

Συστήματα

1 Εισαγωγή

Σε αυτές τις σημειώσεις, θα δούμε πως χρησιμοποιείται ο μετασχ. Laplace στα ΓΧΑ συστήματα, και ποιά η βαθύτερη σχέση του με το μετασχ. Fourier. Εχουμε δει οτι όταν το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier από το μετασχ. Laplace ως:

$$X(f) = X(s) \Big|_{\sigma=0} \quad (1)$$

Όμως ποιά είναι η βαθύτερη σημασία του μετασχ. Laplace; Δεν μπορεί να είναι μόνο η χρήση του για τον υπολογισμό του μετασχ. Fourier, έτσι δεν είναι; Ποιά η σημασία των πόλων στο πεδίο σύγκλισης; Ποιά αυτή των μηδενικών; Τι συμβαίνει όταν περνάμε ένα σήμα μέσα από ένα σύστημα που περιγράφεται στο χώρο του Laplace; Όλα αυτά θα τα μελετήσουμε εδώ... :-)

2 Η Συνάρτηση Μεταφοράς

Έχουμε ήδη ορίσει ένα όνομα για το μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος: συμφωνήσαμε να τον λέμε *Συνάρτηση Μεταφοράς - Transfer Function*. Θυμηθείτε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος σχετίζεται με την είσοδό του και με το σύστημα μέσω της συνέλιξης

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (2)$$

Αυτή η σχέση μεταφράζεται στο χώρο του μετασχ. Laplace ως

$$Y(s) = X(s)H(s) \quad (3)$$

Άρα ο μετασχ. Laplace της εξόδου ισούται με το γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς επί το μετασχ. Laplace της εισόδου. Με αναδιάταξη της παραπάνω σχέσης, έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (4)$$

η οποία σχέση μας θυμίζει την αντίστοιχη σχέση στα συστήματα, όταν μελετούσαμε το μετασχ. Fourier:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (5)$$

Στη συνέχεια αυτών των σημειώσεων, θα προτιμήσουμε το συμβολισμό

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6)$$

για το μετασχ. Fourier, και αντίστοιχα, ο μετασχ. Laplace θα είναι

$$X(\sigma + j\omega) = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \quad (7)$$

Έτσι, ο φανταστικός άξονας του s -επιπέδου θα εξαρτάται από μια μεταβλητή ω , αντί της $2\pi f$ που είχαμε ως τώρα, και ήταν κάπως άβολο στη χρήση και τη σχεδίαση.

Για να λάβουμε περισσότερη πληροφορία για τη συνάρτηση μεταφοράς, θα ήταν πολύ βολικό να τη γράψουμε σε μορφή παραγόντων, ως

$$H(s) = A \frac{\prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} \quad (8)$$

με A μια σταθερά. Υπενθυμίζουμε ότι οι αριθμοί c_k, d_k λέγονται **μηδενικά** και **πόλοι**, αντίστοιχα. Υπενθυμίζεται ότι οι αριθμοί δεν είναι τίποτα περισσότερο από τις ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή της σχέσης (8), δηλ. τα μηδενικά μηδενίζουν τον αριθμητή του $H(s)$, άρα και το ίδιο το $H(s)$, ενώ οι πόλοι μηδενίζουν τον παρονομαστή του $H(s)$, άρα απειρίζουν το ίδιο το $H(s)$.

Οι πόλοι και τα μηδενικά μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς προσφέρουν σημαντική πληροφορία για τα χαρακτηριστικά ενός ΓΧΑ συστήματος, όπως θα δούμε παρακάτω. Άλλωστε, σύμφωνα με την παραπάνω σχέση (8), η γνώση των πόλων, των μηδενικών, και της σταθεράς A καθορίζουν πλήρως της συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και έτσι προσφέρουν μια ακόμα περιγραφή ενός ΓΧΑ συστήματος, της οποίας η χρησιμότητα θα φανεί αμέσως τώρα...

3 Σχέση Απόκρισης σε Συχνότητα και Πόλων-Μηδενικών

Έστω λοιπόν ότι έχουμε τους πόλους και τα μηδενικά μιας συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ στο μιγαδικό επίπεδο. Τι μας λέει αυτό για το μετασχ. Fourier του συστήματος, δηλ. της *Απόκρισης σε Συχνότητα* $H(\omega)$; ¹ Ποιά η σχέση που τα συνδέει; Πώς επηρεάζει η μορφή της $H(s)$ την απόκριση σε συχνότητα $H(\omega)$; Ναι, βέβαια, ειπαμε ότι ισχύει

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{\sigma=0} = H(\sigma + j\omega) \Big|_{\sigma=0} \quad (9)$$

όταν το πεδίο συγκλίσης του $H(s)$ περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα, αλλά δε μας αρκει αυτό! :-) We want more! :-) Εδώ λοιπόν θα συζητήσουμε για μια πιο διαισθητική προσέγγιση του μετασχ. Laplace και των πόλων-μηδενικών του, πάντα σε σχέση με το μετασχ. Fourier².

Ας εξετάσουμε λοιπόν το φάσμα πλάτους και φάσης του $H(\omega)$, δηλ. το $|H(\omega)|$, με χρήση γραφικών-γεωμετρικών μεθόδων, και φυσικά παρέα με τους πόλους και τα μηδενικά της $H(s)$. Έστω ότι έχουμε την απόκριση πλάτους (δηλ. το φάσμα πλάτους της απόκρισης σε συχνότητα) της $H(\omega)$ ως

$$|H(\omega)| = |A| \frac{\prod_{k=1}^M |j\omega - c_k|}{\prod_{k=1}^N |j\omega - d_k|} \quad (10)$$

όπως αυτή προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (9) στη σχέση (8). Αυτή η σχέση περιλαμβάνει ένα λόγο γινομένων παραγόντων της μορφής $|j\omega - \lambda|$, όπου το λ είναι είτε πόλος είτε μηδενικό. Τα μηδενικά προφανώς συνεισφέρουν στον αριθμητή, ενώ οι πόλοι στον παρονομαστή. Ας κάνουμε τα πράγματα πιο εύκολα. :-) Ας θεωρήσουμε το απλοποιημένο σύστημα

$$|H(\omega)| = \frac{|j\omega - c_1|}{|j\omega - d_1|} \quad (11)$$

με έναν πόλο στη θέση d_1 και ένα μηδενικό στη θέση c_1 . Ας θεωρήσουμε ξανά ένα γενικό παράγοντα της μορφής $j\omega - \lambda$. Προφανώς, το ω είναι η συχνότητά μας, η οποία μεταβάλλεται από το $-\infty$ ως το ∞ . Πώς αλλάζει ο παράγοντας

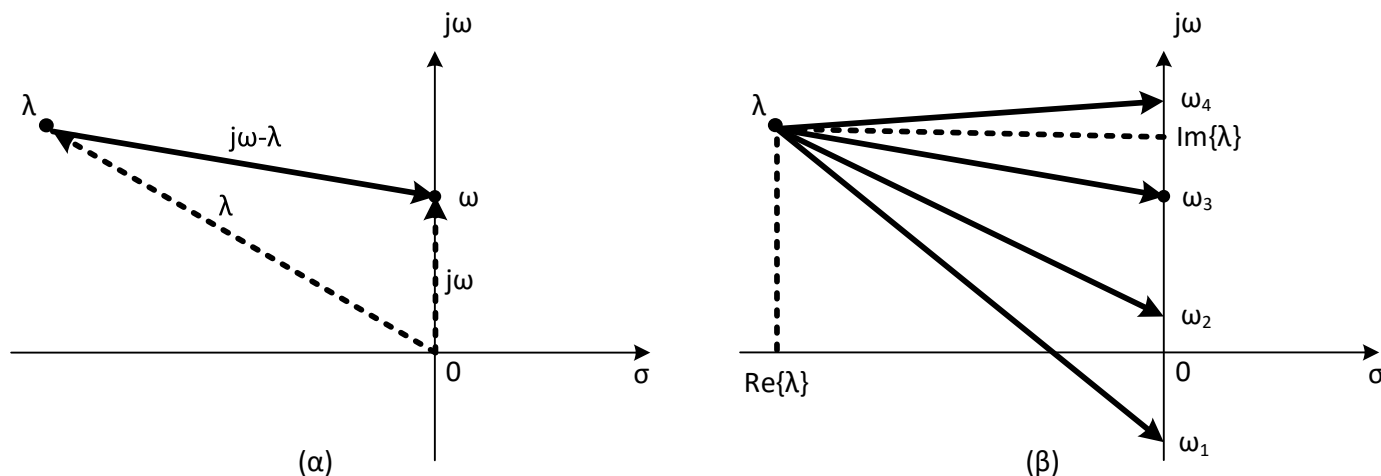
¹Θυμηθείτε την ορολογία: Απόκριση σε Συχνότητα $\leftrightarrow H(\omega)$, Συνάρτηση Μεταφοράς $\leftrightarrow H(s)$:-)

²Τόχουμε ξαναπεί... είμαστε μηχανικοί, όχι μαθηματικοί, μας ενδιαφέρει η διαισθητική-πρακτική ερμηνεία των πραγμάτων! :-)

$|j\omega - \lambda|$ όσο τρέχει το ω ; Πώς αυτές οι αλλαγές επηρεάζουν το συνολικό $|H(\omega)|$;

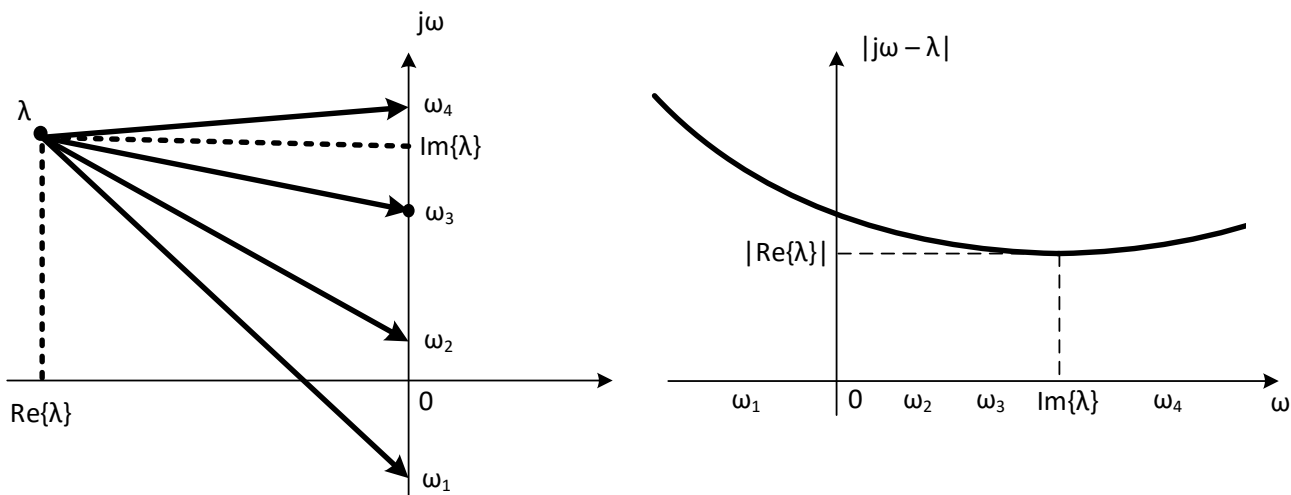
Για να απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα, θα πρέπει να φανταστούμε τον παράγοντα $j\omega - \lambda$ ως ένα διάνυσμα από το σημείο λ στο σημείο $j\omega$, το οποίο φυσικά δεν είναι σταθερό, όπως στο Σχήμα 1.

