

Μετασχηματισμός Laplace

1 Εισαγωγή

Έχουμε ήδη δει ότι ο μετασχ. Fourier είναι ένα εργαλείο που μας επιτρέπει να αναπαριστούμε ένα σήμα $x(t)$ σαν ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) εκθετικών σημάτων της μορφής $e^{j2\pi ft}$, δηλ.

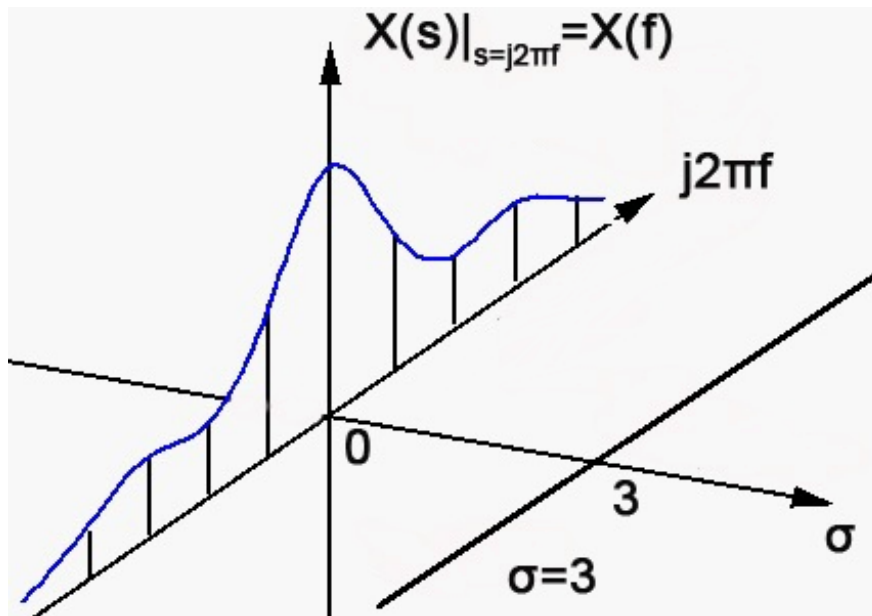
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1)$$

που δεν είναι άλλη σχέση φυσικά εκτός από τον αντίστρ. μετασχ. Fourier.

Έστω λοιπόν ένα σήμα

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \quad (2)$$

Έστω, για λόγους ευκολίας, ότι το φάσμα του σήματος είναι πραγματικό και θετικό, δηλ. $X(f) \in \mathbb{R}$ και $X(f) > 0$. Έστω ότι αυτό το φάσμα φαίνεται στο Σχήμα (1). Ο άξονας πάνω στον οποίο ορίζεται ο $X(f)$ είναι οι γνωστές μας συχνότητες, που έχουμε απλά αντικαταστήσει το f με το $j2\pi f$, μια αυτό είναι το όρισμα των εκθετικών μας στο μετασχ. Fourier. Σε αυτό το Σχήμα, απλά έχουμε ορίσει ένα χώρο, στον οποίο οι x, y διαστάσεις του είναι το μιγαδικό επίπεδο, έστω $\sigma, j2\pi f$ αυτές, και η τρίτη διάσταση είναι οι τιμές του μετασχ. Fourier. Δε σας το είχαμε πει ρητά (το κρατούσαμε



Σχήμα 1: Ο μετασχ. Fourier στο μιγαδικό s -επίπεδο

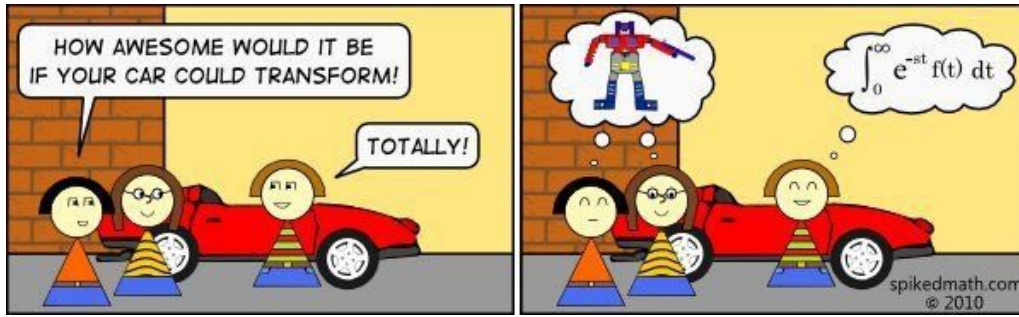
για έκπληξη :-P), αλλά όσο δουλεύετε με το μετασχ. Fourier, ουσιαστικά ένα τέτοιο σήμα βλέπετε, υπό αυτή την οπτική, απλά προφανώς είναι πολύ πιο βολικό να το σχεδιάζουμε όπως έχουμε δει πολλές φορές, σε ένα διδιάστατο επίπεδο, παρά όπως στο Σχήμα (1). :-)

Βλέπετε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier $X(f)$ ορίζεται πάνω στον κατακόρυφο άξονα των φανταστικών συχνοτήτων $j2\pi f$ του μιγαδικού επιπέδου. ΜΟΝΟΝ εκεί όμως. Το βλέπετε άλλωστε, το σήμα είναι σαν μια “φέτα” που φεύγει μόνο προς τα “πάνω” από το φανταστικό άξονα. Όμως, το μιγαδικό επίπεδο έχει προφανώς κι άλλες ευθείες πάνω στις οποίες μπορούμε να ορίσουμε μετασχηματισμούς. Μια από αυτές φαίνεται στο Σχήμα (1), κι αυτή είναι η $\Re\{s\} = \sigma = 3$. Πάνω σε αυτόν τον άξονα, θα είχαμε συχνότητες $s = \sigma + j2\pi f = 3 + j2\pi f$, και η προβολή του σήματος $x(t)$ θα γινόταν πάνω σε εκθετικά της μορφής $e^{-(3+j2\pi f)t}$. Σταματάμε εδώ προσωρινά, αν και πρέπει ήδη να έχετε υποψιαστεί τι πρόκειται να συμβεί. :-)

Επιστρέφουμε στο μετασχ. Fourier λοιπόν. Μια τέτοια αναπαράσταση είναι πολύτιμη στην ανάλυση και επεξεργασία σημάτων. ΟΜΩΣ (παντού υπάρχει ένα “όμως” που μας χαλάει τη διάθεση :-)) είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει μόνο για μια περιορισμένη κατηγορία σημάτων, π.χ. ο μετασχ. Fourier δεν ορίζεται για σήματα της μορφής

$$x(t) = e^{at}\epsilon(t), \quad a > 0 \quad (3)$$

δηλ. για αύξοντα εκθετικά (δε μου αρέσει ούτε κι εμένα ο όρος – growing exponentials είναι στα Αγγλικά – αλλά ας μου το επιτρέψετε :-P). Επίσης, υπάρχουν περιοχές όπως η Ανάλυση Συστημάτων, που ο μετασχ. Fourier δε μας βοηθά πολύ.



Σχήμα 2: Δεν αντιλαμβάνονται τους μετασχηματισμούς όλοι με τον ίδιο τρόπο... :-)

1.1 Ο Μετασχηματισμός Laplace

Ο βασικός λόγος για τις δυσκολίες που μας προκύπτουν είναι ότι για μερικά σήματα, όπως το σήμα στη Σχέση (3), ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει, επειδή τα συνήθη ημίτονα ή εκθετικά της μορφής $e^{j2\pi ft}$ είναι ανίκανα να συνθέσουν αύξοντα εκθετικά σήματα, όπως το παραπάνω (κάπως λογικό, αν σκεφτείτε ότι έχουν πεπερασμένο πλάτος $X(f)$, όπως είδαμε στη Σχέση (1)). Αν αφήσουμε τη φαντασία μας ελεύθερη (ΠΟΛΥ ελεύθερη :-)), θα δούμε ότι το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί. Πώς;

Αν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ως σήματα βάσης εκθετικά της μορφής e^{st} , με το s να μην περιορίζεται μόνο πάνω στο φανταστικό άξονα (όπως γίνεται στον μετασχ. Fourier). Αυτό ακριβώς γίνεται στον περίφημο **μετασχηματισμό Laplace**. Εδώ, η συχνότητες είναι μιγαδικές, της μορφής $s = \sigma + j2\pi f$, και αυτή η γενίκευση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε αύξοντα εκθετικά (και άρα αύξοντα ημίτονα) για να συνθέσουμε ένα σήμα $x(t)$. Ποιά είναι αυτά; Μα φυσικά τα $e^{\sigma t} e^{j2\pi ft}$! :-) Πριν πάμε στα μαθηματικά, ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε διαισθητικά και με ένα απλό παράδειγμα τι ακριβώς κερδίζουμε με το μετασχηματισμό αυτό.

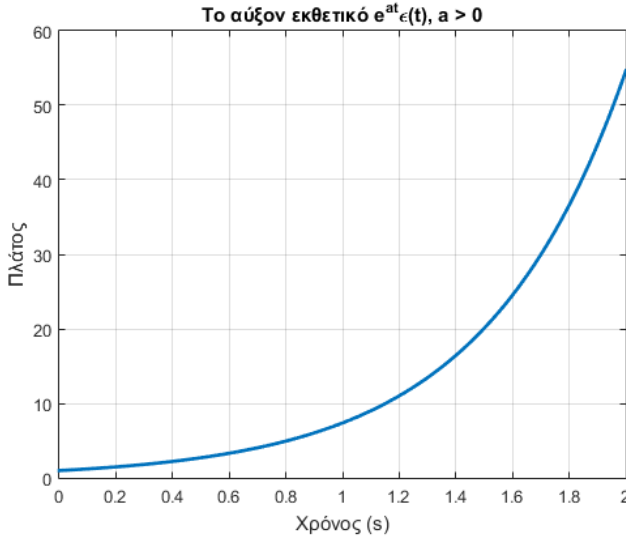
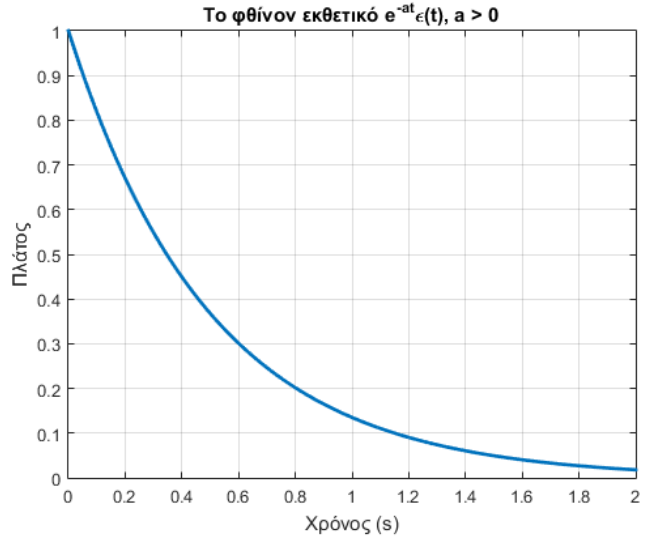
1.2 Διαισθητική κατανόηση του μετασχ. Laplace

Αν ένα σήμα λοιπόν, όπως το $x(t) = e^{at}\epsilon(t)$, $a > 0$, στο Σχήμα (3α'), δεν έχει μετασχ. Fourier, μπορούμε να το κάνουμε να έχει, πολλαπλασιάζοντάς το με ένα φθίνον εκθετικό, όπως το $e^{-\sigma t}$. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = e^{2t}\epsilon(t) \quad (4)$$

μπορεί να γίνει “μετασχηματισίμο” (!!) κατά Fourier, απλά πολλαπλασιάζοντάς το με το $e^{-\sigma t}$, με $\sigma > 2$, ορίζοντας έτσι το

$$\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t} = e^{(2-\sigma)t}\epsilon(t) \quad (5)$$

(α') Το αύξον εκθετικό $x(t) = e^{at}$, $a > 0$ (β') Το φθίνον εκθετικό $\hat{x}(t) = e^{-at}$, $a > 0$

Σχήμα 3: Εκθετικά σήματα

Αυτό το νέο σήμα είναι σήμα ενέργειας πια, όπως φαίνεται στο Σχήμα (3β') – πάντα για $\sigma > 2$. Άρα το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει πλέον μετασχ. Fourier, $\hat{X}(f)$, και οι συνιστώσες του είναι της μορφής $e^{j2\pi ft}$, με συχνότητες f που “τρέχουν” από $-\infty$ ως ∞ . Τα εκθετικά της μορφής $e^{j2\pi ft}$ και $e^{-j2\pi ft}$ θα προστεθούν και θα μας δώσουν ένα ημίτονο, όπως καλά ξέρουμε από τις σχέσεις του Euler. Ας το δείξουμε εδώ, και για λόγους σύγκρισης με το μετασχ. Laplace.

