Κεφάλαιο 4

Ανάλυση Σημάτων και Συστημάτων στο Πεδίο του Συνεχούς Χρόνου

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συζητήσουμε για την αναλυτική μελέτη συστημάτων στο πεδίο του συνεχούς χρόνου.

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο κάποια εισαγωγικά στοιχεία για τα σήματα και τα συστήματα. Στο εξής, θα θεωρούμε ότι ένα σύστημα περιγράφεται στο πεδίο του χρόνου από μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} b_k x(t) \tag{4.1}$$

με a_k, b_k σταθερούς συντελεστές. Σύντομα θα δούμε πώς μπορούμε να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις, υπό ποιές συνθήκες, και τι σημαίνει μια τέτοια εξίσωση σε σχέση με την έννοια του γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος.

4.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Πολλά φυσικά συστήματα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, εξ ου και το ενδιαφέρον μας να μπορούμε να λύνουμε τέτοιες. Η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής (4.1) συνίσταται στην εύρεση της εξόδου $y(t)$ δεδομένης μιας εισόδου $x(t)$. Ας δούμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα της Μηχανικής τα οποία (πρέπει να) σας είναι γνωστά.

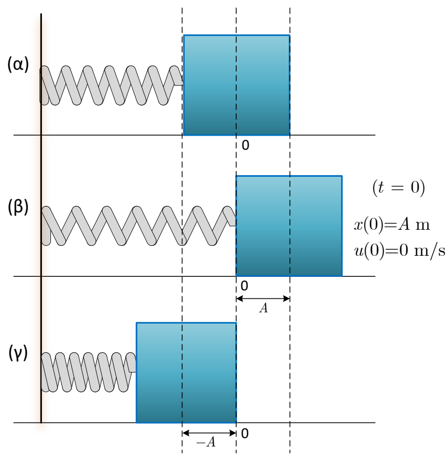
Πολλά πραγματικά, μηχανικά συστήματα περιλαμβάνουν ελατήρια και σώματα. Το πιο σύνηθες (και αρκετά απλό) τέτοιο παράδειγμα είναι ο Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής, που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σώμα μάζας m συνδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς k. Δείτε το Σχήμα 4.1.

Το σύστημα ελατήριο-σώμα βρίσκεται σε ισορροπία στο Σχήμα 4.1(α). Εκτείνουμε το ελατήριο τραβώντας το σώμα προς τα δεξιά, μέχρι τη μέγιστη έκτασή του από τη θέση ισορροπίας. Έστω ότι η έκταση αυτή βρίσκεται A μέτρα από το σημείο ισορροπίας, όπως στο Σχήμα 4.1(β). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το σώμα, το οποίο εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση. Όλη η κίνηση αυτή περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega_0^2 x(t) \Longleftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{4.2}$$

με $x(t)$ τη θέση του σώματος για κάθε χρονική στιγμή t. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση ονομάζεται *ομογενής*. Πιθανότατα γνωρίζετε ότι η εξίσωση θέσης του σώματος (που είναι και η λύση της διαφορικής εξίσωσης) οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t > 0$ δίνεται από τη σχέση

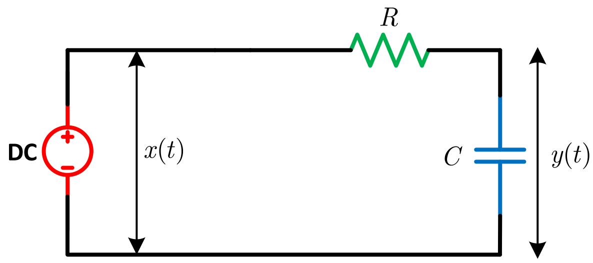
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \ \ t > 0 \tag{4.3}$$



Σχήμα 4.1: *Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής.*

με την τιμή ω_0 να εξαρτάται από το υλικό του ελατηρίου και τη μάζα του σώματος, και ϕ την αρχική φάση του ταλαντωτή, που εν γένει μας είναι άγνωστη και εξαρτάται από τις *αρχικές συνθήκες* του προβλήματος. Παρατηρήστε ότι η διαφορική εξίσωση (4.2) παρουσιάζει μόνο έξοδο $x(t)$, καθώς η είσοδός του είναι μηδενική[1]. Πώς προκύπτει άραγε η Σχέση (4.3) από τη Σχέση (4.2);

Επίσης, η πλειονότητα των ηλεκτρικών συστημάτων που υπάρχουν γύρω μας περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Ένα πολύ απλό παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι το *κύκλωμα πυκνωτή-αντιστάτη*, ή αλλιώς το *κύκλωμα RC*. Δείτε το Σχήμα 4.2. Η αντίσταση του αντιστάτη συμβολίζεται με R ενώ η



Σχήμα 4.2: *Κύκλωμα RC.*

χωρητικότητα του πυκνωτή συμβολίζεται με C. Είσοδος σε αυτό το σύστημα είναι η τάση της πηγής, ενώ η έξοδος είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα αυτό δίνεται ως

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{4.4}$$

Αρχικά η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι μηδενική. Αν εφαρμόσουμε στο κύκλωμα μια ιδανική πηγή σταθερής τάσης τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλ. $x(t) = V_0 u(t)$, τότε μπορεί κανείς να δείξει ότι η τάση στα άκρα του πυκνωτή δίνεται ως

$$y(t) = V_0(1 - e^{-t/RC}),\ \ t > 0 \tag{4.5}$$

Πώς προκύπτει αυτή η σχέση από τη διαφορική εξίσωση;

Το κεφάλαιο αυτό αναλαμβάνει να απαντήσει στα ερωτήματα των παραπάνω παραδειγμάτων.

4.2 Απόκριση Συστήματος

Επιθυμούμε λοιπόν να βρούμε έναν τρόπο για να υπολογίζουμε την έξοδο από τέτοια συστήματα, δεδομένης μιας συγκεκριμένης εισόδου. Έστω ότι εφαρμόζουμε μια είσοδο $x(t)$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η έξοδος του συστήματος $y(t)$ είναι το αποτέλεσμα δυο ανεξάρτητων αιτιών:

1. των *αρχικών συνθηκών* του συστήματος, οι οποίες ονομάζονται *κατάσταση του συστήματος*, τη χρονική στιγμή $t = 0$
2. της εισόδου $x(t)$, για $t > 0$

Η συνολική έξοδος δίνεται ως το άθροισμα των εξόδων που απορρέουν από τα δυο παραπάνω αίτια. Η έξοδος του συστήματος που απορρέει από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος για $t = 0$, θεωρώντας την είσοδο $x(t) = 0$, ονομάζεται **απόκριση μηδενικής εισόδου - zero-input response**. Η έξοδος του συστήματος που απορρέει από την παρουσία της μη μηδενικής εισόδου $x(t)$, θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, ονομάζεται **απόκριση μηδενικής κατάστασης - zero-state response**. Όταν το σύστημα έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες, τότε το σύστημα θεωρείται πως βρίσκεται **σε ηρεμία**. Μπορούμε να εκφράσουμε τη συνολική έξοδο $y(t)$ του συστήματος ως το άθροισμα των παραπάνω δυο αποκρίσεων ως

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \tag{4.6}$$

με $y_{zi}(t)$ και $y_{zs}(t)$ την απόκριση μηδενικής εισόδου και την απόκριση μηδενικής κατάστασης αντίστοιχα. Στην πράξη, οι αρχικές συνθήκες αφορούν την κατάσταση του συστήματος *πριν* την εφαρμογή της εισόδου ή πριν την έναρξη μελέτης του προβλήματος. Αν υποθέσουμε ότι η είσοδος εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε οι

[1] Παρ' όλο που στις διαφορικές εξισώσεις η έξοδος συμβολίζεται με τη συνάρτηση $y(t)$, στο συγκεκριμένο παράδειγμα είθισται η έξοδος να συμβολίζεται με $x(t)$, καθώς συνδέεται νοηματικά με τη μετατόπιση του σώματος στον οριζόντιο άξονα $x'x$.

αρχικές συνθήκες περιγράφουν την κατάσταση του συστήματος για $t = 0^-$. Πολλές φορές στη βιβλιογραφία, οι αρχικές συνθήκες χρησιμοποιούν το συμβολισμό $t = 0^-$ για τη χρονική στιγμή των αρχικών συνθηκών. Στο εξής, θα υιοθετήσουμε αυτήν την πρακτική στο συμβολισμό.

Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς ποιός είναι λόγος ύπαρξης αρχικών συνθηκών σε ένα *πραγματικό* σύστημα. Από μαθηματικής πλευράς, οπωσδήποτε είναι απαραίτητες οι αρχικές συνθήκες για την εύρεση μοναδικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης. Όμως ποιά είναι η φυσική σημασία των αρχικών συνθηκών; Σε τι αντιστοιχούν σε πραγματικά συστήματα; Ας επανέλθουμε στα δυο παραδείγματα της Παραγράφου 4.1.

Για τον Απλό Αρμονικό Ταλαντωτή του Σχήματος 4.1, οι αρχικές συνθήκες αντιστοιχούν στη *θέση* και την *ταχύτητα* του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0^-$, δηλ. τη χρονική στιγμή *ακριβώς πριν* αρχίσουμε να μελετάμε το πρόβλημα της κίνησης του σώματος. Για τις αρχικές συνθήκες που έχουν σημειωθεί στο Σχήμα 4.1(β), και οι οποίες είναι

$$x(t)\Big|_{t=0^-} = A \ , \ u(t)\Big|_{t=0^-} = \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0^-} = 0 \tag{4.7}$$

η λύση της διαφορικής εξίσωσης παίρνει τη μορφή

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) \tag{4.8}$$

δηλ. η φάση ϕ είναι μηδενική. Αν μελετούσαμε το πρόβλημα σε διαφορετική χρονική στιγμή, όπως - για παράδειγμα - όταν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας, τότε οι αρχικές συνθήκες θα ήταν διαφορετικές, και άρα η λύση της διαφορικής εξίσωσης θα ήταν διαφορετική από την παραπάνω.

Για το απλό ηλεκτρικό RC κύκλωμα του Σχήματος 4.2, αρχική συνθήκη είναι η τιμή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή για $t = 0^-$, η οποία είναι μηδενική ($y(0^-) = 0$). Αν όμως αφήσουμε τον πυκνωτή να φορτιστεί για κάποιο διάστημα και αφαιρέσουμε την πηγή, κλείνοντας με καλώδιο το κύκλωμα, ο πυκνωτής θα αποφορτιστεί μέσω του αντιστάτη. Αυτή η διαδικασία περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = 0 \tag{4.9}$$

με $y(t)$ ξανά την τάση στα άκρα του πυκνωτή. Η εξίσωση αυτή απαιτεί ως αρχική συνθήκη την τάση στα άκρα του πυκνωτή ακριβώς πριν την αποφόρτιση ($y(0^-) = Q_0/C$, με Q_0 το φορτίο του πυκνωτή).

Παρατηρήστε ότι οι αρχικές συνθήκες δίνονται με τη μορφή τιμών της εξόδου και των παραγώγων της τη χρονική στιγμή $t = 0^-$.

Ας μελετήσουμε αναλυτικά την έξοδο ενός συστήματος στις επιμέρους συνιστώσες των αρχικών συνθηκών και της εισόδου ξεχωριστά.

4.3 Απόκριση Μηδενικής Εισόδου

Όπως αναφέραμε ήδη, η απόκριση μηδενικής εισόδου ορίζεται ως η έξοδος ενός συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, άρα η έξοδος καθορίζεται αποκλειστικά από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Αν και στα επόμενα κεφάλαια θα μας απασχολήσει λιγότερο η απόκριση μηδενικής εισόδου, καθώς θα θεωρούμε τα συστήματά μας *σε αρχική ηρεμία*, είναι ενδιαφέρον να δει κανείς τη μορφή και τον τρόπο υπολογισμού της απόκρισης μηδενικής εισόδου. Η μηδενική είσοδος μετατρέπει τη Σχέση (4.1) στην ακόλουθη

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y_{zi}(t) = 0 \tag{4.10}$$

Μπορεί κανείς να δείξει αναλυτικά ότι η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = ce^{\lambda t} \tag{4.11}$$

με λ, c σταθερές. Έχοντας αυτό ως δεδομένο, αντικαθιστούμε στη Σχέση (4.10) και έχουμε

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k ce^{\lambda t} = 0 \tag{4.12}$$

$$ce^{\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k\right) = 0 \tag{4.13}$$

Η μη τετριμμένη λύση της παραπάνω σχέσης δίνεται για

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0 \Longleftrightarrow \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4.14}$$

Άρα η $y_{zi}(t) = ce^{\lambda t}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης της Σχέσης (4.10) μόνον αν

$$\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4.15}$$

Η παραπάνω ομογενής εξίσωση ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος, και το αντίστοιχο πολυώνυμο ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του συστήματος. Το τελευταίο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_N) = 0 \tag{4.16}$$

με λ_i, $i = 1, \cdots, N$, τις ρίζες του πολυωνύμου, οι οποίες ονομάζονται **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος. Άρα υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά λ που ικανοποιούν την (4.10):

$$c_1 e^{\lambda_1 t},\ c_2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, c_N e^{\lambda_N t} \tag{4.17}$$

με c_i, $i = 1, \cdots, N$, σταθερές. Ο προσδιορισμός αυτών των σταθερών εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Άρα τελικά μπορεί να δειχθεί ότι

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots c_N e^{\lambda_N t} = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t} \tag{4.18}$$

για $t > 0$. Αν χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας βηματική συνάρτηση, μπορούμε να γράψουμε την απόκριση μηδενικής εισόδου ως

$$y_{zi}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t} u(t) \tag{4.19}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει αν οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι διακριτές μεταξύ τους. Αν υπάρχουν ρίζες πολλαπλότητας $r \geq 2$, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως

$$(\lambda - \lambda_1)^r(\lambda - \lambda_{r+1})\cdots(\lambda - \lambda_N) \tag{4.20}$$

και μπορεί να δειχθεί ότι η απόκριση μηδενικής εξόδου δίνεται από τη σχέση

$$y_{zi}(t) = (c_1 + c_2 t + \cdots + c_r t^{r-1})e^{\lambda_1 t} + c_{r+1}e^{\lambda_{r+1} t} + \cdots + c_N e^{\lambda_N t} \tag{4.21}$$

για $t > 0$, και ξανά με χρήση της βηματικής συνάρτησης, έχουμε

$$y_{zi}(t) = \Big((c_1 + c_2 t + \cdots + c_r t^{r-1})e^{\lambda_1 t} + c_{r+1}e^{\lambda_{r+1} t} + \cdots + c_N e^{\lambda_N t}\Big)u(t) \tag{4.22}$$

Ας δούμε δυο απλά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.1:

Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

(α′) $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\dfrac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t)$ με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 0$ και $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = -2$

(β′) $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\dfrac{d}{dt}y(t) + y(t) = 3\dfrac{d}{dt}x(t) + x(t)$ με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$ και $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = -1$

Λύση:

(α′) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 \tag{4.23}$$

και η ομογενής εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \tag{4.24}$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι οι $\lambda = -2, \lambda = -3$, και άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \tag{4.25}$$

Οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Για να τις χρησιμοποιήσουμε, χρειαζόμαστε την παράγωγο της $y_{zi}(t)$, η οποία είναι

$$\frac{d}{dt} y_{zi}(t) = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t} \tag{4.26}$$

Από τις αρχικές συνθήκες, έχουμε

$$y_{zi}(0^-) = \left(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}\right)\Big|_{t=0^-} = c_1 + c_2 = 0 \tag{4.27}$$

$$\frac{d}{dt} y_{zi}(t)\Big|_{t=0^-} = \left(-2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}\right)\Big|_{t=0^-} = -2c_1 - 3c_2 = -2 \tag{4.28}$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει λύσεις

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 2 \tag{4.29}$$

Άρα τελική η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-3t} \tag{4.30}$$

για $t > 0$, ή πιο συνοπτικά, ως

$$y_{zi}(t) = (-2e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t) \tag{4.31}$$

(β′) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{4.32}$$

και η ομογενής εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0 \tag{4.33}$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι οι $\lambda = -1, \lambda = -1$, δηλ. η ρίζα είναι πολλαπλότητας $r = 2$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t} \tag{4.34}$$

Οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Για να τις χρησιμοποιήσουμε, χρειαζόμαστε την παράγωγο της $y_{zi}(t)$, η οποία είναι

$$\frac{d}{dt} y_{zi}(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} \tag{4.35}$$

Από τις αρχικές συνθήκες, έχουμε

$$y_{zi}(0^-) = \left((c_1 + c_2 t)e^{-t}\right)\Big|_{t=0^-} = c_1 = 2 \tag{4.36}$$

$$\frac{d}{dt} y_{zi}(t)\Big|_{t=0^-} = \left(-c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t}\right)\Big|_{t=0^-} = -c_1 + c_2 = -1 \tag{4.37}$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει τελικά

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 1 \tag{4.38}$$

Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}(t) = (2 + t)e^{-t} u(t) \tag{4.39}$$

Παράδειγμα 4.2:

Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega_0^2 x(t) \tag{4.40}$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0^-) = A \tag{4.41}$$

και

$$\frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0^-} = 0 \tag{4.42}$$

Λύση:
Η διαφορική εξίσωση περιγράφει την κίνηση ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή, και μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{4.43}$$

και η οποία είναι ομογενής. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$\lambda^2 + \omega_0^2 \tag{4.44}$$

και η ομογενής εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = (\lambda + j\omega_0)(\lambda - j\omega_0) = 0 \tag{4.45}$$

Οι χαρακτηριστικές (μιγαδικές) ρίζες του συστήματος είναι οι $\lambda_1 = j\omega_0, \lambda_2 = \lambda_1^* = -j\omega_0$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου ταυτίζεται με τη συνολική λύση του συστήματος και δίνεται ως

$$y_{zi}(t) = x(t) = c_1 e^{j\omega_0 t} + c_2 e^{-j\omega_0 t} \tag{4.46}$$

Οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Για να τις χρησιμοποιήσουμε, χρειαζόμαστε την παράγωγο της $y_{zi}(t)$, η οποία είναι

$$\frac{d}{dt}y_{zi}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = j\omega_0 c_1 e^{-j\omega_0 t} - j\omega_0 c_2 e^{j\omega_0 t} \tag{4.47}$$

Από τις αρχικές συνθήκες, έχουμε

$$x(0^-) = \left(c_1 e^{j\omega_0 t} + c_2 e^{-j\omega_0 t}\right)\Big|_{t=0^-} = c_1 + c_2 = A \tag{4.48}$$

$$\frac{d}{dt}y_{zi}(t)\Big|_{t=0^-} = \left(j\omega_0 c_1 e^{-j\omega_0 t} - j\omega_0 c_2 e^{j\omega_0 t}\right)\Big|_{t=0^-} = c_1 - c_2 = 0 \tag{4.49}$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει τελικά

$$c_1 = c_2 = \frac{A}{2} \tag{4.50}$$

Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου - και λύση της αρχικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης - δίνεται ως

$$x(t) = y_{zi}(t) = \frac{A}{2}e^{-j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{j\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t) \tag{4.51}$$

■

Μπορείτε να ελέγξετε πώς θα άλλαζε το παραπάνω παράδειγμα αν οι αρχικές συνθήκες ήταν διαφορετικές, όπως π.χ.

$$x(0^-) = 0, \quad \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0^-} = u_{max} \tag{4.52}$$

στην Άσκηση 4.13.

Είναι ενδιαφέρον να επισημάνουμε κάποιες λεπτομέρειες σε όσα έχουμε συζητήσει ως τώρα.

