

Κεφάλαιο 5

Ανάλυση Σημάτων και Συστημάτων στο Πεδίο του Χρόνου

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συζητήσουμε για την αναλυτική μελέτη συστημάτων στο πεδίο του χρόνου.

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο κάποια εισαγωγικά στοιχεία για τα σήματα και τα συστήματα. Στο εξής, θα θεωρούμε ότι ένα σύστημα περιγράφεται στο πεδίο του χρόνου από μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} b_k x(t) \quad (5.1)$$

με a_k, b_k σταθερούς συντελεστές. Σύντομα θα δούμε πώς μπορούμε να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις, υπό ποιές συνθήκες, και τι σημαίνει μια τέτοια εξίσωση σε σχέση με την έννοια του γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος.

5.2 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Πολλά φυσικά συστήματα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, εξ ου και το ενδιαφέρον μας να μπορούμε να λύνουμε τέτοιες. Η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής (5.1) συνίσταται στην εύρεση της εξόδου $y(t)$ δεδομένης μιας εισόδου $x(t)$. Ας δούμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα της Μηχανικής τα οποία (πρέπει να) σας είναι γνωστά.

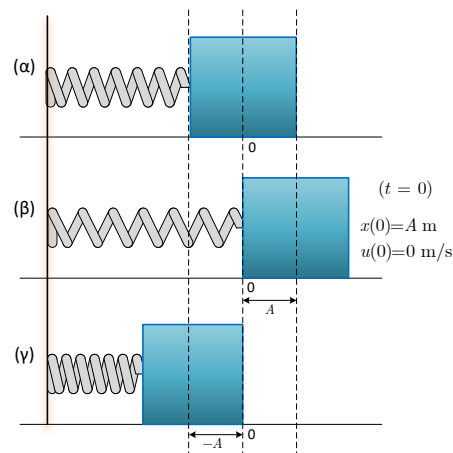
Πολλά πραγματικά, μηχανικά συστήματα περιλαμβάνουν ελατήρια και σώματα. Το πιο σύνηθες (και αρκετά απλό) τέτοιο παράδειγμα είναι ο Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής, που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σώμα μάζας m συνδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς k . Δείτε το Σχήμα 5.1.

Το σύστημα ελατήριο-σώμα βρίσκεται σε ισορροπία στο Σχήμα 5.1(α). Εκτείνουμε το ελατήριο τραβώντας το σώμα προς τα δεξιά, μέχρι τη μέγιστη έκτασή του από τη θέση ισορροπίας. Έστω ότι η έκταση αυτή βρίσκεται A μέτρα από το σημείο ισορροπίας, όπως στο Σχήμα 5.1(β). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το σώμα, το οποίο εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση. Όλη η κίνηση αυτή περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega_0^2 x(t) \iff \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (5.2)$$

με $x(t)$ τη θέση του σώματος για κάθε χρονική στιγμή t . Η παραπάνω διαφορική εξίσωση ονομάζεται *ομογενής*. Πιθανότατα γνωρίζετε ότι η εξίσωση θέσης του σώματος (που είναι και η λύση της διαφορικής εξίσωσης) οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \geq 0$ δίνεται από τη σχέση

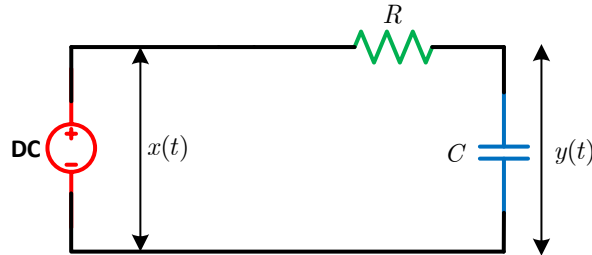
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad t \geq 0 \quad (5.3)$$



Σχήμα 5.1: Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής.

με την τιμή ω_0 να εξαρτάται από το υλικό του ελατηρίου και τη μάζα του σώματος, και ϕ την αρχική φάση του ταλαντωτή, που εν γένει μας είναι άγνωστη και εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Παρατηρήστε ότι η διαφορική εξίσωση (5.2) παρουσιάζει μόνο έξοδο $x(t)$, καθώς η είσοδος του είναι μηδενική¹. Πώς προκύπτει άραγε η Σχέση (5.3) από τη Σχέση (5.2);

Επίσης, η πλειονότητα των ηλεκτρικών συστημάτων που υπάρχουν γύρω μας περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Ένα πολύ απλό παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι το κύκλωμα πυκνωτή-αντιστάτη, ή αλλιώς το κύκλωμα RC . Δείτε το Σχήμα 5.2. Η αντίσταση του αντιστάτη συμβολίζεται με R ενώ η



Σχήμα 5.2: Κύκλωμα RC .

χωρητικότητα του πυκνωτή συμβολίζεται με C . Είσοδος σε αυτό το σύστημα είναι η τάση της πηγής, ενώ η έξοδος είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα αυτό δίνεται ως

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \quad (5.4)$$

Αρχικά η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι μηδενική. Αν εφαρμόσουμε στο κύκλωμα μια ιδανική πηγή σταθερής τάσης τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλ. $x(t) = V_0 u(t)$, τότε μπορεί κανείς να δείξει ότι η τάση στα άκρα του πυκνωτή δίνεται ως

$$y(t) = V_0(1 - e^{-t/RC}), \quad t > 0 \quad (5.5)$$

Πώς προκύπτει αυτή η σχέση από τη διαφορική εξίσωση;

Το κεφάλαιο αυτό αναλαμβάνει να απαντήσει στα ερωτήματα των παραπάνω παραδειγμάτων.

5.3 Η κρουστική απόκριση $h(t)$

Μπορούμε να ορίσουμε μια πολύ βολική περιγραφή για ένα σύστημα. Θα θέλαμε να γνωρίζουμε την έξοδο ενός συστήματος όταν παρουσιάζουμε ως είσοδο ένα σήμα “ακαριαίας” μορφής, ένα σήμα που υπάρχει σε απειροστά μικρό χρονικό διάστημα². Δε θα ήταν λοιπόν παράλογο να ονομάσουμε αυτήν την έξοδο ως **κρουστική απόκριση**³! Με βάση τα παραπάνω, ένα τέτοιο σήμα “ακαριαίας” εισόδου μπορεί να μοντελοποιηθεί εξαιρετικά από τη γνωστή μας συνάρτηση Δέλτα! Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που “υπάρχει” μόνο για $t = 0$, είναι μηδέν για $t \neq 0$, ενώ το εμβαδό του είναι μοναδιαίο.

Ας ορίσουμε λοιπόν την **κρουστική απόκριση - impulse response** $h(t)$ ενός συστήματος ως την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδο του παρουσιάζεται η συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$. Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του τελεστή $T[\cdot]$ για το σύστημα, θα είναι

$$h(t) = T[\delta(t)] \quad (5.6)$$

ή εναλλακτικά

$$\delta(t) \longrightarrow h(t) \quad (5.7)$$

¹ Παρ' όλο που στις διαφορικές εξισώσεις η έξοδος συμβολίζεται με τη συνάρτηση $y(t)$, στο συγκεκριμένο παράδειγμα είθισται η έξοδος να συμβολίζεται με $x(t)$, καθώς συνδέεται νοηματικά με τη μετατόπιση του σώματος στον οριζόντιο άξονα x .

² Σκεφτείτε ότι χτυπάτε ένα καμπανάκι (σύστημα) με ένα σφυρί (είσοδος) πολύ γρήγορα, όσο “ακαριαία” γίνεται. Θα μπορούσατε να ισχυριστείτε ότι ο ήχος που θα παραχθεί, δηλ. η έξοδος του συστήματος, χαρακτηρίζει το καμπανάκι (το υλικό του, το πάχος του, την επιφάνειά του, κλπ).

³ Σκεφτείτε το: η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ακαριαία διέγερση).

5.3.1 Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος

Ας δούμε πώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη συνάρτηση Δέλτα για να βρούμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος.

Αφού το σύστημά μας είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο, θα έχουμε τα ακόλουθα ζεύγη εισόδου-εξόδου:

$$(\alpha) \text{ κρουστική απόκριση: } \delta(t) \longrightarrow h(t) \quad (5.8)$$

$$(\beta) \text{ χρον. αμεταβλητότητα: } \delta(t - \tau) \longrightarrow h(t - \tau) \quad (5.9)$$

$$(\gamma) \text{ γραμμικότητα/ομογένεια: } x(\tau)\delta(t - \tau) \longrightarrow x(\tau)h(t - \tau) \quad (5.10)$$

$$(\delta) \text{ γραμμικότητα/αθροιστικότητα: } \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau) \quad (5.11)$$

$$(\epsilon) \text{ είσοδος: } x(t) = x(t) * \delta(t) \longrightarrow \text{έξοδος: } y(t) = x(t) * h(t) \quad (5.12)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι: εφαρμόζοντας τις απλές ιδιότητες των συστημάτων που γνωρίζουμε επάνω στην αναπαράσταση ενός σήματος εισόδου ως συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα, η έξοδος $y(t)$ αναπαρίσταται ως η συνέλιξη της εισόδου $x(t)$ με την κρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$! Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \quad (5.13)$$

Μια σχηματική αναπαράσταση της παραπάνω διαδικασίας φαίνεται στο Σχήμα 5.3.

Η γνώση της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος μπορεί να μας δώσει την έξοδο για οποιαδήποτε είσοδο!

5.4 Συνέλιξη

Η πράξη της συνέλιξης είναι θεμελιώδους σημασίας, λόγω του ότι εμφανίζεται συχνά στις φυσικές επιστήμες, στη μηχανική, και στα μαθηματικά, οπότε της αξίζει ξεχωριστή και εκτενής αναφορά. Αμέσως παρακάτω, θα την εξετάσουμε ως γενικότερη πράξη, χωρίς να τη συνδέουμε απαραίτητα με την είσοδο και την έξοδο ενός συστήματος.

Προτού μελετήσουμε αναλυτικά το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, ας δούμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες με βάση τον ορισμό της.

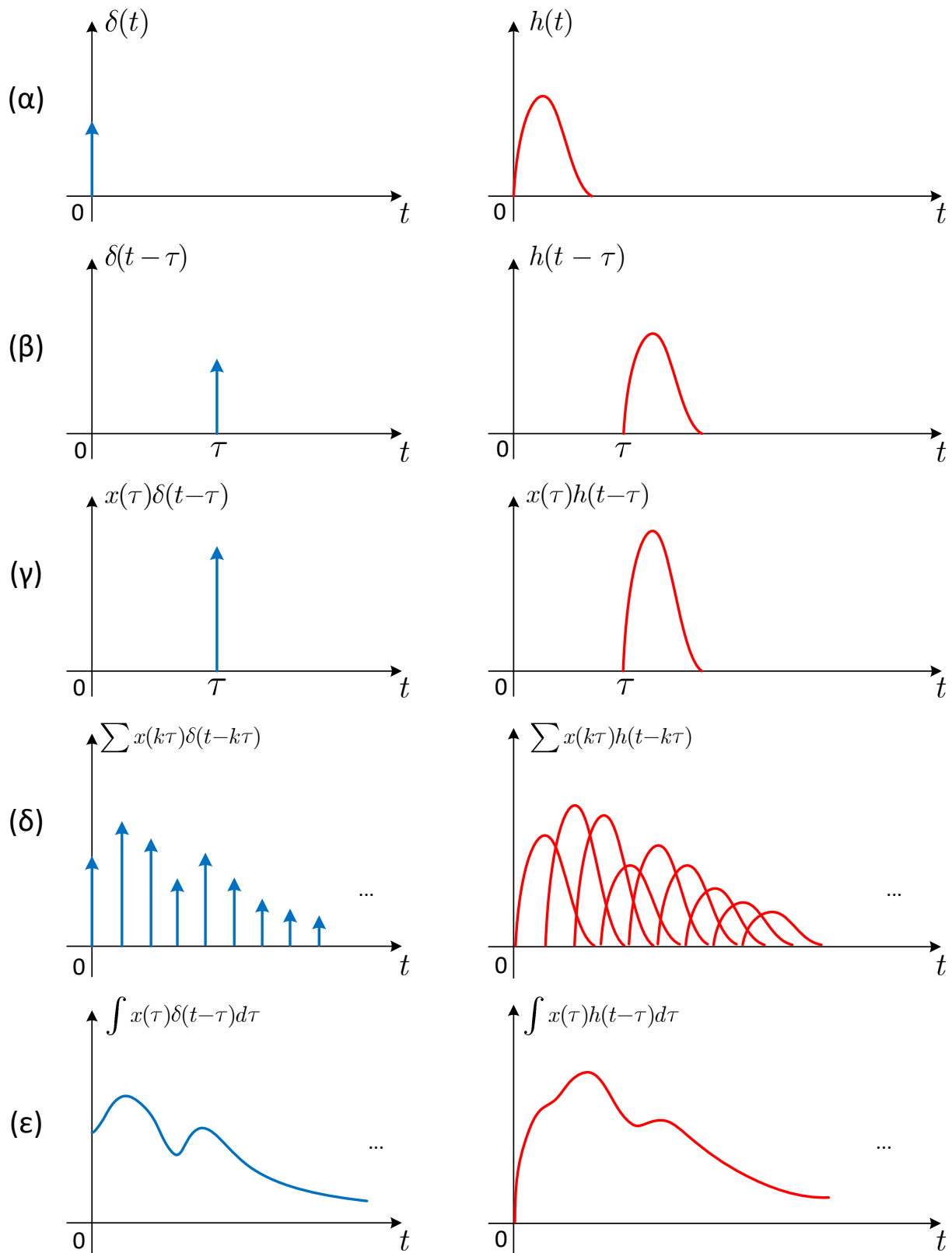
5.4.1 Ιδιότητες Συνέλιξης

Η πράξη της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από ιδιότητες, όπως αυτές στον Πίνακα 5.1.

Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)), \quad a \in \mathbb{R}$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

Πίνακας 5.1: Ιδιότητες συνέλιξης

Ακολουθούν οι αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων, με αποκλειστική χρήση του ορισμού.



Σχήμα 5.3: Σχηματική παραγωγή της πράξης της συνέλιξης που αναφέρονται στις Σχέσεις (5.8-5.12).

5.4.1.1 Ομογένεια

Έχουμε

$$(ax(t)) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ax(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)ay(t-\tau)d\tau = x(t) * (ay(t)) \quad (5.14)$$

και

$$x(t) * (ay(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)ay(t-\tau)d\tau = a \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = a(x(t) * y(t)) \quad (5.15)$$

5.4.1.2 Αντιμεταθετικότητα

Θέτοντας $u = t - \tau$ στον ορισμό της συνέλιξης, έχουμε

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = - \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)y(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)y(u)du = y(t) * x(t) \quad (5.16)$$

5.4.1.3 Προσεταιριστικότητα

Είναι

$$(x(t) * y(t)) * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(\tau) * y(\tau))z(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(\tau-u)du \right) z(t-\tau)d\tau \quad (5.17)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau-u)z(t-\tau)d\tau \right) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(m)z(t-m-u)dm \right) du \quad (5.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)(y(t-u) * z(t-u))du \quad (5.19)$$

$$= x(t) * (y(t) * z(t)) \quad (5.20)$$

όπου στη Σχέση (5.18) θέσαμε $m = \tau - u$.

5.4.1.4 Επιμεριστικότητα

Είναι

$$x(t) * (y(t) + z(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)(y(t-\tau) + z(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(\tau)y(t-\tau) + x(\tau)z(t-\tau))d\tau \quad (5.21)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau \quad (5.22)$$

$$= x(t) * y(t) + x(t) * z(t) \quad (5.23)$$

5.4.1.5 Γραμμικότητα

Είναι

$$z(t) = x(t) * y(t) = (ax_1(t) + bx_2(t)) * y(t) \quad (5.24)$$

$$= ax_1(t) * y(t) + bx_2(t) * y(t) \quad (5.25)$$

$$= a(x_1(t) * y(t)) + b(x_2(t) * y(t)) \quad (5.26)$$

$$= az_1(t) + bz_2(t) \quad (5.27)$$

με

$$z_1(t) = x_1(t) * y(t) \quad (5.28)$$

$$z_2(t) = x_2(t) * y(t) \quad (5.29)$$

λόγω των ιδιοτήτων της ομογένειας και της επιμεριστικότητας.

5.4.1.6 Εύρος

Η απόδειξη της ιδιότητας του εύρους φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 5.4. Στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης, το σήμα $y(t)$ χρησιμοποιείται ως $y(t - \tau)$, με μεταβλητή το τ . Άρα υπόκειται σε πράξεις αντιστροφής χρόνου και μετατόπισης. Ως εκ τούτου, το σήμα θα είναι μη μηδενικό στο $[t - t_4, t - t_3]$. Στη διαδικασία της συνέλιξης, το γινόμενο $x(\tau)y(t - \tau)$ είναι μη μηδενικό για $t - t_3 \geq t_1$ και $t - t_4 \leq t_2$, δηλ. στο διάστημα $[t_1 + t_3, t_2 + t_4]$.

5.4.1.7 Ουδέτερο στοιχείο

Είναι

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = x(\tau)\Big|_{\tau=t} = x(t) \quad (5.30)$$

από ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. ■

Η συνέλιξη φημίζεται ως μια πράξη αρκετά περίπλοκη και δύσκολη, και σε πρώτη επαφή αποθαρρύνει τον αναγνώστη. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη της ολοκλήρωσης εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί *χρονική αντιστροφή και μετατόπιση*.

5.4.2 Η συνέλιξη αναλυτικά

Ας αναλύσουμε διεξοδικά τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (5.31)$$

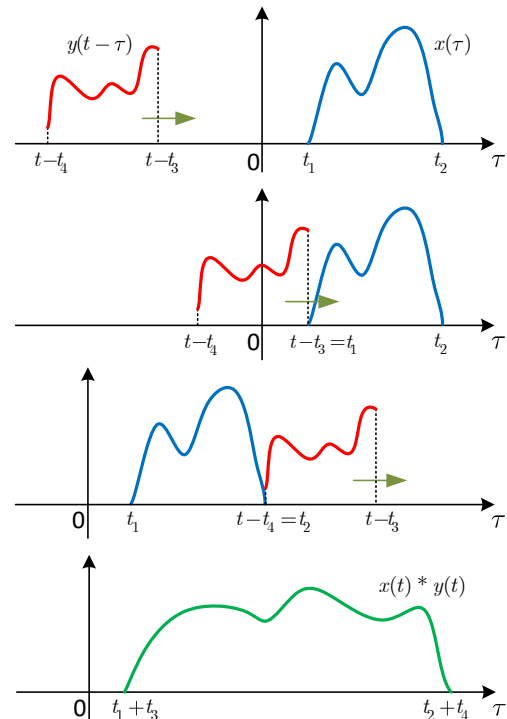
Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το τ και όχι το t . Το t το θεωρούμε σταθερό μέσα στο ολοκλήρωμα. Έπειτα, το ολοκλήρωμα αυτό εμπεριέχει δυο σήματα: το $x(\tau)$ και το $y(t - \tau)$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα $x(t)$, δεν έχει υποστεί κάποια μεταβολή - η αλλαγή ονόματος στη μεταβλητή δεν αλλάζει κάτι. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη πράξεων στην ανεξάρτητη μεταβλητή: *χρονική αντιστροφή και μετατόπιση*. Μια ακολουθία μετατροπών είναι η εξής:

$$y(t) \rightarrow y(\tau) \rightarrow y(-\tau) \rightarrow y(-\tau + t) = y(t - \tau) \quad (5.32)$$

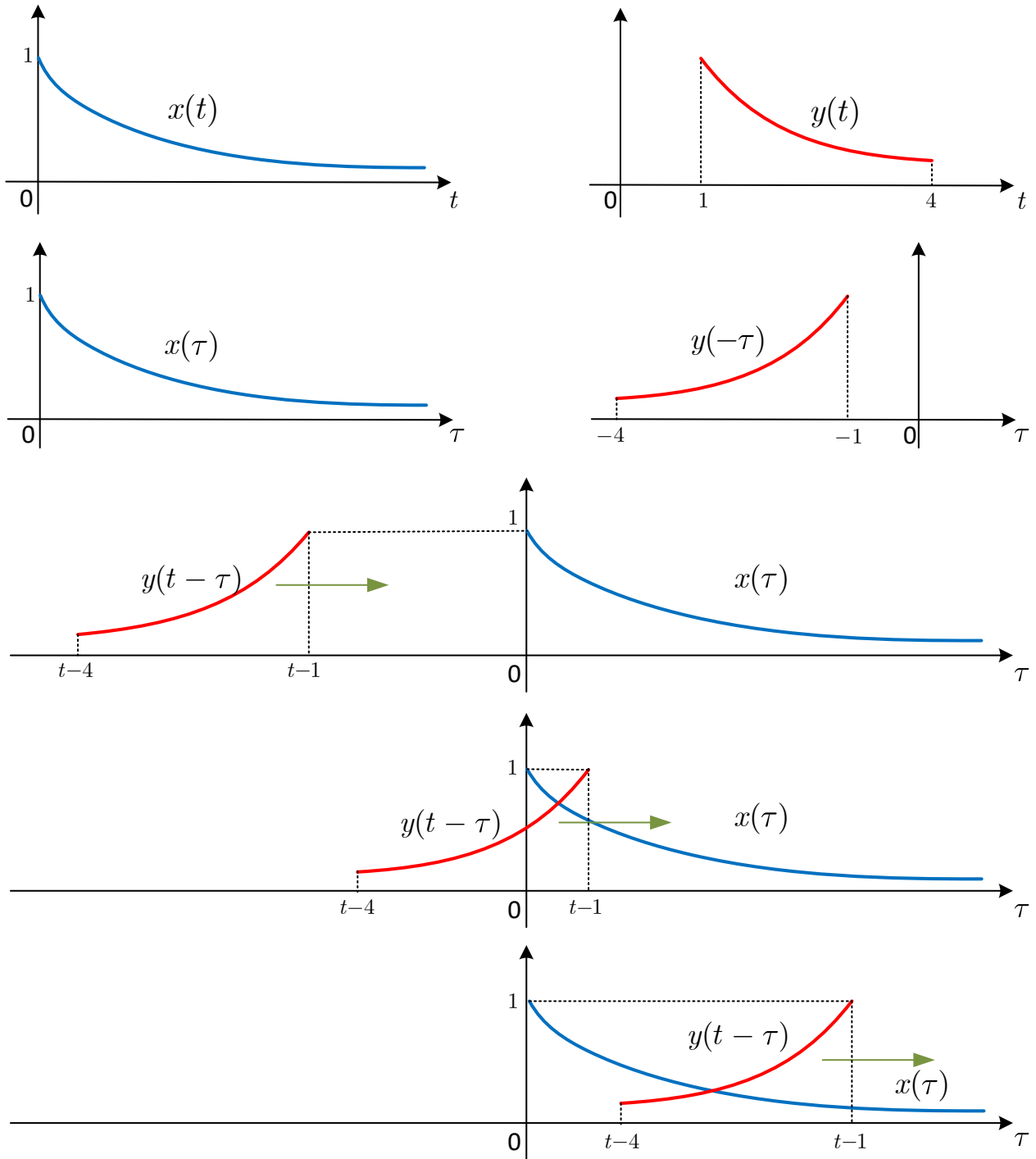
Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση κατά t* . Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x(\tau)$ και ολοκληρώνεται ως προς τ . Το αποτέλεσμα της συνέλιξης μπορεί να βρεθεί με δυο τρόπους: *αλγεβρικά και γραφικά*. Συνήθως προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 5.5.

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x(t)$ και το $y(t)$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y(t)$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα αντιστρέψουμε χρονικά σύμφωνα με τον ορισμό.
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του τ και όχι του t , όπως ακριβώς επιτάσσει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, και το $y(\tau)$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά t . Θυμίζουμε ότι χειριζόμαστε το t ως σταθερά στο ολοκλήρωμα. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y(\tau)$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.
- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y(t - \tau)$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το “ολισθαίνουμε” πάνω στον ίδιο άξονα με το $x(\tau)$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι το $y(\tau)$ “συναντά” κάποια στιγμή το $x(\tau)$. Όταν συμβεί αυτό, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα έχουμε μια μη μηδενική τιμή για το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Αυτές οι χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξί “άκρο” του $y(t - \tau)$ συναντά το αριστερό “άκρο” του $x(\tau)$ και πέρα, και όταν το αριστερό “άκρο” του $y(t - \tau)$ δεν έχει περάσει το $t = 0$, δηλ. όταν

$$t - 1 > 0 \Rightarrow t > 1 \text{ και } t - 4 < 0 \Rightarrow t < 4 \quad (5.33)$$



Σχήμα 5.4: Γραφική απόδειξη της ιδιότητας του εύρους.