Έστω μια συχνότητα Δf του συνεχούς φάσματος του σήματος. Επειδή αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και η αντίστοιχη συχνότητα $-\Delta f$ και το πλάτος καθεμιάς θα είναι $\hat{X}(\Delta f)$ και $\hat{X}^*(\Delta f)$ αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων για τα πραγματικά σήματα. Άρα προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(\Delta f)e^{j2\pi\Delta ft} + \hat{X}^*(\Delta f)e^{-j2\pi\Delta ft} &= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + (|\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}})^*e^{-j2\pi\Delta ft} \\
 &= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + |\hat{X}(\Delta f)|e^{-j\phi_{\Delta f}}e^{-j2\pi\Delta ft} \\
 &= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} + |\hat{X}(\Delta f)|e^{-j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} \\
 &= 2|\hat{X}(\Delta f)|\cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})
 \end{aligned} \tag{6}$$

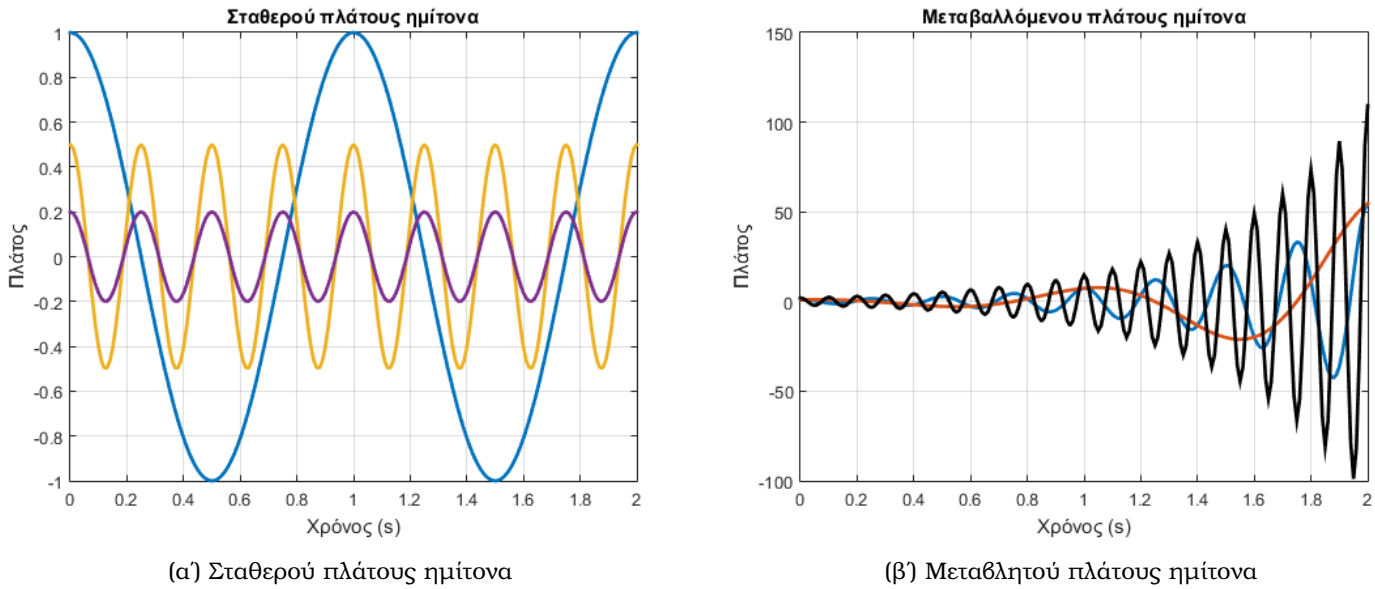
Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους $2|\hat{X}(f)|$. Θα ήταν Π Ο Λ Υ :-) χρονοβόρο να σχεδιάσουμε όλα αυτά τα ημίτονα, έτσι στο Σχήμα (4α') δείχνουμε μόνο δυο από αυτά. Η πρόσθεση όλων αυτών των συνιστωσών (άπειρων σε αριθμό) θα μας δώσει το $\hat{x}(t)$. Είναι όμως προφανές ότι το επιθυμητό σήμα $x(t)$ – μην ξεχνιόμαστε, το $x(t)$ θέλουμε να μετασχηματίσουμε! :-) – μπορεί να συντεθεί από τον πολλαπλασιασμό του $\hat{x}(t)$ με τα $e^{+\sigma t}$, έτσι δεν είναι; Αυτό τι σημαίνει; Σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε κάθε φασματική συνιστώσα $\hat{X}(f)$ του $\hat{x}(t)$ με $e^{+\sigma t}$, και μετά τις προσθέτουμε. Ιδού:

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t} \int \hat{X}(f)e^{j2\pi ft} df = \int e^{+\sigma t} [\hat{X}(f)e^{j2\pi ft}] df = \int \hat{X}(f) (e^{+\sigma t} e^{j2\pi ft}) df \tag{7}$$

Αλλά μια τέτοια κίνηση σημαίνει επίσης ότι τα ημίτονα που προκύπτουν θα έχουν αύξοντα πλάτη! Η πρόσθεση όλων αυτών των αύξοντων ημιτόνων θα μας δώσει το $x(t)$! Γιατί; Ας κάνουμε το ίδιο με τη Σχέση (6), μόνο που τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε πλάτη $\hat{X}(\Delta f)e^{\sigma t}$:

$$e^{\sigma t} \hat{X}(\Delta f)e^{j2\pi\Delta ft} + e^{\sigma t} \hat{X}^*(\Delta f)e^{-j2\pi\Delta ft} = 2|\hat{X}(\Delta f)|e^{\sigma t} \cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f}) \tag{8}$$

Είναι φανερό εδώ ότι τα πλάτη των ημιτόνων ΔΕΝ είναι σταθερά, όπως στην περίπτωση του μετασχ. Fourier, αλλά είναι συναρτήσεως του χρόνου, $2|\hat{X}(\Delta f)|e^{\sigma t}$, όπως στο Σχήμα (4β')!



Σχήμα 4: Ημίτονα των δυο μετασχηματισμών

Επίσης, ο πολλαπλασιασμός των συνιστωσών του $\hat{x}(t)$ με το $e^{+\sigma t}$ θα μας δώσει συνιστώσες της μορφής $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$, όπως είναι φανερό από τη Σχέση (7), ενώνοντας τα δυο εκθετικά μέσα στο ολοκλήρωμα! Άρα, κάθε συχνότητα της μορφής $j2\pi f$ του $\hat{x}(t)$ μετασχηματίζεται σε μια άλλη συχνότητα $\sigma + j2\pi f$ στο φάσμα του $x(t)$. Άρα πού θα βρίσκονται αυτές οι νέες συχνότητες; Πού αλλού, εκτός από πάνω σε μια νέα ευθεία στο μιγαδικό s -επίπεδο, στην ευθεία που περιλαμβάνει τις συχνότητες $\sigma + j2\pi f$!

Πλέον είναι ξεκάθαρο ότι το σήμα $x(t)$ μπορεί να συντεθεί από μεταβαλλόμενου πλάτους μιγαδικά εκθετικά που βρίσκονται στο μονοπάτι $\sigma + j2\pi f$, με το f να κυμαίνεται από $-\infty$ έως ∞ . Η τιμή του σ είναι μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν $x(t) = e^{2t}\epsilon(t)$, τότε το $\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$ μπορεί να γίνει μετασχηματισμο κατά Fourier αν διαλέξουμε $\sigma > 2$. Άρα καταλαβαίνετε ότι έχουμε άπειρες επιλογές για την τιμή του σ . Αυτό σημαίνει ότι το φάσμα του $x(t)$ δεν είναι μοναδικό, και ότι υπάρχουν άπειροι τρόποι να συνθέσουμε το $x(t)$. Όμως, το σ έχει μια ελάχιστη, συγκεκριμένη τιμή σ_0 για ένα δεδομένο $x(t)$ (όπως εδώ, $\sigma_0 = 2$, για $x(t) = e^{2t}\epsilon(t)$). Αυτή η περιοχή του μιγαδικού s -επίπεδου που ορίζονται άπειροι τρόποι σύνθεσης του $x(t)$ από τα αύξοντα εκθετικά λέγεται **Πεδίο ή Περιοχή Σύγκλισης** του μετασχηματισμού Laplace του $x(t)$.

Αυτός ο νέος μετασχηματισμός λοιπόν, που χρησιμοποιεί εκθετικά της μορφής $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$ λέγεται **Μετασχηματισμός Laplace** και ορίζεται ως:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad (9)$$

ενώ ο αντίστροφός του ως:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds \quad (10)$$

ο οποίος όμως δε θα χρησιμοποιηθεί για τους σκοπούς μας, μια και υπάρχουν πιο εύκολοι τρόποι να βρει κανείς το σήμα στο χρόνο $x(t)$ από το μετασχ. Laplace του, αποφεύγοντας την επίλυση ενός ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο... :-)

1.3 Ύπαρξη του μετασχ. Laplace

Μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχ. Laplace είναι η

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty \quad (11)$$

Όταν το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάποια τιμή σ , τότε υπάρχει ο μετασχ. Laplace. Αποδεικνύεται ότι κάθε σήμα που αυξάνει όχι γρηγορότερα από το εκθετικό σήμα $Me^{\sigma_0 t}$, για κάποια M, σ_0 , ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη (11). Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{t^2}$ αυξάνει πιο γρήγορα από το $e^{\sigma_0 t}$, και άρα δεν έχει μετασχ. Laplace. Ευτυχώς, τέτοια σήματα έχουν ελάχιστη θεωρητική ή πρακτική σημασία.

Βέβαια, όπως και στο μετασχ. Fourier, αυτή η συνθήκη δεν είναι και αναγκαία. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ απειρίζεται στο $t = 0$ και η σχέση (11) δεν ικανοποιείται, αλλά ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει και είναι ο $X(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$. Εμείς δεν ασχολούμαστε με τέτοια σήματα, και πάντα όταν ζητείται ο μετασχ. Laplace, υποθέτουμε ότι υπάρχει, δηλ. ότι το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace συγκλίνει.

1.4 Εν κατακλείδει...

Ο μετασχ. Laplace είναι γενικά μια “επέκταση” του μετασχ. Fourier, για σήματα των οποίων το συχνοτικό περιεχόμενο δεν μπορεί να υπολογιστεί απ’ την κλασική θεωρία Fourier. Ο μετασχ. Fourier προβάλλει το σήμα πάνω σε συχνότητες που ορίζονται στο φανταστικό άξονα ($e^{-j2\pi ft}$). Αλλάζοντας τις συναρτήσεις βάσης $e^{-j2\pi ft}$ σε $e^{-(\sigma+j2\pi f)t}$, προβάλλουμε το σήμα σε ευθείες παράλληλες με τον άξονα των φανταστικών. Οι νέες συχνότητες $\sigma + j2\pi f$ είναι, όπως είναι φανερό, μιγαδικές πλέον.

Ο μετασχ. Laplace ορίζεται ως:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (12)$$

με $s = \sigma + j2\pi f$, $\sigma, f \in \mathbb{R}$. Για αιτιατά σήματα, ορίζεται ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace ως:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (13)$$

που δε διαφέρει σχεδόν σε τίποτα από τον δίπλευρο μετασχ. Laplace που συζητούσαμε ως τώρα, όπως θα δούμε αργότερα.

2 Είδη σημάτων

Ας συζητήσουμε εδώ πώς μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε σήματα ανάλογα με τη θέση και τη διάρκειά τους στο χρόνο. Αυτή η διάκριση θα μας βοηθήσει πολύ στο να ορίζουμε εύκολα και γρήγορα την περίφημη *Περιοχή Σύγκλισης* του μετασχ. Laplace, στην οποία θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο. Πρώτα όμως, ας δούμε τα είδη σημάτων:

- *Αριστερόπλευρο* λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 5α')

$$f(t) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (14)$$

- *Δεξιόπλευρο* λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 5β')

$$f(t) = 0, \quad t \leq t_0 \quad (15)$$

- *Αμφίπλευρο (ή δίπλευρο)* λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 5γ') ότι είναι άπειρης διάρκειας αλλά ούτε δεξιόπλευρο ούτε αριστερόπλευρο.

- *Πεπερασμένης διάρκειας* λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 5δ')

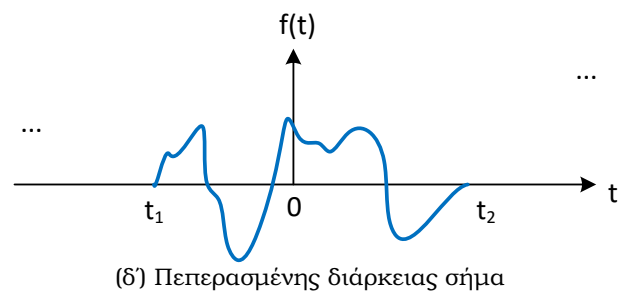
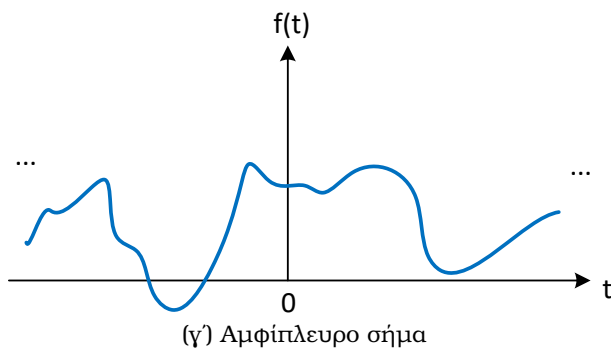
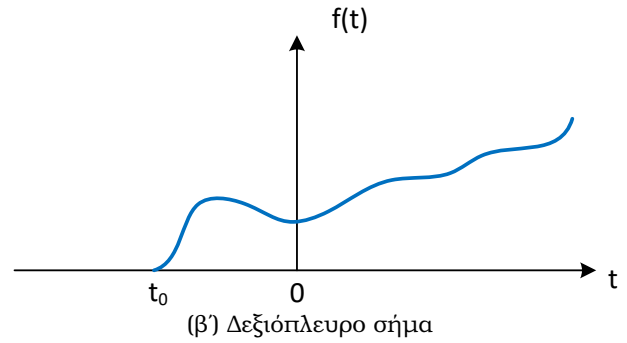
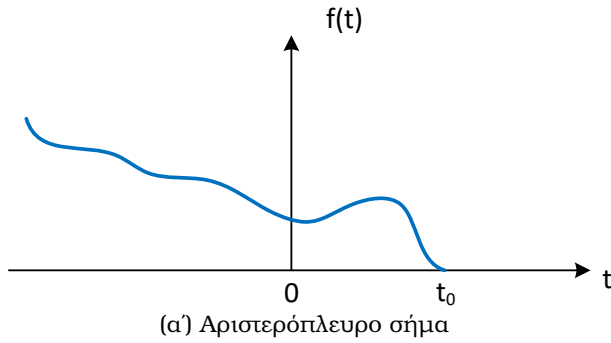
$$f(t) \neq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (16)$$

Η διάκριση των ειδών είναι σχετικά εύκολη υπόθεση, είτε από τον ορισμό τους είτε από τη γραφική τους παράσταση. Ας γνωρίσουμε όμως εδώ και δυο νέες κατηγορίες σημάτων:

- *Αιτιατά* λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$f(t) = 0, \quad t < 0 \quad (17)$$

όπως στο Σχήμα 6α'.