Παρατηρήσεις

(α΄) Παρατηρήστε ότι ο υπολογισμός της απόκρισης μηδενικής εισόδου εξαρτάται αποκλειστικά από τις αρχικές συνθήκες. Πουθενά στην ανάλυσή μας δε χρειαστήκαμε την οποιαδήποτε είσοδο καθώς τη θεωρήσαμε μηδενική. Η γνώση της εισόδου δε μας λέει τίποτα για την απόκριση μηδενικής εισόδου, αλλά ούτε και οι αρχικές συνθήκες μας πληροφορούν για τη μορφή της απόκρισης μηδενικής κατάστασης. Οι δυο αποκρίσεις είναι εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(β΄) Ο ρόλος των αρχικών συνθηκών, πέρα από τον υπολογισμό της απόκρισης μηδενικής εισόδου, μας παρέχει μοναδική λύση για το σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση. Γιατί αυτό; Σκεφτείτε την πιο απλή διαφορική εξίσωση που ξέρετε:

$$f'(x) = f(x)$$

Ξέρετε ότι η λύση της είναι

$$f(x) = ce^{x}$$

η οποία δεν είναι μοναδική. Για να την κάνετε τέτοια, θα πρέπει να σας δίνεται κάποια συνθήκη για να βρείτε το c, π.χ.

$$f(0) = 2$$

που οδηγεί σε $c = 2$. Άρα μπορείτε να καταλάβετε ότι μια διαφορική εξίσωση, και γενικότερα η παραγώγιση, είναι μια *μη αντιστρέψιμη* διαδικασία. Χρειαζόμαστε επιπλέον πληροφορία για να την αντιστρέψουμε με μοναδικό τρόπο, η οποία μας δίνεται με τη μορφή αρχικών συνθηκών.

(γ΄) Δείξαμε νωρίτερα ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t} u(t) \tag{4.53}$$

για απλές, διακριτές χαρακτηριστικές ρίζες λ_k, τις οποίες θεωρούμε πραγματικές χάριν απλότητας[α΄]. Παρατηρήστε ότι αν $\lambda_k < 0 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου φθίνει προς το μηδέν, όταν $t \to +\infty$, καταλήγοντας σε κατάσταση ηρεμίας. Άρα αν οι αρχικές συνθήκες είναι κατάλληλες, το σύστημά μας θα καταλήξει σε κατάσταση ηρεμίας μόνο αν $\lambda_k < 0 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$. Αν $\lambda_i > 0$ για ένα τουλάχιστον i, τότε το σύστημα *δεν* επιστρέφει σε κατάσταση ηρεμίας, διότι

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t) \to +\infty \tag{4.54}$$

και άρα το σύστημα δίνει απόκριση μηδενικής εισόδου που απειρίζεται. Σκεφτείτε το: μια και μόνο ‘‘κακή’’ τιμή αρχικών συνθηκών μπορεί να οδηγήσει το σύστημα να παράξει έξοδο η οποία απειρίζεται όταν $t \to +\infty$! Σίγουρα κάτι τέτοιο δε θα ήταν επιθυμητό...

(δ΄) Επιπλέον, παρατηρήστε ότι η επιστροφή (ή μη) του συστήματος σε κατάσταση ηρεμίας δε γίνεται με οποιονδήποτε τρόπο. Οι Σχέσεις (4.19, 4.22) καθιστούν σαφές ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου έχει συγκεκριμένη μορφή η οποία εξαρτάται από τις χαρακτηριστικές ρίζες.

[α΄] Φυσικά οι χαρακτηριστικές ρίζες μπορούν να είναι μιγαδικές, όπως φάνηκε και σε σχετικό Παράδειγμα!

4.4 Η κρουστική απόκριση $h(t)$

Παίρνοντας αφορμή από τις παραπάνω παρατηρήσεις, μπορούμε να ορίσουμε μια πολύ βολική περιγραφή για ένα σύστημα. Θα θέλαμε να γνωρίζουμε την έξοδο ενός συστήματος όταν παρουσιάζουμε ως είσοδο ένα σήμα ‘‘ακαριαίας’’ μορφής, ένα σήμα που υπάρχει σε απειροστά μικρό χρονικό διάστημα[2]. Η είσοδος αυτή θα διεγείρει το σύστημα, και θα το αναγκάσει να παράξει κάποια έξοδο. Η έξοδος αυτή πρέπει να ‘‘μοιάζει’’ με την απόκριση μηδενικής εισόδου, αφού η ύπαρξή της οφείλεται σε μια είσοδο που υπάρχει μόνο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή,

[2] Σκεφτείτε ότι χτυπάτε ένα καμπανάκι (σύστημα) με ένα σφυρί (είσοδος) πολύ γρήγορα, όσο ‘‘ακαριαία’’ γίνεται. Θα μπορούσατε να ισχυριστείτε ότι ο ήχος που θα παραχθεί, δηλ. η έξοδος του συστήματος, χαρακτηρίζει το καμπανάκι (το υλικό του, το πάχος του, την επιφάνειά του, κλπ).

και μετά χάνεται. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η διέγερση αυτή δημιουργεί νέες αρχικές συνθήκες στο σύστημα, και η λύση της ομογενούς εξίσωσης για αυτές τις αρχικές συνθήκες θα μας δώσει μια έξοδο, μια απόκριση σε ένα ''κρουστικό'' σήμα - δε θα ήταν λοιπόν παράλογο να ονομάσουμε αυτήν την έξοδο ως **κρουστική απόκριση**[3]! Με βάση τα παραπάνω, ένα τέτοιο σήμα ''ακαριαίας'' εισόδου μπορεί να μοντελοποιηθεί εξαιρετικά από τη γνωστή μας συνάρτηση Δέλτα! Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που ''υπάρχει'' μόνο για $t = 0$, είναι μηδέν για $t \neq 0$, ενώ το εμβαδό του είναι μοναδιαίο.

Ας ορίσουμε λοιπόν την **κρουστική απόκριση - impulse response** $h(t)$ ενός συστήματος ως την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδο του παρουσιάζεται η συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$, και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες (για $t = 0^-$). Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του τελεστή $T[\cdot]$ για το σύστημα, θα είναι

$$h(t) = T[\delta(t)] \tag{4.55}$$

ή εναλλακτικά

$$\delta(t) \longrightarrow h(t) \tag{4.56}$$

Παρ΄ όλο που υπάρχουν μέθοδοι για την εύρεση της κρουστικής απόκρισης στο πεδίο του χρόνου, θα αναπτύξουμε εδώ μια περισσότερο διαισθητική μέθοδο για την εύρεσή της, και θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια έμμεσους και πιο απλούς τρόπους για τον υπολογισμό της. Η συζήτηση που ακολουθεί δείχνει πώς η παρουσία της συνάρτησης Δέλτα ''γεννά'' νέες αρχικές συνθήκες στο σύστημα, τις οποίες και αναζήτούμε, ώστε το πρόβλημα να αναχθεί στην εύρεση της ομογενούς λύσης της διαφορικής εξίσωσης με αρχικές συνθήκες αυτές που ''γεννιούνται'' από τη συνάρτηση Δέλτα. Οι τελευταίες θεωρούμε ότι υπάρχουν τη χρονική στιγμή $t = 0^+$, εν αντιθέσει με τις αρχικές συνθήκες που έχουμε συναντήσει ως τώρα, και οι οποίες υποθέταμε ότι υπάρχουν πριν την εφαρμογή οποιασδήποτε εισόδου, δηλ. τη χρονική στιγμή $t = 0^-$.

Στη συζήτηση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα σύστημα είναι της γενικής μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{d^k}{dt^k} b_k x(t) \tag{4.57}$$

με $N > M$.

4.4.1 Σύστημα Εξόδου Πρώτης Τάξης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια απλή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με $N = 1$, $M = 0$, και $b_0 = 1$, της μορφής

$$a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = x(t) \tag{4.58}$$

Η κρουστική απόκριση $h(t)$ βρίσκεται θέτοντας $x(t) = \delta(t)$, και θεωρώντας ότι

$$y(0^-) = 0 \tag{4.59}$$

$$\frac{d}{dt} y(0^-) = 0 \tag{4.60}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(0^-) = 0 \tag{4.61}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{(N-1)}}{dt^{N-1}} y(0^-) = 0 \tag{4.62}$$

δηλ. το σύστημα βρίσκεται *σε ηρεμία*, όπως λέγεται χαρακτηριστικά. Τότε, η διαφορική εξίσωση γράφεται ως

$$a_1 \frac{d}{dt} h(t) + a_0 h(t) = \delta(t) \tag{4.63}$$

Θα θέλαμε να δούμε τι συμβαίνει γύρω από το σημείο $t = 0$, αφού όλο το ενδιαφέρον της υπόθεσης εστιάζεται εκεί. Αν ολοκληρώσουμε και τα δυο μέλη σε ένα απειροστά μικρό διάστημα εκατέρωθεν του μηδενός, θα έχουμε

$$a_1 \int_{0^-}^{0^+} \frac{d}{dt} h(t) dt + a_0 \int_{0^-}^{0^+} h(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt \tag{4.64}$$

[3] Σκεφτείτε το: η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ακαριαία διέγερση).

$$a_1(h(0^+) - h(0^-)) + a_0 \int_{0^-}^{0^+} h(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1 \tag{4.65}$$

$$a_1 h(0^+) + a_0 \int_{0^-}^{0^+} h(t)dt = 1 \tag{4.66}$$

Το ολοκλήρωμα της Σχέσης (4.66) είναι μηδέν αν η κρουστική απόκριση δεν παρουσιάζει κάποια συνάρτηση Δέλτα στη θέση $t = 0$. Αν συμβαίνει αυτό, τότε

$$a_1 h(0^+) = 1 \Longleftrightarrow h(0^+) = \frac{1}{a_1} \tag{4.67}$$

Άρα η αρχική συνθήκη που ''γεννά'' η παρουσία της συνάρτησης Δέλτα είναι αυτή της Σχέσης (4.67). Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$h(t) = c_1 e^{\lambda t} u(t) \tag{4.68}$$

με $\lambda = -\frac{a_0}{a_1}$ τη χαρακτηριστική ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $a_1\lambda + a_0 = 0$, οπότε

$$h(t) = c_1 e^{-\frac{a_0}{a_1}t} u(t) \tag{4.69}$$

Η Σχέση (4.69) πρέπει να ικανοποιεί τη Σχέση (4.67), οπότε

$$c_1 = \frac{1}{a_1} \tag{4.70}$$

Άρα τελικά η κρουστική απόκριση δίνεται ως

$$h(t) = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1}t} u(t) \tag{4.71}$$

4.4.2 Σύστημα Εξόδου Δευτέρας Τάξης

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η διαφορική εξίσωση είναι δευτέρας τάξης με $N = 2$, $M = 0$, και $b_0 = 1$, δηλ.

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = x(t) \tag{4.72}$$

και θέτοντας $y(t) = h(t)$ και $x(t) = \delta(t)$, έχουμε

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} h(t) + a_1 \frac{d}{dt} h(t) + a_0 h(t) = \delta(t) \tag{4.73}$$

Ολοκληρώνοντας γύρω από το μηδέν, θα έχουμε

$$a_2 \int_{0^-}^{0^+} \frac{d^2}{dt^2} h(t)dt + a_1 \int_{0^-}^{0^+} \frac{d}{dt} h(t)dt + a_0 \int_{0^-}^{0^+} h(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt \tag{4.74}$$

$$a_2 \Big(\frac{d}{dt} h(0^+) - \frac{d}{dt} h(0^-)\Big) + a_1(h(0^+) - h(0^-)) + a_0 \int_{0^-}^{0^+} h(t)dt = 1 \tag{4.75}$$

$$a_1 h(0^+) + a_2 \frac{d}{dt} h(0^+) = 1 \tag{4.76}$$

κάνοντας τις ίδιες υποθέσεις με την πρωτοβάθμια περίπτωση προηγουμένως. Ας ολοκληρώσουμε ξανά τη Σχέση (4.73), οπότε

$$a_2 \int_{-\infty}^{t} \frac{d^2}{d\tau^2} h(\tau)d\tau + a_1 \int_{-\infty}^{t} \frac{d}{d\tau} h(\tau)d\tau + a_0 \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \tag{4.77}$$

$$a_2 \frac{d}{dt} h(t) + a_1 h(t) + a_0 \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = u(t) \tag{4.78}$$

Ολοκληρώνοντας ξανά γύρω από το μηδέν την παραπάνω έκφραση, έχουμε

$$a_2 \int_{0^-}^{0^+} \frac{d}{dt} h(t)dt + a_1 \int_{0^-}^{0^+} h(t)dt + a_0 \int_{0^-}^{0^+} \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = \int_{0^-}^{0^+} u(t)dt \tag{4.79}$$

$$a_2(h(0^+) - h(0^-)) = 0 \tag{4.80}$$
$$a_2 h(0^+) = 0 \tag{4.81}$$
$$h(0^+) = 0 \tag{4.82}$$

Αντικαθιστώντας τη Σχέση (4.82) στη Σχέση (4.76), έχουμε

$$\frac{d}{dt}h(t)\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{a_2} \tag{4.83}$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$h(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t})u(t) \tag{4.84}$$

με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ οι χαρακτηριστικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$, οπότε οι σταθερές c_1, c_2 υπολογίζονται ως

$$c_1 = \frac{1}{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \tag{4.85}$$
$$c_2 = \frac{1}{a_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \tag{4.86}$$

Άρα τελικά η κρουστική απόκριση δίνεται ως

$$h(t) = \frac{1}{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})u(t) \tag{4.87}$$

4.4.3 Σύστημα Εξόδου N-οστής Τάξης

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, μπορούμε να γενικεύσουμε για διαφορικές εξισώσεις $N-$οστής τάξης εξόδου, της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = x(t) \tag{4.88}$$

και να εξάγουμε ότι οι νέες αρχικές συνθήκες για $t = 0^+$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} h(0^+) &= \frac{d}{dt}h(0^+) = \frac{d^2}{dt^2}h(0^+) = \cdots = \frac{d^{(N-2)}}{dt^{N-2}}h(0^+) = 0 \\ \frac{d^{(N-1)}}{dt^{N-1}}h(0^+) &= \frac{1}{a_N} \end{aligned} \tag{4.89}$$

Έτσι, η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός τέτοιου συστήματος δίνεται από τη λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} h(t) = 0 \tag{4.90}$$

με τις αρχικές συνθήκες της Σχέσης (4.89).

4.4.4 Συστήματα Οποιασδήποτε Τάξης Εισόδου-Εξόδου

Παρ' όλα αυτά, η λύση που βρήκαμε είναι αρκετά περιορισμένη γιατί αφορά συστήματα με τάξη παραγώγου εισόδου $M = 0$ με $b_0 = 1$. Πώς θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε για συστήματα όπου $0 < M < N$ και $b_k \neq 1$, $0 \leq k \leq M$; Η απάντηση είναι τελικά πολύ απλή, αφού το σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση έχει την ιδιότητα της *γραμμικότητας*, οπότε αν η κρουστική απόκριση στο σύστημα

$$\mathbf{S} \;:\; \sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = x(t) \tag{4.91}$$

είναι $h(t)$, τότε η κρουστική απόκριση στο σύστημα

$$\mathbf{S_0} \;:\; \sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = b_0 x(t) \tag{4.92}$$

θα είναι $h_0(t) = b_0 h(t)$. Επίσης, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$\mathbf{S_K} \quad : \quad \sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x_k(t) \tag{4.93}$$

θα είναι

$$h_K(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k h_k(t) \tag{4.94}$$

με $h_k(t)$ τις κρουστικές αποκρίσεις του συστήματος στις εισόδους $x_k(t)$. Στην περίπτωση που

$$x_k(t) = \frac{d^k}{dt^k} x(t) \tag{4.95}$$

τότε μπορεί να δειχθεί ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$\mathbf{S_g} \quad : \quad \sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \tag{4.96}$$

είναι

$$h_g(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} h(t) \tag{4.97}$$

με $h(t)$ να είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = 0 \tag{4.98}$$

με τις αρχικές συνθήκες της Σχέσης (4.89).

Με βάση την παραπάνω συζήτηση, ας διατυπώσουμε μερικές ενδιαφέρουσες και πολύ σημαντικές παρατηρήσεις.

Παρατηρήσεις

(α΄) Υποθέσαμε στη συζήτησή μας ότι οι χαρακτηριστικές ρίζες της διαφορικής εξίσωσης είναι απλές. Στην περίπτωση που δεν είναι, ακολουθούμε τη μέθοδο που περιγράφηκε στην παράγραφο περί εύρεσης της απόκρισης μηδενικής εισόδου. Για παράδειγμα, αν η χαρακτηριστική ρίζα είναι διπλή, η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης για την περίπτωση $N = 1, M = 0$ που είδαμε νωρίτερα θα είναι της μορφής

$$h(t) = \frac{1}{a_2} t e^{\lambda t} u(t) \tag{4.99}$$

(β΄) Μια άλλη υπόθεση που κάναμε παραπάνω είναι η παρακάτω σχέση

$$\int_{0^-}^{0^+} h(t) dt = 0 \tag{4.100}$$

που όπως είπαμε σημαίνει ότι η κρουστική απόκριση δεν παρουσιάζει κάποια ‘‘ακαριαία’’ συμπεριφορά τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλ. δεν υπάρχει κάποια συνάρτηση Δέλτα εκεί. Συναρτήσεις Δέλτα (ή και παράγωγοί της) παρουσιάζονται στην κρουστική απόκριση μόνον αν $M \geq N$, με M και N τις μέγιστες τάξεις παραγώγων της εισόδου και της εξόδου, αντίστοιχα, στη διαφορική εξίσωση. Στην περίπτωση όπου $M = N$, η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_g(t) = b_M \delta(t) + f\{e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}\} \tag{4.101}$$

με b_M το συντελεστή της $M-$οστής παραγώγου της εισόδου, και $f\{e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}\}$ μια συνάρτηση που περιλαμβάνει όρους της ομογενούς λύσης που προκύπτει από την ομογενή διαφορική εξίσωση με τις νέες αρχικές συνθήκες που περιγράφηκε παραπάνω. Θα δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα στη συνέχεια.

(γ′) Η περίπτωση όπου $M > N$ δεν είναι συνήθης στην πράξη, γιατί μπορεί κανείς να δείξει ότι σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα λειτουργεί ως ενισχυτής των υψηλών συχνοτήτων του σήματος, με αποτέλεσμα η έξοδος να περιέχει μεγάλη ποσότητα θορύβου, ακόμα κι αν στην είσοδο ο θόρυβος είναι αμελητέος. Σε αυτήν την περίπτωση, η κρουστική απόκριση παρουσιάζει *παραγώγους* τάξης ως $M-N$ της συνάρτησης Δέλτα τη χρονική στιγμή $t = 0$. Άρα η γενικότερη μορφή της κρουστικής απόκρισης για κάθε δυνατή τιμή των M, N είναι η εξής:

$$h_g(t) = \sum_{k=1}^{M-N} \alpha_k \frac{d^k}{dt^k}\delta(t) + \beta\delta(t) + f\{e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}\} \tag{4.102}$$

με α_k, β σταθερούς συντελεστές και $f\{e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}\}$ ξανά μια συνάρτηση που περιλαμβάνει όρους της ομογενούς λύσης, όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Θα δούμε ένα απλό παράδειγμα τέτοιας μορφής.

(δ′) Εν γένει, υπάρχουν αρκετές διαφορετικές μέθοδοι εύρεσης της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος, τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας, που θα συζητηθεί αργότερα. Για την εύρεση της κρουστικής απόκρισης στη συνέχεια του βιβλίου, θα βασιστούμε περισσότερο στις μεθόδους της συχνότητας, καθώς είναι αρκετά απλούστερες για οσοδήποτε μεγάλη τάξη διαφορικής εξίσωσης. Παρ'ολα αυτά, οι μέθοδοι στο πεδίο του χρόνου προσφέρουν πολύτιμα στοιχεία για την συμπεριφορά των συστημάτων.

Μπορούμε πλέον να συνοψίσουμε την εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός οποιουδήποτε ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις ως ακολούθως:

Εύρεση Κρουστικής Απόκρισης από Διαφορική Εξίσωση

Για μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{d^k}{dt^k} b_k x(t) \tag{4.103}$$

η κρουστική απόκρισή $h_g(t)$ δίνεται από την παρακάτω διαδικασία:

1. Θεωρούμε νέες αρχικές συνθήκες τις

$$\begin{aligned} h(0^+) &= \frac{d}{dt}h(0^+) = \frac{d^2}{dt^2}h(0^+) = \cdots = \frac{d^{(N-2)}}{dt^{N-2}}h(0^+) = 0 \\ \frac{d^{(N-1)}}{dt^{N-1}}h(0^+) &= \frac{1}{a_N} \end{aligned} \tag{4.104}$$

2. Βρίσκουμε τις χαρακτηριστικές ρίζες λ_k μέσω του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$a_N\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4.105}$$

της ομογενούς εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k h(t) = 0 \tag{4.106}$$

3. Αν οι ρίζες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h_g(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{d^k}{dt^k} b_k h(t) \tag{4.107}$$

με $h(t)$ να είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k h(t) = 0 \tag{4.108}$$

η οποία έχει τη μορφή

$$h(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{\lambda_k t} u(t) \tag{4.109}$$

με τους συντελεστές c_k να βρίσκονται μέσω των παραπάνω αρχικών συνθηκών.