Σχήμα 5.5: Γραφική απεικόνιση της συνέλιξης.

οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $t - 1$, εκεί δηλαδή που το γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων είναι μη μηδενικό, ως

$$c_{xy}(t) = \int_0^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (5.34)$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Στην πέμπτη γραμμή, το $y(t - \tau)$ έχει μπει ολόκληρο μέσα στο $x(\tau)$, πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη είναι μη μηδενική όταν το αριστερό “άκρο” της $y(t - \tau)$

περάσει το $t = 0$, δηλ. όταν

$$t - 4 > 0 \Rightarrow t > 4 \quad (5.35)$$

και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (5.36)$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο t εκτός από τα παραπάνω, το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι μηδέν, δηλ.

$$c_{xy}(t) = 0, \quad t < 1 \quad (5.37)$$

Τώρα που η διαδικασία είναι περισσότερο ξεκάθαρη, ας θεωρήσουμε ότι τα παραπάνω σήματα είναι τα

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad (5.38)$$

$$y(t) = e^{-bt}, \quad t \in (1, 4) \quad (5.39)$$

Οπότε θα έχουμε

- Όταν $t - 1 < 0 \iff t < 1$, τότε $c_{xy}(t) = 0$.
- Όταν $t - 1 > 0$ και $t - 4 < 0$, δηλ. όταν $0 < t < 4$, τότε

$$c_{xy}(t) = \int_0^{t-1} e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}d\tau = e^{-bt} \int_0^{t-1} e^{(b-a)\tau}d\tau \quad (5.40)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} e^{(b-a)\tau} \Big|_0^{t-1} = e^{-bt} \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)} - 1) \quad (5.41)$$

$$= \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)-bt} - e^{-bt}) \quad (5.42)$$

- Τέλος, όταν $t - 4 > 0$, δηλ. $t > 4$, τότε

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^{t-1} e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}d\tau = e^{-bt} \frac{1}{b-a} e^{(b-a)\tau} \Big|_{t-4}^{t-1} \quad (5.43)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)} - e^{(b-a)(t-4)}) = \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)-bt} - e^{(b-a)(t-4)-bt}) \quad (5.44)$$

Μπορούμε λοιπόν να συνοψίσουμε την παραπάνω γραφική λύση της συνέλιξης ως ακολούθως:

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων $x(t)$ και $y(t)$

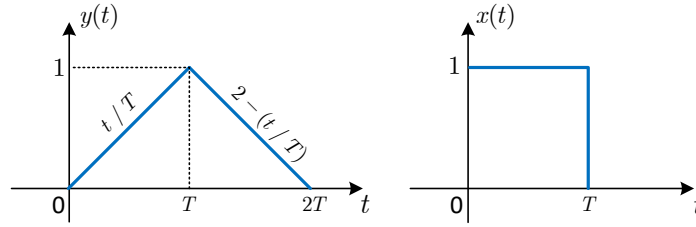
1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x(t)$, το οποίο και μετατρέπουμε σε $x(\tau)$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x(t - \tau)$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς τ , και “σύρουμε” το $x(t - \tau)$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα “συνυπάρχουν”, δηλ. όπου το γινόμενο $x(t - \tau)y(\tau)$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

5.4.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Πολύ χρήσιμα είναι τα ακόλουθα παραδείγματα, τα οποία θα σας βοηθήσουμε να κατανοήσετε ακόμα περισσότερο την πράξη της συνέλιξης.

Παράδειγμα 5.1:

Έστω τα σήματα του Σχήματος 5.6.

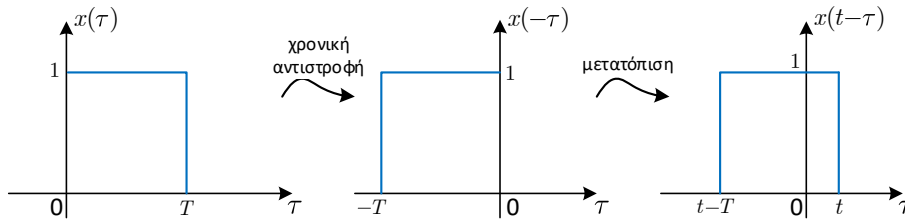


Σχήμα 5.6: Σήματα Παραδείγματος 5.1.

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * y(t)$.

Λύση:

Επιλέγουμε να κάνουμε πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του $x(t)$, καθ' ότι ευκολότερο. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο Σχήμα 5.7. και άρα θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις, όπως αυτές



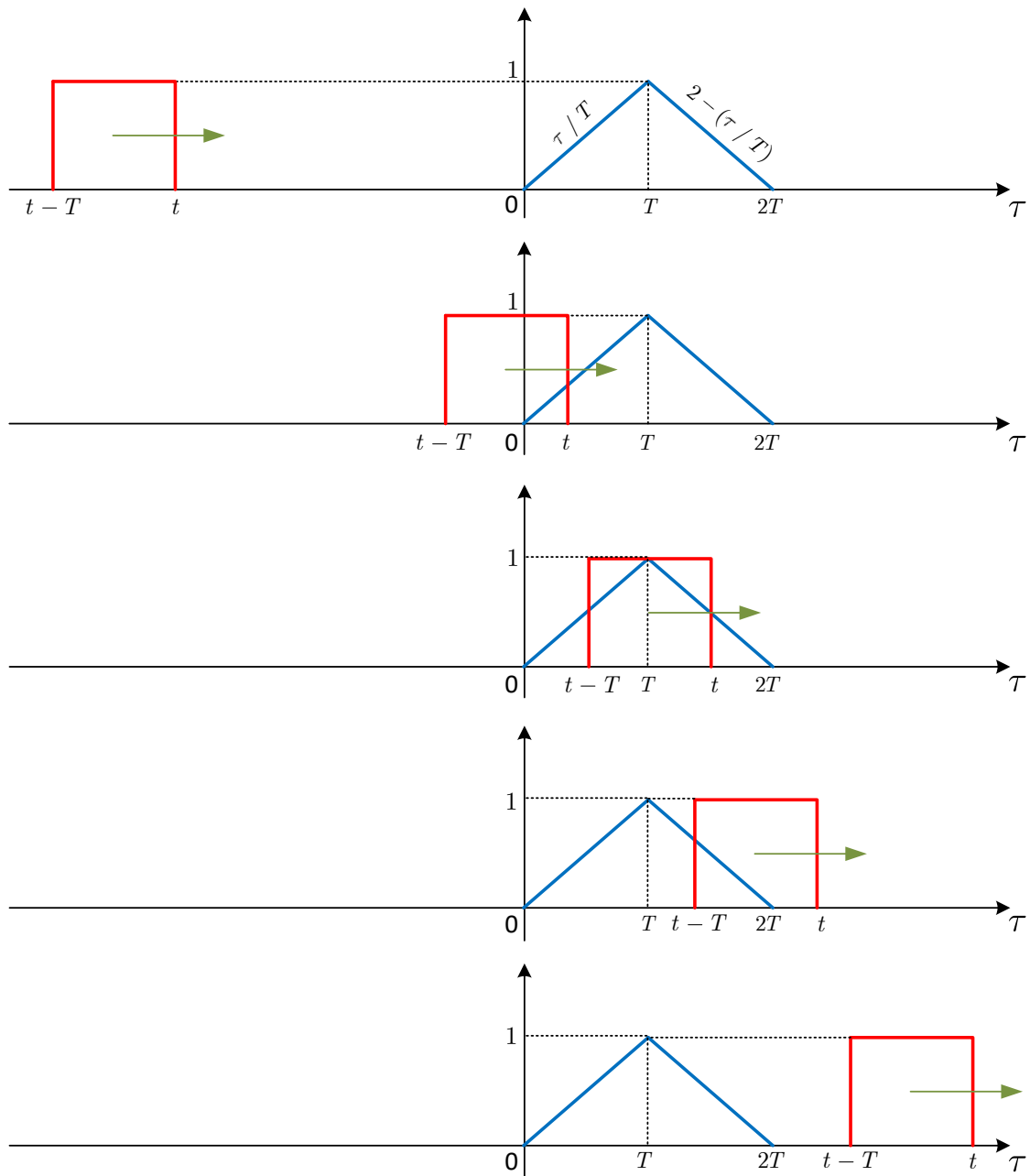
Σχήμα 5.7: Μετατόπιση και ανάκλαση σήματος $x(t)$.

απεικονίζονται στο Σχήμα 5.8.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι $y(t) = 0$, $t < 0$.
- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι $y(t) = \int_0^t \frac{\tau}{T} d\tau = \frac{t^2}{2T}$, για $t > 0$ και $t - T < 0$, δηλ. $0 < t < T$.
- Για την τρίτη περίπτωση είναι $y(t) = \int_{t-T}^t \frac{\tau}{T} d\tau + \int_T^t \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}$, για $t - T < T$ και $t > T$, δηλ. $T < t < 2T$.
- Για την τέταρτη περίπτωση είναι $y(t) = \int_{t-T}^{2T} \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}$, για $t < 3T$ και $t > 2T$, δηλ. $2T < t < 3T$.
- Για την πέμπτη περίπτωση είναι $y(t) = 0$, $t > 3T$.

Άρα τελικά θα είναι:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ και } t > 3T \\ \frac{t^2}{2T}, & 0 < t < T \\ -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}, & T < t < 2T \\ \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}, & 2T < t < 3T \end{cases} \quad (5.45)$$



Σχήμα 5.8: Περιπτώσεις Συνέλιξης Παραδείγματος 5.1.

Παράδειγμα 5.2:

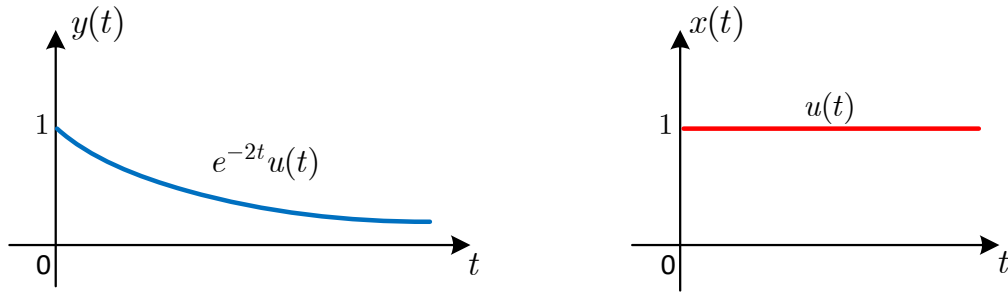
Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = u(t) \quad (5.46)$$

$$y(t) = e^{-2t}u(t) \quad (5.47)$$

Λύση:

Τα δύο σήματα φαίνονται στο Σχήμα 5.9. Το $x(t)$ είναι πιο κατάλληλο για να υποστεί τις μεταβολές που είναι απαραίτητες στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης.



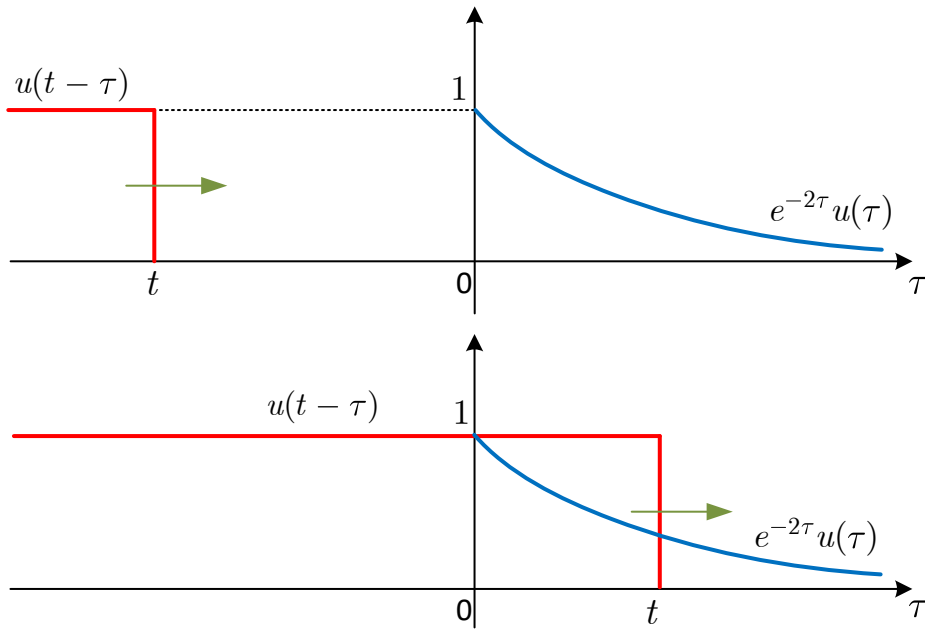
Σχήμα 5.9: Σήματα Παραδείγματος 5.2.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 5.10.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι $c_{xy}(t) = 0$ για $t < 0$.
- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \frac{1 - e^{-2t}}{2} \quad (5.48)$$

για $t > 0$.