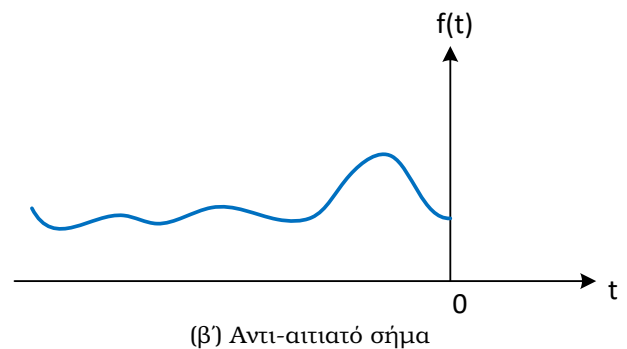
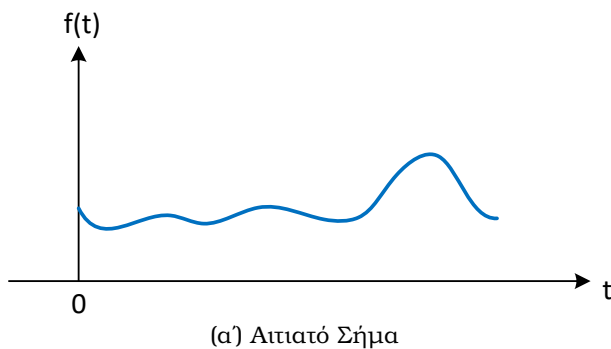
Σχήμα 5: Είδη σημάτων

- Αντί-αιτιατά λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$f(t) = 0, \quad t > 0 \quad (18)$$

όπως αυτό στο Σχήμα 6β'.

- Υπάρχουν και τα μη αιτιατά σήματα, για τα οποία η Σχέση (17) δεν ισχύει, όπως τα σήματα σε όλα τα Σχήματα (5)(α-δ).



Σχήμα 6: Αιτιατό και αντι-αιτιατό σήμα



Σχήμα 7: Τα αντι-αιτιατά συστήματα μπορούν να γίνουν πραγματοποιήσιμα με χρονική καθυστέρηση!

3 Περιοχή Σύγκλισης

Η Περιοχή Σύγκλισης (region of convergence - ROC) προκαλεί συχνά σύγχυση τόσο όσον αφορά την προέλευσή της, όσο και τη χρήση της και τη σημασία της. Εδώ θα ξεκαθαρίσουμε όλα αυτά, χρησιμοποιώντας τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα.

3.1 Παραδείγματα

1. Ας πάρουμε ένα σήμα για το οποίο ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = e^{at}\epsilon(t), \quad a \in \mathbb{R} \quad (19)$$

Γι' αυτό το σήμα, δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier αν $a > 0$. Ας το δείξουμε, ελέγχοντας το κριτήριο σχετικά με την απόλυτη ολοκλήρωση. Ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \int_0^{+\infty} |e^{at}| dt = \int_0^{+\infty} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_0^{+\infty} \quad (20)$$

Αν $a \in \mathbb{R}^+$, το ολοκλήρωμα για $t \rightarrow +\infty$ θα αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει. Φυσικά γνωρίζουμε ότι το κριτήριο αυτό είναι ικανό αλλά όχι και αναγκαίο, γιατί π.χ. και για τα ημιτονοειδή σήματα το κριτήριο της απόλυτης ολοκλήρωσης δεν ισχύει αλλά γνωρίζουμε ότι υπάρχει ο μετασχ. Fourier, με χρήση των συναρτήσεων Δέλτα. Παρ' όλα αυτά, για το συγκεκριμένο σήμα, αυτό είναι αρκετό. Επίσης, αν κάποιος από εσάς μπήκε στον κόπο να σκεφτεί πώς είναι η γραφική παράσταση του σήματος αυτού, θα διαπίστωσε ότι πρόκειται για ένα *μη φραγμένου πλάτους* σήμα, άρα θα είχε μια υποψία για το ότι δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier, ούτε καν με χρήση συναρτήσεων Δέλτα. :-)

Απ' την άλλη, αν $a < 0$, τότε ο μετασχ. Fourier υπάρχει, μια και το σήμα μας είναι σήμα ενέργειας.

Ας θεωρήσουμε στο παράδειγμά μας, ότι $a \in \mathbb{R}$, για περισσότερη γενικότητα. Προσέξτε ότι το σήμα μας είναι *δεξιόπλευρο*. Ας δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε τον μετασχ. Laplace και να δούμε μερικά πράγματα:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) \quad (21)$$

Εδώ τώρα πρέπει να σταματήσουμε. Πρέπει να έχετε καταλάβει τι πρόκειται να συμβεί από παρόμοια διαδικασία που είδαμε στο μετασχ. Fourier... Για να μην αποκλίνει αυτό το όριο στο ∞ , θα πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι αρνητικό, ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν. Για να ισχύει αυτό, θα πρέπει να ισχύει $a - s < 0$. Ένα λεπτό όμως. Το $s = \sigma + j2\pi f$ είναι μιγαδικός αριθμός, άρα και ο $a - s$. Ως γνωστόν, οι μιγαδικοί αριθμοί ΔΕΝ έχουν διάταξη, άρα το να πούμε ότι πρέπει να ισχύει $a - s < 0$ είναι ΧΩΡΙΣ ΝΟΗΜΑ!

Θα εκμεταλλευτούμε λοιπόν το πλέον γνωστό λήμμα της Μιγαδικής Ανάλυσης, που υπενθυμίζεται ότι λέει ότι

εάν $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ και $g(t)$ είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, τότε $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)g(t) = 0$.

Για να δούμε αν μπορούμε κατ' αρχάς να το δείξουμε αυτό για το σήμα μας. Μπορούμε να γράψουμε το σήμα μας ως γινόμενο μιας φραγμένης και μιας συνάρτησης που συγκλίνει στο μηδέν; Είναι:

$$e^{(a-s)t} = e^{(a-(\sigma+j2\pi f)t)} = e^{((a-\sigma)-j2\pi f)t} = e^{(a-\sigma)t} e^{-j2\pi ft} = f(t)g(t) \quad (22)$$

Όμως

$$|e^{-j2\pi ft}| = 1, \quad (23)$$

για κάθε $2\pi f, t$, όπως έχουμε δει. Οπότε να η φραγμένη μας συνάρτηση, η $g(t) = e^{-j2\pi ft}$. Άρα αρκεί να δούμε πότε ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-\sigma)t} = 0 \quad (24)$$

και μετά μπορούμε να συνεχίσουμε τη λύση της άσκησης μας. Εδώ πλέον, στον εκθέτη μας έχουμε πραγματικούς αριθμούς, άρα ξέρουμε ότι η συνάρτηση $e^{(a-\sigma)t}$ φθίνει στο 0 όταν $t \rightarrow +\infty$, **μόνο αν**

$$a - \sigma < 0 \iff a < \sigma \iff \Re\{s\} > a \quad (25)$$

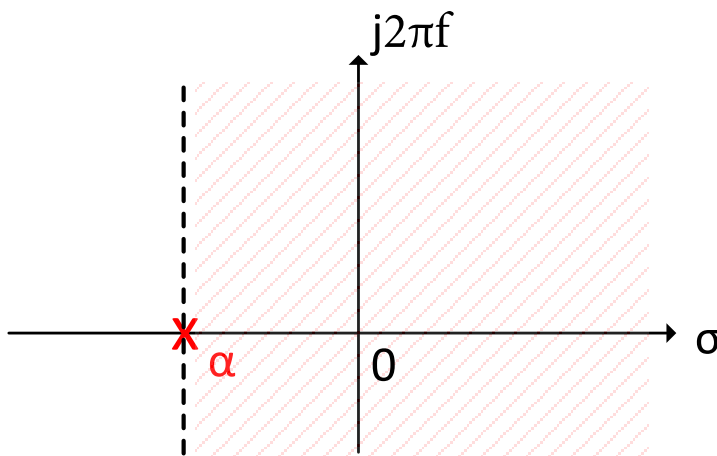
Αυτή η σχέση λέγεται **Πεδίο ή Περιοχή Σύγκλισης**, γιατί αποτελεί το χώρο πάνω στο επίπεδο για τον οποίο υπάρχει ο μετασχ. Laplace, δηλ. το σχετικό ολοκλήρωμα συγκλίνει! Οπότε δείξαμε ότι η συνάρτηση $e^{(a-s)t}$ γράφεται ως γινόμενο δυο συναρτήσεων, εκ των οποίων η μια είναι φραγμένη και η άλλη συγκλίνει στο μηδέν, και άρα, απ' το γνωστό λήμμα, το γινόμενό τους συγκλίνει κι αυτό στο μηδέν. Ας ολοκληρώσουμε τη λύση μας.

$$(21) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) = \frac{1}{a-s} (0 - 1) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (26)$$

Άρα ο μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}\epsilon(t)$, $a \in \mathbb{R}$, είναι

$$x(t) = e^{at}\epsilon(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (27)$$

και το Πεδίο Σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα (8). Θα μπορούσε το a να βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, αφού $a \in \mathbb{R}$. Δε μας ενδιαφέρει τώρα η θέση του, όσο η περιοχή δεξιά του. Ο αριθμός a , που είναι ρίζα του παρονομαστή



Σχήμα 8: Πεδίο Σύγκλισης σήματος $e^{at}\epsilon(t)$, $a \in \mathbb{R}$

του μετασχηματισμού, λέγεται **πόλος** του μετασχ. Laplace, και το πεδίο σύγκλισης για το ΔΕΞΙΟΠΛΕΥΡΟ σήμα μας είναι το ημιεπίπεδο ΔΕΞΙΑ της κατακόρυφης ευθείας $\sigma = a$, όπως βρήκαμε παραπάνω, χωρίς να την περιλαμβάνει. Φυσικά, στο ημιεπίπεδο $\Re\{s\} \leq a$, ο μετασχ. Laplace ΔΕΝ συγκλίνει!

2. Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα. Έστω τώρα το σήμα $x(t) = -e^{at}\epsilon(-t)$, του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace. Αν $a \in \mathbb{R}^+$, τότε το σήμα είναι σήμα ενέργειας, και ο μετασχ. Fourier του υπάρχει. Αν όμως $a \in \mathbb{R}^-$, τότε δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier, και το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier αποκλίνει στο ∞ . Ας θεωρήσουμε ότι $a \in \mathbb{R}$, χωρίς περιορισμούς. Προσέξτε ότι το σήμα μας είναι *αριστερόπλευρο*. Ο μετασχ. Laplace θα είναι:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = - \int_{-\infty}^0 e^{(a-s)t}dt = - \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{-\infty}^0 = - \frac{1}{a-s} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t}\right) \quad (28)$$

Εχουμε ξανά την ίδια κατάσταση με το προηγούμενο παράδειγμα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \quad (29)$$

Σκεπτόμενοι ακριβώς όμοια, καταλήγουμε ότι το όριο αυτό φθίνει στο 0 **μόνο αν**

$$a - \sigma > 0 \iff a > \Re\{s\} \iff \Re\{s\} < a \quad (30)$$

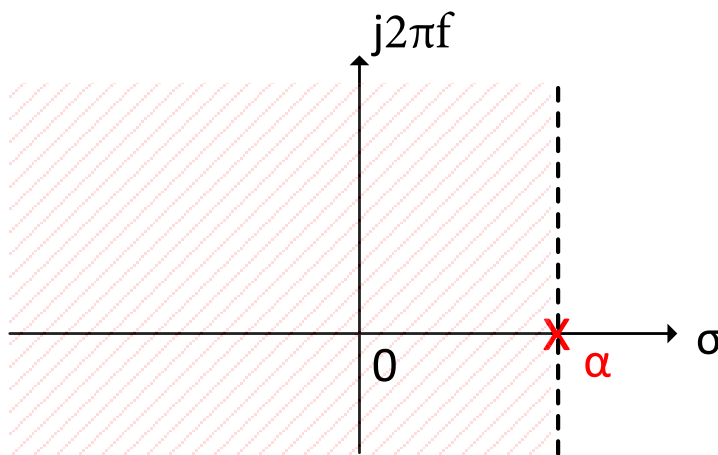
και αυτό είναι το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Στο πεδίο αυτό, το όριο φθίνει στο μηδέν, και άρα από τη σχέση (28) έχουμε:

$$(28) \Rightarrow X(s) = - \frac{1}{a-s} (1 - 0) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (31)$$

Άρα τελικά, έχουμε ότι

$$x(t) = -e^{at}\epsilon(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (32)$$

με το Πεδίο Σύγκλισης για ένα $a > 0$ να φαίνεται στο Σχήμα (9). Θα μπορούσε το a να βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο, δε μας ενδιαφέρει τώρα η θέση του, όσο η περιοχή αριστερά του. Παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης



Σχήμα 9: Πεδίο Σύγκλισης σήματος $-e^{at}\epsilon(-t)$, $a \in \mathbb{R}$

για το ΑΡΙΣΤΕΡΟΠΛΕΥΡΟ σήμα μας είναι το ημιεπίπεδο ΑΡΙΣΤΕΡΑ της κατακόρυφης ευθείας $\sigma = a$, όπως βρήκαμε παραπάνω, χωρίς να την περιλαμβάνει.