4. Αν υπάρχει πολλαπλή ρίζα λ_i τάξης r, τότε η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h_g(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{d^k}{dt^k} b_k h(t) \tag{4.110}$$

με $h(t)$ να είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k h(t) = 0 \tag{4.111}$$

η οποία έχει τη μορφή

$$h(t) = \sum_{k=1, k\neq i}^{N} c_k e^{\lambda_k t} u(t) + \sum_{l=1}^{r} c_l t^{l-1} e^{\lambda_i t} u(t) \tag{4.112}$$

με τους συντελεστές c_k, c_l να βρίσκονται μέσω των παραπάνω αρχικών συνθηκών.

4.4.5 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Έχοντας ολοκληρώσει τη συζήτηση για την απόκριση μηδενικής εισόδου και την κρουστική απόκριση, ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.3:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3\frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = x(t) \tag{4.113}$$

Λύση:
Στην περίπτωση αυτή έχουμε $M < N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους. Θέτουμε ως είσοδο $x(t) = \delta(t)$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2} h(t) + 3\frac{d}{dt} h(t) + 2h(t) = \delta(t) \tag{4.114}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$\frac{d^2}{dt^2} h(t) + 3\frac{d}{dt} h(t) + 2h(t) = 0 \tag{4.115}$$

και οι αρχικές συνθήκες είναι

$$h(0^+) = 0 \tag{4.116}$$

$$\frac{d}{dt} h(0^+) = 1 \tag{4.117}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \tag{4.118}$$

το οποίο γράφεται ως

$$(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0 \tag{4.119}$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -1$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}, \ \ t > 0 \tag{4.120}$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$h(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \tag{4.121}$$

$$\frac{d}{dt}h(0^+) = -2c_1 - c_2 = 1 \tag{4.122}$$

οπότε είναι

$$c_1 = -1 \ , \ \ c_2 = 1 \tag{4.123}$$

και άρα η κρουστική απόκριση είναι ίση με την ομογενή λύση, δηλ.

$$h_g(t) = h(t) = (-e^{-2t} + e^{-t})u(t) \tag{4.124}$$

Παράδειγμα 4.4:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 9y(t) = 2\frac{d}{dt}x(t) + 9x(t) \tag{4.125}$$

Λύση:
Στην περίπτωση αυτή έχουμε ξανά $M < N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους. Θέτουμε ως είσοδο $x(t) = \delta(t)$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 6\frac{d}{dt}h(t) + 9h(t) = 2\frac{d}{dt}\delta(t) + 9\delta(t) \tag{4.126}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 6\frac{d}{dt}h(t) + 9h(t) = 0 \tag{4.127}$$

και οι αρχικές συνθήκες είναι

$$h(0^+) = 0 \tag{4.128}$$

$$\frac{d}{dt}h(0^+) = 1 \tag{4.129}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \tag{4.130}$$

το οποίο γράφεται ως

$$(\lambda + 3)^2 = 0 \tag{4.131}$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -3$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} = (c_1 + c_2 t)e^{-3t}, \ \ t > 0 \tag{4.132}$$

Για να βρούμε τη σταθερά c_1 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$h(0^+) = c_1 = 0 \tag{4.133}$$

$$\frac{d}{dt}h(0^+) = \Big(-3c_1 e^{-3t} + c_2(1-3t)e^{-3t} \Big)\Big|_{t=0^+} = 1 \tag{4.134}$$

οπότε είναι $c_1 = 0, c_2 = 1$ και άρα η ομογενής λύση είναι

$$h(t) = te^{-3t}u(t) \tag{4.135}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι τελικά

$$h_g(t) = 2\frac{d}{dt}h(t) + 9h(t) \tag{4.136}$$
$$= 2\frac{d}{dt}te^{-3t}u(t) + 9te^{-3t}u(t) \tag{4.137}$$
$$= 2\Big(e^{-3t}u(t)\frac{d}{dt}t + t\frac{d}{dt}(e^{-3t}u(t))\Big) + 9te^{-3t}u(t) \tag{4.138}$$
$$= 2\Big(e^{-3t}u(t) + t\Big(-3e^{-3t}u(t) + e^{-3t}\frac{d}{dt}u(t)\Big)\Big) + 9te^{-3t}u(t) \tag{4.139}$$
$$= 2\Big(e^{-3t}u(t) + t(-3e^{-3t}u(t) + e^{-3t}\delta(t))\Big) + 9te^{-3t}u(t) \tag{4.140}$$
$$= 2e^{-3t}u(t) - 6te^{-3t}u(t) + 2te^{-3t}\delta(t) + 9te^{-3t}u(t) \tag{4.141}$$
$$= 2e^{-3t}u(t) + 3te^{-3t}u(t) \tag{4.142}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \tag{4.143}$$

Παράδειγμα 4.5:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{4.144}$$

Λύση:
Στην περίπτωση αυτή έχουμε πάλι $M < N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους. Θέτουμε ως είσοδο $x(t) = \delta(t)$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 2\frac{d}{dt}h(t) + h(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) \tag{4.145}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 2\frac{d}{dt}h(t) + h(t) = 0 \tag{4.146}$$

και οι αρχικές συνθήκες είναι

$$h(0^+) = 0 \tag{4.147}$$
$$\frac{d}{dt}h(0^+) = 1 \tag{4.148}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \tag{4.149}$$

το οποίο γράφεται ως

$$(\lambda + 1)(\lambda + 1) = 0 \tag{4.150}$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} = (c_1 + c_2 t)e^{-t},\ \ t > 0 \tag{4.151}$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$h(0^+) = c_1 = 0 \tag{4.152}$$
$$\frac{d}{dt}h(0^+) = \Big(-c_1e^{-t} + c_2(1-t)e^{-t}\Big)\Big|_{t=0^+} = 1 \tag{4.153}$$

οπότε είναι $c_1 = 0, c_2 = 1$ και άρα η ομογενής λύση είναι

$$h(t) = te^{-t},\ \ t > 0 \tag{4.154}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$
\begin{aligned}
h_g(t) &= \frac{d}{dt}h(t) = \frac{d}{dt}te^{-t}u(t) && (4.155)\\
&= e^{-t}u(t)\frac{d}{dt}t + t\frac{d}{dt}(e^{-t}u(t)) && (4.156)\\
&= e^{-t}u(t) + t(-e^{-t}u(t) + e^{-t}\delta(t)) && (4.157)\\
&= e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t) + te^{-t}\delta(t)) && (4.158)\\
&= e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t) && (4.159)\\
&= (1-t)e^{-t}u(t) && (4.160)
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \tag{4.161}$$

Παράδειγμα 4.6:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) + x(t) \tag{4.162}$$

Λύση:

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $M = N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους και από μια συνάρτηση Δέλτα. Θέτουμε ως είσοδο $x(t) = \delta(t)$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 5\frac{d}{dt}h(t) + 6h(t) = \frac{d^2}{dt^2}\delta(t) + 2\frac{d}{dt}\delta(t) + \delta(t) \tag{4.163}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 5\frac{d}{dt}h(t) + 6h(t) = 0 \tag{4.164}$$

και οι αρχικές συνθήκες είναι

$$h(0^+) = 0 \tag{4.165}$$

$$\frac{d}{dt}h(0^+) = 1 \tag{4.166}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \tag{4.167}$$

το οποίο γράφεται ως

$$(\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \tag{4.168}$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -3$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t},\ \ t > 0 \tag{4.169}$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$h(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \tag{4.170}$$

$$\frac{d}{dt}h(0^+) = \Big(-2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}\Big)\Big|_{t=0^+} = 1 \tag{4.171}$$

οπότε είναι $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ και άρα η ομογενής λύση είναι

$$h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t) \tag{4.172}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$h_g(t) = \frac{d^2}{dt^2}h(t) + 2\frac{d}{dt}h(t) + h(t) \tag{4.173}$$
$$= \frac{d^2}{dt^2}(e^{-2t} - e^{-3t})u(t) + 2\frac{d}{dt}(e^{-2t} - e^{-3t})u(t) + e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t) \tag{4.174}$$
$$= \delta(t) + (e^{-2t} - 4e^{-3t})u(t) \tag{4.175}$$

μετά από πράξεις και απλοποιήσεις.

Παράδειγμα 4.7:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 7\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = \frac{d^3}{dt^3}x(t) + 2\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) + x(t) \tag{4.176}$$

Λύση:
Στην περίπτωση αυτή έχουμε $M > N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται από εκθετικούς όρους, μια συνάρτηση Δέλτα, και μια παράγωγό της. Θέτουμε ως είσοδο $x(t) = \delta(t)$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 7\frac{d}{dt}h(t) + 10h(t) = \frac{d^3}{dt^3}\delta(t) + 2\frac{d^2}{dt^2}\delta(t) + 2\frac{d}{dt}\delta(t) + \delta(t) \tag{4.177}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 7\frac{d}{dt}h(t) + 10h(t) = 0 \tag{4.178}$$

και οι αρχικές συνθήκες είναι

$$h(0^+) = 0 \tag{4.179}$$
$$\frac{d}{dt}h(0^+) = 1 \tag{4.180}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \tag{4.181}$$

το οποίο γράφεται ως

$$(\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0 \tag{4.182}$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -5$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-5t}, \ \ t > 0 \tag{4.183}$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$h(0^+) = c_1 + c_2 = 0 \tag{4.184}$$
$$\frac{d}{dt}h(0^+) = \Big(-2c_1 e^{-2t} - 5c_2 e^{5t} \Big)\Big|_{t=0^+} = 1 \tag{4.185}$$

οπότε είναι $c_1 = 1/3$, $c_2 = -1/3$ και άρα η ομογενής λύση είναι

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-5t}u(t) \tag{4.186}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$h_g(t) = \frac{d^3}{dt^3}h(t) + 2\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 2\frac{d}{dt}h(t) + h(t) \tag{4.187}$$

Οι επιμέρους όροι είναι

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-5t}u(t) \tag{4.188}$$

$$2\frac{d}{dt}h(t) = -\frac{4}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{10}{3}e^{-5t}u(t) \tag{4.189}$$

$$2\frac{d^2}{dt^2}h(t) = \frac{8}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{50}{3}e^{-5t}u(t) + 2\delta(t) \tag{4.190}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}h(t) = -\frac{8}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{125}{3}e^{-5t}u(t) - 7\delta(t) + \frac{d}{dt}\delta(t) \tag{4.191}$$

οπότε, μετά από πράξεις και απλοποιήσεις, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h_g(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) - 5\delta(t) + 28e^{-5t}u(t) - e^{-2t}u(t) \tag{4.192}$$

4.4.6 ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις

Στη συζήτησή μας σε προηγούμενο κεφάλαιο, είχαμε επισημάνει ότι μας ενδιαφέρουν πολύ τα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Ένα ερώτημα που πρέπει να ξεκαθαριστεί είναι το εξής: *Πότε ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο;*

Χρησιμοποιοώντας την έννοια της γραμμικότητας, μπορούμε να κάνουμε την παρακάτω ανάλυση:
Για κάποια είσοδο $x_1(t)$, το σύστημα θα δίνει έξοδο

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = y_{zi}(t) + y_{1_{zs}}(t) \tag{4.193}$$

και για είσοδο $x_2(t)$ θα είναι

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = y_{zi}(t) + y_{2_{zs}}(t) \tag{4.194}$$

αφού η απόκριση μηδενικής εισόδου δεν εξαρτάται από την είσοδο! Τέλος, για μια γραμμική είσοδο $ax_1(t)+bx_2(t)$, η έξοδος θα είναι

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow y_{zi}(t) + y_{3_{zs}}(t) \tag{4.195}$$

με $y_{3_{zs}}(t)$ την απόκριση μηδενικής κατάστασης όταν η είσοδος είναι η $ax_1(t) + bx_2(t)$, η οποία εξαρτάται από την είσοδο και είναι γραμμική, όπως έχουμε δείξει στην Παράγραφο 3.4.1.1. Άρα για να είναι γραμμικό ένα σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση, πρέπει η απόκριση μηδενικής εισόδου να είναι μηδενική, ή με άλλα λόγια, **οι αρχικές συνθήκες του συστήματος να είναι μηδενικές**.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση 4.37) ότι αν η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδενική, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. Δεν είναι δύσκολο να το επιβεβαιώσουμε διαισθητικά: η χρονική αμεταβλητότητα σημαίνει ότι αν το σήμα εισόδου καθυστερήσει κατά t_0, η έξοδος θα είναι ένα σήμα όμοιο σε μορφή με το σήμα εξόδου για είσοδο $x(t)$, αλλά καθυστερημένο κατά τον ίδιο χρόνο t_0. Όμως η απόκριση μηδενικής εισόδου δεν εξαρτάται από την είσοδο, και άρα έχει την ίδια μορφή ανεξαρτήτως καθυστέρησης της εισόδου.

Τέλος, η ίδια η κρουστική απόκριση ορίζεται όπως έχουμε συζητήσει μόνο για γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Για παράδειγμα, ένα μη γραμμικό σύστημα δε θα ικανοποιούσε την ιδιότητα της ομογένειας, οπότε η κρουστική απόκριση δε θα ήταν μοναδική, ενώ η χρονική μεταβλητότητα θα μας έδινε μια διδιάστατη κρουστική απόκριση, αφού για κάθε καθυστέρηση εισόδου $\delta(t-t_0)$, θα είχαμε διαφορετική κρουστική απόκριση $h_{t_0}(t) = h(t_0, t)$. Στη συζήτησή μας για την κρουστική απόκριση εμμέσως υποθέσαμε ότι το σύστημά μας είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι συνήθως στη βιβλιογραφία ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται ως ΓΧΑ ακόμα κι αν *έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες*, μη λαμβάνοντας υπόψη την περιγραφή που δώσαμε παραπάνω. Με άλλα λόγια, θεωρείται πως αν το ζεύγος εισόδου-απόκρισης μηδενικής κατάστασης ικανοποιεί τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας (που τις ικανοποιεί, το δείξαμε στην Παράγραφο 3.4.1), τότε το σύστημα αναφέρεται ως ΓΧΑ. Χωρίς αυτή η διαφορά να είναι ιδιαίτερα σημαντική, στο σύγγραμμα αυτό δε θα υιοθετήσουμε αυτήν την προσέγγιση στην ονομασία.

Άρα μπορούμε να συνοψίσουμε ότι

Διαφορικές Εξισώσεις και ΓΧΑ Συστήματα

Ένα σύστημα που περιγράφεται με διαφορικές εξισώσεις είναι Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο αν οι αρχικές συνθήκες του είναι μηδενικές, δηλ.

$$y(0^-) = 0 \tag{4.196}$$

$$\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0 \tag{4.197}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0 \tag{4.198}$$

$$\vdots \tag{4.199}$$

$$\frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0 \tag{4.200}$$

4.5 Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

Ας εστιάσουμε τώρα την προσοχή μας στην εύρεση της εξόδου ενός συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μηδενικών αρχικών συνθηκών, δηλ. στην εύρεση της *απόκρισης μηδενικής κατάστασης* $y_{zs}(t)$. Αφού οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, το όλο σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο.

Σκεφτείτε πόσες διαφορετικές πιθανές είσοδοι μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα σύστημα. Θα επιθυμούσαμε να έχουμε έναν ενιαίο τρόπο εύρεσης της απόκρισης μηδενικής κατάστασης, για κάθε πιθανή είσοδο. Κάτι τέτοιο θα απλοποιούσε πολύ τα πράγματα.

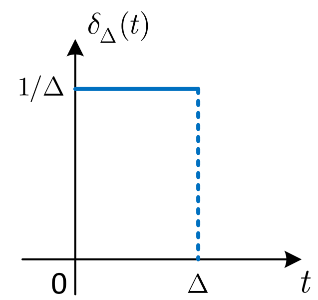
Είδαμε μόλις ότι η έξοδος ενός συστήματος σε μια *ακαριαία* είσοδο που ορίζεται μονάχα για μια χρονική στιγμή, όπως η $\delta(t)$, ονομάζεται *κρουστική απόκριση* $h(t)$. Επειδή τα συστήματα που συζητάμε είναι γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα, αν μπορούσαμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα εισόδου ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα, τότε η έξοδος θα μπορούσε να υπολογιστεί πολύ εύκολα, ως άθροισμα κρουστικών αποκρίσεων. Πώς όμως μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα;

4.5.1 Αναπαράσταση Σημάτων με Συναρτήσεις Δέλτα

Για να βρούμε μια τέτοια αναπαράσταση, θα ήταν βολικότερο να ξεκινήσουμε με μια προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα, την οποία θα ονομάσουμε $\delta_\Delta(t)$ και την οποία θα ορίσουμε ως

$$\delta_{\Delta(t)} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.201}$$

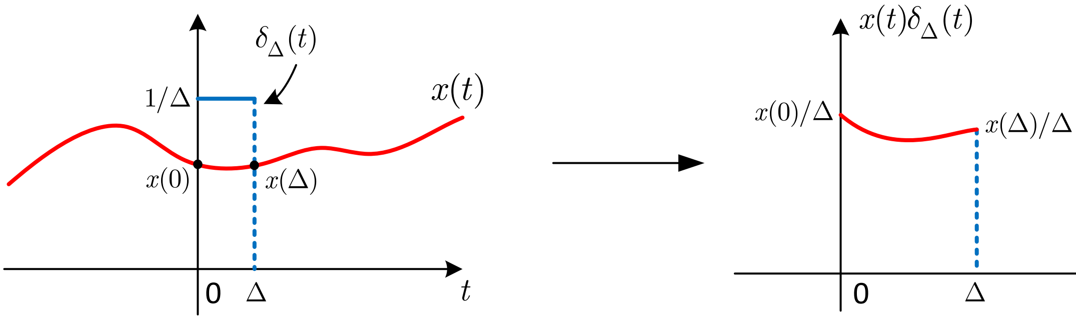
η οποία παρατίθεται σχηματικά στο Σχήμα 4.3. Πρέπει να σας είναι προφανές ότι όταν $\Delta \to 0$, η συνάρτηση $\delta_\Delta(t)$



Σχήμα 4.3: *Συνάρτηση* $\delta_\Delta(t)$.

τείνει στη συνάρτηση $\delta(t)$.

Η ιδέα πίσω από τη χρήση αυτής της συνάρτησης θα σας γίνει εμφανής αν για ένα τυχαίο σήμα $x(t)$ αναπαραστήσετε γραφικά το γινόμενο $x(t)\delta_\Delta(t)$. Δείτε το Σχήμα 4.4 Αν θεωρήσουμε ότι το Δ είναι πολύ μικρό ώστε το



Σχήμα 4.4: *Σήμα* $x(t)\delta_\Delta(t)$.

τμήμα του $x(t)$ που αποκόπτεται από το γινόμενο $x(t)\delta_{\Delta(t)}$ να είναι σχεδόν σταθερό και ίσο με $x(0)$, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Delta x(t)\delta_\Delta(t) \approx \Delta x(0)\delta_\Delta(t) \tag{4.202}$$

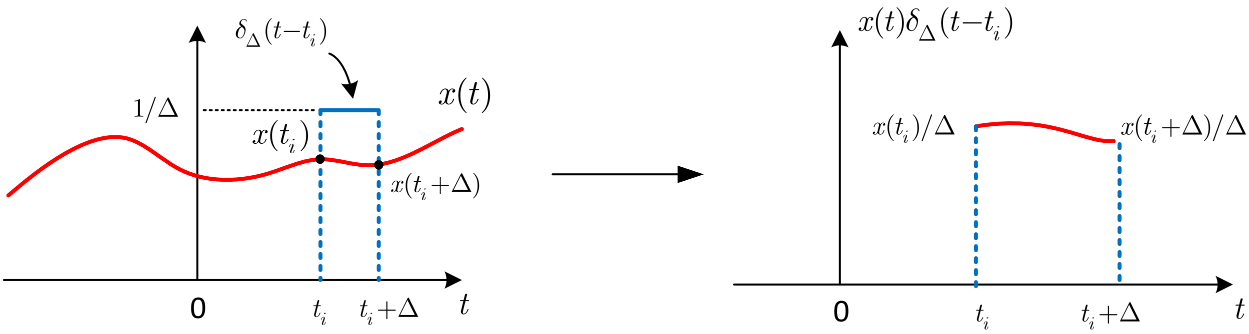
Αν $\Delta \to 0$, τότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται σε ισότητα ως

$$\lim_{\Delta\to 0} \Delta x(t)\delta_\Delta(t) = x(0)\delta(t) \tag{4.203}$$

Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, ας σχηματίσουμε το γινόμενο

$$x(t)\delta_\Delta(t-t_i) \tag{4.204}$$

με $t = t_i$ ένα τυχαίο σημείο του χρόνου. Το αποτέλεσμα απεικονίζεται στο Σχήμα 4.5. Ξανά, αν θεωρήσουμε ότι



Σχήμα 4.5: *Σήμα* $x(t)\delta_\Delta(t-t_i)$.