Αρα αυτό το διάνυσμα είναι μεταβαλλόμενο. Το μήκος αυτού του διανύσματος είναι φυσικά $|j\omega - \lambda|$. Εξετάζοντας λοιπόν το μήκος αυτό όσο το ω μεταβάλλεται, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συμβολή κάθε πόλου ή μηδενικού στη συνολική απόκριση πλάτους $|H(\omega)|$!! :-) Δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: (α) Παράγοντας $j\omega - \lambda$ και (β) Παράγοντας $j\omega - \lambda$ όσο το ω μεταβάλλεται

Βλέπετε πώς μεταβάλλεται το διάνυσμα (και άρα και το μήκος του $|j\omega - \lambda|$) όσο μεταβάλλεται η συχνότητα ω . :-) Παρατηρήστε ότι το μήκος του διανύσματος είναι αρκετά μεγάλο όσο το ω έρχεται από το $-\infty$, μικραίνει συνεχώς όσο πλησιάζει κοντά στο λ , γίνεται ελάχιστο και ίσο με $|j\omega - \lambda| = |\Re\{\lambda\}|$ όταν $\omega = \Im\{\lambda\}$, και μετά, όσο το ω ανεβαίνει στο ∞ , το διάνυσμα - και άρα και το μήκος του - ξαναμεγαλώνει. Παρατηρήστε ότι αν το λ είναι αρκετά κοντά στον φανταστικό άξονα, τότε το $|j\omega - \lambda|$ γίνεται πολύ μικρό για $\omega = \Im\{\lambda\}$. Επίσης, στην ίδια περίπτωση, οι πιο ακαριαίες αλλαγές στο $|j\omega - \lambda|$ γίνονται στις συχνότητες κοντά στο λ ! :-) Η όλη αυτή διαδικασία περιγράφεται στο Σχήμα 2.



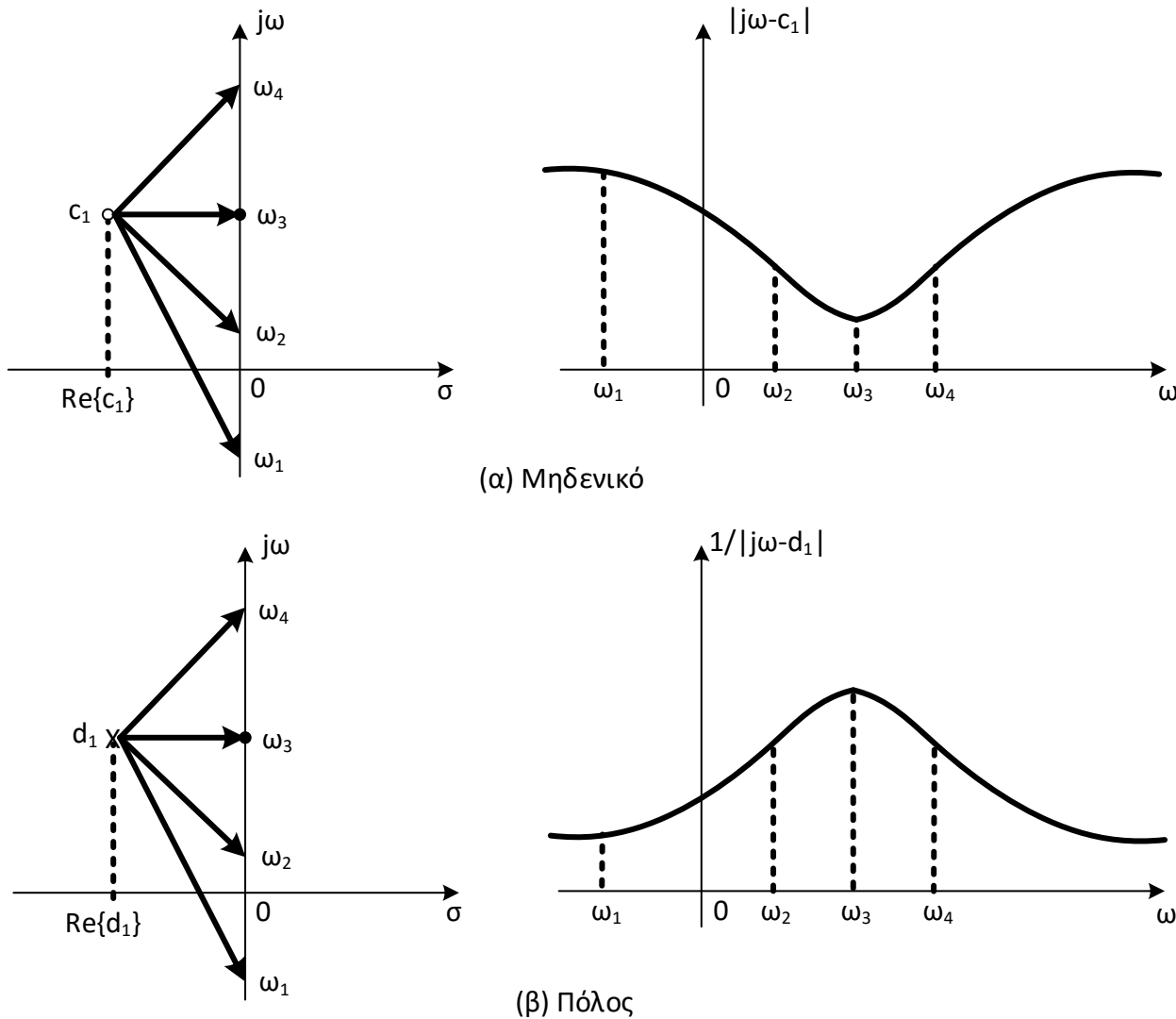
Σχήμα 2: Παράγοντας $|j\omega - \lambda|$ συναρτήσει του ω

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει στην περίπτωση που ο παράγοντας που εξετάζουμε είναι είτε πόλος είτε μηδενικό.

- Αν το λ είναι μηδενικό, τότε το $|j\omega - \lambda|$ συνεισφέρει στον αριθμητή του $|H(\omega)|$. Άρα, σε συχνότητες που είναι κοντά σε ένα μηδενικό, το $|H(\omega)|$ τείνει να μικραίνει. Το πόσο μικραίνει εξαρτάται από το πόσο κοντά στον κατακόρυφο άξονα βρίσκεται το εν λόγω μηδενικό! :-) Αν βρίσκεται σε κάποια απόσταση, όπως στο Σχήμα 1,

τότε απλά η απόκριση πλάτους φθίνει αργά και ομαλά. Αν όμως το μηδενικό βρίσκεται κοντά στον άξονα $j\omega$, τότε η απόκριση πλάτους χαμηλώνει απότομα γύρω από τη συγκεκριμένη συχνότητα. Τέλος, όταν το μηδενικό βρίσκεται επάνω στον άξονα των φανταστικών αριθμών, η απόκριση πλάτους μηδενίζεται στη συχνότητα που αντιστοιχεί στο μηδενικό. Σε συχνότητες μακριά από το μηδενικό, δηλ. όταν $|\omega| \gg \Re\{\lambda\}$, τότε μπορούμε να πούμε ότι $|j\omega - \lambda| \approx |\omega| \rightarrow \infty$, όταν $\omega \rightarrow \infty$.

- Αν το λ είναι πόλος, τότε το $|j\omega - \lambda|$ συνεισφέρει στον παρονομαστή του $|H(\omega)|$. Άρα, σε συχνότητες που είναι κοντά σε έναν πόλο, το $|H(\omega)|$ τείνει να μεγαλώνει και σχηματίζει μια κορυφή (γιατί ο παρονομαστής του κλάσματος μικραίνει, φτάνει σε ενα ελάχιστο, και ξαναμεγαλώνει). Το πόσο μεγαλώνει εξαρτάται από το πόσο κοντά στον κατακόρυφο άξονα βρίσκεται ο εν λόγω πόλος! :-) Αν βρίσκεται σε κάποια απόσταση, τότε απλά η απόκριση πλάτους μεγαλώνει με αργό ρυθμό, ως ότου φτάσει ένα μέγιστο. Αν ο πόλος βρίσκεται κοντά στον κατακόρυφο άξονα, τότε η απόκριση πλάτους αυξάνει απότομα γύρω από τη συχνότητα που αντιστοιχεί στον πόλο. Αν όμως ο πόλος βρίσκεται επάνω στον άξονα $j\omega$, τότε η απόκριση πλάτους απειρίζεται στη συχνότητα που αντιστοιχεί στον πόλο. Σε συχνότητες μακριά από τον πόλο, δηλ. όταν $|\omega| \gg \Re\{\lambda\}$, τότε μπορούμε να πούμε ότι $|j\omega - \lambda| \approx |\omega|$, άρα $1/|j\omega - \lambda| \approx 1/|\omega| \rightarrow 0$, όταν $\omega \rightarrow \infty$.



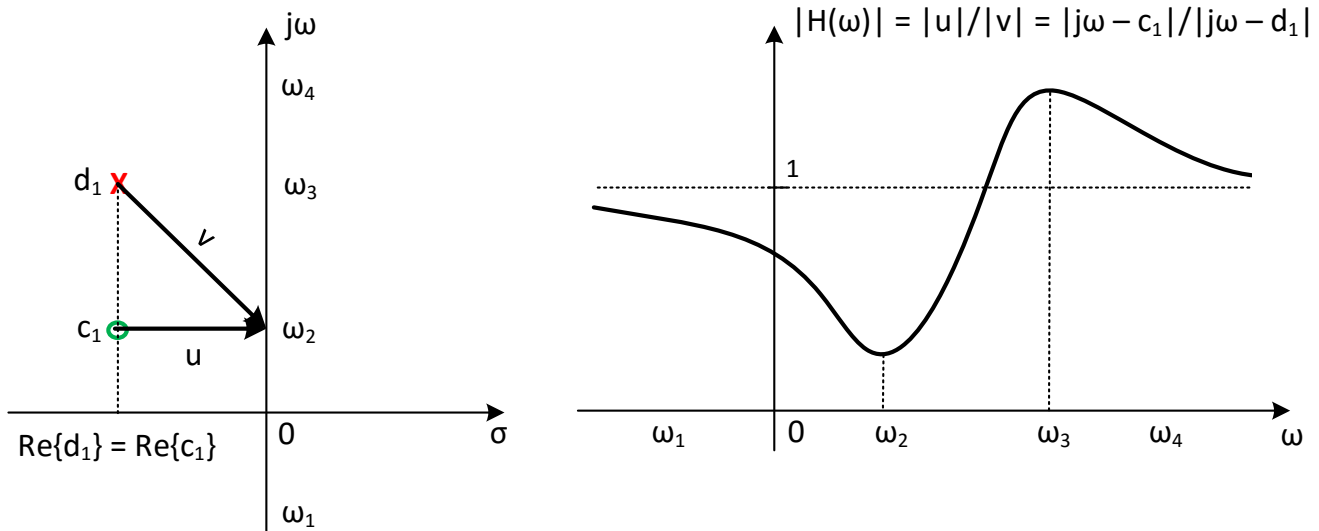
Σχήμα 3: Μηδενικό-πόλος και απόκριση πλάτους

Γενικά, τα μηδενικά κοντά στον κατακόρυφο άξονα τείνουν να “κατεβάσουν” την απόκριση πλάτους προς το μηδέν, ενώ οι πόλοι κοντά στον κατακόρυφο άξονα, τείνουν να “ανεβάσουν” την απόκριση πλάτους προς μεγάλες τιμές. Επίσης, όσο πιο κοντά στον φανταστικό άξονα βρίσκεται ο πόλος ή το μηδενικό, τόσο πιο απότομες θα είναι οι μεταβολές της απόκρισης πλάτους γύρω από τις συχνότητες στις οποίες βρίσκεται κοντά ο πόλος ή το μηδενικό. Για παράδειγμα,

στο Σχήμα 3 ο πόλος και το μηδενικό βρίσκονται πιο κοντά στον φανταστικό άξονα απ' ό,τι στο Σχήμα 2. Βλέπετε ότι οι μεταβολές της απόκρισης πλάτους στο Σχήμα 3 είναι πιο απότομες σε σχέση με τη μεταβολή της απόκρισης πλάτους στο Σχήμα 2 γύρω από τη συχνότητα του φανταστικού άξονα στην οποία βρίσκεται πιο κοντά ο πόλος ή το μηδενικό.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο παράδειγμά μας, με τον ένα πόλο και το ένα μηδενικό. Στο Σχήμα 3, φαίνεται η συνεισφορά του μηδενικού και του πόλου αντίστοιχα, στην απόκριση πλάτους, ως ξεχωριστοί παράγοντες, συναρτήσει της μεταβλητής ω . Παρατηρήστε ότι αν ο πόλος και το μηδενικό είναι στην ίδια θέση στο s -επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα, αυτοί αλληλοακυρώνονται, και η απόκριση πλάτους είναι σταθερή, αφού $|H(\omega)| = |A| \frac{1}{|j\omega - d_1|} = |A|$, αν $c_1 = d_1$!! Αυτό φαίνεται κι αν πολλαπλασιάσετε τα δυο φάσματα πλάτους του Σχήματος 3.