3. Είμαι σίγουρος ότι ο πειρασμός σας να προσθέσετε τα σήματα των παραπάνω παραδειγμάτων και να δείτε αν υπάρχει ο μετασχ. Laplace του αθροίσματός τους, είναι μεγάλος (όσο και η επιθυμία σας να περάσετε το μάθημα :-)). Ας ορίσουμε λοιπόν το σήμα

$$x(t) = e^{at}\epsilon(t) - e^{at}\epsilon(-t), \quad a \in \mathbb{R} \quad (33)$$

Δεν το αναφέραμε παραπάνω, αλλά δεν είναι και μυστικό, αφού αποδεικνύεται εύκολα. Ο μετασχ. Laplace είναι γραμμικός. Άρα το άθροισμα δυο σημάτων έχει μετασχ. Laplace το άθροισμα των επιμέρους μετασχηματισμών. Όσο για το πεδίο σύγκλισης, αυτό είναι η **τομή** των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Άρα λοιπόν,

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-a} = \frac{2}{s-a}, \quad ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < a\} = \emptyset \quad (34)$$

Άρα βλέπουμε ότι παρ' όλο που μπορούμε να προσθέσουμε τους επιμέρους μετασχηματισμούς, ο συνολικός μετασχηματισμός Laplace ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ, γιατί δεν υπάρχει πεδίο στο s -επίπεδο στο οποίο να συγκλίνει! :-)

Άρα βλέπουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει ο μετασχ. Laplace για όλα τα σήματα. :-)

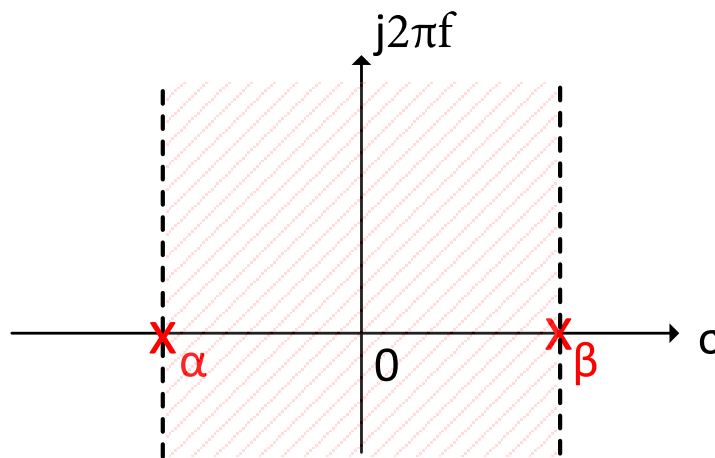
Ας δούμε όμως τι θα συνέβαινε αν είχαμε

$$x(t) = e^{at}\epsilon(t) - e^{\beta t}\epsilon(-t), \quad a, \beta \in \mathbb{R}, \quad a \neq \beta \quad (35)$$

Τότε

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-\beta} = \frac{(s-\beta) + (s-a)}{(s-a)(s-\beta)}, \quad ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < \beta\} \quad (36)$$

το οποίο δεν είναι απαραίτητα το κενό σύνολο. Εξαρτάται από τις σχετικές θέσεις των a, β . Π.χ. αν $a < \beta$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι μια “λωρίδα” στο s -επίπεδο, το $a < \Re\{s\} < \beta$, όπως στο Σχήμα (10), ενώ αν $a > \beta$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο. Προσέξτε ότι εδώ, το συνολικό μας σήμα $x(t)$ είναι *αμφίπλευρο*, και



Σχήμα 10: Πεδίο Σύγκλισης σήματος $e^{at}\epsilon(t) - e^{\beta t}\epsilon(-t)$ με $a < \beta$

έτσι το πεδίο σύγκλισης δεν προέκυψε ούτε δεξιόπλευρο ούτε αριστερόπλευρο, αλλά μια “λωρίδα” στο μιγαδικό επίπεδο.

3.2 Σημαντικές Παρατηρήσεις

Ας ξεκινήσουμε τις παρατηρήσεις μας...

1. Η πιο σημαντική παρατήρηση έρχεται αν συγκρίνουμε τις Σχέσεις (27) και (32). Ας τις ξαναγράψουμε εδώ για ευκολία:

$$x(t) = e^{at}\epsilon(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (37)$$

$$x(t) = -e^{at}\epsilon(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (38)$$

Παρατηρούμε ότι δυο εντελώς διαφορετικά σήματα στο χρόνο, έχουν τον ίδιο μετασχ. Laplace! Σωστά; Λάθος! :-) Έχουν την ίδια αλγεβρική μορφή στο χώρο του μετασχ. Laplace. Ο μετασχηματισμός Laplace όμως περιλαμβάνει ΚΑΙ το πεδίο σύγκλισης! Αυτό είναι που ξεχωρίζει τους δυο, ίδιους κατά τα άλλα, μετασχηματισμούς. Χωρίς το πεδίο σύγκλισης, δε θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε σε ποιο σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ που έχουμε παραπάνω!

2. Είδατε παραπάνω ότι το πεδίο σύγκλισης δεν είναι κάτι τυχαίο. Προκύπτει απ' την ΑΝΑΓΚΗ να συγκλίνει το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace! Κάθε μετασχ. Laplace έρχεται “παρέα” με το πεδίο σύγκλισης. Χωρίς αυτό, ο μετασχ. Laplace είναι χωρίς νόημα! Συνηθίστε λοιπόν να γράφετε το μετασχηματισμό ΜΑΖΙ με το εκάστοτε πεδίο σύγκλισης. :-)

3. Προφανώς δε χρειάζεται σε κάθε άσκηση να αποδεικνύετε το πεδίο σύγκλισης, εκτός αν σας ζητείται ρητά, π.χ. σε εφαρμογή του ορισμού. Ακόμα και τότε, δε χρειάζεται να δείχνετε αναλυτικά ότι οι συναρτήσεις είναι φραγμένες, κλπ. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε έτοιμα τα αποτελέσματα της θεωρίας, ότι δηλαδή αρκεί το πραγματικό μέρος του εκθέτη να είναι θετικό ή αρνητικό, ανάλογα τι σας βολεύει για να συγκλίνει το όριο στο μηδέν.
4. Ο πόλος a που είδαμε στα Παραδείγματα 1 και 2 θα μπορούσε να είναι μιγαδικός αριθμός. Γενικά, οι πόλοι δεν είναι απαραίτητο να είναι πάντα πραγματικοί. Δεν αλλάζει τίποτα σε όσα είπαμε παραπάνω, παρά μόνον ότι πλέον τα πεδία σύγκλισης θα είναι στη μορφή

$$\Re\{s\} \gtrless \Re\{a\} \quad (39)$$

δηλ. χρησιμοποιούμε το πραγματικό μέρος του, κατάλληλου κάθε φορά, μιγαδικού πόλου στην περιγραφή του πεδίου σύγκλισης.

5. Από τη στιγμή που οι συναρτήσεις $\sigma = \lambda$ ορίζουν κατακόρυφες ευθείες στο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών (το λεγόμενο s -επίπεδο), τα πεδία σύγκλισης οποιουδήποτε μετασχηματισμού Laplace θα είναι ΕΙΤΕ
- (α') μια περιοχή του επιπέδου αριστερά μιας κατακόρυφης γραμμής, όπου θα ορίζεται από τον αριστερότερο πόλο, ΕΙΤΕ
 - (β') μια περιοχή του επιπέδου δεξιά μιας κατακόρυφης γραμμής, όπου θα ορίζεται από το δεξιότερο πόλο, ΕΙΤΕ
 - (γ') μια “λωρίδα” μεταξύ δυο κατακόρυφων γραμμών, όπου ορίζονται από δυο πόλους.
6. Τα πεδία σύγκλισης δεν περιέχουν ΠΟΤΕ πόλους!
7. Ένας μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους.
8. Αν το $x(t)$ είναι δεξιόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι “δεξιόπλευρο”, δηλ. μια περιοχή του επιπέδου δεξιά μιας κατακόρυφης γραμμής, όπου θα ορίζεται από το δεξιότερο πόλο. Για παράδειγμα, $\Re\{s\} > \Re\{a\}$ με $a =$ δεξιότερος πόλος.
9. Αν το $x(t)$ είναι αριστερόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι “αριστερόπλευρο”, δηλ. μια περιοχή του επιπέδου αριστερά μιας κατακόρυφης γραμμής, όπου θα ορίζεται από τον αριστερότερο πόλο. Για παράδειγμα, $\Re\{s\} < \Re\{a\}$ με $a =$ αριστερότερος πόλος.
10. Αν $x(t)$ είναι αμφίπλευρο, δηλ. άθροισμα δεξιόπλευρων και αριστερόπλευρων σημάτων, το πεδίο σύγκλισης είναι μια “λωρίδα” στο ημιεπίπεδο μεταξύ δυο πόλων (π.χ. $\Re\{a\} < \Re\{s\} < \Re\{b\}$), ή το κενό σύνολο (γιατί τα επιμέρους πεδία σύγκλισης δε θα επικαλύπτονται). Στην περίπτωση που το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο, προφανώς ο μετασχ. Laplace δεν ορίζεται.
11. Αν $x(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, το πεδίο σύγκλισης είναι ΟΛΟ το s -επίπεδο.
12. Συχνά, το πεδίο σύγκλισης συμβολίζεται ως ROC, από τα αρχικά της αγγλικής μετάφρασης του πεδίου σύγκλισης (Region Of Convergence)¹.
13. Ξαναδιαβάστε τις παρατηρήσεις 5 – 11. :-)

4 Σύνδεση με το μετασχηματισμό Fourier

Όταν θέτουμε $\sigma = 0$ στο ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace, αυτό που κάνουμε “σιωπηλά” είναι ότι εκτιμούμε το μετασχ. Laplace σε συχνότητες που βρίσκονται πάνω στην κατακόρυφη ευθεία $\sigma = 0$ του μιγαδικού επιπέδου, που δεν είναι άλλη απ' τον άξονα των φανταστικών αριθμών $j2\pi f$!

Για να μπορούμε όμως να το κάνουμε αυτό, ΠΡΕΠΕΙ ο κατακόρυφος άξονας των φανταστικών $j2\pi f$, δηλ. η κατακόρυφη ευθεία $\sigma = 0$, να περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace! Αλλιώς δεν έχει κανένα νόημα ο υπολογισμός του $X(s)|_{\sigma=0}$! Γι' αυτό λοιπόν, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier μέσω

¹Και όχι από την κρέμα προσώπου :-)

του μετασχ. Laplace, πρέπει να προσέχουμε πρώτα αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Αν περιέχεται, καλώς, αντικαθιστούμε $\sigma = 0$ στον τύπο του μετασχ. Laplace και έχουμε το μετασχ. Fourier. Αν όχι, τότε ο μετασχ. Fourier ΔΕΝ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace! Ας μιλήσουμε όμως με λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια σχετικά με αυτά...

Ο ορισμός του μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (40)$$

είναι ταυτόσημος με τον ορισμό του μετασχ. Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (41)$$

αν στη Σχέση (41) θέσουμε όπου f το $s = \sigma + j2\pi f$. Είναι εύλογο να περιμένει κανείς ότι ο μετασχ. Laplace, $X(s)$, ενός σήματος $x(t)$, να είναι ίδιος με τον μετασχ. Fourier, $X(f)$, του ίδιου σήματος, με το $j2\pi f$ να έχει αντικατασταθεί από το s . Για παράδειγμα, μάθαμε πριν λίγο ότι

$$e^{-at}\epsilon(t), a > 0 \xrightarrow{L} \frac{1}{a+s} \quad (42)$$

Αντικαθιστώντας το s με το $j2\pi f$, έχουμε ότι

$$X(s) \Big|_{s=j2\pi f} = \frac{1}{a+j2\pi f} = X(f) \quad (43)$$

που είναι ο μετασχ. Fourier, όπως είδαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο. Δυστυχώς αυτή η διαδικασία δεν ισχύει για κάθε σήμα $x(t)$. Μπορούμε να την χρησιμοποιούμε μόνο όταν η περιοχή σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιέχει το φανταστικό ($j2\pi f$) άξονα.

Για παράδειγμα, ο μετασχ. Fourier της βηματικής συνάρτησης $x(t) = \epsilon(t)$ είναι ο

$$x(t) = \epsilon(t) \xrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (44)$$

Ο αντίστοιχος μετασχ. Laplace είναι ο

$$x(t) = \epsilon(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s}, \Re\{s\} > 0 \quad (45)$$

και όπως βλέπουμε από την περιοχή σύγκλισης, δεν περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας $\sigma = \Re\{s\} = 0$. Άρα, ο μετασχ. Laplace ΔΕΝ μπορεί να μας δώσει το μετασχ. Fourier, αλλά ούτε και το αντίστροφο! Σε αυτές τις περιπτώσεις, η σχέση μεταξύ των δυο μετασχηματισμών δεν είναι τόσο απλή. Ο λόγος για αυτήν την περιπλοκή σχετίζεται με τη σύγκλιση του ολοκληρώματος του μετασχ. Fourier, όπου η ολοκλήρωση περιορίζεται πάνω στον φανταστικό άξονα. Λόγω αυτού του περιορισμού, το ολοκλήρωμα Fourier για τη βηματική συνάρτηση δε συγκλίνει. Χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια γενικευμένη συνάρτηση ($\delta(f)$) για τη σύγκλιση.