το Δ είναι αρκετά μικρό ώστε το τμήμα του $x(t)$ που αποκόπτεται να είναι σχεδόν σταθερό, τότε

$$\Delta x(t)\delta_\Delta(t-t_i) \approx \Delta x(t_i)\delta_\Delta(t-t_i) \tag{4.205}$$

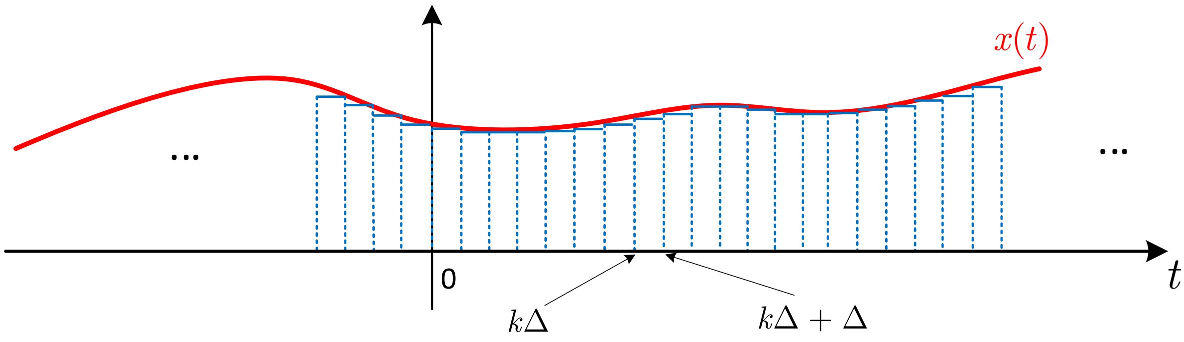
Αν $\Delta \to 0$, τότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται σε ισότητα ως

$$\lim_{\Delta\to 0} \Delta x(t)\delta_\Delta(t-t_i) = x(t_i)\delta(t-t_i) \tag{4.206}$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία, αποκόπτοντας μη επικαλυπτόμενα αλλά συνεχόμενα τμήματα του $x(t)$ κάθε φορά με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμά τους να μας δίνει το συνολικό $x(t)$. Όταν $\Delta \to 0$, τότε το άθροισμα αυτών των τμημάτων θα μας δίνει μια ''απειροστά καλή'' προσέγγιση του αρχικού τμήματος.

Έστω ότι οι χρονικές στιγμές t_i είναι τώρα $k\Delta$, ώστε να έχουμε συνεχή και μη επικαλυπτόμενα τμήματα του $x(t)$. Δείτε το Σχήμα 4.6. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γραφεί ως

$$\hat{x}_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta) \tag{4.207}$$



Σχήμα 4.6: *Προσέγγιση σήματος* $x(t)$ *από σήματα* $\Delta x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)$.

με $\hat{x}_\Delta(t)$ μια προσέγγιση του αρχικού σήματος $x(t)$ η οποία εξαρτάται από την τιμή του Δ. Όταν $\Delta \to 0$, έχουμε

$$\lim_{\Delta\to 0} \hat{x}_\Delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta) = x(t) \tag{4.208}$$

Ας παρατηρήσουμε τι συμβαίνει όταν η διάρκεια Δ γίνεται απειροστά μικρή, δηλ.

$$\Delta \longrightarrow d\tau \tag{4.209}$$

Τότε η τμηματοποίηση του άξονα του χρόνου δεν είναι διακριτή αλλά γίνεται συνεχής, έτσι ώστε

$$\lim_{\Delta\to 0} k\Delta = kd\tau = \tau \tag{4.210}$$

όπου τ είναι μια συνεχής μεταβλητή του χρόνου. Έτσι, το γινόμενο

$$x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta) \longrightarrow x(\tau)\delta(t-\tau) \tag{4.211}$$

Πλέον το άθροισμα για διακριτά, ακέραια k μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα επάνω σε κάθε τιμή της συνεχούς μεταβλητής τ. Οπότε τελικά

$$\lim_{\Delta\to 0} \hat{x}_\Delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{4.212}$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{4.213}$$

περιγράφει ένα σήμα συνεχούς χρόνου ως άπειρο, συνεχές άθροισμα μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα $\delta(t-\tau)$ με βάρη $x(\tau)$. Θα μπορούσε κανείς λοιπόν να περιγράψει αυτό το ολοκλήρωμα ως μια πράξη μεταξύ των σημάτων $\delta(t)$ και $x(t)$. Η πράξη αυτή ονομάζεται **συνέλιξη - convolution** και συμβολίζεται με $*$, δηλ.

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{4.214}$$

Η πράξη της συνέλιξης ορίζεται γενικότερα μεταξύ δυο οποιονδήποτε σημάτων $x(t), y(t)$ ως

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{4.215}$$

4.5.2 Αναπαράσταση Απόκρισης Μηδενικής Κατάστασης με Κρουστικές Αποκρίσεις

Έχοντας λοιπόν την αναπαράσταση ενός σήματος ως τη συνέλιξή του με τη συνάρτηση Δέλτα, ας δούμε πώς μπορούμε να την εκμεταλλευτούμε για να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης.

Αφού το σύστημά μας είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (θυμηθείτε, οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές!), θα έχουμε τα ακόλουθα ζεύγη εισόδου-εξόδου:

$$\text{(α) κρουστική απόκριση: } \delta(t) \longrightarrow h(t) \tag{4.216}$$

$$\text{(β) χρον. αμεταβλητότητα: } \delta(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau) \tag{4.217}$$

$$\text{(γ) γραμμικότητα/ομογένεια: } x(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow x(\tau)h(t-\tau) \tag{4.218}$$

$$\text{(δ) γραμμικότητα/αθροιστικότητα: } \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau) \tag{4.219}$$

$$\text{(ε) είσοδος: } x(t) = x(t) * \delta(t) \longrightarrow \text{απόκριση μηδεν. κατάστασης: } y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \tag{4.220}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι: εφαρμόζοντας τις απλές ιδιότητες των συστημάτων που γνωρίζουμε επάνω στην αναπαράσταση ενός σήματος εισόδου ως συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα, η απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}(t)$ αναπαρίσταται ως η *συνέλιξη της εισόδου* $x(t)$ *με την κρουστική απόκριση του συστήματος* $h(t)$! Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \tag{4.221}$$

Μια σχηματική αναπαράσταση της παραπάνω διαδικασίας φαίνεται στο Σχήμα 4.7.

Η γνώση της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος μπορεί να μας δώσει την απόκριση μηδενικής κατάστασης για οποιαδήποτε είσοδο!

4.6 Συνέλιξη

Η πράξη της συνέλιξης είναι θεμελιώδους σημασίας, λόγω του ότι εμφανίζεται συχνά στις φυσικές επιστήμες, στη μηχανική, και στα μαθηματικά, οπότε της αξίζει ξεχωριστή και εκτενής αναφορά. Αμέσως παρακάτω, θα την εξετάσουμε ως γενικότερη πράξη, χωρίς να τη συνδέουμε απαραίτητα με την είσοδο και την έξοδο ενός συστήματος.

Προτού μελετήσουμε αναλυτικά το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, ας δούμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες με βάση τον ορισμό της.

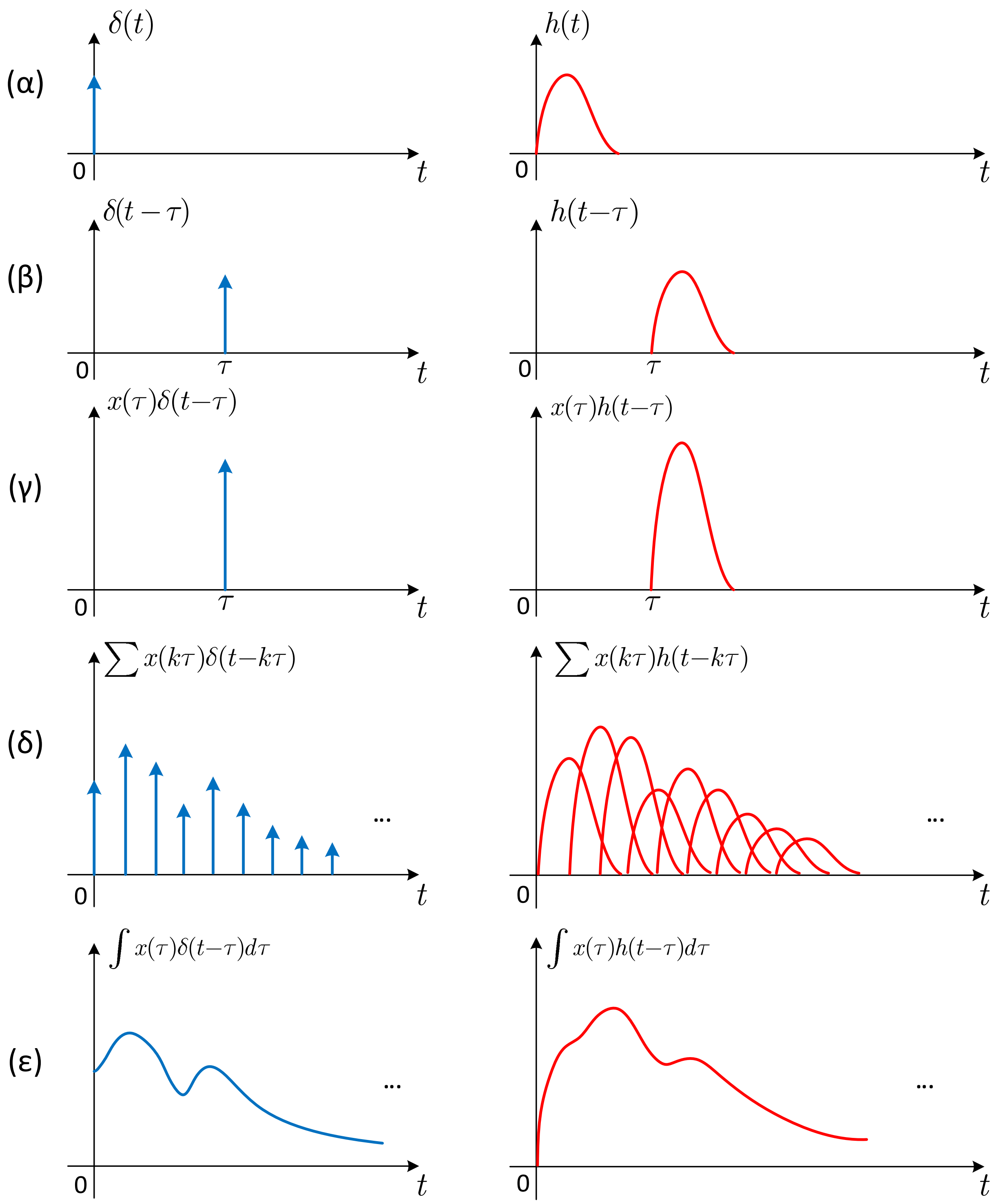
4.6.1 Ιδιότητες Συνέλιξης

Η πράξη της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από ιδιότητες, όπως αυτές στον Πίνακα 4.1.

Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)),\ \ a \in \mathbb{R}$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

Πίνακας 4.1: *Ιδιότητες συνέλιξης*

Ακολουθούν οι αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων, με αποκλειστική χρήση του ορισμού.



Σχήμα 4.7: *Σχηματική παραγωγή της πράξης της συνέλιξης που αναφέρονται στις Σχέσεις (4.216-4.220).*

4.6.1.1 Ομογένεια

Έχουμε

$$(ax(t)) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ax(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)ay(t-\tau)d\tau = x(t) * (ay(t)) \tag{4.222}$$

και

$$x(t) * (ay(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)ay(t-\tau)d\tau = a\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = a(x(t) * y(t)) \tag{4.223}$$

4.6.1.2 Αντιμεταθετικότητα

Θέτοντας $u = t - \tau$ στον ορισμό της συνέλιξης, έχουμε

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)y(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)y(u)du = y(t) * x(t) \tag{4.224}$$

4.6.1.3 Προσεταιριστικότητα

Είναι

$$(x(t) * y(t)) * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(\tau) * y(\tau))z(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(\tau-u)du \Big) z(t-\tau)d\tau \tag{4.225}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau-u)z(t-\tau)d\tau \Big) du \tag{4.226}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} y(m)z(t-m-u)dm \Big) du \tag{4.227}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)(y(t-u) * z(t-u))du \tag{4.228}$$

$$= x(t) * (y(t) * z(t)) \tag{4.229}$$

όπου στη Σχέση (4.227) θέσαμε $m = \tau - u$.

4.6.1.4 Επιμεριστικότητα

Είναι

$$x(t) * (y(t) + z(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)(y(t-\tau) + z(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(\tau)y(t-\tau) + x(\tau)z(t-\tau) \big) d\tau \tag{4.230}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau) \big) d\tau \tag{4.231}$$

$$= x(t) * y(t) + x(t) * z(t) \tag{4.232}$$

4.6.1.5 Γραμμικότητα

Είναι

$$z(t) = x(t) * y(t) = (ax_1(t) + bx_2(t)) * y(t) \tag{4.233}$$

$$= ax_1(t) * y(t) + bx_2(t) * y(t) \tag{4.234}$$

$$= a(x_1(t) * y(t)) + b(x_2(t) * y(t)) \tag{4.235}$$

$$= az_1(t) + bz_2(t) \tag{4.236}$$

με

$$z_1(t) = x_1(t) * y(t) \tag{4.237}$$

$$z_2(t) = x_2(t) * y(t) \tag{4.238}$$

λόγω των ιδιοτήτων της ομογένειας και της επιμεριστικότητας.

4.6.1.6 Εύρος

Η απόδειξη της ιδιότητας του εύρους φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 4.8. Στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης, το σήμα $y(t)$ χρησιμοποιείται ως $y(t-\tau)$, με μεταβλητή το τ. Άρα υπόκειται σε πράξεις αντιστροφής χρόνου και μετατόπισης. Ως εκ τούτου, το σήμα θα είναι μη μηδενικό στο $[t - t_4, t - t_3]$. Στη διαδικασία της συνέλιξης, το γινόμενο $x(\tau)y(t-\tau)$ είναι μη μηδενικό για $t - t_3 \geq t_1$ και $t - t_4 \leq t_2$, δηλ. στο διάστημα $[t_1 + t_3, t_2 + t_4]$.

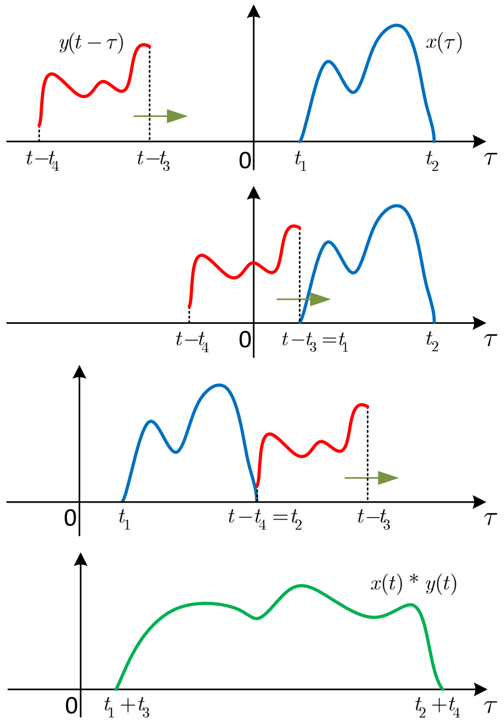
4.6.1.7 Ουδέτερο στοιχείο

Είναι

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(\tau)\Big|_{\tau=t} = x(t) \quad (4.239)$$

από ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα.

■



Σχήμα 4.8: *Γραφική απόδειξη της ιδιότητας του εύρους.*

Η συνέλιξη φημίζεται ως μια πράξη αρκετά περίπλοκη και δύσκολη, και σε πρώτη επαφή αποθαρρύνει τον αναγνώστη. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη της ολοκλήρωσης εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί *χρονική αντιστροφή και μετατόπιση.*

4.6.2 Η συνέλιξη αναλυτικά

Ας αναλύσουμε διεξοδικά τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (4.240)$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το τ και *όχι* το t. Το t το θεωρούμε σταθερό μέσα στο ολοκλήρωμα. Έπειτα, το ολοκλήρωμα αυτό εμπλέκει δυο σήματα: το $x(\tau)$ και το $y(t-\tau)$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα $x(t)$, δεν έχει υποστεί κάποια μεταβολή - η αλλαγή ονόματος στη μεταβλητή δεν αλλάζει κάτι. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη πράξεων στην ανεξάρτητη μεταβλητή: *χρονική αντιστροφή και μετατόπιση.* Μια ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

$$y(t) \to y(\tau) \to y(-\tau) \to y(-\tau+t) = y(t-\tau) \quad (4.241)$$

Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση κατά* t. Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x(\tau)$ και ολοκληρώνεται ως προς τ. Το αποτέλεσμα της συνέλιξης μπορεί να βρεθεί με δυο τρόπους: *αλγεβρικά* και *γραφικά*. Συνήθως προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 4.9.

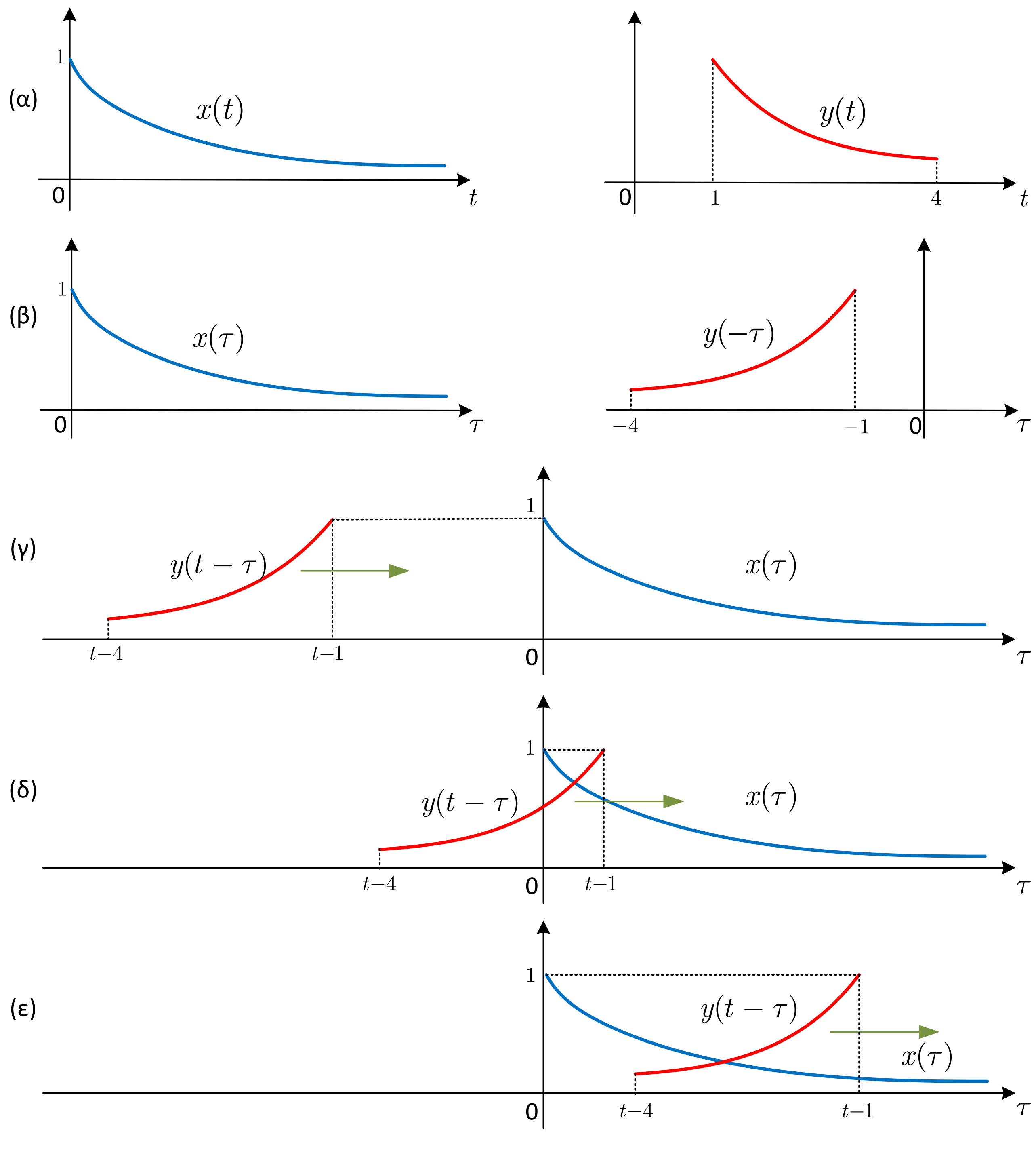
- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x(t)$ και το $y(t)$ στην περίπτωση (α) του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y(t)$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα αντιστρέψουμε χρονικά σύμφωνα με τον ορισμό.
- Στην περίπτωση (β), έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του τ και όχι του t, όπως ακριβώς επιτάσσει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, και το $y(\tau)$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά t. Θυμίζουμε ότι χειριζόμαστε το t ως σταθερά στο ολοκλήρωμα. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y(\tau)$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.
- Στην περίπτωση (γ), παίρνουμε το $y(t-\tau)$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το ''ολισθαίνουμε'' πάνω στον ίδιο άξονα με το $x(\tau)$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (περίπτωση (δ)), βλέπετε ότι το $y(\tau)$ ''συναντά'' κάποια στιγμή το $x(\tau)$. Όταν συμβεί αυτό, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα έχουμε μια μη μηδενική τιμή για το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Αυτές οι χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξί ''άκρο'' του $y(t-\tau)$ συναντά το αριστερό ''άκρο'' του $x(\tau)$ και πέρα, *και* όταν το αριστερό ''άκρο'' του $y(t-\tau)$ *δεν* έχει περάσει το $t=0$, δηλ. όταν

  $$t-1>0 \Rightarrow t>1 \text{ και } t-4<0 \Rightarrow t<4 \quad (4.242)$$

  οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $t-1$, εκεί δηλαδή που το γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων είναι μη μηδενικό, ως

  $$c_{xy}(t) = \int_{0}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (4.243)$$

  όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικες μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.