Φυσικά μια τέτοια περίπτωση δεν έχει ενδιαφέρον τόσο αναλυτικής μελέτης όπως κάναμε εδώ, οπότε συνήθως σε μια τέτοια αναπαράσταση θεωρούμε ότι αξίζει αναλυτικής μελέτης όταν $c_k \neq d_k$. Τότε, αν θεωρήσουμε ότι το μηδενικό βρίσκεται κοντά στη συχνότητα ω_2 και ο πόλος κοντά στη συχνότητα ω_3 , με ίδιο πραγματικό μέρος, το συνολικό φάσμα πλάτους θα είναι, ποιοτικά, περίπου όπως στο Σχήμα 4.



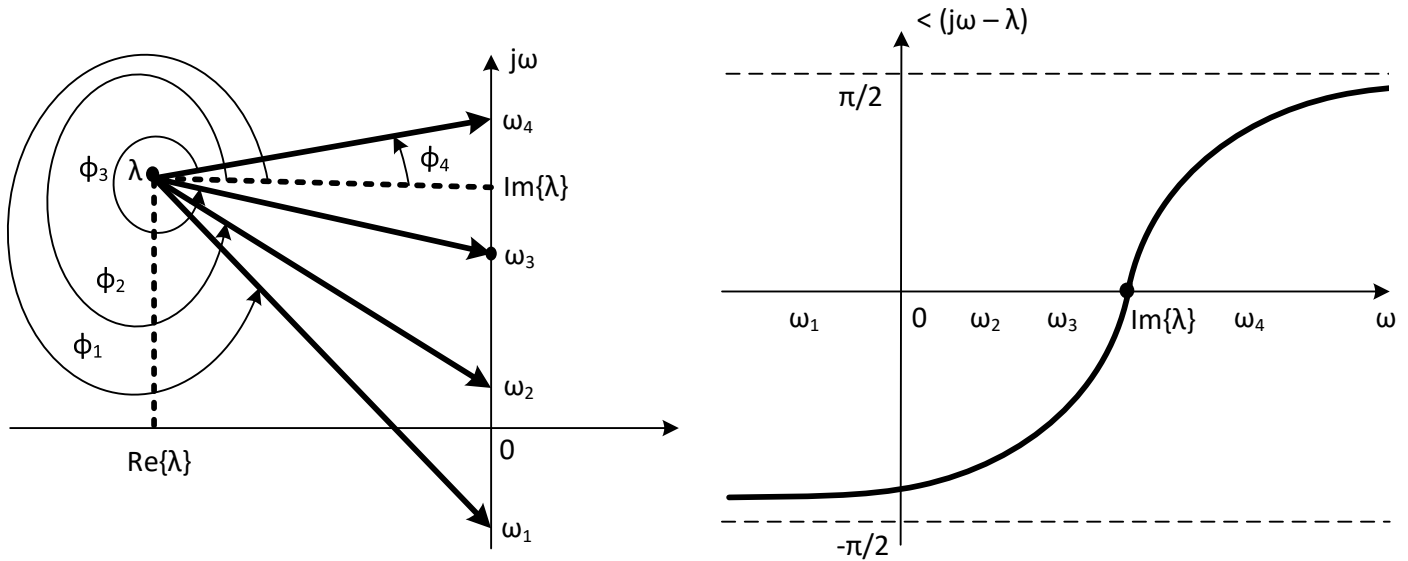
Σχήμα 4: Μηδενικό-πόλος και συνεισφορά στη συνολική απόκριση πλάτους $|H(\omega)|$

Με παρόμοιους συλλογισμούς μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα και για τη φάση του συστήματος, $\angle\{H(\omega)\}$. Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\angle\{H(\omega)\} = \angle\{A\} + \sum_{k=1}^M \angle\{j\omega - c_k\} - \sum_{k=1}^N \angle\{j\omega - d_k\} \quad (12)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η φάση του $H(\omega)$ είναι το άθροισμα όλων των φάσεων που οφείλονται στα μηδενικά, μείον το άθροισμα όλων των φάσεων που οφείλονται στους πόλους. Ο πρώτος όρος, $\angle\{A\}$, δεν εξαρτάται από το ω . Ξανά εδώ θεωρούμε ένα παράγοντα της μορφής $\angle\{j\omega - \lambda\}$, που είναι η γωνία ενός διανύσματος που δείχνει από το λ στο $j\omega$ στο μιγαδικό επίπεδο. Κι εδώ φυσικά το $j\omega$ μεταβάλλεται, αρα η γωνία αλλάζει. Η γωνία αυτή μετριέται σε σχέση με μια οριζόντια γραμμή, παράλληλη του άξονα των πραγματικών και περνά από το λ . Εξετάζοντας τη φάση αυτού του διανύσματος όσο αλλάζει το ω , μπορούμε να βρούμε τη συνεισφορά του κάθε πόλου ή μηδενικού στη συνολική απόκριση φάσης του συστήματος, όπως κάναμε και για την απόκριση πλάτους!

Ας το κάνουμε ενδεικτικά για έναν παράγοντα της μορφής $j\omega - \lambda$, ο οποίος σχηματίζει γωνία ϕ με τον οριζόντιο άξονα. Ακολουθώντας εντελώς όμοιο σκεπτικό με αυτό για το φάσμα πλάτους, η διαδικασία υπολογισμού και η μορφή της απόκρισης φάσης φαίνεται στο Σχήμα 5. Θυμηθείτε ότι κάθε γωνία πρέπει να “μεταφράζεται” στο διάστημα $[-\pi, \pi)$. Παρακολουθώντας την κίνηση του διανύσματος $j\omega - \lambda$, βλέπουμε ότι όταν το ω βρίσκεται στο $-\infty$, τότε η γωνία ϕ τείνει

Σχήμα 5: Παράγοντας $\angle(j\omega - \lambda)$ συναρτήσει του ω

στο $3\pi/2$, δηλ. στο $-\pi/2$ ασυμπτωτικά. Όσο πλησιάζει το ω στο μηδέν, τόσο μεγαλώνει η γωνία ϕ , δηλ. τόσο πλησιάζει το μηδέν στο διάστημα $[-\pi, \pi)$, ως ώτου μηδενιστεί για $\omega = \Im\{\lambda\}$. Τότε, το διάνυσμα $j\omega - \lambda$ είναι κάθετο στον άξονα των φανταστικών αριθμών, ενώ στη συνέχεια η γωνία ϕ μεγαλώνει, μέχρι το ω να φτάσει και πάλι πολύ μακριά από το μηδέν, οπότε και η γωνία θα αρχίζει να προσεγγίζει το $\pi/2$ ασυμπτωτικά.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s - 0.5}{(s + 0.1 - j2)(s + 0.1 + j2)} \quad (13)$$

Σχεδιάστε ποιοτικά την απόκριση πλάτους του ΓΧΑ συστήματος.

Λύση:

Το σύστημα έχει ένα μηδενικό στη θέση $z_1 = 0.5$ και πόλους στις θέσεις $p_i = -0.1 \pm j2$, $i = 1, 2$. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα 6. Το μηδενικό κάνει την απόκριση πλάτους να φθίνει κοντά στο $\omega = 0$, ενώ ο πόλος την κάνει να αυξάνει κοντά στο $\omega = \pm 2$ rad/sec.

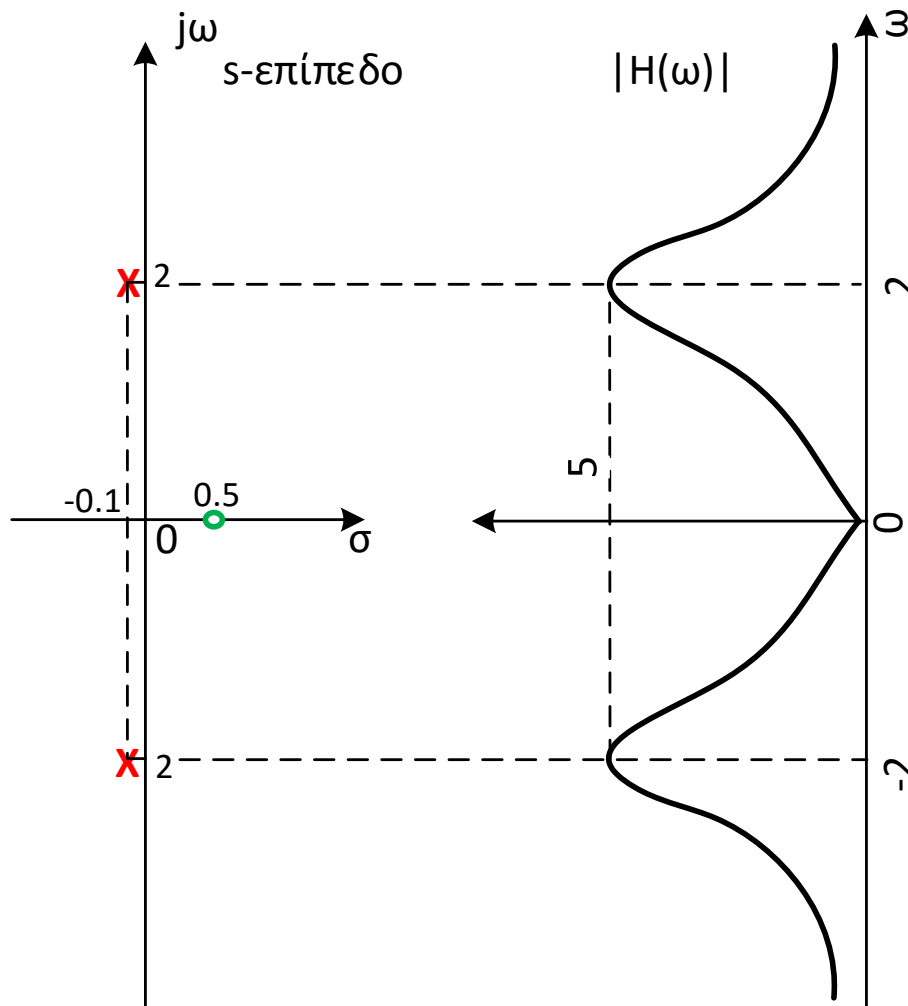
Στο $\omega = 0$, έχουμε

$$|H(0)| = \frac{0.5}{|0.1 - j2||0.1 + j2|} \approx \frac{0.5}{2^2} = 0.125 \quad (14)$$

ενώ για $\omega = 2$, είναι

$$|H(2)| = \frac{|j2 - 0.5|}{|0.1||j4 + 0.1|} \approx \frac{2}{0.1(4)} = 5 \quad (15)$$

Για $\omega \gg 2$, το μήκος του διανύσματος από το $j\omega$ σε έναν από τους πόλους είναι προσεγγιστικά ίσο με το διάνυσμα από το $j\omega$ προς το μηδενικό, και έτσι το μηδενικό και ο ένας πόλος αλληλοακυρώνονται. Η απόσταση από το $j\omega$ στον εναπομείναντα πόλο αυξάνεται όσο αυξάνει το ω . Έτσι, η απόκριση πλάτους $|H(\omega)|$ πηγαίνει προς το μηδέν όσο αυξάνει το ω . Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6: Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών και απόκριση πλάτους Παραδείγματος

4 Αντίστροφα Συστήματα

Ας θεωρήσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα, με κρουστική απόκριση $h(t)$. Η κρουστική απόκριση του **αντίστροφου συστήματος**, $h^{inv}(t)$, ικανοποιεί τη συνθήκη

$$h^{inv}(t) * h(t) = \delta(t) \quad (16)$$

που την έχετε ξαναδεί όταν πρωτοσυζητήσαμε για συστήματα. Αν εφαρμόσουμε μετασχ. Laplace και στα δυο μέλη, έχουμε ότι

$$H^{inv}(s)H(s) = 1 \Leftrightarrow H^{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} \quad (17)$$

Άρα βλέπουμε ότι η Συνάρτηση Μεταφοράς $H^{inv}(s)$ του αντίστροφου συστήματος δεν είναι άλλη από την αντίστροφη της Συνάρτησης Μεταφοράς, $1/H(s)$, του αρχικού συστήματος. Με όρους πόλων-μηδενικών, αυτή η σχέση γράφεται

$$H^{inv}(s) = \frac{1}{A} \frac{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}{\prod_{k=1}^M (s - c_k)} \quad (18)$$

όπου c_k, d_k τα μηδενικά και οι πόλοι του αρχικού συστήματος, που εδώ βλέπετε ότι έχουν γίνει πόλοι (c_k) και μηδενικά (d_k), για το αντίστροφο σύστημα. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι κάθε σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς έχει αντίστροφο σύστημα.