Αντιθέτως, το ολοκλήρωμα Laplace για τη βηματική συνάρτηση συγκλίνει αλλά μόνο για $\Re\{s\} > 0$, μια περιοχή που είναι “απαγορευμένη” για το μετασχ. Fourier! :-)

Ένα ακόμα ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι παρ’ όλο που ο μετασχ. Laplace είναι μια γενίκευση του μετασχ. Fourier, υπάρχουν σήματα (π.χ. περιοδικά σήματα), για τα οποία ο μετασχ. Laplace ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ, ενώ ο μετασχ. Fourier ΥΠΑΡΧΕΙ! :-) (αλλά δεν προκύπτει από απλή σύγκλιση του ολοκληρώματος).

Οπότε για ένα οποιοδήποτε σήμα

Ο μετασχ. Fourier $X(f)$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace $X(s)$ θέτοντας $\Re\{s\} = \sigma = 0$, δηλ. $X(2\pi f) = X(s) \Big|_{s=j2\pi f}$, μόνον αν το Πεδίο Σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα $j2\pi f$.



Σχήμα 11: Ο μετασχ. Fourier είναι παντού... :-)

5 Ζεύγη και Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Οι ιδιότητες του μετασχ. Laplace είναι παρόμοιες με αυτές των σειρών και του μετασχ. Fourier. Οι κυριότερες βρίσκονται στον πίνακα 1, όπου ξεχωριστά εμφανίζονται μόνο οι ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχ. Laplace που είναι διαφορετικές από αυτές του δίπλευρου.

Ο πίνακας 2 παραθέτει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που μπορείτε να χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη.

6 Μετασχ. Laplace και Συστήματα

Ο μετασχ. Laplace είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την ανάλυση συστημάτων. Η ικανότητά του να ερμηνεύει συχνотικά πλήθος σημάτων, σημαντικά περισσότερων από το μετασχ. Fourier, τον κάνει ιδανικό για τη μελέτη συστημάτων.

Έχουμε δει κάποια πράγματα για τα συστήματα σε προηγούμενο κεφάλαιο, και κάποια άλλα σχετικά με αιτιατότητα αλλά και με τα είδη σημάτων σε προηγούμενη παράγραφο. Τα τελευταία ισχύουν και για τα συστήματα, αφού κι αυτά είναι σήματα και περιγράφονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Υπάρχουν δεξιόπλευρα, αριστερόπλευρα, αμφίπλευρα, αιτιατά και μη συστήματα που ορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε στην Παράγραφο 2. Μάλιστα, την αιτιατότητα την είχαμε ορίσει και στις πρώτες μας συζητήσεις για συστήματα, ως την ικανότητα του συστήματος να παράγει έξοδο μόνο για τωρινές ή παρελθοντικές τιμές της εισόδου. Αυτή είναι μια σχέση αίτιου-αποτελέσματος, όπως πρέπει να καταλαβαίνετε. Αυτό είναι ισοδύναμο με τον ορισμό της αιτιατότητας που δώσαμε νωρίτερα: $h(t) = 0, t < 0$.

6.1 Ευστάθεια Συστήματος

Έχετε δει πώς αναλύεται ένα σύστημα με βάση το μετασχ. Fourier και την Ανάπτυξη σε Μερικά Κλάσματα. Ακριβώς όμοια έχουμε και στην περίπτωση του μετασχ. Laplace. Για αιτιατά συστήματα ($h(t) = 0, t < 0$), έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} \epsilon(t), \quad \Re\{s\} > \max\{\Re\{s_k\}\} \quad (46)$$

με $s - s_k = 0 \iff s = s_k$ οι πόλοι του μετασχ. Laplace.

Ένα νέο στοιχείο που θα εισάγουμε τώρα είναι η έννοια της *ευστάθειας*, με όρους μετασχ. Laplace. Θυμίζουμε ότι ένα σύστημα λέγεται ευσταθές όταν παράγει φραγμένη έξοδο για μια δεδομένη φραγμένη είσοδο. Δηλ.

$$\text{Αν } |x(t)| < M_x \Rightarrow |y(t)| < M_y \quad (47)$$

όπου M_x, M_y πραγματικοί αριθμοί. Αυτό το γνωρίζετε ήδη από τη θεωρία και από προηγούμενες παραγράφους. Ας δούμε τη σχέση αυτή με το μετασχ. Laplace:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| |h(t - \tau)| d\tau < M_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| d\tau \quad (48)$$

Ιδιότητες δίπλευρου μετασχηματισμού Laplace			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R_x
	$y(t)$	$Y(s)$	R_y
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-s),$	$-R_x$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
n -οστή παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγωγή στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n -οστή παραγωγή στη συχνότητα	$t^n x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(t) dt$	$R \supseteq (R_x \cap \{\Re\{s\} > 0\})$
Ολοκλήρωση στη συχνότητα	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^\infty X(z) dz$	
Ιδιότητες μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace			
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R \supseteq R_x$
n -οστή παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big _{t=0}$	R_x
Ολοκλήρωση	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	R_x

Πίνακας 1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Laplace

Αυτό σημαίνει ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος $y(t)$, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| d\tau < M_h < \infty \quad (49)$$

με $M_h \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το $h(t)$ πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Δεδομένου ότι το $h(t)$, για ένα αιτιατό σύστημα (χωρίς βλάβη της γενικότητας), εκφράζεται, όπως είδαμε, ως αντίστροφος μετασχ. Laplace ως

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} \epsilon(t), \quad \Re\{s\} > \max\{\Re\{s_k\}\} \quad (50)$$

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Όλο το s -επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)\epsilon(t)$	$\frac{s}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(2\pi f_0 t)\epsilon(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$Arect\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2} - e^{-sT/2})$	όλο το s -επίπεδο
$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$-\epsilon(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 - s^2}$	$a > \Re\{s\} > -a$
$e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$-e^{-at}\epsilon(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} < -\Re\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\epsilon(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} < -\Re\{a\}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)\epsilon(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)\epsilon(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$

Πίνακας 2: Πίνακας ζευγών μετασχ. Laplace

όπου s_k οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N |A_k| |e^{s_k t} \epsilon(t)| dt = \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}| |e^{j2\pi f t}| dt = \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}| dt \quad (51)$$

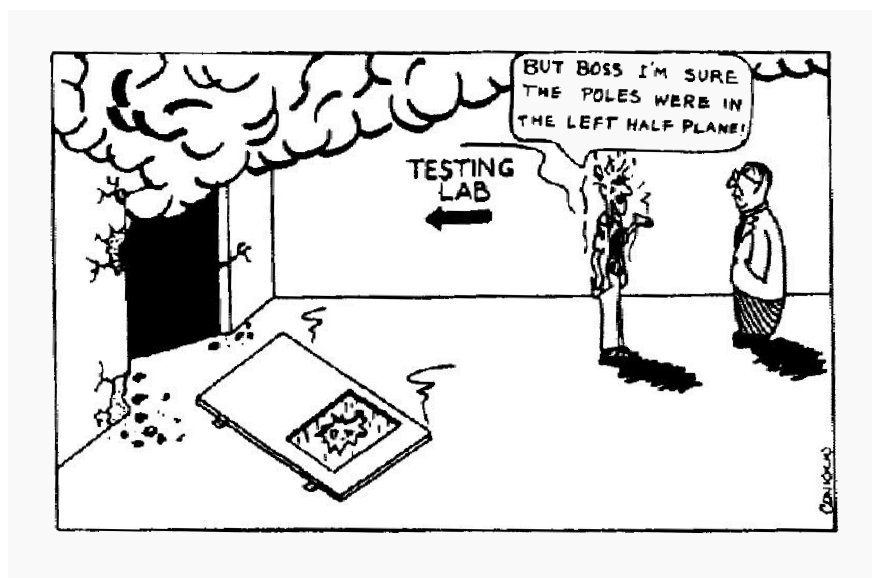
Καταλήξαμε πλέον ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος, και άρα το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει να ισχύει ότι η $e^{-\sigma_k t}$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Αυτό προφανώς συμβαίνει ΜΟΝΟΝ όταν $\Re\{s_k\} = \sigma_k < 0$! Πότε ισχύει όμως αυτό; Φυσικά όταν **όλοι** οι πόλοι s_k του $H(s)$ βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο! Άρα

Ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα έχει μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Με αντίστοιχη ανάλυση προκύπτει ότι

Ένα αντι-αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα έχει μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Ας ξαναδούμε όμως που καταλήξαμε πριν την αντικατάσταση της $h(t)$. Είδαμε ότι η ευστάθεια ικανοποιείται μόνον



Σχήμα 12: Προσοχή στην ευστάθεια των συστημάτων!!

αν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| d\tau < \infty \iff \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (52)$$

Όμως αυτό το ολοκλήρωμα μας θυμίζει ακριβώς τη συνθήκη ύπαρξης του Μετασχ. Fourier του $h(t)$!! Άρα μπορούμε να πούμε γενικότερα ότι

Κριτήριο ευστάθειας (και άρα ύπαρξης του μετασχ. Fourier) για οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα είναι η συμπερίληψη του φανταστικού άξονα $j2\pi f$ ($\Re\{s\} = 0$) μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace που το περιγράφει.

6.2 Συστήματα σε Σειρά

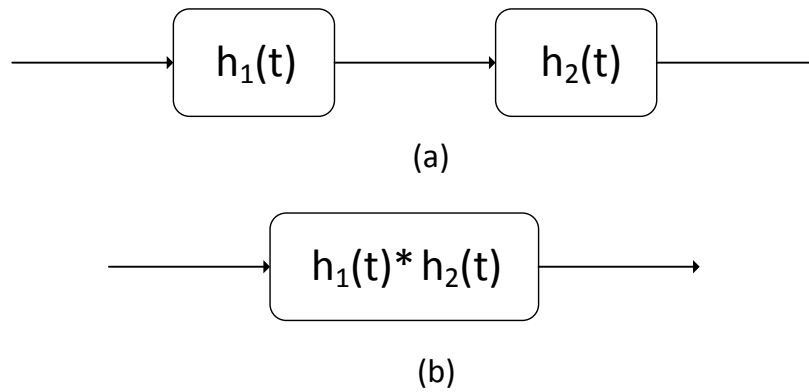
Πολλές φορές, μας βολεύει να βάζουμε πολλά συστήματα σε σειρά μεταξύ τους, δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο σύστημα που εκτελεί επεξεργασία στην είσοδό του. Όταν έχουμε τέτοια συστήματα σε σειρά, όπως στο Σχήμα (13)(a), η έξοδος του $h_1(t)$ περνάει ως είσοδος στο $h_2(t)$. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα αυτά αποτελούν ΕΝΑ μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί τη *συνέλιξη* των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του χρόνου, όπως στο Σχήμα (13)(b).

Όμως ξέρουμε πολύ καλά ότι η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στη συχνότητα (ή στο χώρο s , των μιγαδικών συχνοτήτων, του Μετασχ. Laplace). Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο συστήματα σε σειρά στο χρόνο ισούνται με ΕΝΑ σύστημα στη συχνότητα, όπου περιγράφεται από το γινόμενο των μετασχηματισμών τους, όπως στο Σχήμα (14).

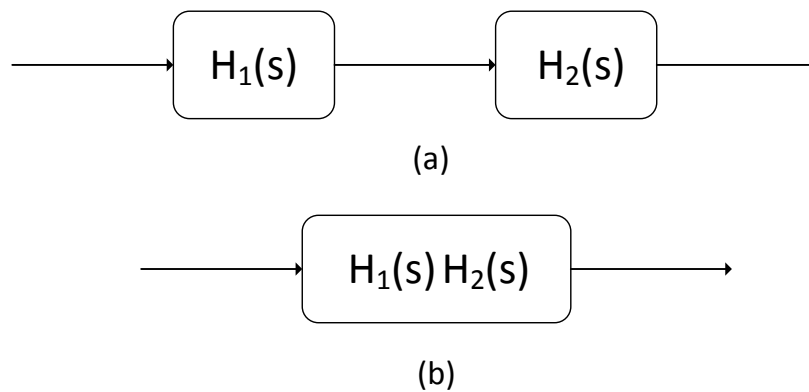
6.3 Συστήματα σε Παράλληλία

Άλλες φορές, μας βολεύει να βάζουμε πολλά συστήματα *παράλληλα* μεταξύ τους, δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο σύστημα που εκτελεί επεξεργασία στην είσοδό του. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως στο Σχήμα (15)(a), η αρχική είσοδος περνάει και στο $h_1(t)$ και στο $h_2(t)$. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα αυτά αποτελούν ΕΝΑ μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί το *άθροισμα* των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του χρόνου, όπως στο Σχήμα (15)(b).

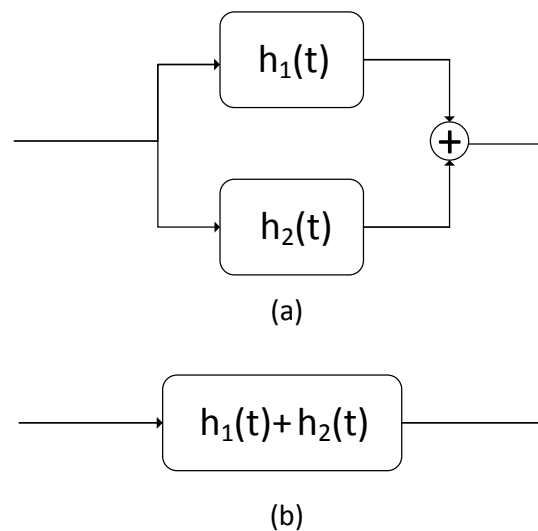
Περνώντας στο χώρο της συχνότητας, ξέρουμε πολύ καλά ότι οι μετασχηματισμοί που έχουμε ορίσει είναι γραμμικοί. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο συστήματα παράλληλα στο χρόνο ισούνται με ΕΝΑ σύστημα στη συχνότητα, όπου περιγράφεται επίσης από το άθροισμα των μετασχηματισμών τους, όπως στο Σχήμα (16). Φυσικά υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί συστημάτων σε σειρά και παράλληλα, αλλά η βασική αρχή ανάλυσης ακολουθεί την παραπάνω περιγραφή που μόλις κάναμε.



