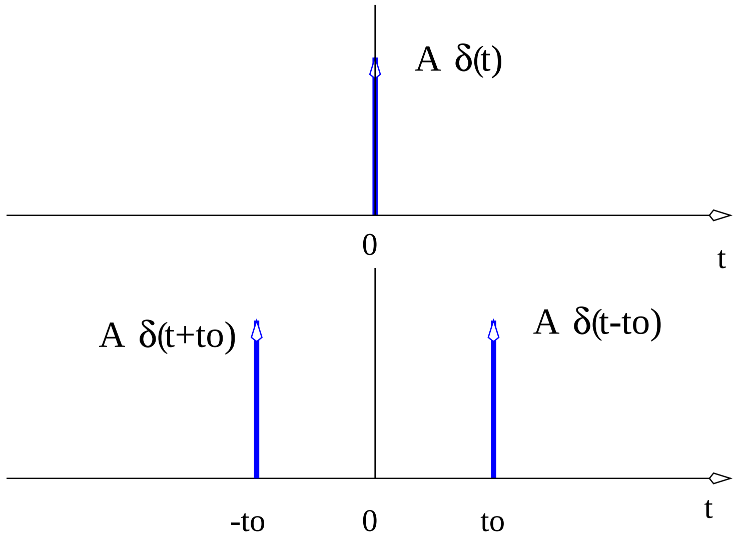
7. Πράξεις με τη συνάρτηση $\delta(t)$

   Η συνάρτηση $\delta(t)$ ονομάζεται επίσης κρουστικό σήμα Dirac ή και κατανομή δέλτα.

   Η κατανομή δέλτα συμβολίζεται ως ένα τόξο στην αρχή των αξόνων ($t = 0$) με πλάτος ανάλογο του σταθερού συντελεστή μπροστά από την $\delta(t)$. Π.χ. στο Σχήμα.10. Στο Σχήμα.10 φαίνονται επίσης οι μετακινημένες κατά t_0 δέλτα κατανομές.

   Η κατανομή δέλτα (με $A = 1$) έχει την παρακάτω ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \tag{37}$$



Σχήμα 10: Η κατανομή $A\delta(t)$, $A\delta(t-t_0)$ και $A\delta(t+t_0)$.

αν η συνάρτηση (σήμα) $x(t)$ είναι συνεχής στο $t=0$. Ομοια, αν το σήμα $x(t)$ είναι συνεχής στο $t=t_0$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \tag{38}$$

και αν το σήμα $x(t)$ είναι συνεχής στο $t=-t_0$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t+t_0)dt = x(-t_0) \tag{39}$$

Αν $x(t)=1$ τότε από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) = 1 \tag{40}$$

Επίσης αν $x(t)=e^{-j2\pi ft}$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{41}$$

Ομως η παραπάνω σχέση είναι ο Μ.Φ. της κατανομής $\delta(t)$ και χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (37) δείχουμε ότι

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = e^{-j2\pi f0} = 1 \tag{42}$$

και ο Α.Μ.Φ. είναι

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft}df \tag{43}$$

Η Εξίσωση (43) αποτελεί έναν από τους ορισμούς της συνάρτησης δέλτα.

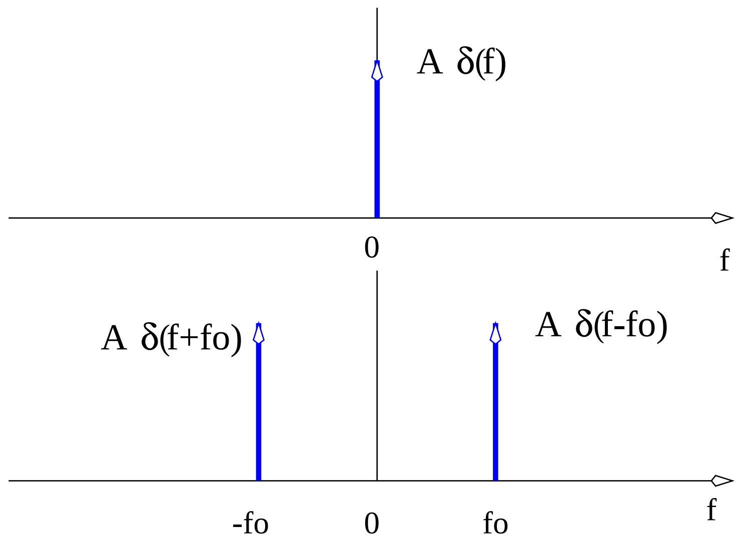
Επομένως ισχύει

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \tag{44}$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συμμετρίας