Παράδειγμα:

Θεωρήστε το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t) \quad (19)$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του αντιστρόφου συστήματος. Είναι αυτό ευσταθές και αιτιατό;

Λύση:

Πρώτα, ας βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς του ίδιου του συστήματος. Θα είναι, με εφαρμογή της ιδιότητας της παραγώγισης

$$sY(s) + 3Y(s) = s^2X(s) + sX(s) - 2X(s) \Leftrightarrow Y(s)(s + 3) = X(s)(s^2 + s - 2) \quad (20)$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + s - 2}{s + 3} \quad (21)$$

και το αντίστροφο σύστημα θα είναι το

$$H^{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + s - 2} = \frac{s + 3}{(s - 1)(s + 2)} \quad (22)$$

Το αντίστροφο σύστημα έχει πόλους στις θέσεις $s = 1, s = -2$. Ο πόλος στη θέση $s = 1$ είναι στο δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου. Έτσι, το αντίστροφο σύστημα δεν μπορεί να είναι και αιτιατό και ευσταθές.

4.1 Πεδίο Σύγκλισης Αντιστρόφου Συστήματος

Ένα ερώτημα που μπορεί να θέσει κάποιος είναι τι συμβαίνει με το πεδίο σύγκλισης του αντίστροφου συστήματος. Αν $ROC_{H(s)} = R_H$, τότε ποιο είναι το πεδίο σύγκλισης του αντίστροφου συστήματος, R_H^{inv} ; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα μας τη δίνει το θεώρημα της συνέλιξης, το οποίο, όπως ξέρετε ήδη, μας λέει ότι τα $H(s)$ και $G(s) = H^{inv}(s)$ πρέπει να έχουν επικαλυπτόμενα πεδία σύγκλισης.

Παράδειγμα 1:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s - 0.5}{s - 0.8}, \quad ROC = \Re\{s\} > 0.8 \quad (23)$$

τότε το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$H^{inv}(s) = \frac{s - 0.8}{s - 0.5} \quad (24)$$

Όμως για το πεδίο σύγκλισης έχουμε δυο επιλογές: i) $\Re\{s\} > 0.5$, ii) $\Re\{s\} < 0.5$. Από αυτά τα δυο πεδία, αυτό που επικαλύπτεται με το πεδίο σύγκλισης του $H(s)$ είναι το $\Re\{s\} > 0.5$. Άρα μόνο το σύστημα με αυτό το πεδίο σύγκλισης είναι έγκυρο αντίστροφο σύστημα! Έτσι, μπορούμε να βρούμε και την κρουστική απόκριση του αντιστρόφου συστήματος, $h^{inv}(t)$, η οποία είναι

$$\begin{aligned} h^{inv}(t) &= L^{-1}\left\{\frac{s}{s - 0.5}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{0.8}{s - 0.5}\right\} = L^{-1}\left\{s \frac{1}{s - 0.5}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{0.8}{s - 0.5}\right\} \\ &= \frac{d}{dt}e^{t/2}\epsilon(t) - 0.8e^{t/2}\epsilon(t) \\ &= \delta(t) + 0.5e^{t/2}\epsilon(t) - 0.8e^{t/2}\epsilon(t) \\ &= \delta(t) - 0.3e^{t/2}\epsilon(t) \end{aligned} \quad (25)$$

Παράδειγμα 2:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s - 0.5}{s - 0.3}, \quad ROC = \Re\{s\} > 0.3 \quad (26)$$

τότε το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$H^{inv}(s) = \frac{s - 0.3}{s - 0.5} \quad (27)$$

Όμως για το πεδίο σύγκλισης έχουμε δυο επιλογές: i) $\Re\{s\} > 0.5$, ii) $\Re\{s\} < 0.5$. Παρατηρήστε ότι και τα δυο πεδία σύγκλισης επικαλύπτονται με το πεδίο σύγκλισης του $H(s)$. Άρα και τα δυο συστήματα είναι έγκυρα αντίστροφα σύστημα! Έτσι, μπορούμε να βρούμε και την κρουστική απόκριση του αντιστρόφου συστήματος, $h_1^{inv}(t)$, η οποία είναι

$$\begin{aligned} h_1^{inv}(t) &= L^{-1}\left\{\frac{s}{s - 0.5}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{0.3}{s - 0.5}\right\} = L^{-1}\left\{s \frac{1}{s - 0.5}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{0.3}{s - 0.5}\right\} \\ &= \frac{d}{dt}e^{t/2}\epsilon(t) - 0.3e^{t/2}\epsilon(t) \\ &= \delta(t) + 0.5e^{t/2}\epsilon(t) - 0.3e^{t/2}\epsilon(t) \\ &= \delta(t) + 0.2e^{t/2}\epsilon(t) \end{aligned} \quad (28)$$

και

$$\begin{aligned} h_2^{inv}(t) &= L^{-1}\left\{\frac{s}{s - 0.5}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{0.3}{s - 0.5}\right\} = L^{-1}\left\{s \frac{1}{s - 0.5}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{0.3}{s - 0.5}\right\} \\ &= -\frac{d}{dt}e^{t/2}\epsilon(-t) + 0.3e^{t/2}\epsilon(-t) \\ &= -\delta(t) - 0.5e^{t/2}\epsilon(-t) + 0.3e^{t/2}\epsilon(-t) \\ &= -\delta(t) - 0.2e^{t/2}\epsilon(-t) \end{aligned} \quad (29)$$

Παρατηρήστε ότι το $h_1^{inv}(t)$ είναι αιτιατό αλλά ασταθές, ενώ το $h_2^{inv}(t)$ είναι αντι-αιτιατό αλλά ευσταθές.

4.2 Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

Συχνά στην πράξη, μας ενδιαφέρουν συστήματα που έχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα. Για παράδειγμα, στην κινητή τηλεφωνία, θέλουμε να ακυρώσουμε την επίδραση του καναλιού μετάδοσης επάνω στο σήμα που μεταδίδεται. Έστω $H(s)$ το σύστημα που μοντελοποιεί το κανάλι επικοινωνίας, έστω $X(s)$ η είσοδος, και $Y(s)$ η έξοδος, δηλ. το σήμα στον παραλήπτη. Για να ακυρώσουμε την επίδραση του καναλιού $H(s)$ στο σήμα εισόδου $X(s)$, θα πρέπει να υπολογίσουμε το αντίστροφο σύστημα $1/H(s)$, ώστε ο παραλήπτης να λάβει το

$$Y(s) = H(s) \left(\frac{1}{H(s)} \right) X(s) = X(s) \quad (30)$$

δηλ. το σήμα που θέλουμε να στείλουμε. Επιθυμούμε αυτό το αντίστροφο σύστημα να είναι ευσταθές, για προφανείς λόγους, και αιτιατό, ώστε να είναι πραγματοποιήσιμο.

Προφανώς για να είναι ένα σύστημα ευσταθές και αιτιατό, πρέπει να έχει όλους τους πόλους του στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικό επιπέδου. Γιατί; Γιατί τότε θα έχει δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης (ως αιτιατό, είναι και δεξιόπλευρο σήμα, και τα δεξιόπλευρα σήματα ξέρουμε ότι έχουν δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης), και αυτό θα είναι της μορφής $\Re\{s\} > \max_{k=1, \dots, N} \{\Re\{d_k\}\}$, όπου d_k οι πόλοι του συστήματος. Αφού λοιπόν το πεδίο σύγκλισης είναι έτσι, ο μεγαλύτερος πόλος θα είναι κι αυτός στο αριστερό ημιεπίπεδο, και έτσι το πεδίο σύγκλισης σίγουρα θα περιλαμβάνει τον κατακόρυφο άξονα $j\omega$, άρα θα είναι και ευσταθές.

Για ένα τέτοιο σύστημα $H(s)$, το αντίστρόφό του, $H^{inv}(s)$, θα έχει για πόλους τα μηδενικά του $H(s)$ και για μηδενικά τους πόλους του $H(s)$. Ένα ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα υπάρχει μόνον όταν όλα τα μηδενικά και όλοι οι πόλοι του $H(s)$ είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο του s -επιπέδου. Ένα σύστημα που έχει όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά στο αριστερό του ημιεπίπεδο λέγεται **Σύστημα Ελάχιστης Φάσης**. Μόνο συστήματα ελάχιστης φάσης

μπορούν να δώσουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα! :-)

Μια σημαντική ιδιότητα των συστημάτων ελάχιστης φάσης είναι η μοναδική σχέση μεταξύ του φάσματος πλάτους και του φάσματος φάσης. Δηλαδή, η απόκριση φάσης ενός συστήματος ελάχιστης φάσης μπορεί να ευρεθεί μοναδικά από την απόκριση πλάτους, και αντίστροφα.

Ο όρος *ελάχιστης φάσης* είναι περισσότερο ιστορικός, και ένας πιο κατάλληλος όρος θα ήταν *ελάχιστης καθυστέρησης φάσης*, για λόγους που δε θα συζητήσουμε εδώ. Τέλος, θα χρειαστεί να εισάγουμε μια ακόμα κατηγορία συστημάτων, τα οποία λέγονται all-pass συστήματα.

4.3 All-pass Συστήματα

Ένα all-pass σύστημα είναι ένα ευσταθές σύστημα του οποίου η απόκριση πλάτους είναι σταθερή και ανεξάρτητη της συχνότητας, δηλ. η απόκριση σε συχνότητα γράφεται ως

$$H_{ap}(f) = e^{j\phi_{ap}(f)} \quad (31)$$

και άρα η απόκριση πλάτους είναι

$$|H_{ap}(f)| = 1 \quad (32)$$

Αντίστοιχα, αν η σχετική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι ρητή, θα είναι της μορφής

$$H_{ap}(s) = \prod_{k=1}^M \frac{s + a_k^*}{s - a_k} \quad (33)$$

Παρατηρήστε ότι αν το a_k είναι πραγματικό, τότε ο πόλος και το μηδενικό κάθε όρου στην παραπάνω σχέση θα βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις επάνω στον πραγματικό άξονα. Αν το a_k είναι μιγαδικό, τότε ο πόλος και το μηδενικό κάθε όρου στην παραπάνω σχέση θα βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν του άξονα των φανταστικών.

Παρατηρήστε ότι

$$|H_{ap}(s)|_{s=j2\pi f} = |H_{ap}(f)| = \left| \prod_{k=1}^M \frac{j2\pi f + a_k^*}{j2\pi f - a_k} \right| = \prod_{k=1}^M \frac{|j2\pi f + a_k^*|}{|j2\pi f - a_k|} = 1 \quad (34)$$

Δείξτε το αναλυτικά!