Σχήμα 13: Συστήματα σε Σειρά στο χρόνο: (a) Δυο συστήματα σε σειρά, (b) Συνολικό σύστημα



Σχήμα 14: Συστήματα σε Σειρά στη συχνότητα: (a) Δυο συστήματα σε σειρά, (b) Συνολικό σύστημα

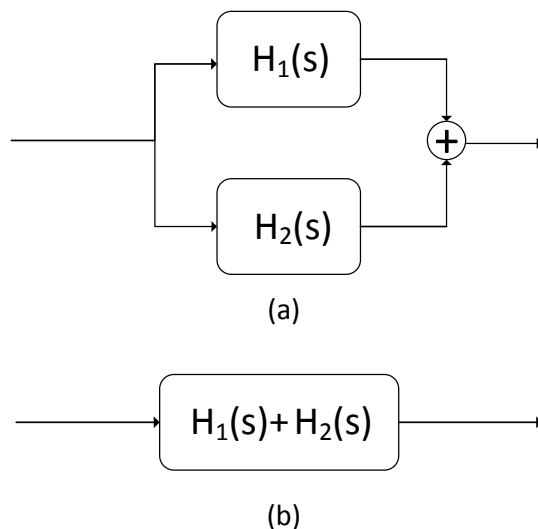


Σχήμα 15: Συστήματα σε Παραλληλία στο χρόνο: (a) Δυο συστήματα σε παραλληλία, (b) Συνολικό σύστημα

7 Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Σε κάποιες εφαρμογές είναι επιθυμητό να γνωρίζουμε τις τιμές ενός σήματος $x(t)$ όταν αυτό τείνει στο 0 και στο ∞ , μέσω του μετασχ. Laplace του. Τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής μας βοηθούν σε αυτό.

Το *θεώρημα της αρχικής τιμής* - Θ.Α.Τ. δηλώνει ότι αν το $x(t)$ και η παράγωγός του, $dx(t)/dt$, έχουν μετασχ. Laplace,



Σχήμα 16: Συστήματα σε Παραλληλία στη συχνότητα: (a) Δυο συστήματα σε παραλληλία, (b) Συνολικό σύστημα

τότε

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (53)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει.

Το *θεώρημα της τελικής τιμής* - *Θ.Τ.Τ.* δηλώνει ότι αν το $x(t)$ και η παράγωγός του, $dx(t)/dt$, έχουν μετασχ. Laplace, τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (54)$$

δεδομένου ότι το $sX(s)$ δεν έχει πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή πάνω στον φανταστικό άξονα.

Το *Θ.Α.Τ.* πρέπει να εφαρμόζεται μόνον αν το $X(s)$ έχει αυστηρά μεγαλύτερη τάξη παρονομαστή απ' ότι αριθμητή, αλλιώς το όριο δεν υπάρχει, και το *θεώρημα* δεν εφαρμόζεται.

Αντίστοιχα, το *Θ.Τ.Τ.* εφαρμόζεται μόνον αν οι πόλοι του $sX(s)$ είναι όλοι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αν υπάρχει πόλος στο φανταστικό άξονα, το $\lim_{t \rightarrow 0} sX(s)$ δεν υπάρχει, ενώ αν υπάρχει πόλος στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ δεν υπάρχει.

8 Η Συνάρτηση Μεταφοράς

Ας θεωρήσουμε μια είσοδο της μορφής

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j2\pi f)t} \quad (55)$$

σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = H\{x(t)\} = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (56)$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (57)$$

Ορίζουμε ως **Συνάρτηση Μεταφοράς** το

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \quad (58)$$

που δεν είναι άλλο από το μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, και έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$y(t) = H\{e^{st}\} = H(s)e^{st} \quad (59)$$

Σας θυμίζει κάτι; :-) Βλέπουμε ότι η επίδραση του συστήματος $H(s)$ επάνω σε μια είσοδο της μορφής e^{st} είναι ο πολλαπλασιασμός της με τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$! Θυμηθείτε ότι *ιδιοσυνάρτηση* λέγεται το σήμα που περνάει από το σύστημα χωρίς καμιά τροποποίηση πλὴν του πολλαπλασιασμού του με μια συνήθως μιγαδική σταθερά, όπως είδαμε στο μετασχ. Fourier. Έτσι, αναγνωρίζουμε το e^{st} ως ιδιοσυνάρτηση του ΓΧΑ συστήματος και το $H(s)$ ως η αντίστοιχη *ιδιοτιμή*.

Τώρα, ας εκφράσουμε την μιγαδική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ σε πολική μορφή, ως

$$H(s) = |H(s)|e^{j\phi(s)} \quad (60)$$

όπου $|H(s)|$ και $\phi(s)$ είναι το μέτρο και η φάση του $H(s)$, αντίστοιχα. Τώρα, ξαναγράφοντας την έξοδο του συστήματος, θα έχουμε

$$y(t) = |H(s)|e^{j\phi(s)}e^{st} \quad (61)$$

Με χρήση του $s = \sigma + j2\pi f$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t}e^{j(2\pi ft + \phi(\sigma + j2\pi f))} \\ &= |H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t} \cos(2\pi ft + \phi(\sigma + j2\pi f)) + j|H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t} \sin(2\pi ft + \phi(\sigma + j2\pi f)) \end{aligned} \quad (62)$$

Μπορούμε εδώ να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα, δεδομένης της εισόδου της μορφής $x(t) = e^{st}$, αλλάζει το πλάτος της εισόδου κατά παράγοντα $|H(\sigma + j2\pi f)|$ και μετατοπίζει τη φάση των ημιτονοειδών συνιστωσών κατά $\phi(\sigma + j2\pi f)$. Το σύστημα δεν αλλάζει τον παράγοντα απόσβεσης - όπως λέγεται - σ , ούτε τη συχνότητα f της εισόδου. Ενδιαφέρον!! :-)

Έχουμε ήδη ορίσει ένα όνομα για το μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος: συμφωνήσαμε να τον λέμε *Συνάρτηση Μεταφοράς*. Θυμηθείτε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος σχετίζεται με την είσοδό του και με το σύστημα μέσω της συνέλιξης

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (63)$$

Αυτή η σχέση μεταφράζεται στο χώρο του μετασχ. Laplace ως

$$Y(s) = X(s)H(s) \quad (64)$$

Άρα ο μετασχ. Laplace της εξόδου ισούται με το γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς επί το μετασχ. Laplace της εισόδου. Με αναδιάταξη της παραπάνω σχέσης, έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (65)$$

η οποία σχέση μας θυμίζει την αντίστοιχη σχέση όταν μελετούσαμε το μετασχ. Fourier:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (66)$$

Αυτό φυσικά δε θα πρέπει να σας εκπλήσσει. :-) Παρατηρήστε όμως ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι εν γένει ρητή συνάρτηση, δηλ. αποτελείται από ένα λόγο πολωνύμων του s . Γι-α να λάβουμε περισσότερη πληροφορία για τη συνάρτηση μεταφοράς, θα ήταν πολύ βολικό να τη γράψουμε σε μορφή παραγόντων, ως

$$H(s) = A \frac{\prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} \quad (67)$$

με A μια σταθερά. Οι αριθμοί c_k, d_k λέγονται **μηδενικά** και **πόλοι**, αντίστοιχα. Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή αντίστοιχα. Εν γένει, ονομάζουμε **πολούς** τα σημεία του s -επιπέδου που απειρίζουν το $H(s)$. Αντίστοιχα, ονομάζουμε **μηδενικά** τα σημεία του s -επιπέδου που μηδενίζουν το $H(s)$. Σίγουρα τέτοια σημεία είναι οι ρίζες του παρονομαστή και οι ρίζες του αριθμητή αντίστοιχα, δηλ. τα σημεία c_k, d_k . Όμως, σε περιπτώσεις που η τάξη του αριθμητή είναι διαφορετική από του παρονομαστή, μπορεί να υπάρχουν κι άλλα μηδενικά ή πόλοι. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1:

Θεωρήστε την απλή αιτιατή συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s-2}{s-3} \quad (68)$$

με $\Re\{s\} > 3$, και με έναν πόλο στο $s = 3$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$.

Παράδειγμα 2:

Θεωρήστε την απλή αιτιατή συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s-2}{s^2} \quad (69)$$

με $\Re\{s\} > 0$, και με έναν πόλο τάξης 2 στο $s = 0$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$. Όμως, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει ακόμα ένα μηδενικό στο άπειρο.

Παράδειγμα 3:

Θεωρήστε την απλή αιτιατή συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{(s-2)(s+1)}{s-3} \quad (70)$$

με $\Re\{s\} > 3$, και με έναν πόλο στο $s = 3$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$ και στο $s = -1$. Όμως, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \infty$, άρα υπάρχει κι ένας ακόμη πόλος στο άπειρο.

Παράδειγμα 4:

Θεωρήστε την απλή αιτιατή συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{1}{s} \quad (71)$$

με $\Re\{s\} > 0$, και με έναν πόλο στο $s = 0$. Όμως, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει ένα μηδενικό στο άπειρο.

Τα παραπάνω παραδείγματα μας προδίδουν ένα γενικό κανόνα: **Σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, υπάρχουν τόσοι πόλοι, οσα και μηδενικά.** Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ως εξής:

Έστω μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ως

$$H(s) = A \frac{\prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} \quad (72)$$

Τότε

$$H(s) = A \frac{s^M \prod_{k=1}^M (1 - \frac{c_k}{s})}{s^N \prod_{k=1}^N (1 - \frac{d_k}{s})} = A s^{M-N} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - \frac{c_k}{s})}{\prod_{k=1}^N (1 - \frac{d_k}{s})} \quad (73)$$

Έστω ότι $M > N$, άρα συνεπάγεται ότι έχουμε θετική δύναμη του s στον όρο μπροστά από το κλάσμα, άρα θα έχουμε $M - N$ πόλους στο άπειρο. Αντίθετα, αν $M < N$, τότε ο όρος s^{M-N} γράφεται ως $1/s^{M-N}$, με $M - N > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, το σύστημα θα έχει $M - N$ μηδενικά στο άπειρο. Τέλος, στην τετριμμένη περίπτωση όπου $M = N$, δεν υπάρχουν πόλοι ή μηδενικά στο άπειρο, και οι πόλοι και τα μηδενικά δίνονται μόνο από τις ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή και του αριθμητή αντίστοιχα.

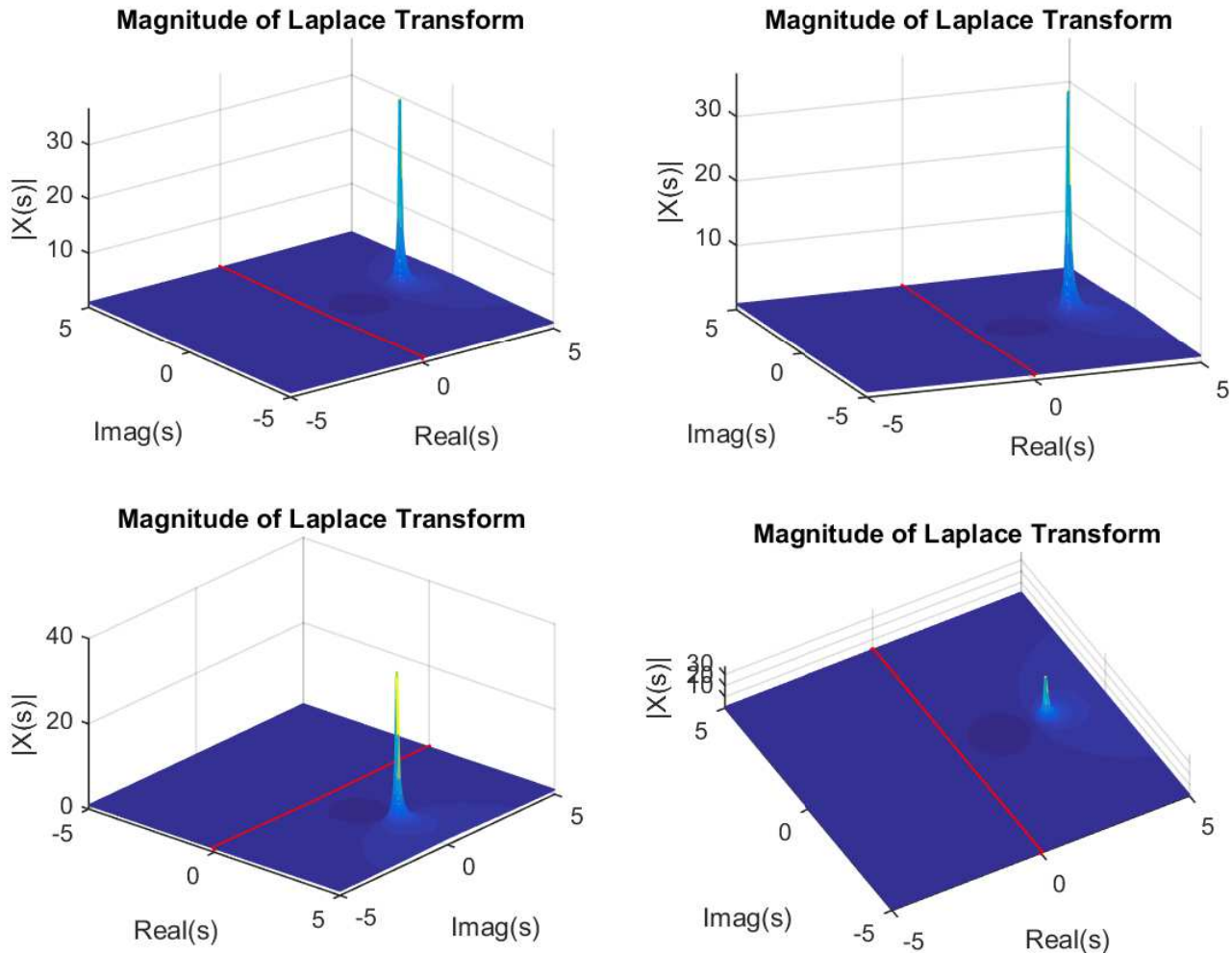
8.1 Πόλοι και Μηδενικά στο s -επίπεδο

Θα ήταν ενδιαφέρον να γνωρίζουμε πώς μοιάζουν οι πόλοι και τα μηδενικά στο s -επίπεδο και πως επηρεάζουν τόσο τη συνάρτηση μεταφοράς όσο και την απόκριση συχνότητας, δηλ. το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(t)$. Ας επιστρέψουμε στο πρώτο παράδειγμα ρητής συναρτησης, την

$$H(s) = \frac{s-2}{s-3} \quad (74)$$

με $\Re\{s\} > 3$, και με έναν πόλο στο $s = 3$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$.