Σχήμα 5.10: Περιπτώσεις Παραδείγματος 5.2.

Άρα τελικά θα είναι

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-2t}}{2}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (5.49)$$

Το παράδειγμα αυτό είναι εξαιρετικό για να δείξουμε την αλγεβρική μέθοδο υπολογισμού της συνέλιξης. Θα είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (5.50)$$

Είναι

$$u(\tau)u(t - \tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.51)$$

αφού

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.52)$$

και

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.53)$$

Η Σχέση (5.50) γράφεται ως

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), \quad \text{για } t > 0 \quad (5.54)$$

Οπότε

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t) \quad (5.55)$$

■

Παράδειγμα 5.3:

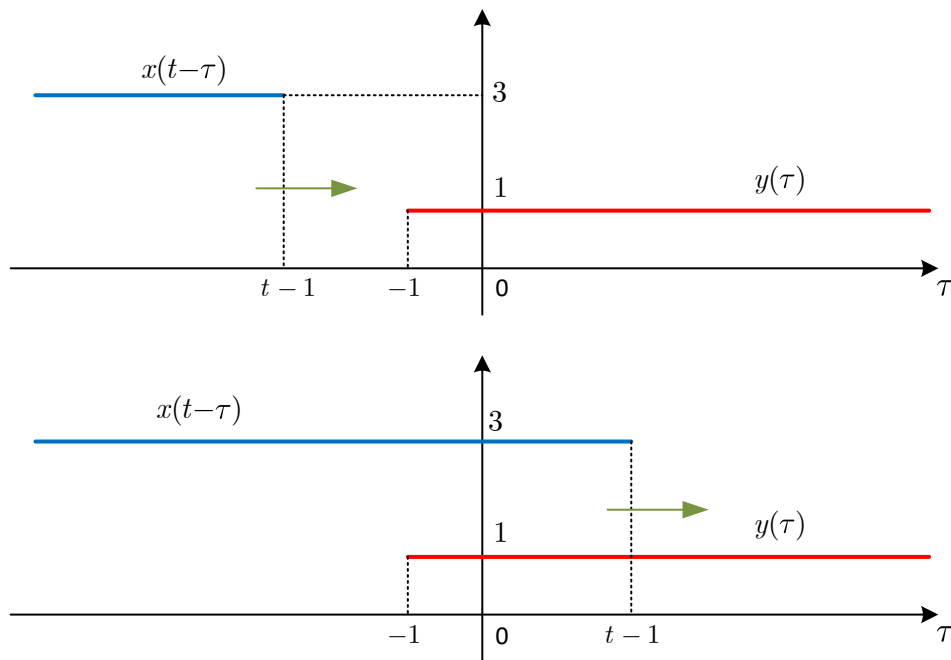
Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = 3u(t - 1) \quad (5.56)$$

$$y(t) = u(t + 1) \quad (5.57)$$

Λύση:

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 5.11. Θα είναι



Σχήμα 5.11: Περιπτώσεις Παραδείγματος 5.3.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = 0 \quad (5.58)$$

για $t - 1 < -1 \iff t < 0$.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 3u(\tau-1)u(t-\tau)d\tau \quad (5.59)$$

$$= \int_{-1}^{t-1} 3d\tau = 3(t-1) + 3 = 3t \quad (5.60)$$

για $t-1 > -1 \iff t > 0$, αφού

$$3u(\tau-1)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & -1 < \tau < t-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.61)$$

Άρα συνολικά

$$c_{xy} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3t, & t > 0 \end{cases} \quad (5.62)$$

ή αλλιώς

$$c_{xy}(t) = 3tu(t) \quad (5.63)$$

■

Παράδειγμα 5.4:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = 2e^{-3t}u(t-1) \quad (5.64)$$

$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t+2}{2}\right) \quad (5.65)$$

Λύση:

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 5.12. Θα είναι

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = 0 \quad (5.66)$$

για $t+3 < 1 \iff t < -2$.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_1^{t+3} 2e^{-3\tau}d\tau \quad (5.67)$$

$$= -\frac{2}{3}(e^{-3(t+3)} - e^{-3}) = -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3} \quad (5.68)$$

για $t+1 < 1$ και $t+3 > 1$, άρα $-2 < t < 0$.

- Για την τρίτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{t+1}^{t+3} 2e^{-3\tau}d\tau \quad (5.69)$$

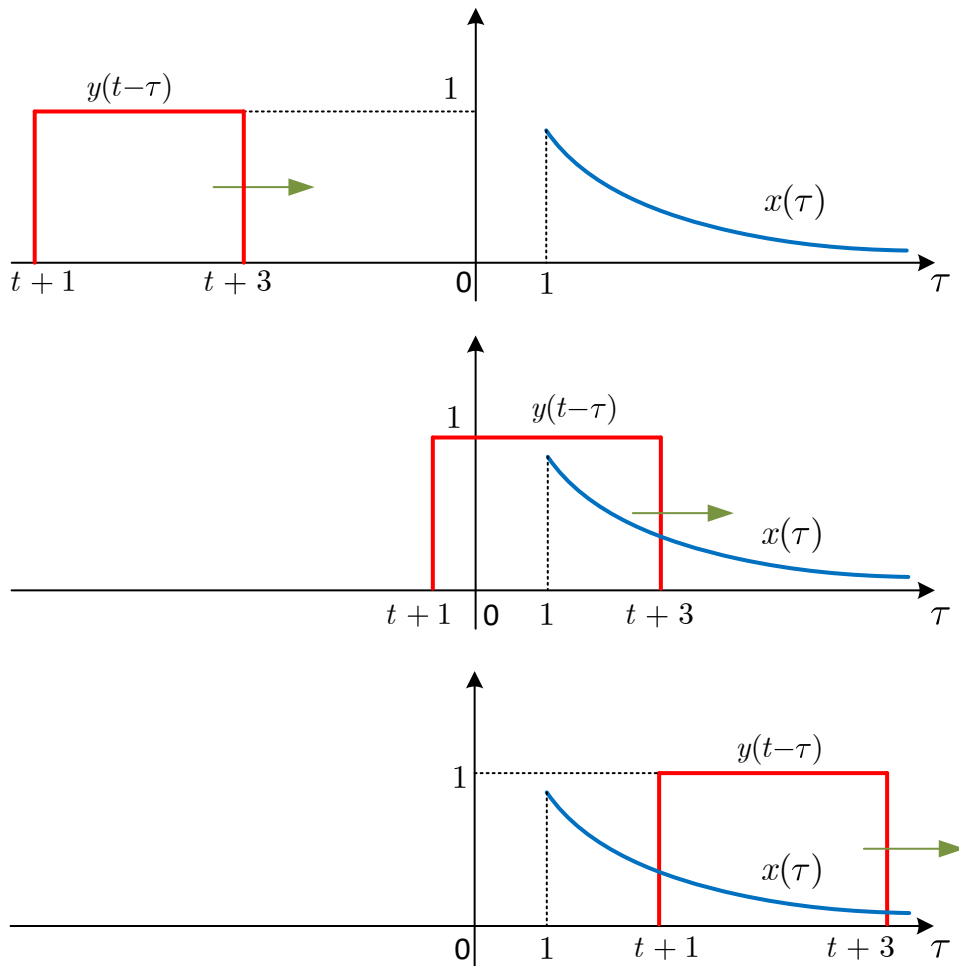
$$= -\frac{2}{3}(e^{-3(t+3)} - e^{-3(t+1)}) = -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3(t+1)} \quad (5.70)$$

για $t+1 > 1 \iff t > 0$.

Άρα συνολικά

$$c_{xy} = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3}, & -2 < t < 0 \\ -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3(t+1)}, & t > 0 \end{cases} \quad (5.71)$$

■



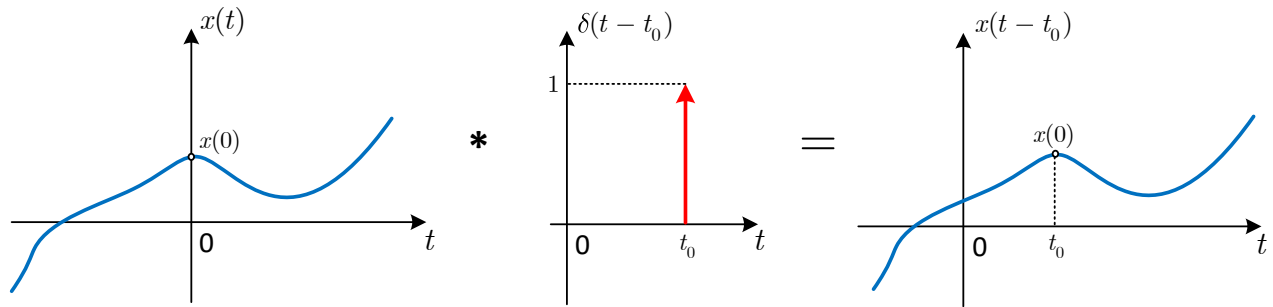
Σχήμα 5.12: Περιπτώσεις Παραδείγματος 5.4.

5.4.4 Συνέλιξη και Συναρτήσεις Δέλτα

Όταν ένα εκ των δυο σημάτων που εμπλέκονται σε μια συνέλιξη είναι μια συνάρτηση Δέλτα, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα

$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = x(t \pm t_0) \quad (5.72)$$

η οποία είναι πολύ χρήσιμη στη μελέτη συστημάτων - η απόδειξη αφήνεται σε σας στην Άσκηση XXXX. Η Σχέση (5.72) δηλώνει ότι όταν κάνουμε συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται στη χρονική στιγμή $t = \pm t_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x(t)$ μετατοπισμένο στη θέση $t = \pm t_0$! Θα δούμε στη συνέχεια ότι αυτή η ιδιότητα μας διευκολύνει πάρα πολύ όταν έχουμε να κάνουμε με συστήματα. Σχηματικά, δείτε το Σχήμα 5.13. Μπορούμε προς το παρόν να δούμε ένα παράδειγμα που θα μας βοηθήσει να δούμε πως δουλεύει αυτή η πράξη και πως διαφέρει η συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα με τον πολλαπλασιασμό του με την ίδια συνάρτηση, δυο πράξεις που συχνά προκαλούν σύγχυση.



Σχήμα 5.13: Συνέλιξη σήματος με συνάρτησης Δέλτα.

Παράδειγμα 5.5:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} -1, & t = -4 \\ 1, & t = 0 \\ -1, & t = 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.73)$$

(α') Σχεδιάστε το σήμα στο χρόνο.

(β') Γράψτε το σήμα ως άθροισμα Συναρτήσεων Δέλτα $\delta(t)$.

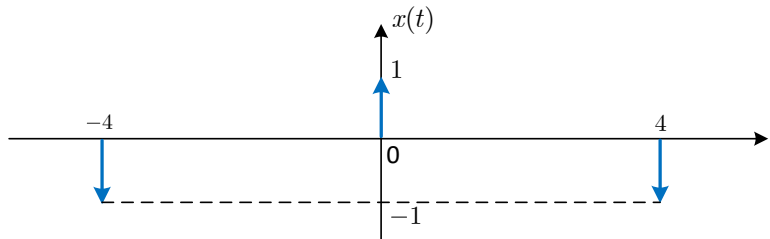
(γ') Πολλαπλασιάζουμε το $x(t)$ με το σήμα $y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$. Σχεδιάστε το αποτέλεσμα.

(δ') Κάνουμε συνέλιξη το $x(t)$ με το σήμα $y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$. Σχεδιάστε πρώτα τα σήματα που προκύπτουν και μετά γράψτε μια βολική μαθηματική σχέση που περιγράφει το αποτέλεσμα.

(ε') Ποιός είναι ο γενικός κανόνας που προκύπτει από τα δυο παραπάνω ερωτήματα; Δηλ. τι συμβαίνει σε ένα σήμα όταν πολλαπλασιάζεται με μια συνάρτηση Δέλτα, και τι συμβαίνει όταν γίνεται συνέλιξη με μια Συνάρτηση Δέλτα;

Λύση:

(α') Το σήμα στο χρόνο φαίνεται στο Σχήμα 5.14.