Σχήμα 4.9: *Γραφική απεικόνιση της συνέλιξης.*

- Στην περίπτωση (ε), το $y(t-\tau)$ έχει ολική επικάλυψη με το $x(\tau)$, πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη είναι μη μηδενική όταν το αριστερό "άκρο" της $y(t-\tau)$ περάσει το $t=0$, δηλ. όταν

$$t-4>0 \Rightarrow t>4 \tag{4.244}$$

και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

$$c_{xy}(t)=\int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{4.245}$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικες μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο t εκτός από τα παραπάνω, το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι μηδέν, δηλ.

$$c_{xy}(t) = 0, \;\; t < 1 \tag{4.246}$$

Τώρα που η διαδικασία είναι περισσότερο ξεκάθαρη, ας θεωρήσουμε ότι τα παραπάνω σήματα είναι τα

$$x(t) = e^{-at}u(t) \tag{4.247}$$

$$y(t) = e^{-bt}, \quad t \in (1, 4) \tag{4.248}$$

Οπότε θα έχουμε

- Όταν $t - 1 < 0 \Longleftrightarrow t < 1$, τότε $c_{xy}(t) = 0$.
- Όταν $t - 1 > 0$ και $t - 4 < 0$, δηλ. οταν $0 < t < 4$, τότε

$$c_{xy}(t) = \int_0^{t-1} e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}d\tau = e^{-bt}\int_0^{t-1} e^{(b-a)\tau}d\tau \tag{4.249}$$

$$= e^{-bt}\frac{1}{b-a}e^{(b-a)\tau}\Big|_0^{t-1} = e^{-bt}\frac{1}{b-a}(e^{(b-a)(t-1)} - 1) \tag{4.250}$$

$$= \frac{1}{b-a}\Big(e^{(b-a)(t-1)-bt} - e^{-bt}\Big) \tag{4.251}$$

- Τέλος, όταν $t - 4 > 0$, δηλ. $t > 4$, τότε

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^{t-1} e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}d\tau = e^{-bt}\frac{1}{b-a}e^{(b-a)\tau}\Big|_{t-4}^{t-1} \tag{4.252}$$

$$= e^{-bt}\frac{1}{b-a}(e^{(b-a)(t-4)} - e^{(b-a)(t-1)}) = \frac{1}{b-a}\Big(e^{(b-a)(t-4)-bt} - e^{(b-a)(t-1)-bt}\Big) \tag{4.253}$$

Συνολικά λοιπόν

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{1}{b-a}\Big(e^{(b-a)(t-1)-bt} - e^{-bt}\Big), & 0 < t < 4 \\ \frac{1}{b-a}\Big(e^{(b-a)(t-4)-bt} - e^{(b-a)(t-1)-bt}\Big), & t > 4 \end{cases} \tag{4.254}$$

Μπορούμε λοιπόν να συνοψίσουμε την παραπάνω γραφική λύση της συνέλιξης ως ακολούθως:

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων $x(t)$ και $y(t)$

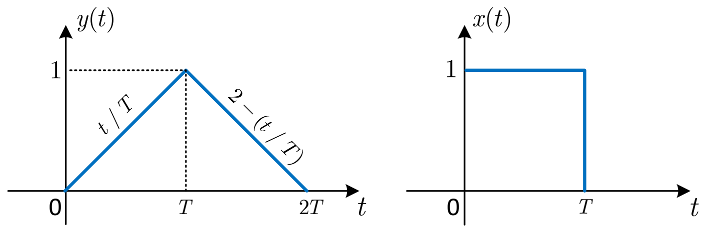
1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x(t)$, το οποίο και μετατρέπουμε σε $x(\tau)$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x(t - \tau)$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς τ, και ''σύρουμε'' το $x(t - \tau)$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα ''συνυπάρχουν'', δηλ. όπου το γινόμενο $x(t - \tau)y(\tau)$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

4.6.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Πολύ χρήσιμα είναι τα ακόλουθα παραδείγματα, τα οποία θα σας βοηθήσουμε να κατανοήσετε ακόμα περισσότερο την πράξη της συνέλιξης.

Παράδειγμα 4.8:

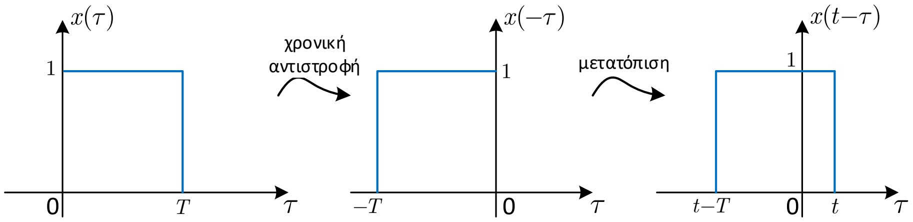
Έστω τα σήματα του Σχήματος 4.10.



Σχήμα 4.10: *Σήματα Παραδείγματος 4.8.*

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * y(t)$.

Λύση:
Επιλέγουμε να κάνουμε πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του $x(t)$, καθ΄ ότι ευκολότερο. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο Σχήμα 4.11. και άρα θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις, όπως αυτές



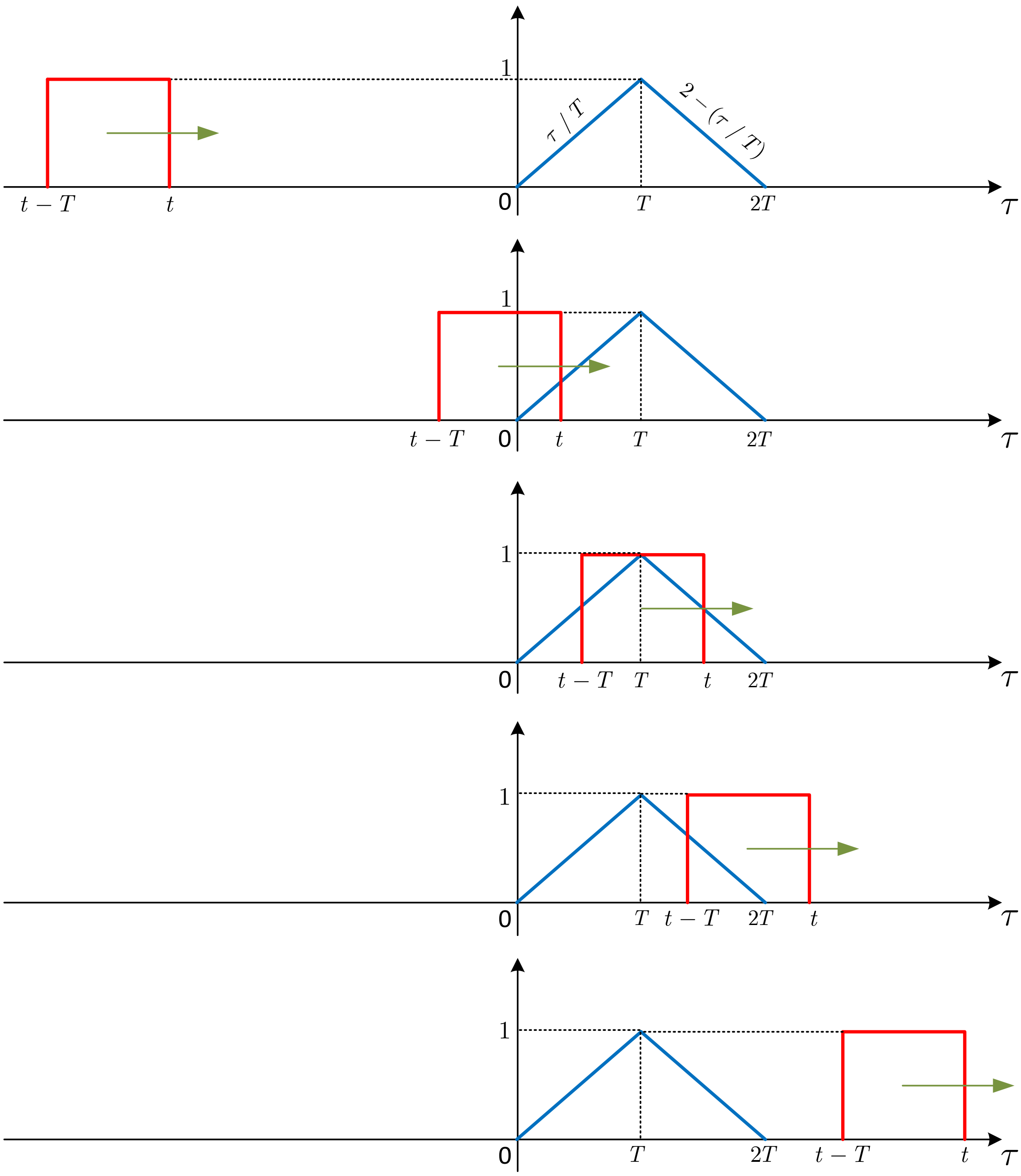
Σχήμα 4.11: *Μετατόπιση και ανάκλαση σήματος $x(t)$.*

απεικονίζονται στο Σχήμα 4.12.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι $y(t) = 0,\ t < 0$.
- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι $y(t) = \int_0^t \frac{\tau}{T} d\tau = \frac{t^2}{2T}$, για $t > 0$ και $t - T < 0$, δηλ. $0 < t < T$.
- Για την τρίτη περίπτωση είναι $y(t) = \int_{t-T}^{T} \frac{\tau}{T} d\tau + \int_T^t \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}$, για $t - T < T$ και $t > T$, δηλ. $T < t < 2T$.
- Για την τέταρτη περίπτωση είναι $y(t) = \int_{t-T}^{2T} \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}$, για $t < 3T$ και $t > 2T$, δηλ. $2T < t < 3T$.
- Για την πέμπτη περίπτωση είναι $y(t) = 0,\ t > 3T$.

Άρα τελικά θα είναι:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ και } t > 3T \\ \frac{t^2}{2T}, & 0 < t < T \\ -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}, & T < t < 2T \\ \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}, & 2T < t < 3T \end{cases} \tag{4.255}$$



Σχήμα 4.12: *Περιπτώσεις Συνέλιξης Παραδείγματος 4.8.*

Παράδειγμα 4.9:

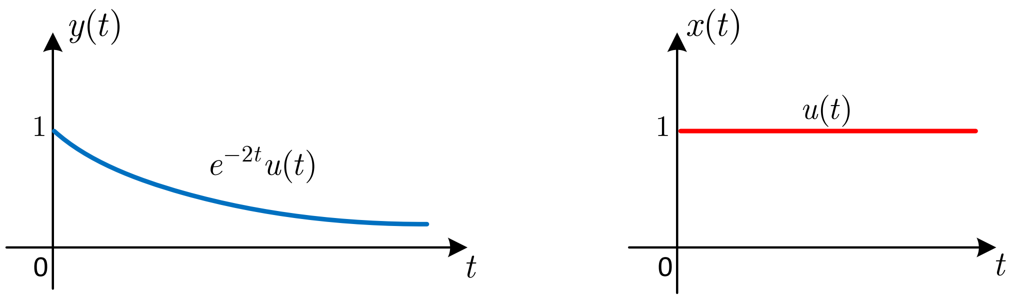
Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = u(t) \tag{4.256}$$

$$y(t) = e^{-2t}u(t) \tag{4.257}$$

Λύση:
Τα δυο σήματα φαίνονται στο Σχήμα 4.13. Το $x(t)$ είναι πιο κατάλληλο για να υποστεί τις μεταβολές που είναι απαραίτητες στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 4.14.

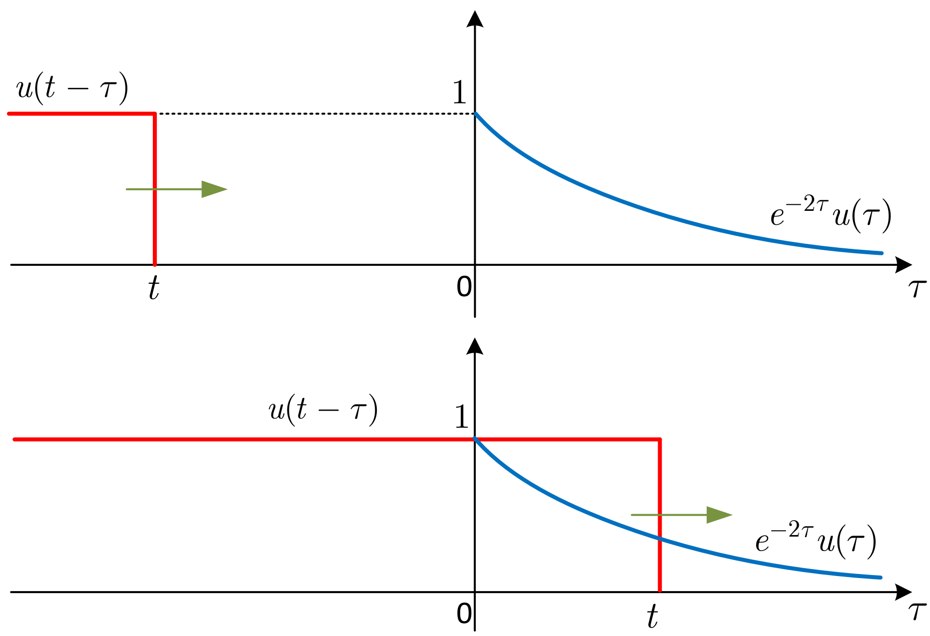


Σχήμα 4.13: *Σήματα Παραδείγματος 4.9.*

- Για την πρώτη περίπτωση είναι $c_{xy}(t) = 0$ για $t < 0$.
- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{t} e^{-2\tau} d\tau = \frac{1-e^{-2t}}{2} \tag{4.258}$$

για $t > 0$.



Σχήμα 4.14: *Περιπτώσεις Παραδείγματος 4.9.*

Άρα τελικά θα είναι

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-2t}}{2}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{4.259}$$

Το παράδειγμα αυτό είναι εξαιρετικό για να δείξουμε την *αλγεβρική* μέθοδο υπολογισμού της συνέλιξης. Θα είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau \tag{4.260}$$

Είναι

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.261}$$

αφού

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.262}$$

και

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.263}$$

Η Σχέση (4.260) γράφεται ως

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), \quad \text{για } t > 0 \tag{4.264}$$

Οπότε

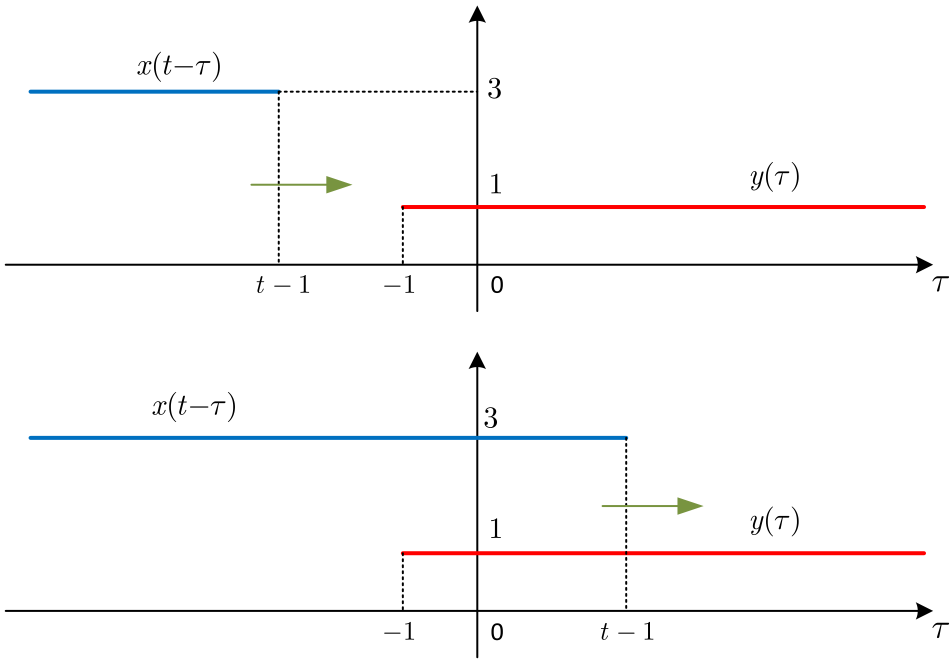
$$c_{xy}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) u(t) \tag{4.265}$$

Παράδειγμα 4.10:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = 3u(t-1) \tag{4.266}$$
$$y(t) = u(t+1) \tag{4.267}$$

Λύση:
Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 4.15. Θα είναι



Σχήμα 4.15: *Περιπτώσεις Παραδείγματος 4.10.*

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = 0 \tag{4.268}$$

για $t - 1 < -1 \Longleftrightarrow t < 0$.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 3u(\tau-1)u(t-\tau)d\tau \tag{4.269}$$

$$= \int_{-1}^{t-1} 3d\tau = 3(t-1)+3 = 3t \tag{4.270}$$

για $t-1 > -1 \iff t > 0$, αφού

$$3u(\tau-1)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & -1 < \tau < t-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.271}$$

Άρα συνολικά

$$c_{xy} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3t, & t > 0 \end{cases} \tag{4.272}$$

ή αλλιώς

$$c_{xy}(t) = 3tu(t) \tag{4.273}$$

Παράδειγμα 4.11:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = 2e^{-3t}u(t-1) \tag{4.274}$$

$$y(t) = \text{rect}\Big(\frac{t+2}{2}\Big) \tag{4.275}$$

Λύση:

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 4.16. Θα είναι

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = 0 \tag{4.276}$$

για $t+3 < 1 \iff t < -2$.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{1}^{t+3} 2e^{-3\tau}d\tau \tag{4.277}$$

$$= -\frac{2}{3}(e^{-3(t+3)} - e^{-3}) = -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3} \tag{4.278}$$

για $t+1 < 1$ και $t+3 > 1$, άρα $-2 < t < 0$.