Φυσικά δεν μπορούμε να την αναπαραστήσουμε σχηματικά, γιατί είναι μιγαδική συνάρτηση. Όμως μπορούμε να αναπαραστήσουμε το μέτρο της, $|H(s)|$, κι αυτό θα το κάνουμε βλέποντας το $H(s)$ ως μια γενική μιγαδική συνάρτηση που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{C}$. Δείτε το Σχήμα (17). Βλέπετε ότι όταν το γράφημα παίρνει μεγάλες τιμές (έχει δηλαδή



Σχήμα 17: Το $|H(s)|$

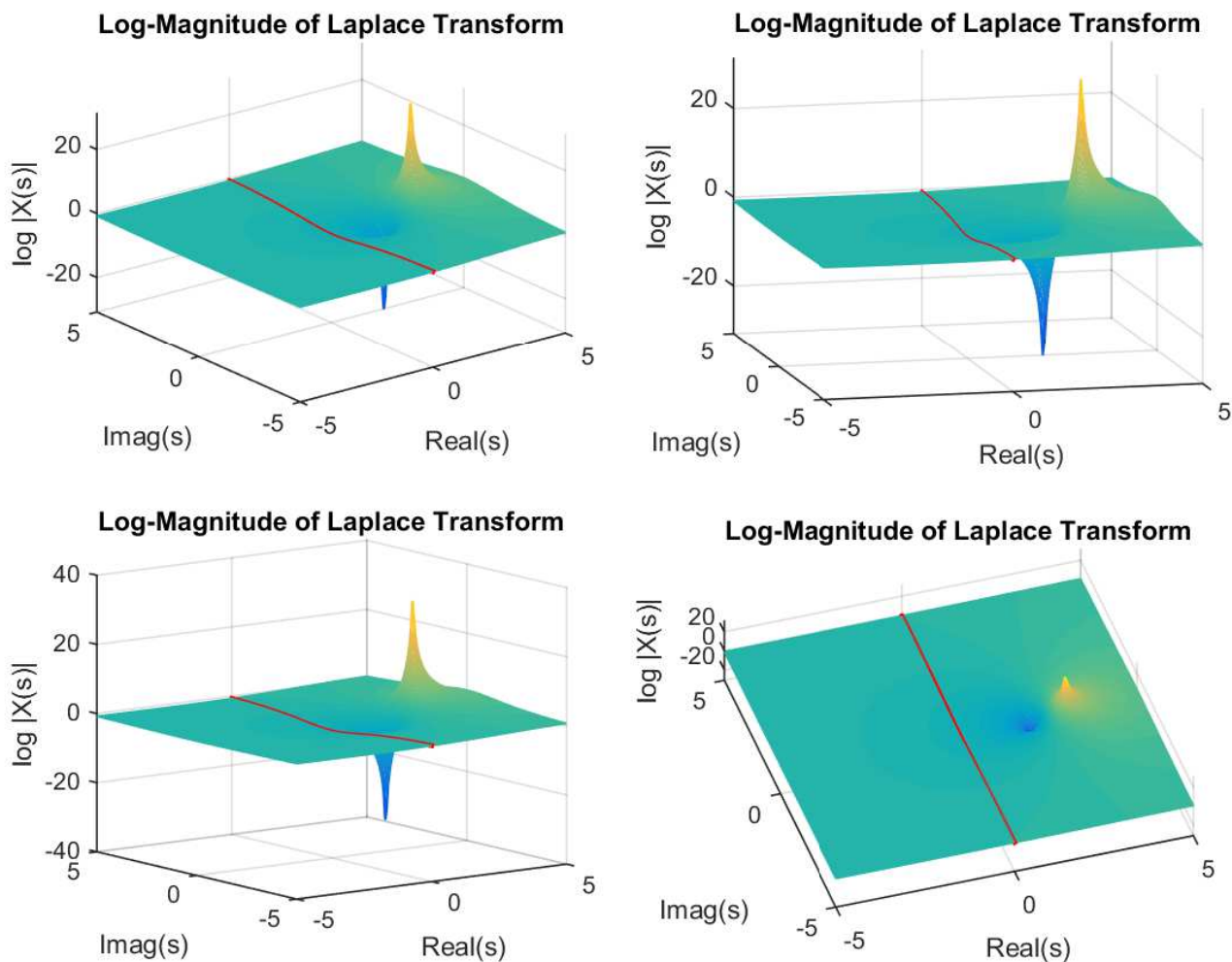
κορυφές), τότε σε εκείνη τη θέση στο s -επίπεδο, υπάρχει πόλος (εδώ, $s = 3$), ενώ όπου το γράφημα παίρνει χαμηλές τιμές (έχει δηλ. “τρύπες” :-), τότε εκεί έχουμε μηδενικά (εδώ $s = 2$). Στο παράδειγμα αυτο, ο πόλος φαίνεται ξεκάθαρα, αλλά δεν ισχύει το ίδιο και για το μηδενικό. Αυτό μπορούμε να το βελτιώσουμε αν αναπαραστήσουμε το $\log |H(s)|$. Αυτό γίνεται για τρεις λόγους:

1. Η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η μονοτονία της $|H(s)|$ διατηρείται.
2. Επίσης, η λογαριθμική συνάρτηση έχει τις εξής ωραίες ιδιότητες:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty \quad (75)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty \quad (76)$$

Αυτό σημαίνει ότι η σχηματική αναπαράσταση του $|H(s)|$ θα πηγαίνει στο $+\infty$ όταν υπάρχει πόλος, ενώ θα πηγαίνει στο $-\infty$ όταν υπάρχει μηδενικό, διευκολύνοντας την οπτική αναγνώριση των πόλων και μηδενικών. Δείτε το Σχήμα (18).

Σχήμα 18: Το $\log |H(s)|$

3. Η γνωστή σχέση

$$Y(s) = X(s)H(s) \quad (77)$$

συνεπάγεται ότι τα πλάτη των μετασχηματισμών Laplace σχετίζονται ως

$$|Y(s)| = |X(s)||H(s)| \quad (78)$$

Η παραπάνω σχέση σχετίζει πολλαπλασιαστικά το $|X(s)|$ με το $|H(s)|$. Δεν είναι τόσο εύκολο να βρούμε διαισθητικά το αποτέλεσμα του γινομένου δυο συναρτήσεων, εκτός αν είναι πολύ απλές. Η εφαρμογή του λογαρίθμου μετατρέπει το γινόμενο σε άθροισμα μέσω της σχέσης

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad (79)$$

και συγκεκριμένα

$$\log |Y(s)| = \log |X(s)| + \log |H(s)| \quad (80)$$

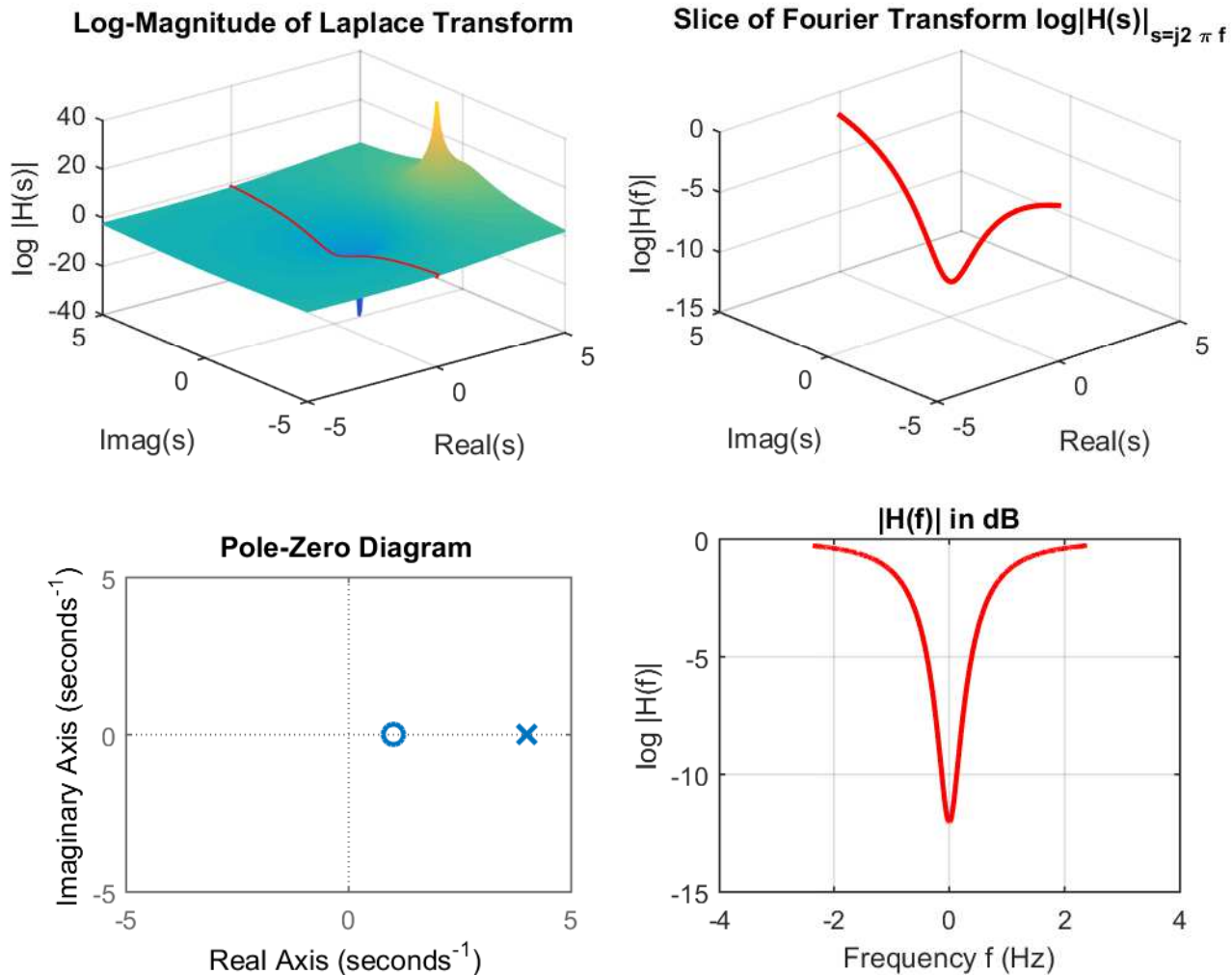
πράγμα που μας επιτρέπει να βρίσκουμε διαισθητικά το αποτέλεσμα του γινομένου των φασματικών αποκρίσεων, μια και πρόσθεση δυο γραφικών παραστάσεων είναι πιο εύκολη από τον πολλαπλασιασμό τους.

Είπαμε όμως νωρίτερα ότι μπορούμε μέσω του μετασχ. Laplace, να βρούμε το μετασχ. Fourier, αν θέσουμε $s = j2\pi f$. Αυτό σημαίνει ότι εκτιμούμε το $H(s)$ μόνον επάνω στο φανταστικό άξονα. Άρα, είναι σαν να παίρνουμε

μια κατακόρυφη “φέτα” του $H(s)$ πάνω από το φανταστικό άξονα, που μας δίνει το $H(f)$. Αν το κάνουμε αυτό σε μια συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$H(s) = \frac{s-1}{s-4} \quad (81)$$

και απεικονίσουμε το μέτρο της, θα πάρουμε μια διδιάστατη αναπαράσταση, όπως στο Σχήμα (19), όπου - χρησιμοποιώντας ξανά λογαριθμική κλίμακα για ευκολία στη σχεδίαση - φαίνεται η “φέτα” του μέτρου του μετασχ. Fourier και η “κανονική”, διδιάστατη αναπαράσταση του $\log |H(f)|$, όπως θα τη σχεδιάζαμε στο χαρτί. Η μαθηματική μορφή του



Σχήμα 19: Εκτιμώντας το μέτρο του Μετασχ. Fourier από το μέτρο του $|H(s)|$.

$|H(f)|$ δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ως

$$|H(s)| \Big|_{s=j2\pi f} = \left| \frac{j2\pi f - 1}{j2\pi f - 4} \right| = \frac{|j2\pi f - 1|}{|j2\pi f - 4|} = \sqrt{\frac{1 + 4\pi^2 f^2}{16 + 4\pi^2 f^2}} \quad (82)$$

9 Μετασχ. Laplace και Διαφορικές Εξισώσεις ΓΧΑ Συστημάτων

Τώρα που έχουμε ένα τόσο δυνατό εργαλείο ανάλυσης σημάτων και συστημάτων, μπορούμε να μιλήσουμε ακόμα πιο γενικά για τα συστήματα, θεωρώντας ότι αυτά περιγράφονται από μια διαφορική εξίσωση. Πράγματι, πολλά φυσικά και μηχανικά συστήματα μπορούν να αναχθούν σε διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, τα ηλεκτρικά κυκλώματα συνεχούς ή εναλλασσόμενου ρεύματος περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, και η απλοποίηση που συνεπάγεται

με την ανάλυσή τους στο χώρο του Laplace είναι σημαντική. Εν γένει λοιπόν, ο μετασχ. Laplace μας επιτρέπει να λύνουμε τέτοιες διαφορικές εξισώσεις πολύ εύκολα, μετατρέποντάς τες σε απλές αλγεβρικές.