Σχήμα 5.14: Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: σήμα στο χρόνο.

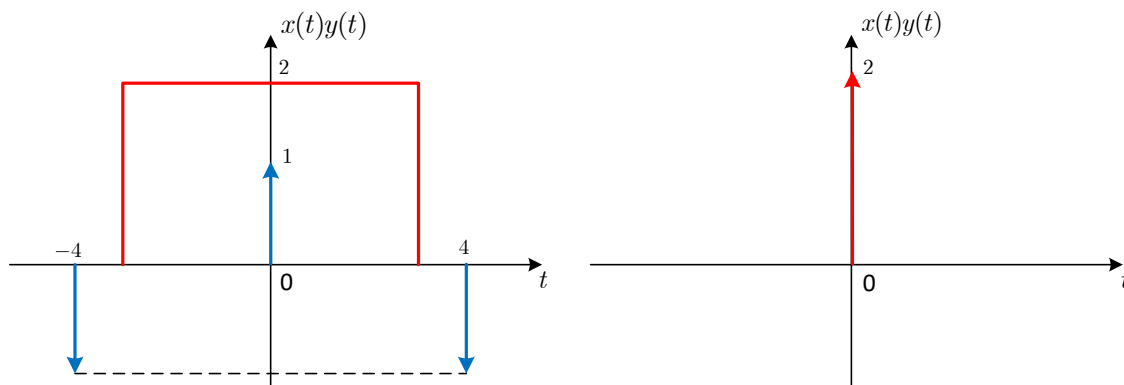
(β') Είναι

$$x(t) = -\delta(t + 4) + \delta(t) - \delta(t - 4) \quad (5.74)$$

(γ') Το γινόμενο των δυο σημάτων είναι

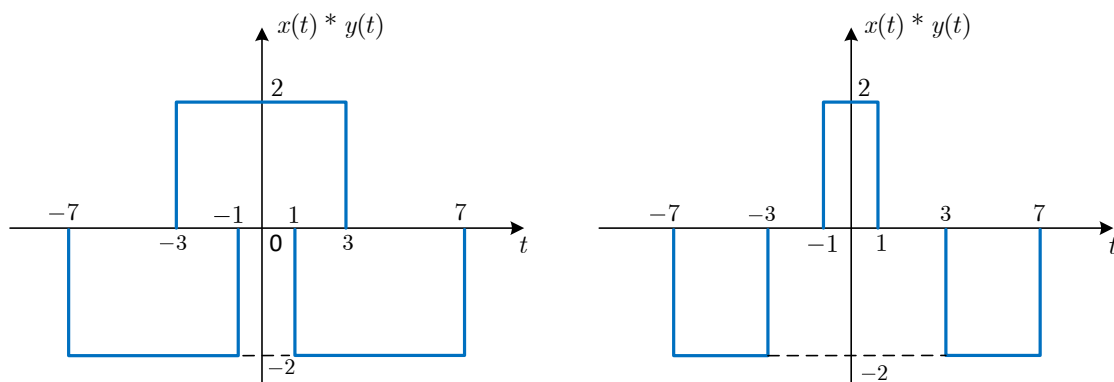
$$x(t) \cdot y(t) = x(t) \cdot 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) \cdot (-\delta(t + 4) + \delta(t) - \delta(t - 4)) = 2\delta(t) \quad (5.75)$$

και φαίνεται στο Σχήμα 5.15.



Σχήμα 5.15: Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: γινόμενο σημάτων.

(δ') Η συνέλιξη των σημάτων είναι



Σχήμα 5.16: Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: συνέλιξη σημάτων.

$$x(t) * y(t) = x(t) * 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) = -2\text{rect}\left(\frac{t+4}{6}\right) + 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-4}{6}\right) \quad (5.76)$$

και φαίνεται στο Σχήμα 5.16 αριστερά. Παρατηρώντας το, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$x(t) * y(t) = -2\text{rect}\left(\frac{t+5}{4}\right) + 2\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-5}{4}\right) \quad (5.77)$$

και φαίνεται στο Σχήμα 5.16 δεξιά.

(ε') Ο γενικός κανόνας είναι ότι το γινόμενο σήματος με Συνάρτηση Δέλτα δίνει μια Συνάρτηση Δέλτα με πλάτος το πλάτος του σήματος στη θέση της Συνάρτησης Δέλτα. Η συνέλιξη σήματος με Συνάρτηση Δέλτα μετατοπίζει τη θέση αναφοράς του σήματος από το μηδέν στη θέση t_0 , αν $\delta(t - t_0)$ είναι η Συνάρτηση Δέλτα η οποία εμπλέκεται στη συνέλιξη.

■

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις με βάση όσα έχουμε συζητήσει ως τώρα.

Παρατηρήσεις

(α') Όπως βλέπετε, είναι πολύ σημαντικό να μπορείτε να υπολογίσετε σωστά το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του ολοκληρώματος. Οι πράξεις στο ολοκλήρωμα είναι συνήθως αρκετά απλές.

(β') Όπως είδαμε, η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει δηλ. ότι

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = y(t) * x(t) = c_{yx}(t) \quad (5.78)$$

Αυτό σημαίνει ότι αν κάναμε πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του $x(t)$ αντί για του $y(t)$, θα είχαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

(γ') Προτιμούμε να αντιστρέψουμε χρονικά και μετατοπίσουμε το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδικασία υπολογισμού της συνέλιξης. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.

(δ') Χρήσιμη ιδιότητα, η οποία αναφέρεται στον Πίνακα 5.1, για πεπερασμένης διάρκειας σήματα είναι η εξής: αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[a, b]$ και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[c, d]$, τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα $[a + c, b + d]$. Γνωρίζοντας αυτό, μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας. Για παράδειγμα, αν στο Σχήμα 5.5, είχαμε συνέλιξη του σήματος $y(t)$ με τον εαυτό της, δηλ. $c_{yy}(t) = y(t) * y(t)$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μη μηδενικό στο διάστημα $[2, 8]$.

(ε') Στη βιβλιογραφία, θα βρείτε τον ορισμό της συνέλιξης με διαφορετικές μεταβλητές. Π.χ.

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (5.79)$$

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)dt \quad (5.80)$$

Και οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι σωστές. Απλά αλλάξαμε τις μεταβλητές t, τ μεταξύ τους. Διαλέξτε όποια σας βολεύει, αρκεί να είστε συνεπείς και προσεκτικοί. Σε αυτό το βιβλίο, προτιμούμε την πρώτη σχέση.

(ζ') Σε πρώτη ανάγνωση, η πράξη της συνέλιξης μοιάζει δύσκολη. Μάλιστα ένα γνωστό online λεξικό παρουσιάζει τη λέξη “συνέλιξη” ως συνώνυμο της πολυπλοκότητας, της περιπλοκής, και της δυσκολίας! ^{α'} Σε άλλες πηγές ^{β'} αναφέρεται ότι “η συνέλιξη προκαλεί τρόμο στην καρδιά του μέσου μηχανικού”! Ελπίζω να είδατε όμως ότι τελικά η πράξη αυτή δεν είναι κάτι που πρέπει να προκαλεί φόβο.

^{α'} <https://www.merriam-webster.com/dictionary/convolution#synonyms>

^{β'} <https://pulse.embs.org/january-2015/history-convolution-operation/>

5.4.5 Πίνακας Συνέλιξης

Η διαδικασία της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από έτοιμους πίνακες συνέλιξης, όπως ο Πίνακας 5.2. Αυτός ο πίνακας, που αναφέρει διάφορα ζεύγη σημάτων και το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους, μπορεί να σας βοηθήσει στον έλεγχο των αποτελεσμάτων σας.

Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης		
$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{x(t) * y(t)}$
$x(t)$	$\delta(t - T)$	$x(t - T)$
$e^{at}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1 - e^{at}}{-a}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}u(t), a \neq b$
$e^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$te^{at}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}u(t)$
$t^n u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{n!e^{at}}{a^{n+1}}u(t) - \sum_{j=0}^n \frac{n!t^{n-j}}{a^{j+1}(n-j)!}u(t)$
$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{bt} - e^{at} + (a-b)te^{at}}{(a-b)^2}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{at}u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{at}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{bt}u(t)$	$\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j m!(n+j)!t^{m-j}e^{at}}{j!(m-j)!(a-b)^{n+j+1}}u(t)$
		$+ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!(m+k)!t^{n-k}e^{bt}}{k!(n-k)!(b-a)^{m+k+1}}u(t), a \neq b$
$e^{at} \cos(bt + \theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta - \phi)e^{\lambda t} - e^{-at} \cos(bt + \theta - \phi)}{\sqrt{(a + \lambda)^2 + b^2}}u(t),$ $\phi = \tan^{-1} \frac{-b}{a + \lambda}$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}u(t) + e^{bt}u(-t)}{b - a}, \Re\{b\} > \Re\{a\}$
$e^{at}u(-t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{b - a}u(-t)$

Πίνακας 5.2: Πίνακας συνέλιξεων

Κεφάλαιο 6

Ανάλυση Συστημάτων στο Πεδίο της Συχνότητας

6.1 Εισαγωγή

Ως τώρα συζητήσαμε για σήματα στο χώρο της συχνότητας. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γνωρίσουμε την οπτική των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας. Θα δούμε τι παραπάνω μπορεί να μας προσφέρει αυτή η οπτική σε σχέση με όσα γνωρίζουμε από το χώρο του χρόνου και πώς μπορούμε να την εκμεταλλευτούμε σε πραγματικά προβλήματα, ενώ θα συστηθούμε με πραγματικές (ή κοντά στις πραγματικές ☺) και πολύ γνωστές σας εφαρμογές που καταδεικνύουν τη χρησιμότητα του πεδίου της συχνότητας.

6.2 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

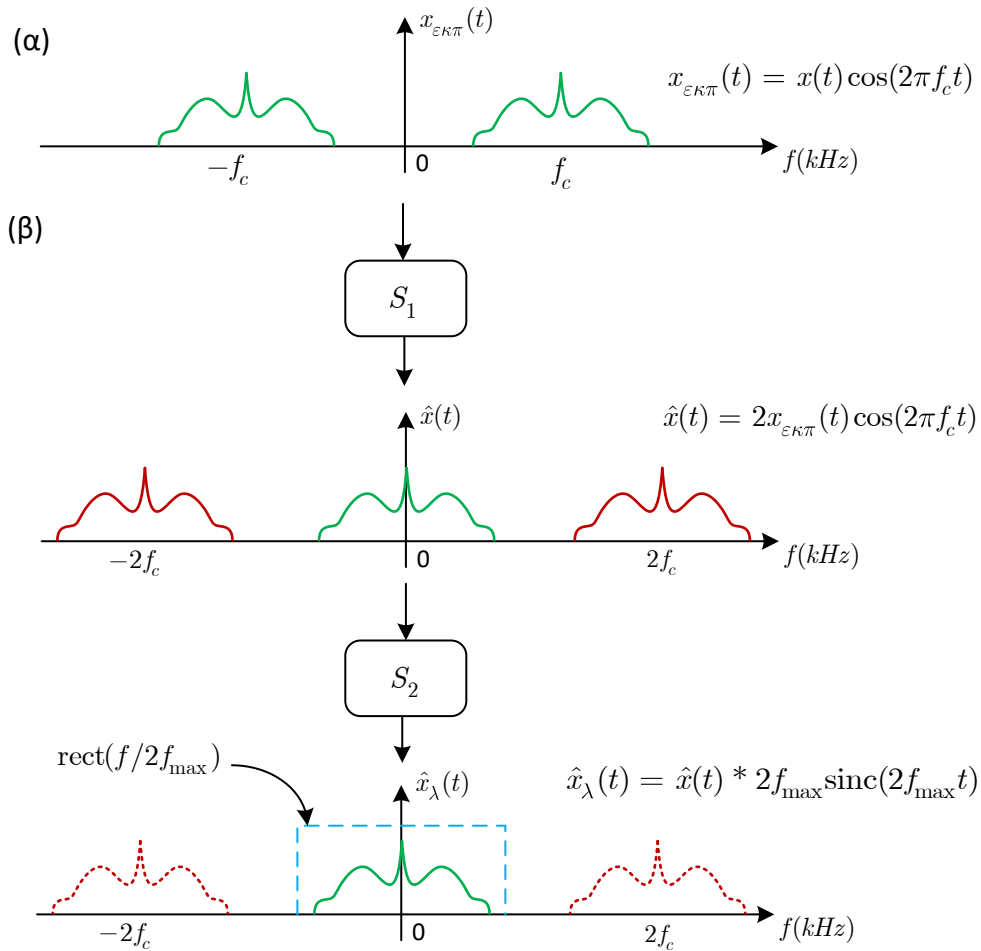
Στο κεφάλαιο αυτό θα μιλήσουμε αρκετά για τηλεπικοινωνιακά συστήματα, οπότε ας συνεχίσουμε από την εφαρμογή που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο: ραδιοφωνική μετάδοση διαμόρφωσης πλάτους. Πλέον γνωρίζετε ότι οι δυο ανταγωνιστές ραδιοφωνικοί σταθμοί μπορούν να εκπέμπουν ταυτόχρονα το πρόγραμμά τους εξ' αιτίας της ιδιότητας της μετατόπισης στη συχνότητα - ή αλλιώς, της διαμόρφωσης - του Μετασχ. Fourier. Η ιδιότητα αυτή λύνει τόσο το πρόβλημα της κατασκευής των κεραιών όσο και το πρόβλημα της απασχόλησης του ίδιου φάσματος συχνοτήτων για τους δυο σταθμούς.