- Για την τρίτη περίπτωση είναι

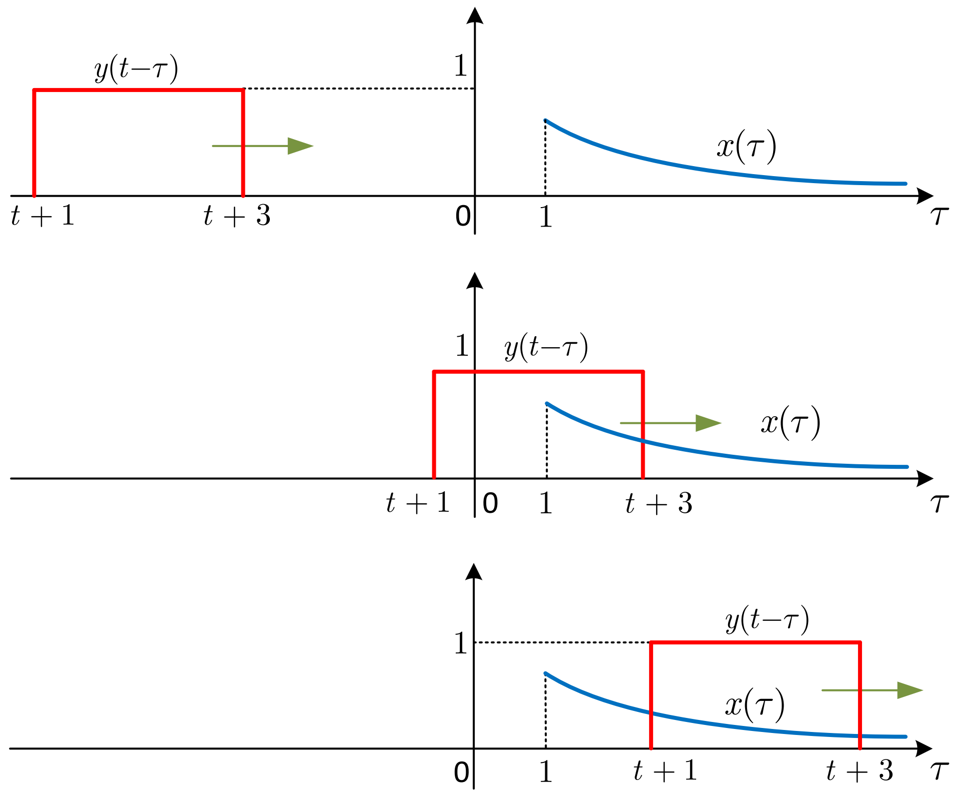
$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{t+1}^{t+3} 2e^{-3\tau}d\tau \tag{4.279}$$

$$= -\frac{2}{3}(e^{-3(t+3)} - e^{-3(t+1)}) = -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3(t+1)} \tag{4.280}$$

για $t+1 > 1 \iff t > 0$.

Άρα συνολικά

$$c_{xy} = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3}, & -2 < t < 0 \\ -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3(t+1)}, & t > 0 \end{cases} \tag{4.281}$$



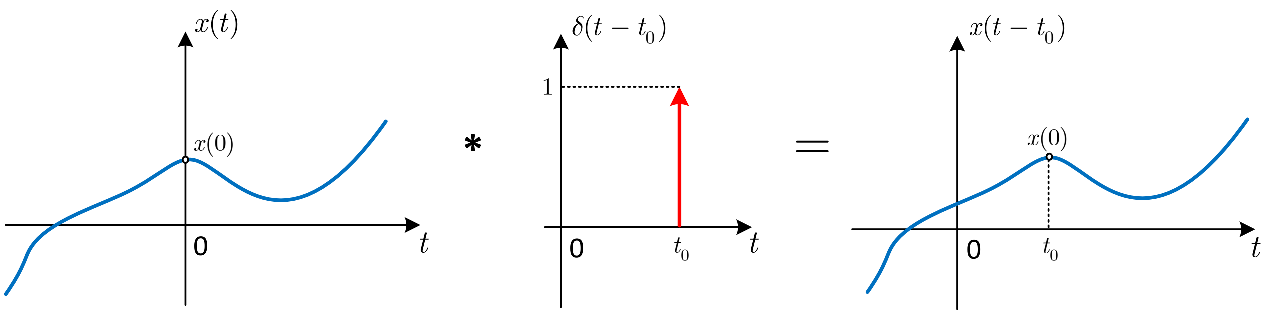
Σχήμα 4.16: *Περιπτώσεις Παραδείγματος 4.11.*

4.6.4 Συνέλιξη και Συναρτήσεις Δέλτα

Όταν ένα εκ των δυο σημάτων που εμπλέκονται σε μια συνέλιξη είναι μια συνάρτηση Δέλτα, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα

$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = x(t \pm t_0) \tag{4.282}$$

η οποία είναι πολύ χρήσιμη στη μελέτη συστημάτων - η απόδειξη αφήνεται σε σας στην Άσκηση 4.12. Η Σχέση (4.282) δηλώνει ότι όταν κάνουμε συνέλιξη ενός σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται στη χρονική στιγμή $t = \pm t_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x(t)$ μετατοπισμένο στη θέση $t = \pm t_0$! Θα δούμε στη συνέχεια ότι αυτή η ιδιότητα μας διευκολύνει πάρα πολύ όταν έχουμε να κάνουμε με συστήματα. Σχηματικά, δείτε το Σχήμα 4.17. Μπορούμε προς το παρόν να δούμε ένα παράδειγμα που θα μας βοηθήσει να δούμε πως



Σχήμα 4.17: *Συνέλιξη σήματος με συνάρτησης Δέλτα.*

δουλεύει αυτή η πράξη και πως διαφέρει η συνέλιξη ενός σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα με τον πολλαπλασιασμό του με την ίδια συνάρτηση, δυο πράξεις που συχνά προκαλούν σύγχυση.

Παράδειγμα 4.12:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} -1, & t = -4 \\ 1, & t = 0 \\ -1, & t = 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.283}$$

(α΄) Σχεδιάστε το σήμα στο χρόνο.

(β΄) Γράψτε το σήμα ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα $\delta(t)$.

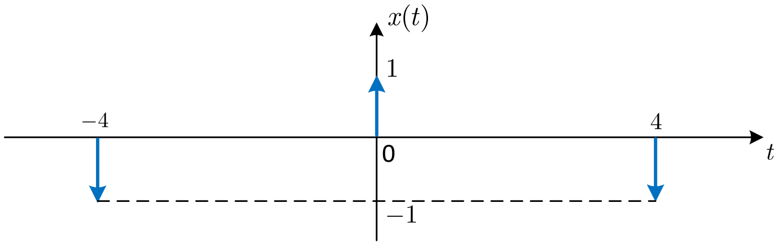
(γ΄) Πολλαπλασιάζουμε το $x(t)$ με το σήμα $y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$. Σχεδιάστε το αποτέλεσμα.

(δ΄) Κάνουμε συνέλιξη το $x(t)$ με το σήμα $y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$. Σχεδιάστε πρώτα τα σήματα που προκύπτουν και μετά γράψτε μια βολική μαθηματική σχέση που περιγράφει το αποτέλεσμα.

(ε΄) Ποιός είναι ο γενικός κανόνας που προκύπτει από τα δυο παραπάνω ερωτήματα; Δηλ. τι συμβαίνει σε ένα σήμα όταν πολλαπλασιάζεται με μια συνάρτηση Δέλτα, και τι συμβαίνει όταν γίνεται συνέλιξη με μια συνάρτηση Δέλτα;

Λύση:

(α΄) Το σήμα στο χρόνο φαίνεται στο Σχήμα 4.18.

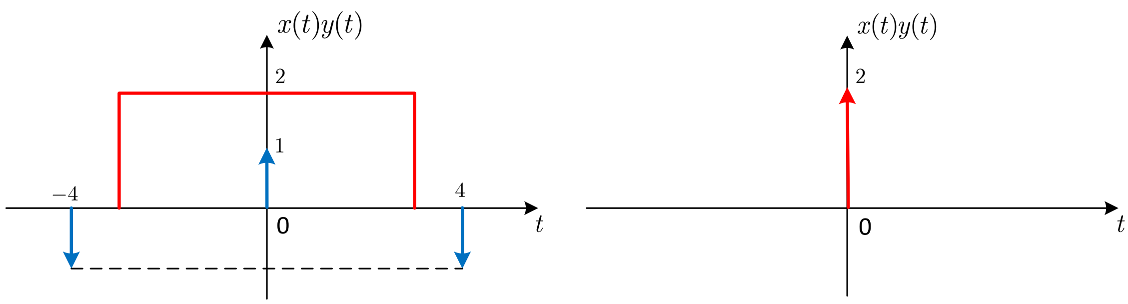


Σχήμα 4.18: *Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με συνάρτηση Δέλτα: σήμα στο χρόνο.*

(β΄) Είναι

$$x(t) = -\delta(t+4) + \delta(t) - \delta(t-4) \tag{4.284}$$

(γ΄) Το γινόμενο των δυο σημάτων είναι

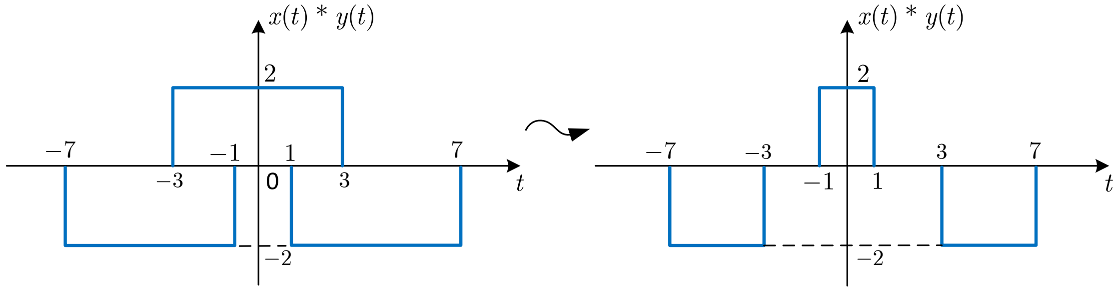


Σχήμα 4.19: *Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με συνάρτηση Δέλτα: γινόμενο σημάτων.*

$$x(t) \cdot y(t) = x(t) \cdot 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) \cdot \Big(-\delta(t+4) + \delta(t) - \delta(t-4) \Big) = 2\delta(t) \tag{4.285}$$

και φαίνεται στο Σχήμα 4.19.

(δ΄) Η συνέλιξη των σημάτων είναι



Σχήμα 4.20: *Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με συνάρτηση Δέλτα: συνέλιξη σημάτων.*

$$x(t) * y(t) = x(t) * 2\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{6}\Big) = -2\mathrm{rect}\Big(\frac{t+4}{6}\Big) + 2\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{6}\Big) - 2\mathrm{rect}\Big(\frac{t-4}{6}\Big) \tag{4.286}$$

και φαίνεται στο Σχήμα 4.20 αριστερά. Παρατηρώντας το, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$x(t) * y(t) = -2\mathrm{rect}\Big(\frac{t+5}{4}\Big) + 2\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{2}\Big) - 2\mathrm{rect}\Big(\frac{t-5}{4}\Big) \tag{4.287}$$

και φαίνεται στο Σχήμα 4.20 δεξιά.

(ε΄) Ο γενικός κανόνας είναι ότι το γινόμενο σήματος με συνάρτηση Δέλτα δίνει μια συνάρτηση Δέλτα με πλάτος το πλάτος του σήματος στη θέση της συνάρτησης Δέλτα. Η συνέλιξη σήματος με συνάρτηση Δέλτα μετατοπίζει τη θέση αναφοράς του σήματος από το μηδέν στη θέση t_0, αν $\delta(t - t_0)$ είναι η συνάρτηση Δέλτα η οποία εμπλέκεται στη συνέλιξη.

■

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις με βάση όσα έχουμε συζητήσει ως τώρα.

Παρατηρήσεις

(α΄) Όπως βλέπετε, είναι πολύ σημαντικό να μπορείτε να υπολογίσετε σωστά το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του ολοκληρώματος. Οι πράξεις στο ολοκλήρωμα είναι συνήθως αρκετά απλές.

(β΄) Όπως είδαμε, η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει δηλ. ότι

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = y(t) * x(t) = c_{yx}(t) \tag{4.288}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν κάναμε πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του $x(t)$ αντί για του $y(t)$, θα είχαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

(γ΄) Προτιμούμε να αντιστρέψουμε χρονικά και μετατοπίσουμε το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδικασία υπολογισμού της συνέλιξης. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.

(δ΄) Χρήσιμη ιδιότητα, η οποία αναφέρεται στον Πίνακα 4.1, για πεπερασμένης διάρκειας σήματα είναι η εξής: αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[a, b]$ και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[c, d]$, τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα $[a+c, b+d]$. Γνωρίζοντας αυτό, μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας. Για παράδειγμα, αν στο Σχήμα 4.9, είχαμε συνέλιξη του σήματος $y(t)$ με τον εαυτό της, δηλ. $c_{yy}(t) = y(t) * y(t)$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μη μηδενικό στο διάστημα $[2, 8]$.

(ε΄) Στη βιβλιογραφία, θα βρείτε τον ορισμό της συνέλιξης με διαφορετικές μεταβλητές. Π.χ.

$$c_{xy}(t) = \int_{\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \tag{4.289}$$

$$c_{xy}(\tau) = \int_{\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)dt \tag{4.290}$$

Και οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι σωστές. Απλά αλλάξαμε τις μεταβλητές t, τ μεταξύ τους. Διαλέξτε όποια σας βολεύει, αρκεί να είστε συνεπείς και προσεκτικοί. Σε αυτό το βιβλίο, προτιμούμε την πρώτη σχέση.

(ϛ΄) Σε πρώτη ανάγνωση, η πράξη της συνέλιξης μοιάζει δύσκολη. Μάλιστα ένα γνωστό online λεξικό παρουσιάζει τη λέξη ‘‘συνέλιξη’’ ως συνώνυμο της πολυπλοκότητας, της περιπλοκής, και της δυσκολίας! [α΄] Σε άλλες πηγές [β΄] αναφέρεται ότι ‘‘η συνέλιξη προκαλεί τρόμο στην καρδιά του μέσου μηχανικού’’! Ελπίζω να είδατε όμως ότι τελικά η πράξη αυτή δεν είναι κάτι που πρέπει να προκαλεί φόβο.

[α΄] https://www.merriam-webster.com/dictionary/convolution#synonyms
[β΄] https://pulse.embs.org/january-2015/history-convolution-operation/

4.6.5 Πίνακας Συνέλιξης

Η διαδικασια της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από έτοιμους πίνακες συνέλιξης, όπως ο Πίνακας 4.2. Αυτός ο πίνακας, που αναφέρει διάφορα ζεύγη σημάτων και το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους, μπορεί να σας βοηθήσει στον έλεγχο των αποτελεσμάτων σας.

Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης

$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{x(t) * y(t)}$
$x(t)$	$\delta(t-T)$	$x(t-T)$
$e^{at}u(t)$	$u(t)$	$\frac{e^{at}-1}{a}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}u(t),\ a \neq b$
$e^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$te^{at}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}u(t)$
$t^nu(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{n!e^{at}}{a^{n+1}}u(t) - \sum_{j=0}^{n}\frac{n!t^{n-j}}{a^{j+1}(n-j)!}u(t)$
$t^mu(t)$	$t^nu(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{bt}-e^{at}+(a-b)te^{at}}{(a-b)^2}u(t)$
$t^me^{at}u(t)$	$t^ne^{at}u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{at}u(t)$
$t^me^{at}u(t)$	$t^ne^{bt}u(t)$	$\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^jm!(n+j)!t^{m-j}e^{at}}{j!(m-j)!(a-b)!^{n+j+1}}u(t)$
		$+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kn!(m+k)!t^{n-k}e^{bt}}{k!(n-k)!(b-a)^{m+k+1}}u(t),\ a \neq b$
$e^{at}\cos(bt+\theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta-\phi)e^{\lambda t}-e^{-at}\cos(bt+\theta-\phi)}{\sqrt{(a+\lambda)^2+b^2}}u(t),$ $\phi = \tan^{-1}\frac{-b}{a+\lambda}$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}u(t)+e^{bt}u(-t)}{b-a},\ \mathrm{Re}\{b\} > \mathrm{Re}\{a\}$
$e^{at}u(-t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{b-a}u(-t)$

Πίνακας 4.2: *Πίνακας συνελίξεων.*

4.7 Συνολική Απόκριση Συστήματος

Έχουμε πλέον αναλυτικές μαθηματικές εκφράσεις για την απόκριση μηδενικής εισόδου και την απόκριση μηδενικής κατάστασης ενός συστήματος. Έτσι, η συνολική απόκριση (έξοδος) $y(t)$ ενός συστήματος παρουσία εισόδου $x(t)$ είναι

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t} + x(t) * h_g(t) \tag{4.291}$$

με $h_g(t)$ την κρουστική απόκριση του συστήματος, λ_i τις (απλές) χαρακτηριστικές ρίζες (ή φυσικές συχνότητες) του συστήματος, και c_i σταθεροί συντελεστές, όπως αυτά ορίστηκαν στην Παράγραφο 4.3. Υπενθυμίζεται ότι αν το σύστημα είναι ΓΧΑ, τότε η έξοδος καθορίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης.

Ας δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που συνοψίζει όλα όσα έχουμε δει ως τώρα.

Παράδειγμα 4.13:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) \tag{4.292}$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$, $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = 0$. Βρείτε τη συνολική απόκριση του συστήματος αν η είσοδος είναι $x(t) = e^{-t}u(t)$.

Λύση:
Ας βρούμε πρώτα την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$. Η ομογενής εξίσωση είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 0 \tag{4.293}$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \iff (\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \tag{4.294}$$

Η ομογενής λύση θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}, \;\; t > 0 \tag{4.295}$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2, θα χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες για $t = 0^-$, οπότε

$$y_{zi}(0^-) = c_1 + c_2 = 1 \tag{4.296}$$

$$\frac{d}{dt}y_{zi}(t)\Big|_{t=0^-} = -c_1 - 2c_2 = 0 \tag{4.297}$$

Οπότε $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, και έτσι η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι

$$y_{zi}(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \tag{4.298}$$

Η κρουστική απόκριση βρίσκεται από την ομογενή λύση της εξίσωσης

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 3\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) = 0 \tag{4.299}$$

θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες για $t = 0^-$, και αρχικές συνθήκες για $t = 0^+$ ως

$$h(0^+) = 0 \tag{4.300}$$

$$\frac{d}{dt}h(t)\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{a_2} = 1 \tag{4.301}$$

Βρήκαμε νωρίτερα ότι η ομογενής λύση είναι της μορφής

$$h(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} = d_1 e^{-t} + d_2 e^{-2t}, \;\; t > 0 \tag{4.302}$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες για $t = 0^+$, έχουμε

$$h(0^+) = d_1 + d_2 = 0 \tag{4.303}$$

$$\frac{d}{dt}h(t)\Big|_{t=0^+} = -d_1 - 2d_2 = 1 \tag{4.304}$$

και έτσι βρίσκουμε ότι $d_1 = 1$, $d_2 = -1$, οπότε η ομογενής λύση είναι

$$h(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \tag{4.305}$$

Η κρουστική απόκριση είναι τελικά

$$h_g(t) = h(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \tag{4.306}$$

Η απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}(t)$ θα είναι

$$y_{zs}(t) = h_g(t) * x(t) \tag{4.307}$$

$$= (e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)) * e^{-t}u(t) \tag{4.308}$$

$$= te^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(t) \tag{4.309}$$

$$= (t-1)e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \tag{4.310}$$

χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 4.2. Οπότε τελικά, η συνολική απόκριση του συστήματος όταν στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα $x(t) = e^{-t}u(t)$ είναι

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = (t+1)e^{-t}u(t) \tag{4.311}$$

■

Όπως ήταν εμφανές στο παράδειγμα, είναι ιδιαίτερα κοπιαστικό - αν και εύκολο - να βρει κανείς τη συνολική απόκριση (δηλ. την έξοδο) ενός συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Άλλες μέθοδοι που θα δούμε σύντομα θα μας δώσουν ευκολότερους τρόπους υπολογισμού της εξόδου.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι η εξής: ο διαχωρισμός σε απόκριση μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου δεν είναι ο μοναδικός που μπορεί να γίνει. Ένας ακόμα διαχωρισμός είναι αυτός της **φυσικής απόκρισης - natural response** $y_{nr}(t)$ και της **εξαναγκασμένης απόκρισης - forced response** $y_{fr}(t)$. Η φυσική και η εξαναγκασμένη απόκριση μπορούν να βρεθούν απ΄ ευθείας από τη συνολική απόκριση, με τον απλό διαχωρισμό των όρων που περιλαμβάνονται στην απόκριση μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου. Όλοι οι όροι που περιέχουν φυσικές συχνότητες ανήκουν στην φυσική απόκριση, ενώ όλες οι υπόλοιπες ανήκουν στην εξαναγκασμένη απόκριση.

