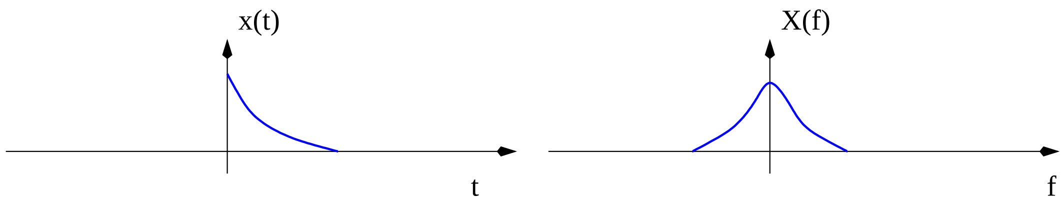
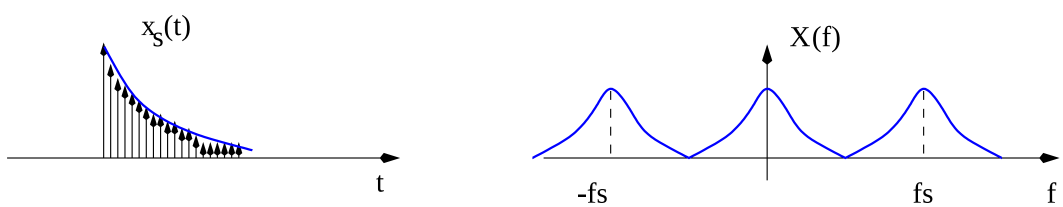
Δειγματοληψία και Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Ας θεωρήσουμε το αναλογικό σήμα $x(t)$ και τον Μ.Φ. του σήματος $X(f)$ όπως αυτά φαίνοται στο Σχήμα. 12. Αν και η μορφή αυτών των σημάτων μας είναι γνωστή (π.χ. το σήμα $x(t)$ είναι εκθετικής μορφής) δεν θα μας απασχολήσει εδώ η ακριβής μαθηματική τους έκφραση. Δεν θα μας είναι αναγκαία. Και πάλι εδώ για ευκολία στο σχεδιασμό του φάσματος συχνοτήτων θεωρούμε ότι $X(f)$ είναι ένα πραγματικό μέγεθος. Η δειγματοληψία του σήματος $x(t)$ με ρυθμό T_s



Σχήμα 12: Αριστερά το σήμα στο χρόνο και δεξιά ο Μ.Φ. του σήματος

γνωρίζουμε ότι έχει ως αποτέλεσμα την περιοδική επανάληψη του φάσματος του σήματος με περίοδο $f_s = 1/T_s$, όπως φαίνεται στο Σχήμα. 13. Οπως ήδη έχουμε δεί η δειγματοληψία του



Σχήμα 13: Αριστερά το δειγματοληπτημένο σήμα στο χρόνο και δεξιά ο Μ.Φ. των δειγμάτων του σήματος

$x(t)$ περιγράφεται μαθηματικά (η επανάληψη ποτέ δεν έβλαψε) ως[3]:

$$
\begin{aligned}
x_s(t) &= x(t)\delta_{T_s}(t) \\
&= x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)
\end{aligned} \tag{7}
$$

Ο Μ.Φ. του σήματος $x_s(t)$ τότε είναι

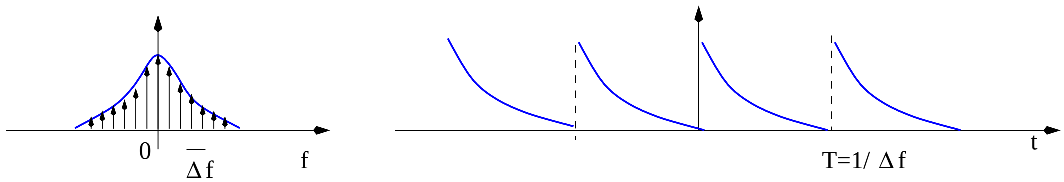
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)e^{-j2\pi fnT_s} \tag{8}$$

[3]Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη μεταβλητή n για το χρόνο και τη μεταβλητή k για τη συχνότητα. Αντίθετα από αυτό που κάναμε στις διαλέξεις

όπου κάναμε χρήση της γνωστής αντιστοιχίας

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$$

Ωραία! τα παραπάνω είναι για τη δειγματοληψία στο χώρο του χρόνου και είναι ότι είδαμε στις προηγούμενες σελίδες. ΟΜΩΣ, εμείς έχουμε ξανασυναντήσει δειγματοληψία αλλά στη συχνότητα. Γνωρίζουμε ότι ένα διακριτό φάσμα συχνοτήτων αντιστοιχεί σε ένα περιοδικό σήμα στο χρόνο. Επομένως, η δειγματοληψία ενός συνεχούς φάσματος με ρυθμό $\Delta f = 1/T$ θα έχει ως αποτέλεσμα ένα περιοδικό σήμα με περίοδο T όπως φαίνεται στο Σχήμα. 14. Η δειγματοληψία



Σχήμα 14: Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας έχει ως αποτέλεσμα την περιοδικότητα του σήματος στο χρόνο.