Ας μπούμε τώρα στη θέση του δέκτη: ο δέκτης λαμβάνει το συχνοτικό περιεχόμενο του σταθμού που θέλει να ακούσει σε συχνότητες αρκετά μεγαλύτερες από τις πραγματικές. Για να μπορεί το ραδιοφωνικό σήμα να γίνει αντιληπτό από το ανθρώπινο αυτί, θα χρειαστεί να “κατεβούν” οι συχνότητες του εκπεμπόμενου σήματος στην περιοχή του ακουστικού φάσματος ($0 - 22000$ Hz) και να απομονωθούν από όποιες υπόλοιπες συχνότητες! Στο Σχήμα 6.1 βλέπετε τη διαδικασία¹ που ακολουθείται για την αποδιαμόρφωση του σήματος. Είναι εμφανές ότι απαιτούνται δυο συστήματα γι' αυτήν:

- ένα σύστημα S_1 , που απλά πολλαπλασιάζει το ληφθέν σήμα $x_{εκπ}(t)$ με ένα ημιτονοειδές ίδιας συχνότητας με τη φέρουσα συχνότητα f_c του ληφθέντος σήματος. Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής επαναφέρει το συχνοτικό μετατοπισμένο φάσμα ξανά γύρω από τη συχνότητα $f = 0$! Όμως ταυτόχρονα εισάγει “αντίγραφα” αυτού του φάσματος γύρω από τις συχνότητες $f = \pm 2f_c$.
- ένα σύστημα S_2 που απομονώνει το προαναφερθέν φάσμα, εξαλείφοντας τα “αντίγραφα” του που βρίσκονται γύρω από τις συχνότητες $f = \pm 2f_c$. Το σύστημα αυτό, θεωρητικά, αποτελεί ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο, και έχει τη μαθηματική μορφή της συνάρτησης $\text{rect}(\cdot)$ που γνωρίζετε ήδη στο χώρο της συχνότητας. Ρόλος του είναι να αποκόψει ένα επιθυμητό συχνοτικό τμήμα.

Συστήματα που εκτελούν απλές πράξεις, όπως γινόμενα με άλλα σήματα, και συστήματα που λειτουργούν ως φίλτρα, κρατώντας επιθυμητές περιοχές συχνοτήτων και αποκόπτοντας άλλες, αποτελούν ένα μεγάλο μέρος των πρακτικών εφαρμογών των συστημάτων, ειδικότερα στις τηλεπικοινωνίες. Συστήματα σαν κι αυτά θα γνωρίσουμε στο κεφάλαιο αυτό, δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στο χώρο της συχνότητας.

¹Για την ακρίβεια, μια από τις πιθανές.



Σχήμα 6.1: (α) Διαμορφωμένο σήμα, (β) ανάκτηση αρχικού σήματος εκπομπής.

6.3 Συστήματα στο χώρο της συχνότητας

Ως τώρα περιγράψαμε τα συστήματα είτε ως μια σχέση εισόδου-εξόδου $y(t) = T\{x(t)\}$, είτε μέσω διαφορικών εξισώσεων και αρχικών συνθηκών, όπου η κρουστική τους απόκριση $h(t)$ είχε θεμελιώδη ρόλο. Πλέον έχουμε ένα ισχυρό εργαλείο ανάλυσης σημάτων στο χώρο της συχνότητας, τον μετασχ. Fourier, ο οποίος είδαμε ότι αναλύει ένα σήμα σε ένα άπειρο άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων της μορφής $e^{j2\pi f_0 t}$. Ας δούμε τι συμβαίνει στα συστήματα, όταν αυτά εξετάζονται από την οπτική της συχνότητας. Θα εξετάσουμε γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα (ΓΧΑ), όπου η απόκριση μηδενικής εισόδου δεν υφίσταται, δηλ. περιγράφονται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης.

6.3.1 Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ Συστήματος

Αν υποθέσουμε ότι στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$, εφαρμόζουμε ένα εκθετικό μιγαδικό σήμα $e^{j2\pi f_0 t}$, τότε η έξοδος του συστήματος δίδεται από την πράξη της συνέλιξης, και είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi f_0(t-\tau)} d\tau = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau = H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} \quad (6.1)$$

με το $H(f_0)$ να είναι ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(t)$. Πώς ερμηνεύεται αυτή η σχέση; Παρατηρήστε ότι όταν φέρουμε ως είσοδο ένα οποιοδήποτε μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας f_0 σε ένα ΓΧΑ σύστημα, το αποτέλεσμα που θα πάρουμε στην έξοδό μας θα είναι το ίδιο σήμα της εισόδου, πολλαπλασιασμένο με το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, στη συχνότητα f_0 .

Σε μαθηματική ορολογία, η μιγαδική εκθετική συνάρτηση συχνότητας f_0 αποτελεί ιδιοσυνάρτηση του ΓΧΑ

συστήματος, ενώ η τιμή του μετασχ. Fourier $H(f_0)$ που πολλαπλασιάζεται με την είσοδο ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος.

6.3.2 Απόκριση σε Συχνότητα

Ο μετασχ. Fourier, $H(f)$, της χρονικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος όντας τόσο σημαντικός στην ανάλυση των συστημάτων, δε θα μπορούσε να μην έχει δικό του όνομα: λέγεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνотική απόκριση**, ενώ η ανάλυσή της σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H(f)} \quad (6.2)$$

μας ονομάζει το φάσμα πλάτους της, $|H(f)|$, ως **απόκριση πλάτους** και το φάσμα φάσης της, $\phi_H(f)$, ως **απόκριση φάσης**.

Όμως ένα από τα σημαντικότερα πορίσματα της Ανάλυσης Fourier είναι ότι η *συνέλιξη στο χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα*, και το αντίστροφο (Πίνακας 4.3). Άρα η σχέση της συνέλιξης που περιγράφει την έξοδο ενός συστήματος στο πεδίο του χρόνου

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (6.3)$$

μπορεί να γραφεί στο πεδίο της συχνότητας ως:

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (6.4)$$

Τι σημαίνει η σχέση αυτή για το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης της εισόδου $X(f)$; Αν χρησιμοποιήσουμε την πολική μορφή, θα έχουμε

$$|Y(f)|e^{j\phi_Y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_X(f)}|H(f)|e^{j\phi_H(f)} \quad (6.5)$$

που οδηγεί στις σχέσεις

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)| \quad (6.6)$$

$$\phi_Y(f) = \phi_X(f) + \phi_H(f) \quad (6.7)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι πολύ σημαντικές διότι μας πληροφορούν ότι:

Συχνотική επίδραση ΓΧΑ συστήματος στην είσοδό του

- Το φάσμα πλάτους της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεν είναι άλλο από το *γινόμενο* των επιμέρους φασμάτων πλάτους, της εισόδου και του συστήματος. Άρα, η απόκριση πλάτους του συστήματος δρα *πολλαπλασιαστικά* στο φάσμα πλάτους της εισόδου.
- Το φάσμα φάσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεν είναι άλλο από το *άθροισμα* των επιμέρους φασμάτων φάσης, της εισόδου και του συστήματος. Άρα, η απόκριση φάσης του συστήματος δρα *αθροιστικά* στο φάσμα φάσης της εισόδου.

Τα παραπάνω δυο σημεία ισχύουν ανεξαρτήτως της φύσης του σήματος εισόδου (περιοδικό ή μη, ενέργειας ή ισχύος).

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα της απόκρισης σε συχνότητα των ΓΧΑ συστημάτων είναι ότι αν η χρονική απόκριση $h(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση του χρόνου, η απόκριση σε συχνότητα είναι *συζυγής συμμετρική* συνάρτηση της συχνότητας:

$$H(f) = H^*(-f) \quad (6.8)$$

που συνεπάγεται ότι το πραγματικό της μέρος είναι άρτια συνάρτηση του f , και το φανταστικό είναι περιττή συνάρτηση του f , δηλ.

$$H_R(f) = H_R(-f) \quad (6.9)$$

$$H_I(f) = -H_I(-f) \quad (6.10)$$

Όμοια, το πλάτος της απόκρισης σε συχνότητα είναι άρτια συνάρτηση του f και η φάση είναι περιττή συνάρτηση του f , δηλ.

$$|H(f)| = |H(-f)| \quad (6.11)$$

$$\phi_H(f) = -\phi_H(-f) \quad (6.12)$$

Τα παραπάνω δεν πρέπει να σας εκπλήσσουν καθώς είναι γνωστές ιδιότητες στο χώρο της συχνότητας που έχουν τα πραγματικά σήματα στο χρόνο.

Όμως η χρονική απόκριση δεν είναι ο μόνος τρόπος περιγραφής ενός ΓΧΑ συστήματος. Μάλιστα, ο πρώτος τρόπος περιγραφής - γενικών - συστημάτων που συναντήσαμε ήταν μέσω διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Ας θυμηθούμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^M \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \quad (6.13)$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Η ιδιότητα της παραγωγισής του μετασχ. Fourier μπορεί να μετατρέψει την παραπάνω σχέση ως

$$\sum_{i=0}^N (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^M (j2\pi f)^l b_l X(f) \quad (6.14)$$

$$Y(f) \sum_{i=0}^N (j2\pi f)^i a_i = X(f) \sum_{l=0}^M (j2\pi f)^l b_l \quad (6.15)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^N a_i (j2\pi f)^i} \quad (6.16)$$

Ο αριθμητής και ο παρονομαστής της παραπάνω ρητής συνάρτησης αποτελούν πολυώνυμα του $j2\pi f$. Αν υποθέσουμε ότι έχουν M και N διακριτές ρίζες $-\mu_l$ και $-\kappa_i$ αντίστοιχα, με $M < N$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$H(f) = \frac{\prod_{l=1}^M (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^N (j2\pi f + \kappa_i)} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f} \quad (6.17)$$

μέσω της τεχνικής του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα.

6.3.3 ΓΧΑ Συστήματα με Περιοδική Είσοδο

Ας αρχίσουμε τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων με περιοδική είσοδο. Το αποτέλεσμα της Σχέσης (6.1) είναι σημαντικό, γιατί αν φέρουμε ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$, με ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.18)$$

η έξοδος $y(t)$ του συστήματος είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.19)$$

Βλέπετε ότι το μόνο που αλλάζει είναι οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier: από X_k γίνονται $H(kf_0)X_k$ όπου $H(kf_0)$ είναι η τιμή της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$ του συστήματος για $f = kf_0$. Αυτομάτως, η παραπάνω σχέση μας λέει ότι ένα άθροισμα ημιτόνων που θα εμφανιστεί στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος, θα παραμείνει άθροισμα ημιτόνων στην έξοδο, ίδιων συχνοτήτων αλλά με διαφορετικά πλάτη και φάσεις!