Πιο συγκεκριμένα, έστω το σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές a_k, b_k ,

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad (83)$$

Αν θέσουμε κάποιους περιορισμούς στη διαφορική εξίσωσή μας (τους οποίους θα συζητήσουμε σύντομα), μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο για δεδομένη είσοδο, ενώ μπορούμε να βρούμε και τη συνάρτηση μεταφοράς που περιγράφει το σύστημα που αναπαριστά η διαφορική εξίσωση. Για παράδειγμα, παραπάνω δείξαμε ότι η είσοδος e^{st} είναι μια ιδιοσυνάρτηση ενός ΓΧΑ συστήματος, με την αντίστοιχη ιδιοτιμή ίση με τη Συνάρτηση Μεταφοράς $H(s)$. Αυτό σημαίνει ότι αν $x(t) = e^{st}$, τότε $y(t) = H(s)e^{st}$. Αντικαθιστώντας αυτά στη Σχέση (83), θα έχουμε

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{st} \right) H(s) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} e^{st} \quad (84)$$

Με χρήση της γνωστής σχέσης

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{st} = s^k e^{st} \quad (85)$$

θα έχουμε

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (86)$$

Το $H(s)$ είναι μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, όπως βλέπετε. Ο συντελεστής b_k του s^k στον αριθμητή αντιστοιχεί στο συντελεστή b_k της k -οστής παραγώγου της εισόδου $x(t)$. Ο συντελεστής a_k του s^k στον παρονομαστή αντιστοιχεί στο συντελεστή a_k της k -οστής παραγώγου της εξόδου $y(t)$. Άρα, μπορούμε να υπολογίζουμε εύκολα τη Συνάρτηση Μεταφοράς $H(s)$ ενός συστήματος που περιγράφεται από διαφορική εξίσωση, και αντίστροφα φυσικά.

Παράδειγμα:

Βρείτε τη Συνάρτηση Μεταφοράς του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t) - 3x(t) \quad (87)$$

Λύση:

Θα είναι (κατ' ευθείαν από τη Σχέση (86))

$$H(s) = \frac{2s - 3}{s^2 + 3s + 2} \quad (88)$$

Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, έστω το σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές a_k, b_l ,

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t) \quad (89)$$

Η απ' ευθείας επίλυση διαφορικών εξισώσεων είναι εν γένει απαιτητική. Εμείς ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε τις παρακάτω δυο περιπτώσεις:

1. Όταν μας δίνεται η διαφορική εξίσωση και μια είσοδος $x(t)$, και μας ζητείται η έξοδος $y(t)$. Για να είναι η λύση που θα βρούμε μοναδική, θα πρέπει να μας δωθούν κάποιες *αρχικές συνθήκες*². Αυτές οι αρχικές συνθήκες

²Γιατί αυτό; Σκεφτείτε την πιο απλή διαφορική εξίσωση που ξέρετε:

$$f'(x) = f(x)$$

Ξέρετε ότι η λύση της είναι

$$f(x) = e^x + c$$

η οποία δεν είναι μοναδική. Για να την κάνετε τέτοια, θα πρέπει να σας δίνεται κάποια συνθήκη για να βρείτε το c , π.χ.

$$f(0) = 1$$

που οδηγεί σε $c = 0$.

χαρακτηρίζουν την έξοδο όταν η είσοδος είναι μηδέν, και δίνονται υπό τη μορφή τιμών της εξόδου και των παραγώγων της για μια χρονική στιγμή, συνήθως την $t = 0$. Για να βρούμε την έξοδο, χρησιμοποιούμε τη σχέση

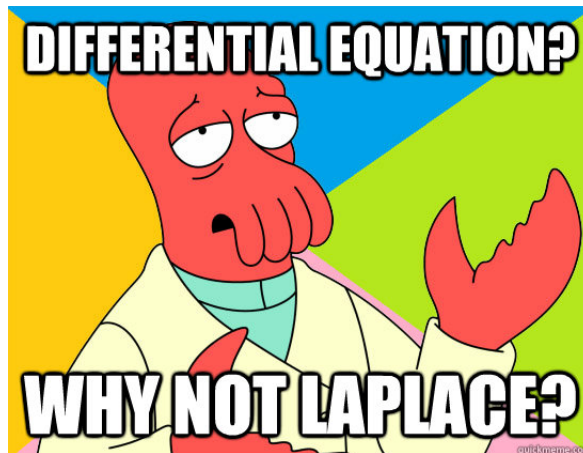
$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big|_{t=0} \quad (90)$$

από το μονόπλευρο μετασχ. Laplace, για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική.

2. Όταν θέλουμε να βρούμε τη Συνάρτηση Μεταφοράς $H(s)$ που χαρακτηρίζει το σύστημα. Τότε, θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) \quad (91)$$

για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική.



Σχήμα 20: Εύκολη λύση διαφορικών εξισώσεων με μετασχ. Laplace!!

Ας δούμε τρία παραδείγματα πάνω σε όλα όσα είπαμε.

Παράδειγμα 1:

Ένα ευσταθές σύστημα έχει τις παρακάτω εισόδους και εξόδους $x(t)$ και $y(t)$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιήστε το μετασχ.Laplace για να βρείτε τη Συνάρτηση Μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος.

- i. $x(t) = e^{-t}\epsilon(t)$, $y(t) = e^{-2t} \cos(t)\epsilon(t)$
- ii. $x(t) = e^{-2t}\epsilon(t)$, $y(t) = -2e^{-t}\epsilon(t) + 2e^{-3t}\epsilon(t)$

Λύση:

Είναι

- i. Προφανώς

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (92)$$

άρα αρκεί να βρούμε τα $X(s)$, $Y(s)$. Έχουμε

$$x(t) = e^{-t}\epsilon(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}, \Re\{s\} > -1 \quad (93)$$

αφού το σήμα είναι δεξιόπλευρο. Επίσης

$$y(t) = e^{-2t} \cos(t)\epsilon(t) \longleftrightarrow Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1}, \Re\{s\} > -2 \quad (94)$$

και άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}}{\frac{1}{s+1}} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)^2+1} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5} \quad (95)$$

Η τάξη του αριθμητή είναι ίδια με του παρονομαστή, άρα πρέπει πριν κάνουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να κάνουμε διαίρεση των πολυωνύμων. Κάνοντας διαιρέση πολυωνύμων, θα έχουμε

$$H(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5} = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2+1} \quad (96)$$

Χμμ... εδώ μπορούμε να ακολουθήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση αντι της Ανάπτυξης σε Μερικά Κλάσματα. Βλέπουμε οτι ο παρονομαστής μας θυμίζει δυο πολύ γνωστά ζεύγη μετ. Laplace, τα

$$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) \epsilon(t) \longleftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}, \quad \Re\{s\} > -\Re\{a\} \quad (97)$$

$$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) \epsilon(t) \longleftrightarrow \frac{2\pi f_0}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}, \quad \Re\{s\} > -\Re\{a\} \quad (98)$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε τον αριθμητή με τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιήσουμε τους παραπάνω τύπους. Δηλ.

$$H(s) = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2+1} = 1 - \frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{(s+2)^2+1} \quad (99)$$

Επίσης, το πεδίο σύγκλισης για αυτά τα δυο σήματα είναι το $\Re\{s\} > -2$, το οποίο συμφωνεί με το χαρακτηριστικό της ευστάθειας του συστήματος που μας λέει η εκφώνηση, άρα

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t} \cos(t) \epsilon(t) - e^{-2t} \sin(t) \epsilon(t) \quad (100)$$

ii. Όμοια, έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+3} \quad (101)$$

άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \quad (102)$$

με

$$A = H(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{-4(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=-1} = -2 \quad (103)$$

και

$$B = H(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)} \Big|_{s=-3} = -2 \quad (104)$$

και άρα

$$H(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{-2}{s+3} \longleftrightarrow h(t) = -2e^{-t} \epsilon(t) - 2e^{-3t} \epsilon(t) \quad (105)$$

που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 2:

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \quad (106)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 1$ και είσοδο $x(t) = e^{-4t} \epsilon(t)$.

Λύση:

Προφανώς θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο παραγώγισης με τις αρχικές συνθήκες. Εφαρμόζοντας το μετασχ. Laplace και στα δυο μέλη, έχουμε:

$$L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + L\left\{5\frac{dy(t)}{dt}\right\} + L\{6y(t)\} = L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + L\{x(t)\} \quad (107)$$

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) = sX(s) - x(0^-) + X(s) \quad (108)$$

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) = sX(s) - 0 + X(s) \quad (109)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = X(s)(s + 1) \quad (110)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = \frac{s + 1}{s + 4} \quad (111)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = \frac{s + 1}{s + 4} + 2s + 11 \quad (112)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} \quad (113)$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)} \quad (114)$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, μια και η τάξη του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μεγαλύτερη της τάξης του αριθμητή. Οπότε

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3} + \frac{C}{s + 4} \quad (115)$$

με

$$A = Y(s)(s + 2)\Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 3)(s + 4)}\Big|_{s=-2} = \frac{13}{2} \quad (116)$$

$$B = Y(s)(s + 3)\Big|_{s=-3} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 4)}\Big|_{s=-3} = -3 \quad (117)$$

$$C = Y(s)(s + 4)\Big|_{s=-4} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 3)}\Big|_{s=-4} = -\frac{3}{2} \quad (118)$$

Άρα τελικά

$$Y(s) = \frac{13}{2} \frac{1}{s + 2} - 3 \frac{1}{s + 3} - \frac{3}{2} \frac{1}{s + 4} \quad (119)$$

Οπότε πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο, θα είναι

$$y(t) = \frac{13}{2} e^{-2t} \epsilon(t) - 3 e^{-3t} \epsilon(t) - \frac{3}{2} e^{-4t} \epsilon(t) \quad (120)$$

που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 3:

Έστω ότι ένα αιτιατό σύστημα $H(s)$ περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t) \quad (121)$$

1. Υπολογίστε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος όταν

- i. το σύστημα είναι ευσταθές
- ii. το σύστημα είναι αιτιατό

2. Βρείτε την έξοδο, $y(t)$, του ευσταθούς συστήματος, $H(s)$, όταν η είσοδος είναι της μορφής

$$x(t) = e^{-2t} \epsilon(t) \quad (122)$$

Λύση:

1. Θεωρούμε αρχικές συνθήκες ίσες με μηδέν. Άρα θα είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t) \longleftrightarrow \quad (123)$$

$$s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s) \quad (124)$$

$$Y(s)(s^2 - s - 2) = X(s) \quad (125)$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} \quad (126)$$

και

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1}$$

με

$$A = H(s)(s - 2) \Big|_{s=2} = \frac{1}{s + 1} \Big|_{s=2} = \frac{1}{3} \quad (127)$$

$$B = H(s)(s + 1) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s - 2} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3} \quad (128)$$

και άρα:

i. Αν το σύστημα είναι ευσταθές, τότε το πεδίο σύγκλισης θα είναι το

$$R_H = \{-1 < \Re\{s\} < 2\} = \{\Re\{s\} > -1\} \cap \{\Re\{s\} < 2\} \quad (129)$$

Άρα

$$H_{\text{ευσταθές}}(s) = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{s - 2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s + 1} \longleftrightarrow \quad (130)$$

$$h_{\text{ευσταθές}}(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}\epsilon(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}\epsilon(t) \quad (131)$$

ii. Αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε το πεδίο σύγκλισης θα είναι το $\Re\{s\} > 2$. Άρα

$$H_{\text{αιτιατό}}(s) = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{s - 2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s + 1} \longleftrightarrow \quad (132)$$

$$h_{\text{αιτιατό}}(t) = \frac{1}{3}e^{2t}\epsilon(t) - \frac{1}{3}e^{-t}\epsilon(t) \quad (133)$$

2. Η έξοδος θα είναι της μορφής

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s - 2)(s + 1)}X(s) = \frac{1}{(s - 2)(s + 1)} \frac{1}{(s + 2)} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2} \quad (134)$$

με

$$A = Y(s)(s - 2) \Big|_{s=2} = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} \Big|_{s=2} = \frac{1}{12} \quad (135)$$

$$B = Y(s)(s + 1) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s - 2)(s + 2)} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3} \quad (136)$$

$$C = Y(s)(s + 2) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{(s - 2)(s + 1)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{4} \quad (137)$$

και άρα

$$Y(s) = \frac{1}{12} \frac{1}{s - 2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{s + 2} \quad (138)$$

Επειδή το σύστημα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_H = \{-1 < \Re\{s\} < 2\} \quad (139)$$

και η είσοδος

$$R_X = \{\Re\{s\} > -2\} \quad (140)$$

η έξοδος θα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_Y = \{-1 < \Re\{s\} < 2\} = \{\Re\{s\} > -1\} \cap \{\Re\{s\} < 2\} \cap \{\Re\{s\} > -2\} \quad (141)$$

Άρα

$$Y(s) = \frac{1}{12} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} \longleftrightarrow \quad (142)$$

$$y(t) = -\frac{1}{12}e^{2t}\epsilon(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}\epsilon(t) + \frac{1}{4}e^{-2t}\epsilon(t) \quad (143)$$