στο χώρο της συχνότητας περιγράφεται από παρόμοιες εξισώσεις όπως η δειγματοληψία στο χώρο του χρόνου:

$$\begin{aligned} X_s(f) &= X(f)\delta_{\Delta f}(f) \\ &= X(f)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-k\Delta f) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Delta f)\delta(f-k\Delta f) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\frac{k}{T})\delta(f-\frac{k}{T}) \end{aligned} \tag{9}$$

Ο αντίστροφος μετ. Fourier της $X(f)\delta_{\Delta f}(f)$ είναι ένα σήμα περιοδικό όπως βλέπουμε από το Σχήμα. 14:

$$\begin{aligned} X(f)\delta_{\Delta f}(f) \overset{F^{-1}}{\leftrightarrow} x(t,T)\star T\delta_T(t) &= x(t,T)\star T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \\ &= Trep_T\{x(t,T)\} \end{aligned} \tag{10}$$

όπου $x(t,T)$ συμβολίζει μία περίοδο του σήματος. Επομένως το περιοδικό σήμα $x_p(t)$ που λαμβάνομε έχει τη μορφή:

$$x_p(t) = Trep_T\{x(t,T)\} \tag{11}$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετ. Fourier στο δεύτερο μέλος της Εξ. 9 έχουμε μια δεύτερη μορφή για το ίδιο περιοδικό σήμα:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= F^{-1}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\frac{k}{T})\delta(f-\frac{k}{T})\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\frac{k}{T})exp(j2\pi\frac{k}{T}t) \end{aligned} \tag{12}$$

Από τις Εξ. 11 και 12 μπορούμε να βρούμε την έκφραση της μια περιόδου $x(t,T)$ του περιοδικού σήματος $x_p(t)$:

$$x(t,T) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\frac{k}{T})exp(j2\pi\frac{k}{T}t) \tag{13}$$

Επομένως[4] τώρα έχουμε ένα διακριτό φάσμα και ένα περιοδικό σήμα στο χρόνο (συνεχές ως προς το χρόνο, βλ. Σχήμα. 14). Πρίν είχαμε διακριτό σήμα και περιοδικό φάσμα συχνοτήτων (συνεχές ως προς τη συχνότητα, βλ.Σχήμα. 13) Τι θα γίνει αν το περιοδικό σήμα που είναι συνεχές στο χρόνο το δειγματοληπτήσουμε με ρυθμό T_s;; Καταρχήν τα δείγματα που θα έχουμε σε μία περίδο T θα είναι

$$N = \frac{T}{T_s}$$

Αυτό επίσης που θα συμβεί θα είναι να δημιουργήσουμε ένα περιοδικό διακριτό φάσμα το οποίο θα περιγράφεται από την Εξ. 8 αν όπου f θέσουμε $f = k/T$

$$\begin{aligned} X(\frac{k}{T}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-j2\pi\frac{k}{T}nT_s} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)exp(-j2\pi kn/N) \end{aligned} \tag{14}$$

Εδώ είναι μια ευκαιρία να συσχετίσουμε N δείγματα από το χώρο του χρόνου σε N δείγματα από το χώρο της συχνότητας. Πράγματι, θεωρώντας μονάχα μια περίοδο τόσο για το σήμα στο χρόνο δηλαδή $x(nT_s,T)$ όσο και στη συχνότητα, δηλαδή $X(\frac{k}{T},f_s)$ η Εξ. 14 γράφεται ως

$$X(\frac{k}{T},f_s) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x(nT_s,T)exp(-j2\pi kn/N) \tag{15}$$

όπου n_0 είναι μια οποιαδήποτε σταθερά χρόνου η οποία μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε μια περίοδο δηλ. N δείγματα, αλλά απ'όπου θέλουμε εμείς να κάνουμε αρχή.

Από την Εξ. 13 μπορούμε να βρούμε μια αντίστοιχη σχέση για το $x(nT_s,T)$ αν θέσουμε όπου t ίσο με nT_s. Πράγματι

$$x(nT_s,T) = \frac{1}{NT_s}\sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} X(\frac{k}{T},f_s)exp(-j2\pi kn/N) \tag{16}$$

[4] αν σε αυτήν την παράγραφο μπερδευτείτε μην το βαζετε κάτω ... πρέπει να την καταλάβετε!!