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.1:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με χρονική απόκριση

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) \quad (6.20)$$

και στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 4 \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.21)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$. Τι παρατηρείτε;

Λύση:

Από τον Πίνακα 4.4 έχουμε

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) \longleftrightarrow H(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} \quad (6.22)$$

Η απόκριση σε συχνότητα γράφεται ως

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H(f)} \quad (6.23)$$

Άρα η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(f)| = \frac{2}{|1 + j2\pi f|} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2}} \quad (6.24)$$

ενώ για τη φάση θα έχουμε

$$H(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} = \frac{2(1 - j2\pi f)}{(1 + j2\pi f)(1 - j2\pi f)} = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2} - j \frac{4\pi f}{1 + (2\pi f)^2} = H_R(f) + jH_I(f) \quad (6.25)$$

δηλαδή

$$\phi_H(f) = \tan^{-1} \frac{H_I(f)}{H_R(f)} = \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{4\pi f}{1 + (2\pi f)^2}}{\frac{2}{1 + (2\pi f)^2}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{2\pi f}{1} \right) = -\tan^{-1}(2\pi f) \quad (6.26)$$

λόγω του ότι η αντίστροφη εφαπτομένη είναι περιττή συνάρτηση. Όμως η είσοδος είναι της μορφής

$$x(t) = 4 \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 2e^{jt}e^{j\pi/2} + 2e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (6.27)$$

δηλ. έχει συχνότητες $\pm 1/2\pi$. Γνωρίζουμε ότι οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του ΓΧΑ συστήματος, και έτσι δεδομένου ότι το σύστημα είναι πραγματικό σήμα, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = 2H\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H\left(-\frac{1}{2\pi}\right)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (6.28)$$

$$= 2H\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H^*\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (6.29)$$

$$= 2\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{j\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}e^{jt}e^{j\pi/2} + 2\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{-j\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (6.30)$$

$$= 2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}e^{jt}e^{j\pi/2} + 2\sqrt{2}e^{j\pi/4}e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (6.31)$$

$$= 4\sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.32)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος είναι πάλι ημιτονοειδούς μορφής, όπως η είσοδος, και έχει επηρεαστεί από το σύστημα τόσο στο πλάτος της (πλάτος εισόδου 4, πλάτος εξόδου $4|H(1/2\pi)|$), όσο και στη φάση της (φάση εισόδου $\pi/2$, φάση εξόδου $\pi/2 + \phi(1/2\pi) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$).

Γενικότερα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

Εύρεση εξόδου σε ΓΧΑ σύστημα με περιοδική είσοδο

(α') Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $x(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{j(2\pi f_k t + \theta_k)}$, τότε η έξοδος θα είναι

της μορφής $y(t) = \sum_{k=1}^N A_k H(f_k) e^{j(2\pi f_k t + \theta_k)}$, όπου $H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H(f)}$ η απόκριση σε συχνότητα

του συστήματος.

(β') Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_k t + \theta_k)$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $y(t) = \sum_{k=1}^N A_k |H(f_k)| \cos(2\pi f_k t + \theta_k + \phi_H(f_k))$, όπου $H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H(f)}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

6.3.4 ΓΧΑ Συστήματα με Είσοδο Μη Περιοδικά Σήματα

Πιο γενικά όμως, και για οποιαδήποτε σήματα (όχι απαραίτητα περιοδικά), η σχέση που συνδέει την είσοδο $x(t)$ με την έξοδο $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος $h(t)$ εκφράζεται μέσω της πράξης της συνέλιξης:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (6.33)$$

η οποία μετατρέπεται στο χώρο της συχνότητας ως

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (6.34)$$

Μπορούμε λοιπόν πολύ εύκολα να βρούμε την έξοδο ενός συστήματος στο χώρο της συχνότητας, και να επιστρέψουμε στο χώρο του χρόνου με χρήση του αντίστροφου μετασχ. Fourier.

Επιπλέον, η παραπάνω σχέση επιτρέπει σε ένα σύστημα $h(t)$ με απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ να υπολογιστεί στο χώρο των συχνοτήτων, και μάλιστα πολύ πιο εύκολα απ' ό,τι στο χώρο του χρόνου! Πώς; Προφανώς από τη σχέση

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (6.35)$$

που έχουμε ήδη δει. Βλέπετε ότι, εν γένει, η απόκριση σε συχνότητα είναι μια ρητή συνάρτηση της συχνότητας f . Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{N(f)}{D(f)} \quad (6.36)$$

όπου $N(f), D(f)$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$, με όποιες απλοποιήσεις μπορεί να γίνουν στο κλάσμα. Μια τέτοια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μερικά κλάσματα, δηλ. μπορεί να γραφεί ως

$$H(f) = \frac{N(f)}{D(f)} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} \quad (6.37)$$

στην απλή περίπτωση που οι ρίζες του παρονομαστή $D(f)$ είναι απλές. Σύμφωνα με τον Πίνακα 4.4, μπορούμε να βρούμε την χρονική απόκριση $h(t)$ για ένα αιτιατό σύστημα ως

$$H(f) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^M A_k e^{-\alpha_k t} u(t) \quad (6.38)$$

Φυσικά η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί και η είσοδος $x(t)$, αφού και το $X(f)$ εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση:

$$X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} \quad (6.39)$$

και μπορούμε να καταλήξουμε στο σήμα στο χρόνο $x(t)$ με τις ίδιες ακριβώς τεχνικές.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα πάνω σε αυτά, που είναι πολύ σημαντικά.

Παράδειγμα 6.2:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \quad (6.40)$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (6.41)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος $y(t)$.Λύση:

Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον γνωστό τρόπο του ολοκληρώματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, συμβουλευόμενοι τον Πίνακα 4.4, έχουμε ότι

$$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(f) = X(f)H(f) = \left(\frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} \right) \frac{1}{3+j2\pi f} \quad (6.42)$$

$$= \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)} \quad (6.43)$$

$$= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f} + \frac{C}{3+j2\pi f} \quad (6.44)$$

με

$$A = \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(1+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{5+3j2\pi f}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-1} = 1 \quad (6.45)$$

$$B = \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(2+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-2} = \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-2} = 1 \quad (6.46)$$

$$C = \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(3+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-3} = \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-3} = -2 \quad (6.47)$$

και άρα

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} - \frac{2}{3+j2\pi f} \quad (6.48)$$

και γυρνώντας πίσω στο χρόνο

$$y(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) \quad (6.49)$$

Ας υπολογίσουμε το ίδιο με εφαρμογή του ορισμού της συνέλιξης. Έτσι, θα έχουμε:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (2e^{-\tau}u(\tau) + e^{-2\tau}u(\tau))e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \quad (6.50)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \quad (6.51)$$

Ισχύει ότι

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.52)$$

Άρα

$$y(t) = \int_0^t 2e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau = \int_0^t 2e^{-\tau-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau-3(t-\tau)}d\tau \quad (6.53)$$

$$= \int_0^t 2e^{2\tau-3t}d\tau + \int_0^t e^{\tau-3t}d\tau = 2e^{-3t} \int_0^t e^{2\tau}d\tau + e^{-3t} \int_0^t e^{\tau}d\tau \quad (6.54)$$

$$= e^{-3t}e^{2\tau} \Big|_0^t + e^{-3t}e^{\tau} \Big|_0^t = e^{-3t}(e^{2t} - 1) + e^{-3t}(e^t - 1) \quad (6.55)$$

$$= e^{-t} - e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-3t} = e^{-t} - 2e^{-3t} + e^{-2t}, \quad t > 0 \quad (6.56)$$

$$= e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (6.57)$$

που είναι η ίδια ακριβώς σχέση με τη Σχέση (6.49)! Διαλέξτε τι προτιμάτε. ☺

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την είσοδο $x(t)$, αν μας δίνεται το σύστημα και η έξοδος του. Δείτε:

Παράδειγμα 6.3:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f} \quad (6.58)$$

Στην είσοδό του βρίσκεται ένα σήμα $x(t)$, το οποίο δίνει έξοδο

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \quad (6.59)$$

Βρείτε την είσοδο $x(t)$.

Λύση:

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$y(t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} - \frac{1}{2 + j2\pi f} \quad (6.60)$$

Προφανώς ισχύει

$$Y(f) = H(f)X(f) \iff X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} = \frac{\frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}}{\frac{1}{3+j2\pi f}} = \frac{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}{3+j2\pi f} \quad (6.61)$$

$$= \frac{3 + j2\pi f}{(2 + j2\pi f)(1 + j2\pi f)} = \frac{A}{2 + j2\pi f} + \frac{B}{1 + j2\pi f} \quad (6.62)$$

και το οποίο δίνει το σήμα στο χρόνο

$$x(t) = Ae^{-2t}u(t) + Be^{-t}u(t) \quad (6.63)$$

με

$$A = \frac{3 + j2\pi f}{(2 + j2\pi f)(1 + j2\pi f)}(2 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -2} = \frac{3 + j2\pi f}{(1 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f = -2} = -1 \quad (6.64)$$

$$B = \frac{3 + j2\pi f}{(2 + j2\pi f)(1 + j2\pi f)}(1 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -1} = \frac{3 + j2\pi f}{(2 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f = -1} = 2 \quad (6.65)$$

και άρα τελικά η είσοδος θα είναι

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \quad (6.66)$$

Παράδειγμα 6.4:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t) \quad (6.67)$$

Βρείτε την χρονική του απόκριση $h(t)$.

Λύση:

Στο πεδίο της συχνότητας θα μας είναι χρήσιμη η ιδιότητα της παραγώγισης, μια και έχουμε διαφορικές εξισώσεις. Θα έχουμε

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j2\pi fY(f) + 2Y(f) = 3X(f) - 6j2\pi fX(f) \quad (6.68)$$

$$Y(f)(j2\pi f + 2) = X(f)(3 - 6j2\pi f) \quad (6.69)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{3 - 6j2\pi f}{j2\pi f + 2} \quad (6.70)$$

$$H(f) = \frac{3}{j2\pi f + 2} - \frac{6j2\pi f}{j2\pi f + 2} \quad (6.71)$$

$$= 3\frac{1}{j2\pi f + 2} - 6j2\pi f\frac{1}{j2\pi f + 2} \quad (6.72)$$

και από τα γνωστά ζεύγη και ιδιότητες μετασχηματισμών (παραγώγιση, παράγωγος Δέλτα), θα είναι

$$H(f) = 3\frac{1}{2 + j2\pi f} - 6j2\pi f\frac{1}{2 + j2\pi f} \longleftrightarrow h(t) = 3e^{-2t}u(t) - \frac{d}{dt}6e^{-2t}u(t) \quad (6.73)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) - 6\frac{d}{dt}(e^{-2t})u(t) - 6e^{-2t}\frac{d}{dt}(u(t)) \quad (6.74)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) + 12e^{-2t}u(t) - 6e^{-2t}\delta(t) \quad (6.75)$$

$$= 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t) \quad (6.76)$$

Είναι εμφανές πόσο πιο εύκολος είναι ο υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης στο πεδίο της συχνότητας.

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος για μη περιοδική είσοδο

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $h(t) \longleftrightarrow H(f)$ είναι της μορφής

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{-a_k t} u(t) \longleftrightarrow X(f) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{a_k + j2\pi f}$$

τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως $Y(f) = H(f)X(f)$, και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί η έξοδος $y(t)$.

6.3.5 ΓΧΑ Συστήματα με Συναρτήσεις Δέλτα

Πολλά συστήματα (ή και σήματα) εκφράζονται ως ένα απλό άθροισμα Συναρτήσεων Δέλτα, όπως για παράδειγμα το ΓΧΑ σύστημα

$$y(t) = 2x(t) - x(t-1) \quad (6.77)$$

που έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1) \quad (6.78)$$

Αυτή η περίπτωση είναι η πιο εύκολη, καθώς μπορούμε να δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, αντί αυτού της συχνότητας, εκμεταλλευόμενοι την παρακάτω ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα:

$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = x(t \pm t_0) \quad (6.79)$$

Επαναλαμβάνουμε, ερμηνεύοντας την παραπάνω σχέση, ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = \pm t_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x(t)$ μετατοπισμένο στη θέση $t = \pm t_0$!

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.5:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1) \quad (6.80)$$

Στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{-2t}u(t) \quad (6.81)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Λύση:

Ας δούμε και τις δυο λύσεις (χρόνος και συχνότητα).