Για παράδειγμα, έστω ένα σύστημα με συνολική απόκριση

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \tag{4.312}$$

$$= (2e^{-2t}u(t) + 2e^{-4t}u(t)) + (5e^{-2t}u(t) + 2e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)) \tag{4.313}$$

Βλέπουμε ότι οι φυσικές συχνότητες του συστήματος είναι $\lambda_i = -2, -4$. Όμως τέτοιες συχνότητες υπάρχουν και στην απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}(t)$. Αν βάλουμε μαζί τους όρους που περιέχουν φυσικές συχνότητες του συστήματος και μαζί όλους τους άλλους, θα έχουμε

$$y(t) = (2e^{-2t}u(t) + 2e^{-4t}u(t)) + (5e^{-2t}u(t) + 2e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)) \tag{4.314}$$

$$= (7e^{-2t}u(t) + e^{-4t}u(t)) + 2e^{-3t}u(t) \tag{4.315}$$

$$= y_{nr}(t) + y_{fr}(t) \tag{4.316}$$

με

$$y_{nr}(t) = 7e^{-2t}u(t) + e^{-4t}u(t) \tag{4.317}$$

$$y_{fr}(t) = 2e^{-3t}u(t) \tag{4.318}$$

Παρατηρήστε ότι η φυσική απόκριση έχει τους ίδιους όρους με την απόκριση μηδενικής εισόδου - μόνο οι σταθερές αλλάζουν. Αντίθετα, η εξαναγκασμένη απόκριση δεν έχει ιδιαίτερη σχέση με την απόκριση μηδενικής κατάστασης. Φυσικά, ο τρόπος εύρεσης της συνολικής απόκρισης ως άθροισμα της φυσικής και της εξαναγκασμένης απόκρισης δεν περνά αναγκαστικά μέσα από τη γνώση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου. Η φυσική και η εξαναγκασμένη απόκριση μπορούν να βρεθούν κατ΄ ευθείαν από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος. Η μεθοδολογία που ακολουθείται είναι απλούστερη από αυτή που έχουμε δει ως τώρα στις αποκρίσεις μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου. Ας τη δούμε.

4.8 Φυσική και Εξαναγκασμένη Απόκριση

Η εύρεση της φυσικής απόκρισης είναι εύκολη, αφού αυτή αποτελείται μόνο από όρους που περιέχουν φυσικές συχνότητες, άρα θα πρέπει να αποτελεί λύση του ομογενούς συστήματος. Όμως, έχουμε δει ότι η λύση ενός τέτοιου συστήματος απαιτεί κάποιες αρχικές συνθήκες. Θα μπορούσε κανείς να προτείνει τις αρχικές συνθήκες για $t = 0^-$. Όμως αυτές οι αρχικές συνθήκες εφαρμόζονται μόνο στην απόκριση μηδενικής εισόδου. Στις αποκρίσεις που συζητάμε, δεν μπορεί να γίνει διαχωρισμός της μηδενικής εισόδου και μηδενικής κατάστασης. Άρα οι συνθήκες που θέλουμε πρέπει να αφορούν *όλη* την έξοδο, δηλ. την $y(t)$ η οποία ορίζεται για $t = 0^+$, οπότε οι συνθήκες που θέλουμε πρέπει να θεωρηθούν στο $t = 0^+$. Συνήθως δεν είναι απλή η μετατροπή των αρχικών συνθηκών για $t = 0^-$ σε αρχικές συνθήκες για $t = 0^+$.

Πίνακας Ζευγών Εισόδου και Εξαναγκασμένης Απόκρισης	
Είσοδος $\mathbf{x(t)}$	**Μορφή Εξαναγκασμένης Απόκρισης $\mathbf{y_{nr}(t)}$**
$e^{at},\ a \neq \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, N$	Ce^{at}
$e^{at},\ a = \lambda_j, 1 \leq j \leq N$	Cte^{at}
C	C_0
$C\cos(\omega t + \phi)$	$C_0 \cos(\omega t + \phi)$
$\sum_{i=0}^{r} a_i t^i$	$\sum_{i=0}^{r} C_i t^i$

Πίνακας 4.3: *Πίνακας Ζευγών Εισόδου και Εξαναγκασμένης Απόκρισης.*

Η εύρεση της εξαναγκασμένης απόκρισης είναι επίσης εύκολη, όμως έχει το εξής μειονέκτημα: μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν η είσοδος $x(t)$ έχει πεπερασμένο αριθμό παραγώγων. Αυτή η απαίτηση είναι αρκετά περιοριστική, όμως αρκετά σήματα που χρησιμοποιούμε στην πράξη την ικανοποιούν. Έτσι, η εξαναγκασμένη απόκριση μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμικός συνδυασμός της εισόδου $x(t)$ και των παραγώγων της. Τέλος, η συνολική απόκριση όπως βρίσκεται από το άθροισμα των δυο επιμέρους αποκρίσεων δε μας πληροφορεί για το ποιό τμήμα της οφείλεται στην εσωτερική κατάσταση του συστήματος και ποιό στην είσοδό του. Γι΄ αυτό άλλωστε προτιμήσαμε να περιγράψουμε πιο λεπτομερώς τις αποκρίσεις μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου: είναι διαισθητικά πιο κοντά στη λειτουργία ενός συστήματος όπως τη βλέπει ένας μηχανικός.

Ο Πίνακας 4.3 παρουσιάζει κάποιες συνήθεις μορφές εισόδων, και την αντίστοιχη εξαναγκασμένη απόκριση.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.14:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{4.319}$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος για είσοδο

$$x(t) = t^2 + 6t + 2 \tag{4.320}$$

δεδομένων αρχικών συνθηκών $y(0^+) = 2$ και $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^+} = 3$.

Λύση:
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) \tag{4.321}$$

Άρα η φυσική απόκριση θα είναι της μορφής

$$y_{nr}(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t},\ \ t > 0 \tag{4.322}$$

με A_1, A_2 σταθερές που πρέπει να βρούμε, αλλά αφού υπολογίσουμε τη συνολική απόκριση. Βάσει του Πίνακα 4.3, η εξαναγκασμένη απόκριση θα είναι της μορφής

$$y_{fr}(t) = C_2t^2 + C_1t + C_0 \tag{4.323}$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$\frac{d}{dt}y_{fr}(t) = 2C_2t + C_1 \tag{4.324}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y_{fr}(t) = 2C_2 \tag{4.325}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = 2t + 6 \tag{4.326}$$

Με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση, έχουμε

$$2C_2 + 5(2C_2t + C_1) + 6(C_2t^2 + C_1t + C_0) = 2t + 6 \tag{4.327}$$

$$2C_2 + 10C_2t + 5C_1 + 6C_2t^2 + 6C_1t + 6C_0 = 2t + 6 \tag{4.328}$$

$$6C_2t^2 + (10C_2 + 6C_1)t + (2C_2 + 5C_1 + 6C_0) = 2t + 6 \tag{4.329}$$

που μας δίνει το σύστημα

$$6C_2 = 0 \tag{4.330}$$

$$10C_2 + 6C_1 = 2 \tag{4.331}$$

$$2C_2 + 5C_1 + 6C_0 = 6 \tag{4.332}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση

$$C_0 = \frac{13}{18},\ C_1 = \frac{1}{3},\ C_2 = 0 \tag{4.333}$$

Άρα η εξαναγκασμένη απόκριση είναι

$$y_{fr}(t) = \frac{1}{3}t + \frac{13}{18},\ t > 0 \tag{4.334}$$

Η συνολική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$y(t) = y_{fr}(t) + y_{nr}(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^{-3t} + \frac{1}{3}t + \frac{13}{18},\ t > 0 \tag{4.335}$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$\frac{d}{dt}y(t) = -2A_1e^{-2t} - 3A_2e^{-3t} + \frac{1}{3} \tag{4.336}$$

και από τις αρχικές συνθήκες $y(0^+) = 2$ και $\frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^+} = 3$, θα έχουμε

$$A_1 + A_2 + \frac{13}{18} = 2 \tag{4.337}$$

$$-2A_1 - 3A_2 + \frac{1}{3} = 3 \tag{4.338}$$

που μας δίνει τιμές

$$A_1 = \frac{13}{2} \tag{4.339}$$

$$A_2 = -\frac{47}{9} \tag{4.340}$$

Άρα η συνολική απόκριση είναι

$$y(t) = y_{fr}(t) + y_{nr}(t) = \frac{13}{2}e^{-2t}u(t) - \frac{47}{9}e^{-3t}u(t) + \frac{1}{3}tu(t) + \frac{13}{18}u(t) \tag{4.341}$$

4.9 Ευστάθεια Συστήματος

Ας αναφερθούμε τώρα αναλυτικότερα σε μια έννοια η οποία είναι πολύ σημαντική, αυτή της *ευστάθειας* ενός συστήματος. Συζητήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο (και υπενθυμίζουμε εδώ) ότι ένα σύστημα λέγεται ευσταθές αν

$$|x(t)| < M_x \Longrightarrow |y(t)| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathbb{R} \tag{4.342}$$

και ονομάσαμε αυτού του είδους την ευστάθεια ως BIBO-ευστάθεια. Όμως η έξοδος $y(t)$ αποτελείται από δυο συνιστώσες, όπως είδαμε:

1. Την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}(t)$.
2. Την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}(t)$.

Προφανώς πρέπει να ισχύει

$$|y(t)| = |y_{zi}(t) + y_{zs}(t)| < M_y \in \mathbb{R} \tag{4.343}$$

Έχει ενδιαφέρον να δείτε την Άσκηση 4.22. Χωρίς να μπούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες και μια και στη συνέχεια θα μας απασχολήσουν σχεδόν αποκλειστικά τα ΓΧΑ συστήματα, ας δούμε πότε οι επιμέρους έξοδοι είναι απολύτως φραγμένες.

4.9.1 Ευστάθεια και Απόκριση Μηδενικής Εισόδου

Εξ ορισμού, η απόκριση μηδενικής είσοδου παράγεται για $x(t) = 0$, οπότε προφανώς η είσοδος είναι φραγμένη. Η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται από τη σχέση

$$y_{zi}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t} u(t) \tag{4.344}$$

αν οι χαρακτηριστικές ρίζες λ_k είναι διακριτές. Πρέπει να σας είναι προφανές ότι η απόκριση αυτή είναι απολύτως φραγμένη μόνον αν το $y_{zi}(t) \not\longrightarrow \infty$ όταν $t \to \infty$. Ας δούμε πότε συμβαίνει αυτό, διακρίνοντας δυο περιπτώσεις.

- Αν οι ρίζες λ_k είναι πραγματικές, τότε για να είναι η απόκριση μηδενικής εισόδου απολύτως φραγμένη θα πρέπει
$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0, \quad \forall k \tag{4.345}$$
Αυτό όμως συμβαίνει μόνον όταν
$$\lambda_k < 0, \quad \forall k \tag{4.346}$$
- Αν οι ρίζες λ_k είναι μιγαδικές, τότε για να είναι η αποκριση μηδενικής εισόδου απολύτως φραγμένη θα πρέπει
$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0, \quad \forall k \tag{4.347}$$
Αυτό όμως συμβαίνει μόνον όταν
$$\mathrm{Re}\{\lambda_k\} < 0, \quad \forall k \tag{4.348}$$
Ας το δείξουμε αναλυτικά, μια και αυτό το όριο θα το συναντήσουμε ξανά αρκετές φορές στη συνέχεια.

  Έστω λοιπόν ότι $\lambda = a + jb$, και ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το
$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = \lim_{t\to\infty} e^{(a+jb)t} \tag{4.349}$$
Παρατηρήστε ότι η $e^{(a+jb)t}$ μπορεί να γραφεί ως
$$e^{(a+jb)t} = e^{at}e^{jbt} \tag{4.350}$$
Όπως γνωρίζετε, ο όρος e^{jbt} περιγράφεται από ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα μοναδιαίου μέτρου στο μιγαδικό επίπεδο. Το μέτρο του λοιπόν είναι μοναδιαίο, ανεξαρτήτως των τιμών των b, t. Άρα ο όρος e^{at} καθορίζει τη συμπεριφορά του $e^{(a+jb)t}$ όταν $t \to \infty$. Οπότε
$$\lim_{t\to\infty} e^{(a+jb)t} = \lim_{t\to\infty} e^{at}e^{jbt} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \infty, & a > 0 \end{cases} \tag{4.351}$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γενικευτεί για δυο οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(t), g(t)$, για τις οποίες ισχύει ότι αν $|f(t)| < M_f$ και $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, τότε $\lim_{t\to\infty} f(t)g(t) = 0$. Περιγράφοντας αυτή τη σχέση, το όριο του γινομένου δυο συναρτήσεων $f(t)g(t)$ όταν $t \to \infty$ είναι μηδέν, αν η μια είναι απολύτως φραγμένη και η άλλη τείνει στο μηδέν όταν $t \to \infty$.

- Στην ειδική περίπτωση που $\lambda = jb$, $b \neq 0$, τότε όταν $t \to \infty$, το περιστρεφόμενο διάνυσμα διατηρεί το μοναδιαίο μέτρο του, χωρίς να αυξάνει ή να φθίνει. Από τις σχέσεις του Euler, έχουμε

$$e^{jbt} = \cos(bt) + j\sin(bt) \tag{4.352}$$

που σημαίνει ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου θα διατηρεί μια ταλάντωση επ΄ άπειρον, χωρίς αυτή να φθίνει ή να αυξάνει. Άρα αν στο σύνολο των χαρακτηριστικών ριζών υπάρχει μια τουλάχιστον απλή καθαρά φανταστική ρίζα, τότε το σύστημα είναι *οριακά ευσταθές*.

- Τέλος, στην ειδική περίπτωση που $\lambda = 0$, τότε όταν $t \to \infty$, η εκθετική συνάρτηση $e^{\lambda t}u(t)$ θα γίνεται απλά $u(t)$. Άρα αν στο σύνολο των χαρακτηριστικών ριζών υπάρχει μια τουλάχιστον μηδενική ρίζα, τότε το σύστημα είναι επίσης *οριακά ευσταθές*.

Ας δούμε πως - και αν - διαφοροποιούνται τα πράγματα όταν οι ρίζες έχουν κάποια πολλαπλότητα r. Υπενθυμίζεται ότι τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται ως

$$y_{zi}(t) = \Big((c_1 + c_2 t + \cdots + c_r t^{r-1})e^{\lambda_1 t} + c_{r+1}e^{\lambda_{r+1}t} + \cdots + c_N e^{\lambda_N t}\Big)u(t) \tag{4.353}$$

Για τα εκθετικά που φέρουν τις απλές ρίζες $\lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_N$, η κατάσταση δεν αλλάζει σε σχέση με την ανάλυση που μόλις κάναμε. Τα εκθετικά όμως που φέρουν τη ρίζα πολλαπλότητας r, λ_1, φέρουν ως παράγοντα έναν όρο t^k, με $k = 0, \cdots, r-1$. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί κανείς να δείξει με όμοιο με πριν τρόπο, ότι

$$\lim_{t\to\infty} t^k e^{\lambda t} = 0 \tag{4.354}$$

μόνον αν $\mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η ίδια συνθήκη ευστάθειας απαιτείται παρουσία πολλαπλής ρίζας για την απόκριση μηδενικής εισόδου. Τι συμβαίνει αν η πολλαπλή ρίζα είναι φανταστική: $\lambda = jb$;

Συνοψίζοντας:

Ευστάθεια Απόκρισης Μηδενικής Εισόδου

Ένα σύστημα που χαρακτηρίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής εισόδου είναι ευσταθές αν

(α΄) όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι αρνητικές ή έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Η ευστάθεια αυτή ονομάζεται *ασυμπτωτική ευστάθεια*.

- αν υπάρχουν και φανταστικές χαρακτηριστικές ρίζες, τότε αυτές είναι απλής τάξης. Η ευστάθεια αυτή ονομάζεται *οριακή ευστάθεια*.
- αν υπάρχει και χαρακτηριστική ρίζα στο μηδέν, τότε αυτή είναι απλή. Η ευστάθεια αυτή ονομάζεται *οριακή ευστάθεια*.

(β΄) Σε κάθε άλλη περίπτωση, το σύστημα είναι ασταθές.

Σχηματικά, η απόκριση μηδενικής εισόδου πραγματικών συστημάτων για διάφορες θέσεις των χαρακτηριστικών ριζών φαίνεται στο Σχήμα 4.21.

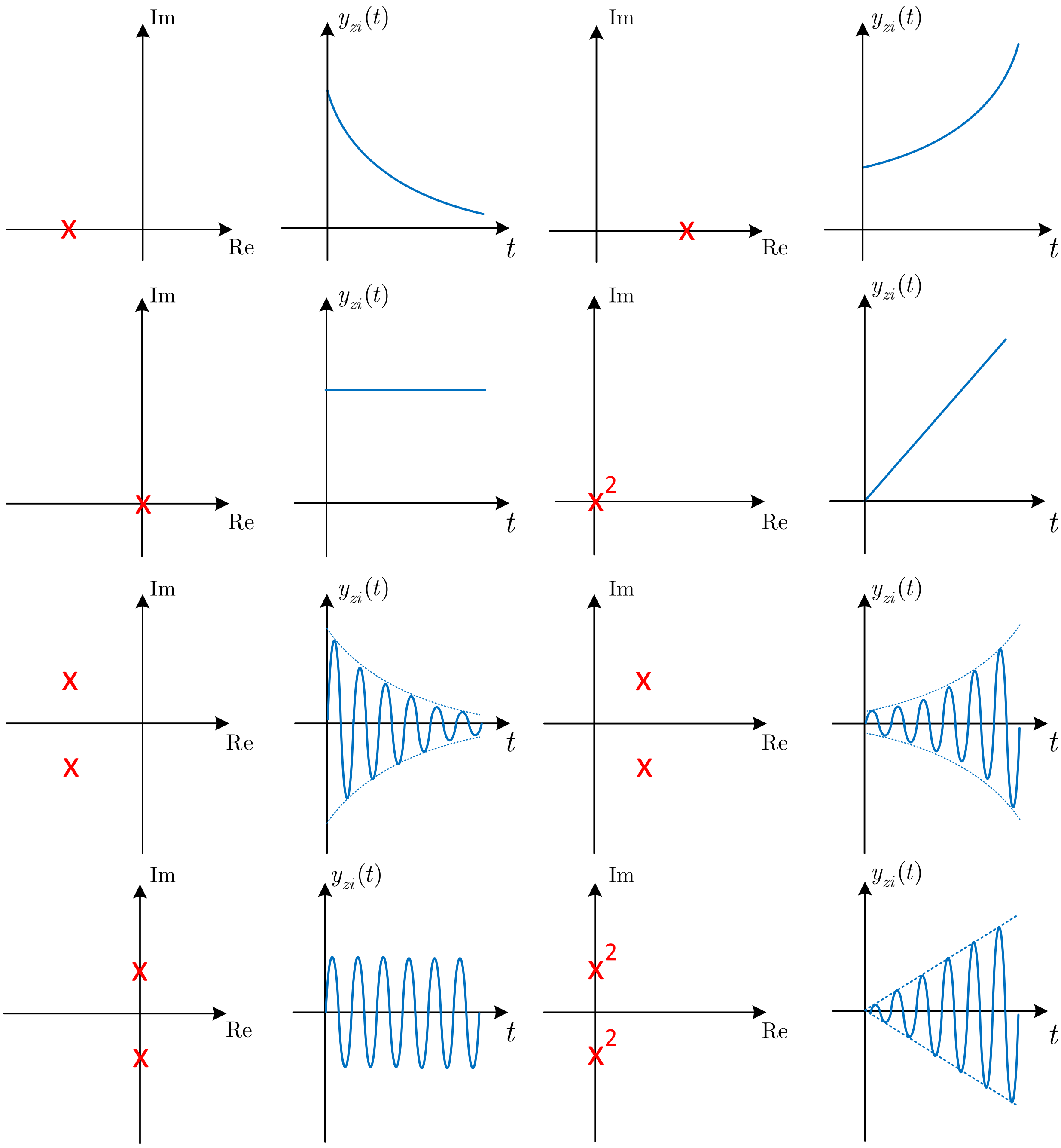
4.9.2 Ευστάθεια και Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

Αντίστοιχα, για την απόκρισης μηδενικής κατάστασης, όπου η είσοδος είναι μη μηδενική και απολύτως φραγμένη

$$|x(t)| < M_x < +\infty \tag{4.355}$$

αλλά οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, η ευστάθεια συνεπάγεται αν

$$|y(t)| = |x(t) * h(t)| = \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\Big| \tag{4.356}$$



Σχήμα 4.21: *Θέσεις χαρακτηριστικών ριζών και μορφή απόκρισης μηδενικής εισόδου.*

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| \tag{4.357}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau \tag{4.358}$$

$$\leq M_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau < +\infty \tag{4.359}$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau < +\infty \tag{4.360}$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < +\infty} \tag{4.361}$$

Άρα, ένα σύστημα του οποίου η απόκριση μηδενικής κατάστασης περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι ευσταθές αν η τελευταία είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το σύστημα είναι ασταθές.