οπου k_0 είναι και πάλι μια σταθερά που μας επιτρέπει την επιλογή της αρχής. Συνήθως στην πράξη χρησιμοποιούμε

$$\begin{aligned} n_0 &= 0 \\ k_0 &= -N/2 \end{aligned}$$

Αν κανονικοποιήσουμε τον άξονα του χρόνου θέτωντας $T_s = 1$ και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό

$$\begin{aligned} x(n) &\stackrel{def}{=} x(nT_s, T) \\ X(k) &\stackrel{def}{=} X(k/T, f_s) \\ W_N &\stackrel{def}{=} exp(j2\pi/N) \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) W_N^{nk} \\ X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \end{aligned} \tag{17}$$

Το ζεύγος σχέσεων στην Εξ. 17 ονομάζεται ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Fourier (Discrete Fourier Transform-DFT) και είναι και το οποίο είναι πραγματικά έν ασημαντικό ζευγάρι σχέσεων. Σχετίζουν N σημεία στο χρόνο με N σημεία στη συχνότητα.

Χρησιμοποιώντας συμμετρίες της συνάρτησης W_N, ο Cooley και ο Tukey δημοσιεύσαν το 1965 ένα γρήγορο τρόπο υπολογισμού του DFT και τον ονόμασαν FFT[5] δηλ. Fast Fourier Transform. Ο FFT είναι πραγματικά πολύ πιο γρήγορος από τον DFT. Χρησιμοποιώντας τον DFT, για ένα σήμα με N δείγματα χρειαζόμαστε N^2 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς για να υπολογίσουμε τα N δείγματα στη συχνότητα $X(k)$. Για τον FFT χρειαζόμαστε μόνο $N/2 \log_2 N$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Αν για παράδειγμα $N = 1024$ τότε για τον DFT θα χρειαζόμασταν 1 048 576 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς ενώ για τον FFT μόνο 5 120 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς!!. Ε, υπάρχει κάποια μικρή διαφορά...

Οταν ο FFT δημοσιεύθηκε έκανε πολύ μεγάλη εντύπωση. Εσκασαν πολλοί από το κακό τους. Κάποιοι μάλιστα επιτήδειοι που ζήλεψαν απείρως τους δύο ερευνητές έβγαλαν στη φόρα ότι και ο Gauss είχε ανακαλύψει τον FFT ... τι να πεί κανείς γι'αυτήν την περίφημη επιστημονική κοινότητα που σφίζει από αγάπη!!!

[5]που ΟΧΙ δεν σημαίνει Fast Food Towards

Παραδείγματα DFT

1. Να υπολογιστεί ο DFT του σήματος

$$x(n) = \delta(n)$$

όπου $\delta(n)$ ορίζεται ως

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Από τον ορισμό του DFT και τον ορισμό της $\delta(n)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{-nk} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\delta(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} 1$$

2. Να υπολογιστεί ο DFT του σήματος

$$x(n) = exp(2\pi n_0 \, n/N)$$

σε N σημεία δηλ. $k = 0, 1, \cdots, N-1$.

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n_0 n/N} e^{-j2\pi nk/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi/N(k-n_0)n} \\ &= 1 + e^{-j2\pi/N\,(k-n_0)} + e^{-j2\pi/N\,(k-n_0)\,2} + \cdots + e^{-j2\pi/N\,(k-n_0)\,(N-1)} \\ &= \frac{1 - e^{-j2\pi/N\,(k-n_0)\,N}}{1 - e^{-j2\pi/N\,(k-n_0)}} \\ &= \frac{1 - e^{-j2\pi(k-n_0)}}{1 - e^{-j2\pi/N\,(k-n_0)}} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε τιμή του k ο αριθμητής είναι μηδέν. Ομως για την περίπτωση που $k = n_0$ ΚΑΙ ο παρανομαστής είναι μηδέν. Σε μια τέτοια περίπτωση δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τον DFT από την τελευταία σχέση αλλά από μια ενδιάμεση. Ετσι για $k = n_0$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi/N(k-n_0)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} 1 \\ &= N\delta[n-n_0] \end{aligned}$$

Επομένως για $k = 0, 1, \cdots, N-1$

$$e^{j2\pi n_0 n/N} \overset{DFT}{\leftrightarrow} N\,\delta[k-n_0]$$

όπου σύμφωνα με τα παραπάνω

$$\delta[k-n_0] = \begin{cases} 1 & k = n_0 \\ 0 & k \neq n_0 \end{cases}$$

3. Να υπολογιστεί ο DFT του σήματος

$$x(n) = \cos\left(2\pi n_0\, n/N\right)$$

Από τη σχέση του Euler

$$x(n) = \frac{1}{2}exp(j2\pi n_0\, n/N) + \frac{1}{2}exp(-j2\pi n_0\, n/N)$$

Ετσι από το προηγούμενο παράδειγμα (προφανώς ισχύει η γραμμική ιδιότητα και για τον DFT)

$$X(k) = \frac{1}{2}N\delta[k-n_0] + \frac{1}{2}N\delta[k+n_0]$$