4.4 Παραγοντοποίηση συστήματος σε All-pass και Ελάχιστης Φάσης

Επιστρέφοντας τώρα στα συστήματα ελάχιστης φάσης, μπορεί να δειχθεί ότι οποιοδήποτε αιτιατό και ευσταθές σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, η οποία δεν έχει μηδενικά στον φανταστικό άξονα, μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης και ενός συστήματος all-pass:

$$H(s) = H_{min}(s)H_{ap}(s) \quad (35)$$

με $H_{min}(s)$ και $H_{ap}(s)$ τα συστήματα ελάχιστης φάσης και all-pass αντίστοιχα. Με βάση αυτή τη σχέση, δείτε ότι

$$|H(s)|_{s=j2\pi f} = |H(f)| = |H_{min}(f)||H_{ap}(f)| = |H_{min}(f)| \quad (36)$$

αφού το $|H_{ap}(f)| = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει το ίδιο μέτρο με το αρχικό σύστημα. Τι διαφορετικό έχει; Προφανώς διαφορετική φάση!

$$\angle H(s)_{s=j2\pi f} = \angle H(f) = \angle H_{min}(f) + \angle H_{ap}(f) \quad (37)$$

Τι χρησιμότητα μπορεί να έχει το σύστημα ελάχιστης φάσης; Ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα της εκτίμησης του καναλιού $H(s)$ στο παράδειγμα της κινητής τηλεφωνίας. Αν το $H(s)$ είναι ευσταθές και αιτιατό αλλά έχει ένα μηδενικό

στο δεξιό ημιεπίπεδο, τότε το αντίστροφο σύστημα θα έχει έναν πόλο στο δεξιό ημιεπίπεδο, οπότε δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό! Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί μερικώς βρίσκοντας το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο $H(s)$. Έτσι θα έχουμε

$$Y(f) = H(f) \frac{1}{H_{min}(f)} X(f) \quad (38)$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$|Y(f)| = |H(f)| \frac{1}{|H_{min}(f)|} |X(f)| = |X(f)| \quad (39)$$

δηλ. μπορούμε να ακυρώσουμε πλήρως την επίδραση του καναλιού στο φάσμα πλάτους, αλλά φυσικά δε θα συμβαίνει το ίδιο και για τη φάση, αφού

$$\angle Y(f) = \angle H(f) - \angle H_{min}(f) + \angle X(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle X(f) \quad (40)$$

και $\angle H_{ap}(f)$ είναι πάντα διάφορη του μηδενός. Άρα δείξαμε ότι το λαμβανόμενο σήμα έχει φάση η οποία είναι το άθροισμα της φάσης της εισόδου και της φάσης του all-pass συστήματος.

Ας δούμε πως γίνεται αυτή η παραγοντοποίηση με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα:

Έστω το αιτιατό και ευσταθές σύστημα $H(s)$ με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \quad (41)$$

Βλέπουμε πως υπάρχει ένα μηδενικό στο $s = 1$ και δυο πόλοι στο $s = -2$ και $s = -3$. Το σύστημα ελάχιστης φάσης πρέπει να έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά του στο αριστερό ημιεπίπεδο. Από το παραπάνω σύστημα, στο αριστερό ημιεπίπεδο βρίσκονται μόνο οι πόλοι. Άρα το μηδενικό $s = 1$ δε θα πρέπει να ανήκει στο σύστημα ελάχιστης φάσης, αλλά στο all-pass σύστημα. Όμως ένα all-pass σύστημα έχει τους πόλους και τα μηδενικά του σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν του άξονα των φανταστικών. Άρα θα υπάρχει κι ένας πόλος στη θέση $s = -1$.

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1} \quad (42)$$

Οι δυο πόλοι του αρχικού συστήματος θα ανήκουν στο σύστημα ελάχιστης φάσης, όμως θα πρέπει να ακυρώσουμε και τον πόλο που εισάγαμε στο all-pass σύστημα, ειδάλλως η παραγοντοποίηση δε θα είναι σωστή! Άρα το σύστημα ελάχιστης φάσης θα είναι

$$H_{min}(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad (43)$$

Δείξτε ότι το $H_{min}(s)$ και το $H(s)$ έχουν την ίδια απόκριση πλάτους.

5 Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

Κάποια συστήματα εκτελούν συγκεκριμένες λειτουργίες, οι οποίες είναι πολύ συνήθεις και πολύ χρήσιμες στην πράξη. Αυτές οι λειτουργίες περιλαμβάνουν την αποκοπή συγκεκριμένων συχνοτήτων του σήματος εισόδου και τη διέλευση κάποιων άλλων, και/ή την ενίσχυση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που διέρχονται ελεύθερα του συστήματος. Λόγω αυτής της λειτουργίας τους, αυτά τα συστήματα ονομάζονται “φίλτρα”. Ο λόγος, προφανής: όπως το φίλτρο του καφέ π.χ. δεσμεύει τον καφέ σε στέρεα μορφή και επιτρέπει τη διέλευση του υγρού καφέ, έτσι και αυτά τα φίλτρα, επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων ενώ δεσμεύουν (καταστέλλουν, μηδενίζουν το πλάτος τους δηλαδή) κάποιες άλλες. Η μελέτη αυτών των συστημάτων γίνεται κατεύθυναν στο χώρο του μετασχ. Fourier.

Εδώ θα δούμε κάποια συγκεκριμένα φίλτρα, τα οποία ονομάζονται *ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων*, τα οποία είναι ΓΧΑ συστήματα και έχουν τις εξής δυο ιδιότητες:

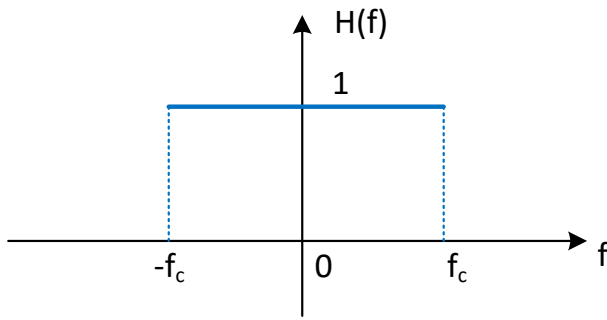
- Είναι ιδανικά, δηλ. *μη πραγματοποιήσιμα*, διότι όπως θα δούμε:

- είναι μη-αιτιατά
- η κρουστική τους απόκριση $h(t)$ είναι άπειρης διάρκειας
- Αφήνουν να περάσουν κάποιες συχνότητες χωρίς διαταραχή στο πλάτος ή στη φάση, ενώ αποκόπτουν εντελώς κάποιες άλλες.

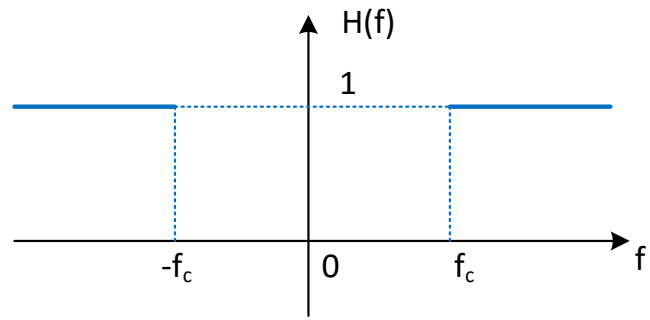
Παρ' όλα αυτά, όλα τα πραγματικά φίλτρα που κατασκευάζουν οι μηχανικοί προσπαθούν να προσεγγίσουν όσο γίνεται καλύτερα αυτά τα θεωρητικά φίλτρα, δεδομένων παραγόντων όπως η πολυπλοκότητα και το κόστος κατασκευής.

Υπάρχουν τέσσερα βασικά είδη φίλτρων επιλογής συχνότητας:

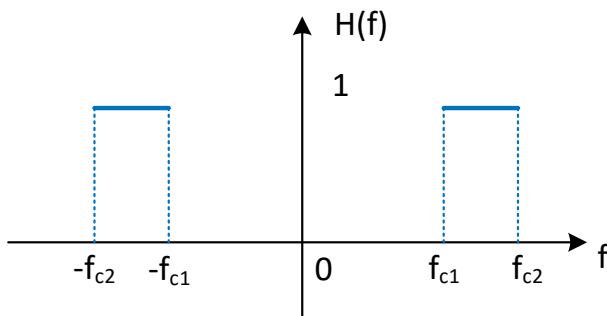
1. Το **βαθυπερατό (lowpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από τη μηδενική συχνότητα ως μια συγκεκριμένη, που λέγεται *συχνότητα αποκοπής*, f_c .
2. Το **υψιπερατό (highpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη, που λέγεται *συχνότητα αποκοπής*, f_c , ως το $+\infty$.
3. Το **ζωνοπερατό (bandpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.
4. Το **ζωνοφρακτικό (bandstop)** φίλτρο: απαγορεύει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.



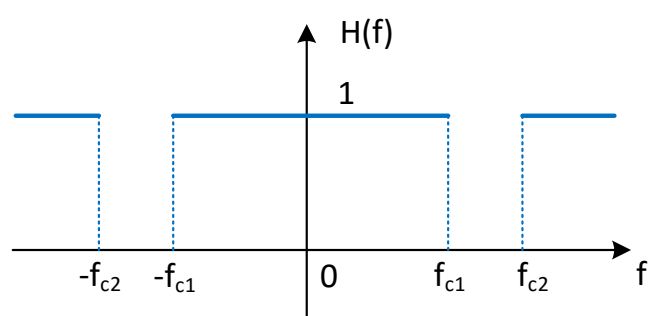
(α) Χαμηλοπερατό



(β) Υψιπερατό



(γ) Ζωνοπερατό



(δ) Ζωνοφρακτικό

Σχήμα 7: Ιδανικά Φίλτρα

Τα φίλτρα αυτά φαίνονται σχηματικά στο Σχήμα 7, και όπως παρατηρείτε, έχουν άρτια συμμετρία, αφού αντιστοιχούν σε πραγματικά σήματα. Ας σημειωθεί ότι τα ιδανικά φίλτρα έχουν σταθερό, μοναδιαίο μέτρο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 7, αλλά η φάση τους μπορεί να είναι μηδενική ή γραμμική. Εδώ θα ασχοληθούμε με ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων μηδενικής φάσης. Ας τα δούμε αναλυτικά.

5.1 Χαμηλοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{LP}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \quad (44)$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί με χρήση της γνωστής συνάρτησης rect ως

$$H_{LP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (45)$$

Προσέξτε ότι

$$|H_{LP}(f)| = H_{LP}(f) \quad (46)$$

και

$$\angle H_{LP}(f) = 0 \quad (47)$$

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{LP}(t) = F^{-1}\{H_{LP}(f)\} = 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (48)$$

5.2 Υψηλοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό υψηλοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{HP}(f) = \begin{cases} 0, & |f| \leq f_c \\ 1, & |f| > f_c \end{cases} \quad (49)$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί ως συνάρτηση του χαμηλοπερατού φίλτρου που είδαμε μόλις, ως

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (50)$$

Προσέξτε ότι κι εδώ το μέτρο του φίλτρου είναι ίσο με την απόκριση σε συχνότητα, όπως για το χαμηλοπερατό, και η φάση του είναι επίσης μηδέν.

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{HP}(t) = F^{-1}\{H_{HP}(f)\} = \delta(t) - 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (51)$$

5.3 Ζωνοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BP}(f) = \begin{cases} 1, & f_{c1} \leq |f| \leq f_{c2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (52)$$

κι όπως βλέπετε στο Σχήμα 7, αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς γύρω από τη συχνότητα $\pm f_c = \pm \frac{f_{c1} + f_{c2}}{2}$, με διάρκεια $f_{c2} - f_{c1}$ ο καθένας. Άρα το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{BP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{f_{c2} - f_{c1}}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{f_{c2} - f_{c1}}\right) \quad (53)$$

Με αυτή τη γραφή, η κρουστική απόκριση υπολογίζεται από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier ως

$$h_{BP}(t) = (f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) e^{-j2\pi f_c t} + (f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) e^{j2\pi f_c t} \quad (54)$$

η οποία μπορεί να γραφεί μέσω των σχέσεων του Euler ως

$$h_{BP}(t) = 2(f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) \cos(2\pi f_c t) \quad (55)$$

με $f_c = \frac{f_{c1} + f_{c2}}{2}$.

5.4 Ζωνοφρακτικό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BS}(f) = \begin{cases} 0, & f_{c1} \leq |f| \leq f_{c2} \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (56)$$

και μπορεί να γραφεί συναρτήσει του ζωνοπερατού φίλτρου ως

$$H_{BS}(f) = 1 - H_{BP}(f) \quad (57)$$

Έτσι, η κρουστική του απόκριση μπορεί να βρεθεί εύκολα ως

$$h_{BS}(t) = \delta(t) - h_{BP}(t) = \delta(t) - 2(f_{c2} - f_{c1})\text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) \cos(2\pi f_c t) \quad (58)$$

Παρατηρήστε ότι πράγματι όλα τα ιδανικά φίλτρα έχουν κρουστική απόκριση η οποία είναι μη-αιτιατή και άπειρης διάρκειας.

Παρ' όλο που τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων δε διαφέρουν ως προς το χειρισμό τους σε σχέση με οποιαδήποτε άλλα συστήματα, η μαθηματική μορφή τους μας διευκολύνει στην εύρεση της εξόδου τους, όταν αυτά συνιστούν ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο δέχεται εισόδους.