$$1 \leftrightarrow \delta(f) \tag{45}$$

Η κατανομή $\delta(f)$ καθώς και μετακινήσεις αυτές στον άξονα της συχνότητας φαίνονται στο Σχήμα.11. Εχουμε δείξει παραπάνω ότι



Σχήμα 11: Η κατανομή $A\delta(f)$, $A\delta(f-f_0)$ και $A\delta(f+f_0)$.

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

Αν στην παραπάνω θεωρήσουμε ως σήμα την κατανομή δέλτα: $x(t) = \delta(t)$, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow 1e^{-j2\pi f t_0} = e^{-j2\pi f t_0}$$

Παραδείγματα:

$$\begin{array}{lcl}
1 & \leftrightarrow & \delta(f) \\
5 & \leftrightarrow & 5\delta(f) \\
5e^{-j2\pi f_0 t} & \leftrightarrow & 5\delta(f+f_0) \\
2e^{j2\pi f_0 t} & \leftrightarrow & 2\delta(f-f_0) \\
5\delta(t-t_0) & \leftrightarrow & 5e^{-j2\pi f t_0} \\
2\delta(t+t_0) & \leftrightarrow & 2e^{j2\pi f t_0}
\end{array}$$

Η κατανομή $\delta(t)$ είναι πολύ χρήσιμη στην περιγραφή των σημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και της συχνότητας. Επίσης οι παραπάνω ιδιότητες που είδαμε είναι χρήσιμες στον εύκολο υπολογισμό του Μ.Φ. και του Α.Μ.Φ. των σημάτων.

Για παράδειγμα το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 3 & t = -5 \\ 2 & t = 0 \\ -2 & t = 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

γράφεται συνοπτικά

$$x(t) = 3\delta(t+5) + 2\delta(t) - 2\delta(t-1)$$

και ο Μ.Φ. του σήματος

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= 3F\{\delta(t+5)\} + 2F\{\delta(t)\} - 2F\{\delta(t-1)\} \\ &= 3e^{j2\pi f5} + 2 - 2e^{-j2\pi f1} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα ισχύουν στη συχνότητα. Αν ένα φάσμα περιγράφεται από τη σχέση:

$$X(f) = \begin{cases} 5e^{j\phi_1} & f = 3Hz \\ 3e^{j\phi_2} & f = 4Hz \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

γράφεται συνοπτικά

$$X(f) = 5e^{j\phi_1}\delta(f-3) + 3e^{j\phi_2}\delta(f-4)$$

και ο Α.Μ.Φ.

$$F^{-1}\{X(f)\} = x(t) = 5e^{j\phi_1}e^{+j2\pi 3t} + 3e^{j\phi_2}e^{+j2\pi 4t}$$

Στο πεδίο του χρόνου ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

$$\begin{aligned} x(t) \star \delta(t) &= x(t) \\ x(t) \star \delta(t-t_0) &= x(t-t_0) \\ \delta(t-t_1) \star \delta(t-t_2) &= \delta(t-t_1-t_2) \end{aligned}$$

όπου $\star$ συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης που είδαμε παραπάνω.

Αντίστοιχα στο πεδίο της συχνότητας:

$$\begin{aligned} X(f) \star \delta(f) &= X(f) \\ X(f) \star \delta(f-f_0) &= X(f-f_0) \\ \delta(f-f_1) \star \delta(f-f_2) &= \delta(f-f_1-f_2) \end{aligned}$$