Εν κατακλείδει:

Ευστάθεια Συστήματος

Η ευστάθεια ενός συστήματος δεδομένης μιας οποιασδήποτε απολύτως φραγμένης εισόδου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τις *χαρακτηριστικές ρίζες* του συστήματος, οι οποίες πρέπει να είναι αρνητικές ή να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

και ειδικότερα,

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

Η ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος δεδομένης μιας οποιασδήποτε απολύτως φραγμένης εισόδου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την κρουστική του απόκριση $h(t)$, η οποία πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

Ας συζητήσουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις επάνω στο ζήτημα της ευστάθειας.

Παρατηρήσεις

(α΄) Σε ένα ευσταθές σύστημα, μια απολύτως φραγμένη είσοδος παράγει πάντα μια απολύτως φραγμένη έξοδο. Όμως, μπορεί κανείς να δείξει ότι σε ένα ασταθές ή οριακά ευσταθές σύστημα, η έξοδός του μπορεί να είναι μη απολύτως φραγμένη, ακόμα κι αν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη! Δηλαδή, BIBO-ευσταθές είναι ένα σύστημα μόνο όταν χαρακτηρίζεται από *ασυμπτωτική* ευστάθεια. Καταλαβαίνετε γιατί; Σκεφτείτε ένα (αντι-)παράδειγμα.

(β΄) Επειδή η κρουστική απόκριση $h(t)$ αποτελείται από όρους που εμφανίζονται στην απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλ.

$$h(t) = f\{e^{\lambda_k t}, t^k e^{\lambda_k t}\} \tag{4.362}$$

η Σχέση (4.361) ικανοποιείται μόνον αν

$$\lambda_k < 0, \quad \forall \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathrm{Re}\{\lambda_k\} < 0, \quad \forall \lambda_k \in \mathbb{C} \tag{4.363}$$

όπως είδαμε στην Παράγραφο 4.3. Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε με λεπτομέρεια τι συμβαίνει ακριβώς όταν εμφανίζονται συναρτήσεις Δέλτα ή παράγωγοι της, αν και μπορείτε ήδη να καταλάβετε ότι η παρουσία μιας συνάρτησης Δέλτα δεν αποτελεί πρόβλημα, σύμφωνα με τις ιδιότητες της συνέλιξης.

(γ΄) Όπως μπορείτε να καταλάβετε, ένα ασταθές σύστημα δεν έχει και τόση χρησιμότητα στην πράξη - κάθε σύστημα που υλοποιούμε σε υλικό ή λογισμικό πρέπει να είναι ευσταθές. Σκεφτείτε για παράδειγμα ένα απλό, ‘‘κακοφτιαγμένο’’ ηχείο, το οποίο δέχεται είσοδο από ένα μικρόφωνο. Αν το σύστημα ήταν ασταθές, τότε οποιαδήποτε και οσοδήποτε μικρή είσοδος από το μικρόφωνο, θα παρήγαγε σύντομα μια απόκριση (ήχο) υπερβολικά μεγάλης τιμής με πολύ δυσάρεστα - το λιγότερο! - αποτελέσματα.

(δ΄) Τα παραπάνω όμως δε σημαίνουν ότι δεν μπορούν να προκύψουν ασταθή συστήματα στην πράξη. Για παράδειγμα, η θεωρία του *Αυτομάτου Ελέγχου* προσπαθεί να ελέγξει τη συμπεριφορά πραγματικών συστημάτων ‘‘διορθώνοντας’’ τυχούσες αστάθειες που φυσιολογικά προκύπτουν κατά τη λειτουργία τους. Θεωρώντας ένα αεροσκάφος ως ένα σύστημα, θέλουμε αυτό να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη πορεία, με συγκεκριμένο υψόμετρο και ταχύτητα, ανεξάρτητα από τις πιθανές ροές ανέμων του περιβάλλοντος που προκαλούν αστάθειες στη συμπεριφορά του. Για αυτό, θα πρεπει να έχουμε ένα μηχανισμό ελέγχου της ευστάθειας του συστήματος.

4.10 Αιτιατότητα Συστήματος

Η αιτιατότητα είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα ενός συστήματος, ειδικά αν το σύστημα προορίζεται να υλοποιηθεί σε πραγματικό χρόνο. Ασφαλώς, όλα τα φυσικά συστήματα είναι αιτιατά εξ΄ ορισμού, διότι αποκρίνονται μόνον αν ‘‘διεγερθούν’’: οι ζωντανοί οργανισμοί, ο καιρός, τα μουσικά όργανα, κ.α. Ένα αιτιατό σύστημα λοιπόν δεν πρέπει να αποκρίνεται αν δε διεγείρεται, ή με άλλα λόγια, δεν πρέπει να παράγει έξοδο αν δεν του παρασχεθεί μια είσοδος.

Καθαρά μαθηματικά, αν ένα σύστημα για δυο εισόδους $x_1(t)$ και $x_2(t)$ παράγει δυο εξόδους $y_1(t)$ και $y_2(t)$, τότε αυτό είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1(t) = x_2(t) \ \ \forall\, t < t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t) \ \ \forall\, t < t_0 \tag{4.364}$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τις συνθήκες αιτιατότητας για ένα σύστημα ως εξής:

Αιτιατότητα Συστήματος

Ένα σύστημα είναι αιτιατό αν βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**, δηλ.

$$\begin{aligned} \text{αν } x(t) &= 0,\ \ t < t_0 \\ \text{τότε } y(t) &= 0,\ \ t < t_0 \end{aligned} \tag{4.365}$$

που μπορεί να ειπωθεί χαρακτηριστικά ως ‘‘no input, no output’’. ☺

Όπως εύκολα διαπιστώνετε, ένα σύστημα που παράγει μη μηδενική απόκριση μηδενικής εισόδου δεν είναι αιτιατό, καθώς παράγει μη μηδενική έξοδο πριν του εφαρμόσουμε μια κάποια μη μηδενική είσοδο! Για παράδειγμα, ένα σύστημα με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες θα έχει παράξει απόκριση μηδενικής εισόδου πριν του εφαρμόσουμε, για παράδειγμα, μια βηματική συνάρτηση τη χρονική στιγμή $t = t_0$ (δηλ. την $u(t - t_0)$). Άρα, η αρχική ηρεμία συνεπάγεται μηδενικές αρχικές συνθήκες για $t = 0^-$.

Προφανώς το παραπάνω κριτήριο ισχύει και για συστήματα που είναι ΓΧΑ. Όμως μπορούμε άραγε για ένα ΓΧΑ σύστημα να βρούμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, όπως κάναμε για την ευστάθεια; Η απάντηση είναι ναι! Σκεφτείτε ότι αν ένα σύστημα είναι ΓΧΑ και εμφανιστεί στην είσοδό του η συνάρτηση Δέλτα, τότε γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος. Η είσοδος όμως εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, και δεν υπήρξε πιο πριν. Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν $h(t) = 0,\ t < 0$.

Οπότε:

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος και Κρουστική Απόκριση

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$h(t) = 0,\ \ t < 0 \tag{4.366}$$

4.11 Η βηματική απόκριση $s(t)$

Πολλές φορές, ο απ΄ ευθείας υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης είναι δύσκολος. Η **βηματική απόκριση** $s(t)$ ενός συστήματος δεν είναι άλλη από την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η βηματική συνάρτηση $u(t)$. Οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \tag{4.367}$$

Άρα μπορούμε να εξάγουμε ότι

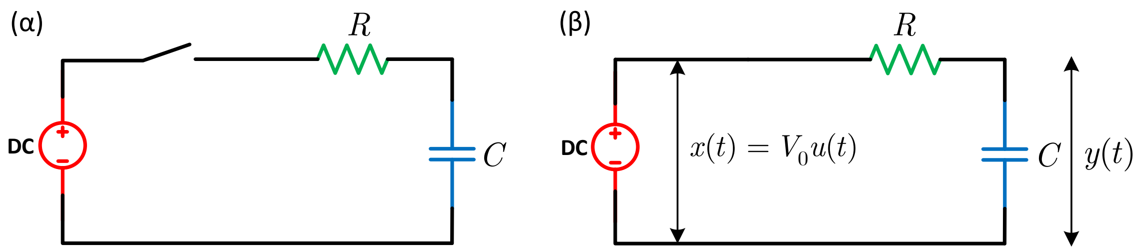
$$\frac{d}{dt}s(t) = h(t) \tag{4.368}$$

δηλ. η παράγωγος της βηματικής απόκρισης μας δίνει την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος! Επιπλέον, αν λάβετε υπόψη ότι η βηματική συνάρτηση αποτελεί ένα σήμα που αλλάζει ακαριαία τιμή, προσομοιώνοντας τη λειτουργία ενός διακόπτη, μπορείτε να υποθέσετε ότι η χρησιμότητά της στα ηλεκτρικά κυκλώματα είναι μεγάλη.

Ας το δούμε αυτό σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.15:

Έστω το απλό RC κύκλωμα του Σχήματος 4.22(α). Ο πυκνωτής χωρητικότητας C θεωρείται αρχικά αφόρτιστος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο διακόπτης κλείνει, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα, και ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται, όπως στο Σχήμα 4.22(β). Έστω ότι η τάση της πηγής είναι V_0.



Σχήμα 4.22: *Κύκλωμα RC Παραδείγματος 4.15.*

Άρα αν θεωρήσουμε την τάση της πηγής ως είσοδο στο σύστημα RC, αυτή θα γράφεται ως

$$x(t) = V_0 u(t) \tag{4.369}$$

Αν θελήσουμε να βρούμε τη διαφορά δυναμικού (τάση) $v(t)$ στα άκρα του πυκνωτή για $t > 0$, γνωρίζουμε από τον ηλεκτρισμό ότι το φορτίο που συσσωρεύεται στον πυκνωτή μετά το κλείσιμο του διακόπτη είναι

$$q(t) = CV_0(1 - e^{-t/RC})u(t) \tag{4.370}$$

με V_0 την τάση της πηγής, R την αντίσταση του αντιστάτη, και C τη χωρητικότητα του πυκνωτή. Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$q(t) = Cy(t) \Longleftrightarrow y(t) = \frac{q(t)}{C} = V_0(1 - e^{-t/RC})u(t) \tag{4.371}$$

Θεωρήστε την τάση στα άκρα του πυκνωτή, $y(t)$, ως έξοδο του κυκλώματος RC. Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ για το RC κύκλωμα με χρήση της παραπάνω σχέσης.

Λύση:

Αναγνωρίζουμε ότι η είσοδος του συστήματος είναι μια βηματική συνάρτηση, οπότε η έξοδος $y(t)$ θα είναι η βηματική απόκριση $s(t)$. Τότε θα έχουμε

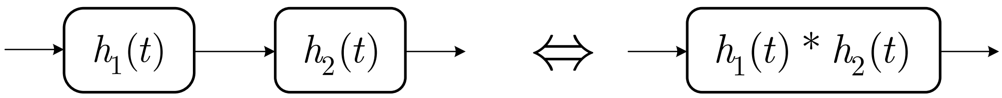
$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d}{dt}s(t) = \frac{d}{dt}\Big(V_0(1 - e^{-t/RC})u(t)\Big) && (4.372)\\ &= \frac{d}{dt}V_0 u(t) - \frac{d}{dt}V_0 e^{-t/RC}u(t) && (4.373)\\ &= V_0\delta(t) - V_0\Big(\frac{d}{dt}e^{-t/RC}\Big)u(t) - V_0\Big(\frac{d}{dt}u(t)\Big)e^{-t/RC} && (4.374)\\ &= V_0\delta(t) + \frac{1}{RC}V_0 e^{-t/RC}u(t) - V_0\delta(t)e^{-t/RC} && (4.375)\\ &= \frac{V_0}{RC}e^{-t/RC}u(t) && (4.376) \end{aligned}$$

4.12 Διατάξεις ΓΧΑ Συστημάτων

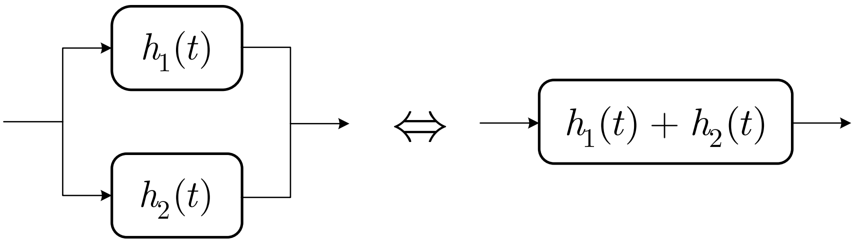
Ας δούμε μερικές διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων που συναντώνται συχνά στην πράξη, και τις οποίες μπορούμε να απλοποιήσουμε. Στο Σχήμα 4.23, φαίνονται δυο συστήματα σε σειρά. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα, $y(t)$, είναι:

$$y(t) = (x_1(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x_1(t) * (h_1(t) * h_2(t)) \tag{4.377}$$

λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την ισοδύναμη διάταξη που



Σχήμα 4.23: *Συστήματα σε σειρά και ισοδύναμη διάταξη.*



Σχήμα 4.24: *Παράλληλα συστήματα και ισοδύναμη διάταξη.*

φαίνεται το ίδιο σχήμα.

Στο Σχήμα 4.24, φαίνονται δυο συστήματα σε παραλληλία. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα, $y(t)$, είναι:

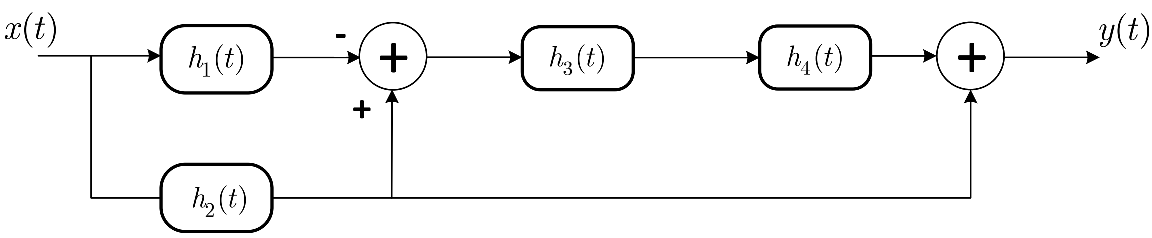
$$y(t) = (x_1(t) * h_1(t)) + (x_1(t) * h_2(t)) = x_1(t) * (h_1(t) + h_2(t)) \tag{4.378}$$

λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την ισοδύναμη διάταξη που φαίνεται το ίδιο σχήμα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.16:

Για τη διάταξη συστημάτων του Σχήματος 4.25, δίνονται οι κρουστικές αποκρίσεις ως:



Σχήμα 4.25: *Διάταξη Συστηματων Παραδείγματος 4.16.*

- $h_1(t) = \delta(t-1)$
- $h_2(t) = e^{-2t}u(t)$
- $h_3(t) = \delta(t-1)$
- $h_4(t) = e^{-3(t+2)}u(t+2)$

Βρείτε τη συνολική κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

Λύση:
Είναι

$$y(t) = h(t) * x(t) \tag{4.379}$$

$$= \Big(h_2(t) * x(t) - h_1(t) * x(t)\Big) * h_3(t) * h_4(t) + h_2(t) * x(t) \tag{4.380}$$

$$= \Big(h_2(t) - h_1(t)\Big) * x(t) * h_3(t) * h_4(t) + h_2(t) * x(t) \tag{4.381}$$

$$= \underbrace{\Big[\Big(h_2(t) - h_1(t)\Big) * h_3(t) * h_4(t) + h_2(t)\Big]}_{h(t)} * x(t) \tag{4.382}$$

Άρα

$$h(t) = \Big(h_2(t) - h_1(t)\Big) * h_3(t) * h_4(t) + h_2(t) \tag{4.383}$$
$$= \Big(e^{-2t}u(t) - \delta(t-1)\Big) * \delta(t-1) * e^{-3(t+2)}u(t+2) + e^{-2t}u(t) \tag{4.384}$$
$$= \Big(e^{-2(t-1)}u(t-1) - \delta(t-2)\Big) * \epsilon^{-3(t+2)}u(t+2) + e^{-2t}u(t) \tag{4.385}$$
$$= e^{-2(t-1)}u(t-1) * e^{-3(t+2)}u(t+2) - e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \tag{4.386}$$

Είναι

$$e^{-2(t-1)}u(t-1) * e^{-3(t+2)}u(t+2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3(\tau+2)}u(\tau+2)e^{-2(t-\tau-1)}u(t-\tau-1)d\tau \tag{4.387}$$

Είναι

$$u(\tau+2) = \begin{cases} 1, & \tau > -2 \\ 0, & \tau < -2 \end{cases}$$

και

$$u(\tau - t - 1) = \begin{cases} 1, & \tau < t-1 \\ 0, & \tau > t-1 \end{cases}$$

άρα

$$u(\tau+2)u(t+\tau-1) = \begin{cases} 1, & -2 < \tau < t-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα η Σχέση (4.387) δίνει

$$\int_{-2}^{t-1} e^{-3\tau}e^{-6}e^{-2t}e^{2\tau}e^{2}d\tau = e^{-2t}\cdot e^{-4}\int_{-2}^{t-1} e^{-\tau}d\tau = e^{-2t-4}(-e^{-\tau})\Big|_{-2}^{t-1} \tag{4.388}$$
$$= e^{-2(t+2)}(-e^{-(t-1)} + e^{2}) \tag{4.389}$$
$$= -e^{-2(t+2)}\cdot e^{-(t-1)} + e^{-2(t+2)+2} \tag{4.390}$$
$$= -e^{-3(t+1)} + e^{-2(t+1)}, \quad t > -1 \tag{4.391}$$

Η Σχέση (4.386) λόγω της Σχέσης (4.391) δίνει:

$$h(t) = -e^{-3t}u(t) + (e^{-2(t+1)} - e^{-3(t+1)})u(t+1) + e^{-2t}u(t) \tag{4.392}$$

4.13 Όμως...

Συνοψίζοντας, σε αυτό το κεφάλαιο αναλύσαμε σήματα και συστήματα στο πεδίο του χρόνου. Εισάγαμε τις έννοιες της απόκρισης μηδενικής εισόδου, που αποτελεί την έξοδο ενός συστήματος απουσία εισόδου, της απόκρισης μηδενικής κατάστασης, που αποτελεί την έξοδο ενός συστήματος παρουσία μηδενικών αρχικών συνθηκών, και της κρουστικής απόκρισης, που περιγράφει την έξοδο ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται ένα ‘‘ακαριαίο’’ σήμα, δηλ. μια συνάρτηση Δέλτα. Επίσης, μελετήσαμε την πράξη της συνέλιξης και τις ιδιότητές της, καθώς και τις ιδιότητες της ευστάθειας και της αιτιατότητας ενός συστήματος.

Θα θέλαμε όμως να εμβαθύνουμε περισσότερο στη συμπεριφορά και τον τρόπο λειτουργίας των σημάτων και των συστημάτων. Γνωρίζουμε ότι πολλά φυσικά συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις δίνουν λύσεις σε μορφή ημιτονοειδών ταλαντώσεων, οι οποίες φέρουν συγκεκριμένες συχνότητες. Επίσης, πολλές είσοδοι σε τέτοια συστήματα είναι ημιτονοειδούς μορφής ή εμφανίζουν μια κάποια *περιοδικότητα*. Πώς συμπεριφέρονται τα συστήματα σε τέτοιες περιπτώσεις; Σε αυτή μας την προσπάθεια, το πεδίο του χρόνου – που συζητούμε εδώ και τόσες σελίδες – δε μας είναι αρκετό. Στα επόμενα κεφάλαια, θα γνωρίσουμε έναν άλλο χώρο, αυτόν της *συχνότητας*, που μας δίνει περισσότερες πληροφορίες για τα σήματα, τα συστήματα, και τη μεταξύ τους σχέση.