Η Σχεδίαση κι Ανάλυση Φίλτρων είναι ένας ολόκληρος τομέας της Επεξεργασίας Σήματος από μόνος του, οπότε δε θα επεκταθούμε περισσότερο εδώ. Ας δούμε όμως μερικά παραδείγματα.

5.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8) + \sin(2\pi 20t - \pi/3) \quad (59)$$

το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα ιδανικό

(α') χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

(β') υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

Βρείτε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:

Μπορούμε απ' ευθείας να απαντήσουμε ότι αφού τα φίλτρα μας αποκόπτουν τις συχνότητες μεγαλύτερες από 15 Hz (χαμηλοπερατό) και μικρότερες από 15 Hz (υψιπερατό), και η είσοδός μας αποτελείται μόνο από τις συχνότητες 10, 20 Hz, τότε πολύ απλά οι έξοδοι θα είναι

$$(α') y(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8)$$

$$(β') y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3)$$

αντίστοιχα, αφού τα φίλτρα είναι ιδανικά (μοναδιαίου πλάτους) και η φάση τους είναι μηδέν, οπότε δεν υπάρχει καμιά μεταβολή στα πλάτη και τις φάσεις των σημάτων που περνούν στην έξοδο.

Ας επικυρώσουμε αυτό το αποτέλεσμα αναλυτικά. Ο μετασχ. Fourier του σήματος εισόδου είναι

$$X(f) = e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) + e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20) \quad (60)$$

(α') Η έξοδος στο χώρο της συχνότητας θα είναι το γινόμενο των μετασχ. Fourier της εισόδου και του συστήματος, δηλ.

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (61)$$

$$= (e^{j\pi/8}\delta(f-10) + e^{-j\pi/8}\delta(f+10) + e^{-j5\pi/6}\delta(f-20) + e^{j5\pi/6}\delta(f+20))\text{rect}\left(\frac{f}{30}\right) \quad (62)$$

$$= e^{j\pi/8}\text{rect}\left(\frac{1}{3}\right)\delta(f-10) + e^{-j\pi/8}\text{rect}\left(\frac{-1}{3}\right)\delta(f+10) \quad (63)$$

$$+ e^{-j5\pi/6}\text{rect}\left(\frac{2}{3}\right)\delta(f-20) + e^{j5\pi/6}\text{rect}\left(\frac{-2}{3}\right)\delta(f+20) \quad (64)$$

λόγω της γνωστής ιδιότητας

$$X(f)\delta(f \pm f_0) = X(\mp f_0)\delta(f \pm f_0) \quad (65)$$

Όμως

$$\text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (66)$$

και άρα

$$\text{rect}\left(\frac{\pm 2}{3}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \text{rect}\left(\frac{\pm 1}{3}\right) = 1 \quad (67)$$

Οπότε τελικά

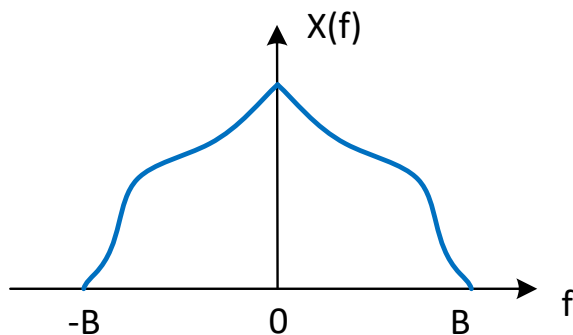
$$Y(f) = e^{j\pi/8}\delta(f-10) + e^{-j\pi/8}\delta(f+10) \longleftrightarrow y(t) = 2\cos(2\pi 10t + \pi/8) \quad (68)$$

(β') Εντελώς ανάλογα με παραπάνω, δείξτε ότι

$$Y(f) = e^{-j5\pi/6}\delta(f-20) + e^{j5\pi/6}\delta(f+20) \longleftrightarrow y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3) \quad (69)$$

Παράδειγμα 2:

Έστω το σήμα $x(t)$ του οποίου ο μετασχ. Fourier $X(f)$ φαίνεται στο Σχήμα 8,



Σχήμα 8: Σήμα εισόδου συστήματος.

το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα σύστημα του Σχήματος 9, με $f_c = 100$ Hz, και με το σύστημα $h(t)$ να είναι της μορφής

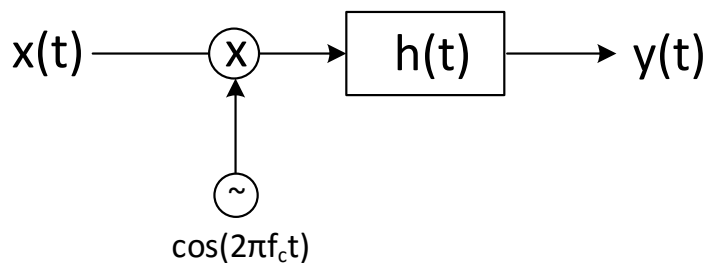
$$h(t) = 400\text{sinc}(200t) \quad (70)$$

Σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:

Το σήμα $x(t)$ πολλαπλασιάζεται με ένα συνημίτονο συχνότητας f_c , οπότε αν συμβολίσουμε με $w(t)$ το αποτέλεσμα της πράξης αυτής, θα είναι

$$w(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c)\right) \quad (71)$$

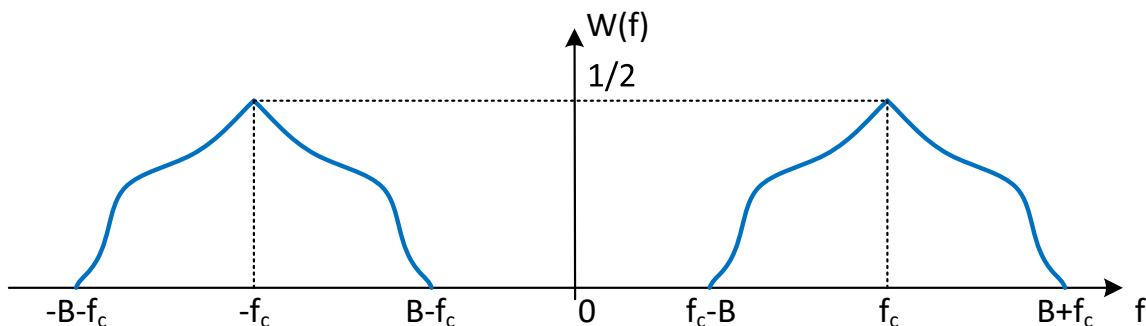


Σχήμα 9: Σύστημα Παραδείγματος 2.

και λόγω γνωστής ιδιότητας της συνέλιξης με συνάρτηση Δέλτα, είναι

$$W(f) = \frac{1}{2}X(f - f_c) + \frac{1}{2}X(f + f_c) \quad (72)$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 10.



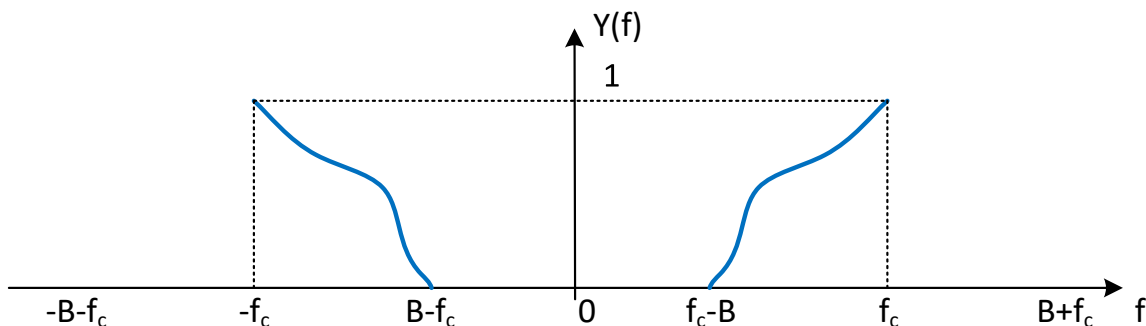
Σχήμα 10: Είσοδος συστήματος Παραδείγματος 2.

Το σύστημα $h(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$h(t) = 400\text{sinc}(200t) = 2 \times 200\text{sinc}(200t) \longleftrightarrow H(f) = 2\text{rect}\left(\frac{f}{200}\right) \quad (73)$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 100$ Hz με πλάτος 2. Άρα το φίλτρο αυτό θα κρατήσει τις συχνότητες της εισόδου που βρίσκονται στο διάστημα $[-100, 100]$ Hz, θα διπλασιάσει το πλάτος τους, ενώ θα αποκόψει τελείως τις συχνότητες εκτός του παραπάνω διαστήματος.

Η έξοδος του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 11.



Σχήμα 11: Έξοδος συστήματος Παραδείγματος 2.

6 Ασκήσεις

1. Εξετάστε πότε τα παρακάτω συστήματα είναι ευσταθή και αιτιατά, και αν έχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο.

$$(α) \quad H(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+10)}$$

$$(β) \quad H(s) = \frac{s^2+2s-3}{(s+3)(s^2+2s+5)}$$

$$(γ) \quad H(s) = \frac{s^2-3s+2}{(s+2)(s^2-2s+8)}$$

$$(δ) \quad H(s) = \frac{(s^2+2s)}{(s^2+3s-2)(s^2+s+2)}$$

Λύση:

Για να είναι ένα σύστημα ευσταθές και αιτιατό, θα πρέπει να έχει πεδίο σύγκλισης που να είναι δεξιόπλευρο ($\Re\{s\} > \sigma_{max}$), όπου σ_{max} το πραγματικό μέρος του μεγαλύτερου πόλου, και να περιλαμβάνει τον κατακόρυφο άξονα $j\omega$, δηλ. το σ_{max} πρέπει να είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο. Με άλλα λόγια, όλοι οι πόλοι του συστήματος, $s_k = \sigma_k + j\omega_k$, πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο $\sigma_k < 0$.

(α) Προφανώς οι οροί $s+1$ σε αριθμητή και παρονομαστή απαλείφονται, και άρα μένει το

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+10} \quad (74)$$

Για το σύστημα αυτό, όλοι οι πόλοι, $s = -1 \pm 3j$, βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, και αν επιλέξουμε $\Re\{s\} > -1$, τότε το σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό. Για το αντίστροφο σύστημα,

$$H^{inv}(s) = \frac{s^2+2s+10}{s+2} \quad (75)$$

ο πόλος είναι στη θέση $s = -2$, άρα βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο, και αν επιλέξουμε $\Re\{s\} > -2$, τότε το αντίστροφο σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό.

(β) Για το σύστημα

$$H(s) = \frac{s^2+2s-3}{(s+3)(s^2+2s+5)} = \frac{(s+3)(s-1)}{(s+3)(s^2+2s+5)} = \frac{s-1}{s^2+2s+5} \quad (76)$$

έχουμε ότι οι πόλοι του είναι στις θέσεις $s = -1 \pm 2j$, άρα αν επιλέξουμε $\Re\{s\} > -1$, τότε το σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό. Για το αντίστροφο σύστημα,

$$H^{inv}(s) = \frac{s^2+2s+5}{s-1} \quad (77)$$

βλέπουμε ότι οι πόλοι του είναι στη θέση $s = 1$, και άρα οποιο πεδίο σύγκλισης και να διαλέξουμε (είτε $\Re\{s\} > 1$ είτε $\Re\{s\} < 1$) το σύστημά μας δεν μπορεί να είναι και ευσταθές και αιτιατό.

(γ) Για το σύστημα

$$H(s) = \frac{s^2-3s+2}{(s+2)(s^2-2s+8)} \quad (78)$$

βλέπουμε ότι έχει πόλους στις θέσεις $s = -2, 1 \pm j\sqrt{7}$. Άρα δεν υπάρχει πεδίο σύγκλισης που να δίνει ευσταθές και αιτιατό σύστημα. Το αντίστροφο σύστημα,

$$H^{inv}(s) = \frac{(s+2)(s^2-2s+8)}{s^2-3s+2} \quad (79)$$

έχει πόλους στις θέσεις $s = 1, 2$, και άρα επίσης δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό, για κανένα πιθανό πεδίο σύγκλισης.

(δ) Για το σύστημα

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s}{(s^2 + 3s - 2)(s^2 + s + 2)} \quad (80)$$

βλέπουμε ότι οι πόλοι του είναι στις θέσεις $s = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}, -0.5 \pm j\sqrt{\frac{7}{4}}$. Άρα δεν υπάρχει πεδίο συγκλισης που να δίνει ευσταθές και αιτιατό σύστημα. Για το αντίστροφο,

$$H^{inv}(s) = \frac{(s^2 + 3s - 2)(s^2 + s + 2)}{s^2 + 2s} \quad (81)$$

παρατηρούμε ότι οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $s = 0, -2$, άρα δεν υπάρχει πεδίο σύγκλισης που να δίνει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα.

Σημείωση:

Είπαμε στη θεωρία ότι μια μόνο κατηγορία ευσταθών και αιτιατών συστημάτων έχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο: τα συστήματα *Ελάχιστης Φάσης*. Θυμίζουμε ότι τα συστήματα *Ελάχιστης Φάσης* είναι αυτά που έχουν όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά στο αριστερό ημιεπίπεδο. Άρα η παραπάνω άσκηση θα μπορούσε να απαντηθεί για τα αντίστροφα συστήματα $H^{inv}(s)$ εξετάζοντας απλά αν όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά του κάθε $H(s)$ είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο. Αν είναι, τότε θα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο $H^{inv}(s)$, χωρίς να χρειάζεται να βρούμε ποιο είναι και που έχει τους πόλους του. Αν δεν είναι, τότε δε θα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο.

2. Σχεδιάστε την απόκριση πλάτους για τα παρακάτω συστήματα

$$(α) \quad H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 101}$$

$$(β) \quad H(s) = \frac{s^2 + 16}{s + 1}$$

$$(γ) \quad H(s) = \frac{s - 1}{s + 1}$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ πόλων, μηδενικών, και του κατακόρυφου άξονα στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση:

Θα έχουμε

(α) Η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(\omega)| = \frac{|\omega|}{|j(\omega - 10) + 1||j(\omega + 10) + 1|} \quad (82)$$

Άρα θα είναι $H(0) = 0$ και $H(\pm 10) \approx \pm \frac{1}{2}$.

(β) Η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(\omega)| = \frac{|j(\omega + 4)||j(\omega - 4)|}{|j\omega - 1|} \quad (83)$$

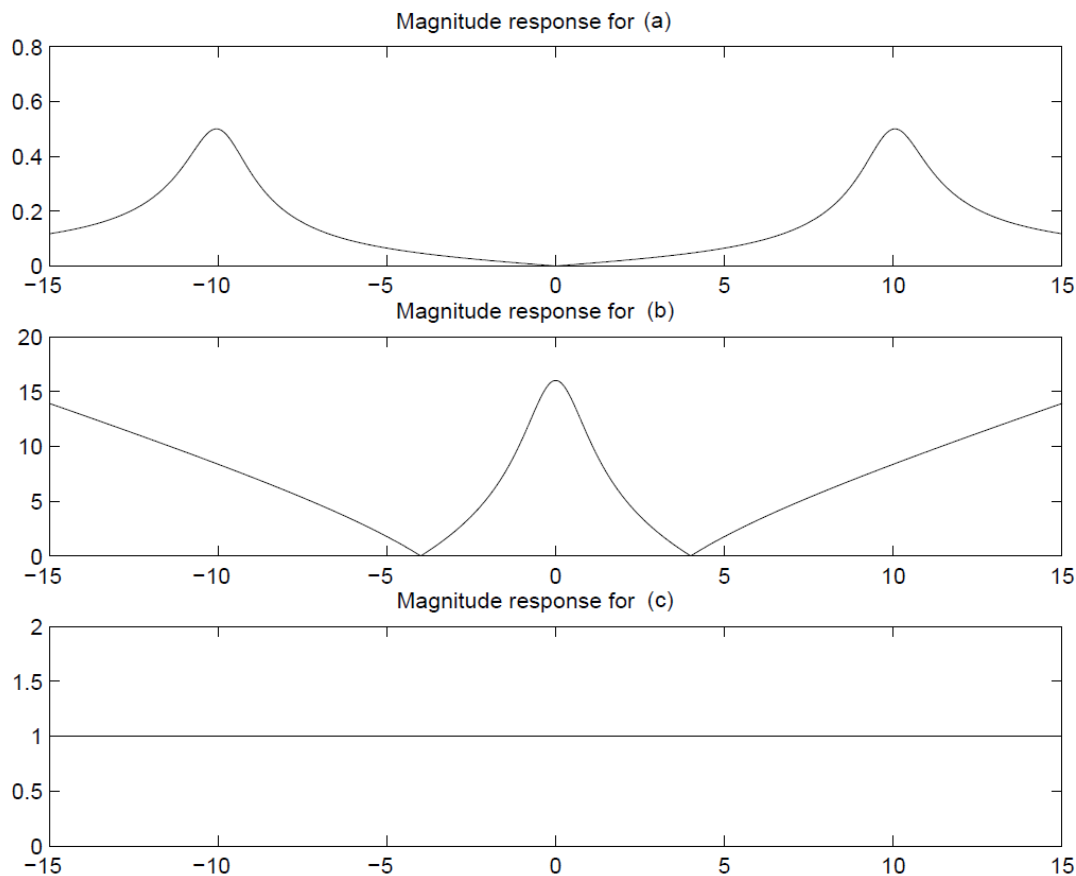
Άρα θα είναι $H(0) = 16$ και $H(\pm 4) = 0$.

(γ) Η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(\omega)| = \frac{|j\omega - 1|}{|j\omega + 1|} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 + 1}} = 1 \quad (84)$$

άρα το σύστημα είναι all-pass.

Οι αποκρίσεις πλάτους των παραπάνω συστημάτων φαίνονται στο Σχήμα 12.



Σχήμα 12: Απόκριση Πλάτους Άσκησης 7.3

3. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός σήματος $x(t)$ ορίζεται ως

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t + \tau)d\tau$$

(α) Γράψτε το παραπάνω ολοκλήρωμα με τη μορφή συνέλιξης.

(β) Χρησιμοποιήστε το παραπάνω αποτέλεσμα για να βρείτε το μετασχ. Laplace του $r(t)$.

(γ) Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό και το $X(s)$ έχει δυο πόλους, εκ των οποίων ο ένας είναι στη θέση $s = \sigma_p + j\omega_p$, βρείτε τη θέση όλων των πόλων του $R(s)$.

Λύση:

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t + \tau)d\tau \quad (\text{Θέτω } u = -\tau) \\
 &= - \int_{+\infty}^{-\infty} x(-u)x(t - u)du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-u)x(t - u)du \\
 &= x(-t) * x(t)
 \end{aligned}
 \tag{85}$$

που είναι και το ζητούμενο. Άρα η αυτοσυσχέτιση δεν είναι τίποτα περισσότερο από τη συνέλιξη του σήματος με το ανεστραμμένο ως προς τον κατακόρυφο άξονα εαυτό του.

(β) Είναι

$$r(t) = x(-t) * x(t) \longleftrightarrow R(s) = X(-s)X(s) \quad (86)$$

(γ) Αφού το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, τότε οι πόλοι του $X(s)$ είναι συζυγώς συμμετρικοί, κι έτσι θα έχουμε $s = \sigma_p \pm j\omega_p$. Όμως, οι πόλοι του $X(-s)$ είναι οι $s = -\sigma_p \pm j\omega_p$, και άρα συνολικά οι πόλοι του $R(s) = X(s)X(-s)$ είναι οι $s = \pm\sigma_p \pm j\omega_p$.

4. Θεωρήστε το σύστημα

$$H(s) = \frac{(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+4)(s+5)}$$

(α) Έχει το παραπάνω σύστημα ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα;

(β) Εκφραστε το $H(s)$ ως το γινόμενο δυο συστημάτων: ενός συστήματος Ελάχιστης Φάσης, $H_{\min}(s)$, και ενός συστήματος All-pass, $H_{\text{ap}}(s)$, το οποίο θα πρέπει να έχει έναν πόλο και ένα μηδενικό.

(γ) Θεωρήστε το αντίστροφο σύστημα του συστήματος Ελάχιστης Φάσης που βρήκατε παραπάνω, $H_{\min}^{\text{inv}}(s)$. Μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό;

(δ) Σχεδιάστε την απόκριση πλάτους του νέου συστήματος, $G(s) = H(s)H_{\min}^{\text{inv}}(s)$.

Λύση:

(α) Τα μηδενικά του $H(s)$ βρίσκονται στις θέσεις $s = -2, 1$. Αφού ένα μηδενικό από αυτά είναι στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το αντίστροφο σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό.

(β) Τα συστήματα Ελάχιστης Φάσης έχουμε δει ότι έχουν όλους τους πόλους και τα μηδενικά στο αριστερό ημιεπίπεδο. Τα συστήματα All-pass έχουν τους πόλους και τα μηδενικά σε συμμετρία γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $j\omega$, δηλ. αν ένας πόλος βρίσκεται στη θέση $s = \sigma_p + j\omega_p$, τότε πρέπει να υπάρχει κι ένα μηδενικό στη θέση $s = -\sigma_p + j\omega_p$. Οπότε, στη δική μας παραγοντοποίηση, το σύστημα Ελάχιστης Φάσης θα πάρει όλους τους πόλους και τα μηδενικά του $H(s)$ που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Το σύστημα All-pass θα πρέπει έπειτα να είναι τέτοιο ώστε να έχει όλους τους υπόλοιπους πόλους και μηδενικά του $H(s)$, αλλά επειδή θα πρέπει να έχει αναγκαστικά και πόλους/μηδενικά στις συμμετρικές θέσεις ως προς $j\omega$, που προφανώς το αρχικό $H(s)$ δεν έχει, θα πρέπει αυτά να τα “ακυρώσουμε”, βάζοντας κατάλληλους πόλους και μηδενικά στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης, προσέχοντας βέβαια να μην πέφτουν στο δεξιό ημιεπίπεδο. Δηλαδή:

Οι πόλοι και τα μηδενικά του $H(s)$ που είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο είναι οι $p = -3, -4, -5$ (όλοι δλδ) και $z = -2$ (το ένα από τα δυο μηδενικά), αντίστοιχα. Άρα το σύστημα Ελάχιστης Φάσης θα είναι το

$$H_{\min}(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)(s+5)}$$

Το σύστημα All-pass θα πάρει το εναπομείναν μηδενικό, $z = 1$, αλλά επειδή είπαμε ότι στα All-pass συστήματα, οι πόλοι και τα μηδενικά έρχονται σε συμμετρία γύρω από τον $j\omega$, θα πρέπει το σύστημα να έχει και έναν πόλο στη θέση $p = -1$. Άρα

$$H_{\text{ap}}(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

Όμως έτσι όπως είναι τώρα κατασκευασμένα τα συστήματα, το γινόμενο $H_{\min}(s)H_{\text{ap}}(s)$ δεν είναι το ίδιο με το $H(s)$, γιατί υπάρχει ο πόλος στη θέση $p = -1$ που εισήχθη στο All-pass σύστημα. Δείτε:

$$\begin{aligned} H_{\text{dec}}(s) &= H_{\min}(s)H_{\text{ap}}(s) \\ &= \frac{s+2}{(s+3)(s+4)(s+5)} \frac{s-1}{s+1} \\ &= \frac{(s+2)(s-1)}{(s+1)(s+3)(s+4)(s+5)} \\ &\neq \frac{(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+4)(s+5)} = H(s) \end{aligned} \quad (87)$$

Το πρόβλημα, όπως είπαμε και βλέπετε και παραπάνω, είναι ο πόλος στο $p = -1$, που μπήκε υποχρεωτικά στο All-pass σύστημα. Όμως, ο πόλος αυτός βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο, άρα μπορούμε να τον “ακυρώσουμε”, βάζοντας στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης ένα μηδενικό εκεί, έτσι ώστε στο γινόμενο των δυο, να απαλειφθούν. Μια τέτοια ενέργεια διατηρεί το σύστημα Ελάχιστης Φάσης ως τέτοιο, ενώ πλέον το γινόμενό μας είναι σωστό. Βέβαια, το σύστημα Ελάχιστης Φάσης έχει τώρα ένα μηδενικό που δεν υπήρχε στο αρχικό σύστημα $H(s)$. Αυτό δεν έχει σημασία, άλλωστε και το All-pass σύστημα έχει έναν πόλο που δεν υπήρχε στο αρχικό σύστημα $H(s)$. Εμάς μας ενδιαφέρει το γινόμενο των δυο συστημάτων $H_{min}(s)H_{ap}(s)$ να δίνει το αρχικό σύστημα $H(s)$, και κάθε ένα σύστημα να έχει τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει. Άρα

$$H_{min}(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \quad (88)$$

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1} \quad (89)$$

Βλέπετε ότι το γινόμενο των παραπάνω είναι ίσο με το $H(s)$. Άρα αυτά είναι τα συστήματα που ζητούνται.

(γ) Το αντίστροφο σύστημα του $H_{min}(s)$ είναι το $H_{min}^{inv}(s)$ και είναι

$$H_{min}^{inv}(s) = \frac{(s+3)(s+4)(s+5)}{(s+2)(s+1)} \quad (90)$$

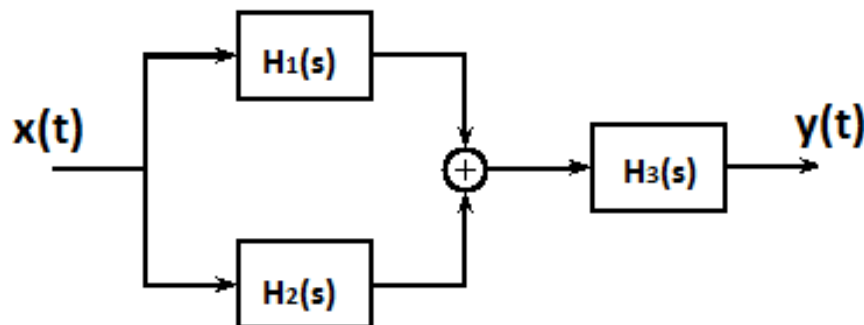
Οι πόλοι είναι στις θέσεις $s = -1, -2$, και βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, και έτσι το σύστημα μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό, επιλέγοντας $\Re\{s\} > -1$.

(δ) Είναι

$$G(s) = H(s)H_{min}^{inv}(s) = \frac{s-1}{s+1} = H_{ap}(s) \quad (91)$$

άρα η απόκριση πλάτους είναι σταθερή και ίση με τη μονάδα.

5. Έστω το ευσταθές σύστημα του Σχήματος 13. με



Σχήμα 13: Σύστημα Άσκησης 7.6

$$H_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}, \quad H_2(s) = \frac{s}{s+2}, \quad H_3(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

(α) Βρείτε το συνολικό σύστημα $H(s)$ και το πεδίο συγκλιότητάς του.

(β) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος, $h(t)$.

(γ) Εξετάστε, χωρίς γνώση του συνολικού συστήματος, πότε τα συστήματα $H_i(s)$ είναι ευσταθή, αιτιατά, και αντιστρέψιμα.

(δ) Βρείτε τις επιμέρους κρουστικές αποκρίσεις των συστημάτων, $h_i(t)$, γνωρίζοντας ότι το συνολικό σύστημα είναι ευσταθές.

(ε) Γράψτε το $H_1(s)$ ως γινόμενο δυο συστημάτων: ενός συστήματος Ελάχιστης Φάσης $H_1^{\min}(s)$ και ενός All-pass συστήματος, $H_1^{\text{ap}}(s)$.

Λύση:

(α) Προφανώς το συνολικό σύστημα θα είναι της μορφής

$$\begin{aligned} H(s) &= (H_1(s) + H_2(s))H_3(s) \\ &= H_1(s)H_3(s) + H_2(s)H_3(s) \\ &= \frac{1}{(s-2)(s+1)} + \frac{s(s-1)}{(s+2)(s+1)} = \frac{s+2+s(s-1)(s-2)}{(s-2)(s+2)(s+1)} \\ &= \frac{s+2+s^3-2s^2-s^2+2s}{(s-2)(s+2)(s+1)} = \frac{s^3-3s^2+3s+2}{(s-2)(s+2)(s+1)} \end{aligned} \quad (92)$$

Δεδομένου ότι το σύστημα είναι ευσταθές, και οι πόλοι στις θέσεις $p = -2, -1, 2$, το πεδίο σύγκλισης δεν μπορεί να είναι άλλο από το $-1 < \Re\{s\} < 2$, δεδομένου ότι μόνο αυτό περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα $\Re\{s\} = 0$.

(β) Το σύστημα γράφεται ως

$$H(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 3s + 2}{(s-2)(s+2)(s+1)} = \frac{s^3 - 3s^2 + 3s + 2}{s^3 + s^2 - 4s - 4}$$

και επειδή η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι ίση με αυτή του παρονομαστή, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα πριν κάνουμε πρώτα διαίρεση των πολυωνύμων. Άρα:

$$H(s) = 1 + \frac{-4s^2 + 7s + 6}{(s-2)(s+2)(s+1)} = 1 + G(s)$$

με

$$G(s) = \frac{-4s^2 + 7s + 6}{(s-2)(s+2)(s+1)}$$

Σε αυτόν τον όρο μπορούμε να κάνουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, αρα

$$G(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1}$$

με

$$\begin{aligned} A &= G(s)(s-2) \Big|_{s=2} = \frac{-4s^2 + 7s + 6}{(s+2)(s+1)} \Big|_{s=2} = \frac{1}{3} \\ B &= G(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{-4s^2 + 7s + 6}{(s-2)(s+1)} \Big|_{s=-2} = -6 \\ C &= G(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{-4s^2 + 7s + 6}{(s-2)(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Άρα

$$G(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} - 6 \frac{1}{s+2} + \frac{5}{3} \frac{1}{s+1}$$

οπότε συνολικά,

$$H(s) = 1 + G(s) = 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} - 6 \frac{1}{s+2} + \frac{5}{3} \frac{1}{s+1}$$

Αφού έχουμε τρία γνωστά κλάσματα και το πεδίο σύγκλισης του συνολικού συστήματος είναι το $-1 < \Re\{s\} < 2$, συμπεραίνουμε ότι τα επιμέρους πεδία σύγκλισης είναι τα

i. $\Re\{s\} > -2$

ii. $\Re\{s\} > -1$

iii. $\Re\{s\} < 2$

αφού η τομή των παραπάνω μας δίνει το συνολικό πεδίο σύγκλισης. Από τα γνωστά ζεύγη μετασχη. Laplace, θα έχουμε

$$G(s) \longleftrightarrow g(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}\epsilon(-t) - 6e^{-2t}\epsilon(t) + \frac{5}{3}e^{-t}\epsilon(t)$$

οπότε συνολικά

$$H(s) = 1 + G(s) \longleftrightarrow h(t) = \delta(t) + g(t) = \delta(t) - \frac{1}{3}e^{2t}\epsilon(-t) - 6e^{-2t}\epsilon(t) + \frac{5}{3}e^{-t}\epsilon(t) \quad (93)$$

(γ) Για το $H_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$, βλέπουμε ότι έχει πόλους στις θέσεις $p = 1, 2$, άρα για να είναι ευσταθές, πρέπει να ισχύει $\Re\{s\} < 1$. Για να είναι αιτιατό, πρέπει $\Re\{s\} > 2$. Το αντίστροφό του είναι το

$$H_1^{inv}(s) = (s-1)(s-2) \quad (94)$$

το οποίο είναι ευσταθές και αιτιατό σε ολό το s -επίπεδο.

Για το $H_2(s) = \frac{s}{s+2}$, βλέπουμε ότι έχει πόλους στη θέση $s = -2$, και άρα είναι ευσταθές όταν $\Re\{s\} > -2$, και το ίδιο πρέπει να ισχύει για να είναι και αιτιατό. Το αντίστροφό του είναι το

$$H_2^{inv}(s) = \frac{s+2}{s} \quad (95)$$

το οποίο έχει δυο δυνατά πεδία σύγκλισης, $\Re\{s\} > 0$ και $\Re\{s\} < 0$. Προσέξτε, σε περίπτωση που το $H_2(s)$ έχει πεδίο σύγκλισης $R_{H_2} = \{\Re\{s\} < -2\}$, είναι δηλαδή ασταθές και αντι-αιτιατό, τότε ορίζεται αντίστροφο σύστημα μόνον όταν αυτό έχει πεδίο σύγκλισης το $R_{H_2^{inv}} = \{\Re\{s\} < 0\}$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση δεν υπάρχει επικάλυψη με το πεδίο σύγκλισης του $H_2(s)$.

Για το $H_3(s) = \frac{s-1}{s+1}$, βλέπουμε ότι έχει έναν πόλο στη θέση $s = -1$, άρα για να είναι ευσταθές πρέπει να ισχύει $\Re\{s\} > -1$, ενώ το ίδιο πρέπει να ισχύει και για αιτιατότητα. Το αντίστροφό του είναι το

$$H_3^{inv}(s) = \frac{s+1}{s-1} \quad (96)$$

το οποίο έχει δυο δυνατά πεδία σύγκλισης, $\Re\{s\} > 1$ και $\Re\{s\} < 1$. Κι εδώ προσέξτε, όπως και πριν, σε περίπτωση που το $H_3(s)$ έχει πεδίο σύγκλισης $R_{H_3} = \{\Re\{s\} < -1\}$, είναι δηλαδή ασταθές και αντι-αιτιατό, τότε ορίζεται αντίστροφο σύστημα μόνον όταν αυτό έχει πεδίο σύγκλισης το $R_{H_3^{inv}} = \{\Re\{s\} < 1\}$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση δεν υπάρχει επικάλυψη με το πεδίο σύγκλισης του $H_3(s)$.

(δ) Δεδομένου ότι το συνολικό σύστημα είναι ευσταθές, και ότι προκύπτει από τομές των επιμέρους συστημάτων, τα επιμέρους συστήματα πρέπει να είναι ευσταθή. Άρα τα πεδία σύγκλισης θα είναι $R_{H_1} = \{\Re\{s\} < 1\}$,

$R_{H_2} = \{\Re\{s\} > -2\}$, και $R_{H_3} = \{\Re\{s\} > -1\}$. Άρα θα είναι

$$\begin{aligned} H_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}, \quad \Re\{s\} < 1 &\longleftrightarrow h_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right\} \\ &= e^t \epsilon(-t) - e^{2t} \epsilon(-t) \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} H_2(s) = \frac{s}{s+2}, \quad \Re\{s\} < -2 &\longleftrightarrow h_2(t) = L^{-1}\left\{s \frac{1}{s+2}\right\} \\ &= \frac{d}{dt} e^{2t} \epsilon(-t) \\ &= 2e^{2t} \epsilon(-t) - \delta(t) \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} H_3(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 &\longleftrightarrow h_3(t) = L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s+1}\right\} \\ &= L^{-1}\left\{s \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1}\right\} \\ &= \left(\frac{d}{dt} e^{-t} \epsilon(t)\right) - e^{-t} \epsilon(t) \\ &= \delta(t) - e^{-t} \epsilon(t) - e^{-t} \epsilon(t) \\ &= \delta(t) - 2e^{-t} \epsilon(t) \end{aligned} \quad (99)$$

(ε) Το $H_1(s)$ έχει μόνο πόλους, στις θέσεις $s = 1, 2$. Προφανώς αυτοί οι πόλοι δεν μπορούν να ανήκουν στο $H_1^{min}(s)$, γιατί αυτοί βρίσκονται στο δεξιό ημιεπίπεδο. Άρα υποχρεωτικά θα ανήκουν στο All-pass σύστημα. Όμως στο All-pass σύστημα θα έχουμε και μηδενικά στις θέσεις $s = -1, -2$. Άρα το All-pass θα είναι της μορφής

$$H_1^{ap}(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)} \quad (100)$$

Το σύστημα Ελάχιστης Φάσης θα έχει φυσικά μόνο πόλους που ακυρώνουν τα μηδενικά που υπάρχουν στο All-pass σύστημα. Άρα

$$H_1^{min}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (101)$$

Άρα τελικά

$$H_1(s) = H_1^{min}(s)H_1^{ap}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \quad (102)$$