- Θα έχουμε

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) = 2e^{-2t}u(t) * (2\delta(t) - \delta(t-1)) \quad (6.82)$$

$$= 2e^{-2t}u(t) * 2\delta(t) - 2e^{-2t}u(t) * \delta(t-1) \quad (6.83)$$

$$= 4e^{-2t}u(t) - 2e^{-2(t-1)}u(t-1) \quad (6.84)$$

- Στο χώρο της συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο, και μέσω μετασχ. Fourier και ιδιοτήτων, θα είναι

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{2}{2+j2\pi f}(2 - e^{-j2\pi f}) \quad (6.85)$$

$$= \frac{4}{2+j2\pi f} - \frac{2}{2+j2\pi f}e^{-j2\pi f} \quad (6.86)$$

και από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier, η έξοδος στο χρόνο θα είναι

$$y(t) = 4e^{-2t}u(t) - 2e^{-2(t-1)}u(t-1) \quad (6.87)$$

Παράδειγμα 6.6:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1) \quad (6.88)$$

Στην είσοδο του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) \quad (6.89)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Λύση:

- Από τους Πίνακες, έχουμε

$$H(f) = e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f} \quad (6.90)$$

και

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f} \quad (6.91)$$

Είναι

$$Y(f) = H(f)X(f) = 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}(e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}) \quad (6.92)$$

$$= 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}e^{j2\pi f} - 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}e^{-j2\pi f} \quad (6.93)$$

$$= 2T\text{sinc}(fT)e^{-j2\pi f} - 2T\text{sinc}(fT)e^{-j6\pi f} \quad (6.94)$$

και

$$y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-1}{T}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-3}{T}\right) \quad (6.95)$$

- Είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * (\delta(t+1) - \delta(t-1)) \quad (6.96)$$

$$= 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * \delta(t+1) - 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * \delta(t-1) \quad (6.97)$$

$$= 2\text{rect}\left(\frac{t-1}{T}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-3}{T}\right) \quad (6.98)$$

από την ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (6.99)$$

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα δε θα άλλαζε τίποτα αν οι συναρτήσεις Δέλτα αποτελούσαν την είσοδο του συστήματος (αντί το ίδιο το σύστημα), και οι είσοδοι $x(t)$ αποτελούσαν τις κρουστικές αποκρίσεις των συστημάτων.

Παρατηρήσεις

- (α') Για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, αν σας βολεύει. Το πώς θα καταλαβαίνετε ποιός τρόπος είναι πιο εύκολος ή σύντομος, απαιτεί εμπειρία. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι αρχικά εμφανές κάτι τέτοιο, και αναγκαστικά δουλεύετε όπως νομίζετε εσείς, μέχρι να επιβεβαιωθείτε ή να διαψευστείτε.
- (β') Υπενθυμίζεται ότι το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα εφαρμόζεται *μόνον* όταν ο βαθμός του πολωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερος από αυτόν του παρονομαστή. Στα παραπάνω παραδείγματα, αυτό ήταν αληθές. Σε περίπτωση που δεν είναι, πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολωνύμων.
- (γ') Στην ανάλυση των παραπάνω συστημάτων, υποθέσαμε ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει, αφού χρησιμοποιήσαμε τα σύμβολα και τις ιδιότητές του. Αυτό είναι αρκετά περιοριστικό, διότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να μην υπάρχει για κάποια σήματα ή συστήματα που εμφανίζονται στην πράξη. Θέλουμε λοιπόν έναν ακόμα πιο γενικό μετασχηματισμό που θα μπορεί να περιγράψει συχνοτικά και μη ευσταθή σήματα! Θα δούμε σύντομα έναν τέτοιο μετασχηματισμό που άρει αυτές τις δυσκολίες.

6.4 Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

Κάποια συστήματα εκτελούν συγκεκριμένες λειτουργίες, οι οποίες είναι πολύ συνήθεις και πολύ χρήσιμες στην πράξη. Αυτές οι λειτουργίες περιλαμβάνουν την αποκοπή συγκεκριμένων συχνοτήτων του σήματος εισόδου και τη διέλευση κάποιων άλλων, και/ή την ενίσχυση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που διέρχονται ελεύθερα του συστήματος. Λόγω αυτής της λειτουργίας τους, αυτά τα συστήματα ονομάζονται “φίλτρα”. Ο λόγος, προφανής: όπως το φίλτρο του καφέ π.χ. δεσμεύει τον καφέ σε στέρεα μορφή και επιτρέπει τη διέλευση του υγρού καφέ, έτσι και αυτά τα φίλτρα, επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων ενώ δεσμεύουν (καταστέλλουν, μηδενίζουν το πλάτος) κάποιες άλλες.

Εδώ θα δούμε κάποια συγκεκριμένα φίλτρα, τα οποία ονομάζονται *ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων*, και είναι ΓΧΑ συστήματα με τις εξής δυο ιδιότητες:

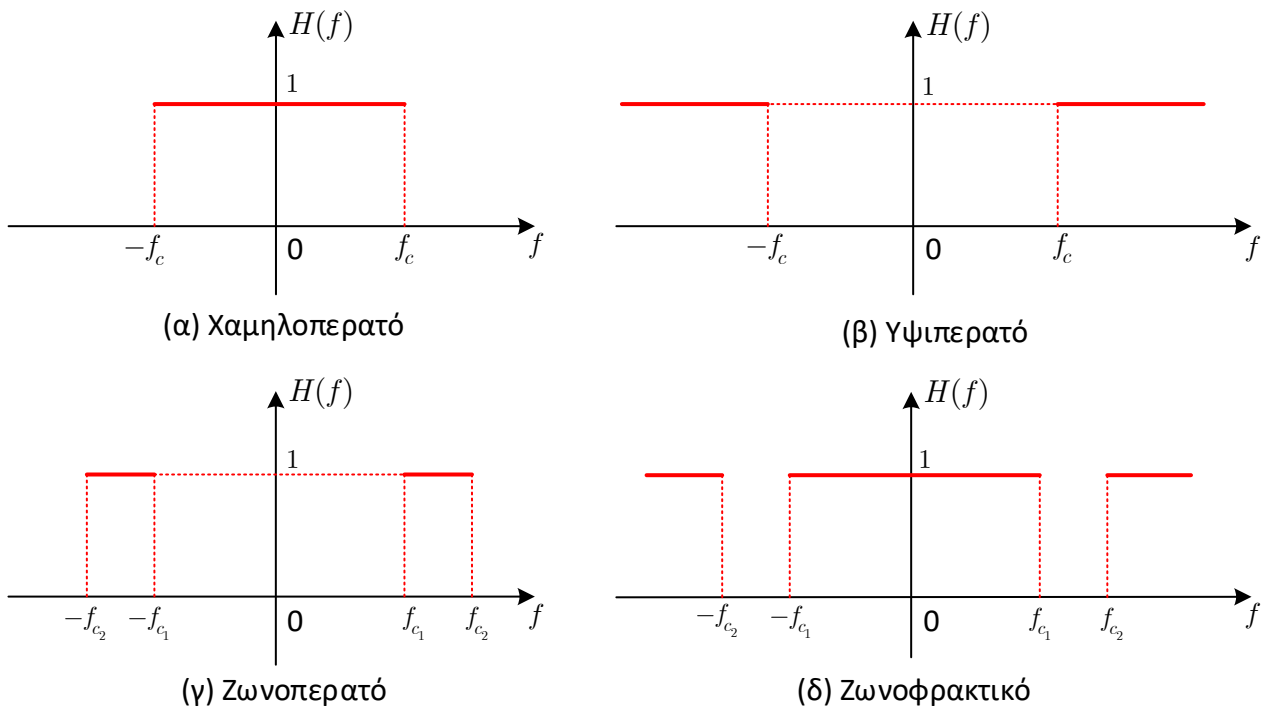
- Είναι ιδανικά, δηλ. *μη πραγματοποιήσιμα*, διότι όπως θα δούμε:
 - είναι μη-αιτιατά
 - η κρουστική τους απόκριση $h(t)$ είναι άπειρης διάρκειας
- Επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων χωρίς διαταραχή στο πλάτος ή στη φάση, ενώ αποκόπτουν εντελώς κάποιες άλλες.

Παρ' όλα αυτά, όλα τα πραγματικά φίλτρα που κατασκευάζουν οι μηχανικοί προσπαθούν να προσεγγίσουν όσο γίνεται καλύτερα αυτά τα θεωρητικά φίλτρα, δεδομένων παραγόντων όπως η πολυπλοκότητα και το κόστος κατασκευής.

Υπάρχουν τέσσερα βασικά είδη φίλτρων επιλογής συχνοτήτων:

1. Το **βαθυπερατό (lowpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από τη μηδενική συχνότητα ως μια συγκεκριμένη συχνότητα f_c .
2. Το **υψιπερατό (highpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη συχνότητα f_c , ως το $+\infty$.
3. Το **ζωνοπερατό (bandpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.
4. Το **ζωνοφρακτικό (bandstop)** φίλτρο: απαγορεύει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.

Η συχνότητα f_c σε όλα τα παραπάνω φίλτρα ονομάζεται *συχνότητα αποκοπής - cutoff frequency*. Τα φίλτρα αυτά



Σχήμα 6.2: Ιδανικά Φίλτρα Μηδενικής Φάσης.

φαίνονται σχηματικά στο Σχήμα 6.2, και όπως παρατηρείτε, είναι πραγματικά και έχουν άρτια συμμετρία, αφού αντιστοιχούν σε πραγματικά σήματα. Ας σημειωθεί ότι τα ιδανικά φίλτρα έχουν σταθερό, μοναδιαίο μέτρο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.2, αλλά η φάση τους μπορεί να είναι μηδενική ή γραμμική (στο Σχήμα 6.2 φαίνονται τα ιδανικά φίλτρα μηδενικής φάσης).

6.4.1 Ιδανικά Φίλτρα Μηδενικής Φάσης

Ας ασχοληθούμε πρώτα με ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων μηδενικής φάσης. Θα εξηγήσουμε ένα προς ένα τα συννηθέστερα είδη φίλτρων και τις εκφράσεις τους στο χώρο του χρόνου και της συχνότητας.

6.4.1.1 Χαμηλοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{LP}(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \quad (6.100)$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί με χρήση της γνωστής συνάρτησης rect ως

$$H_{LP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (6.101)$$

Προσέξτε ότι

$$|H_{LP}(f)| = H_{LP}(f) \quad (6.102)$$

και

$$\angle H_{LP}(f) = 0 \quad (6.103)$$

Η χροστική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{LP}(t) = F^{-1}\{H_{LP}(f)\} = 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (6.104)$$

6.4.1.2 Υψηπερατό φίλτρο

Το ιδανικό υψηπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{HP}(f) = \begin{cases} 0, & |f| < f_c \\ 1, & |f| > f_c \end{cases} \quad (6.105)$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί ως συνάρτηση του χαμηλοπερατού φίλτρου που είδαμε μόλις, ως

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (6.106)$$

Προσέξτε ότι κι εδώ το μέτρο του φίλτρου είναι ίσο με την απόκριση σε συχνότητα, όπως για το χαμηλοπερατό, και η φάση του είναι επίσης μηδέν.

Η χροστική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{HP}(t) = F^{-1}\{H_{HP}(f)\} = \delta(t) - 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (6.107)$$

6.4.1.3 Ζωνοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BP}(f) = \begin{cases} 1, & f_{c1} < |f| < f_{c2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.108)$$

κι όπως βλέπετε στο Σχήμα 6.2, αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς γύρω από τη συχνότητα $\pm f_c = \pm \frac{f_{c1} + f_{c2}}{2}$, με διάρκεια $f_{c2} - f_{c1}$ ο καθένας. Άρα το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{BP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{f_{c2} - f_{c1}}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{f_{c2} - f_{c1}}\right) \quad (6.109)$$

Με αυτή τη γραφή, η χροστική απόκριση υπολογίζεται από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier ως

$$h_{BP}(t) = (f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) e^{-j2\pi f_c t} + (f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) e^{j2\pi f_c t} \quad (6.110)$$

η οποία μπορεί να γραφεί μέσω των σχέσεων του Euler ως

$$h_{BP}(t) = 2(f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) \cos(2\pi f_c t) \quad (6.111)$$

με $f_c = \frac{f_{c1} + f_{c2}}{2}$.

6.4.1.4 Ζωνοφρακτικό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BS}(f) = \begin{cases} 0, & f_{c1} < |f| < f_{c2} \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.112)$$

και μπορεί να γραφεί συναρτήσει του ζωνοπερατού φίλτρου ως

$$H_{BS}(f) = 1 - H_{BP}(f) \quad (6.113)$$

Έτσι, η χροστική του απόκριση μπορεί να βρεθεί εύκολα ως

$$h_{BS}(t) = \delta(t) - h_{BP}(t) = \delta(t) - 2(f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) \cos(2\pi f_c t) \quad (6.114)$$

Παρατηρήστε ότι πράγματι όλα τα ιδανικά φίλτρα έχουν χροστική απόκριση η οποία είναι μη-αιτιατή και άπειρης διάρκειας.

6.4.2 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε όμως μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα χρήσης των ιδανικών φίλτρων.

Παράδειγμα 6.7:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8) + \sin(2\pi 20t - \pi/3) \quad (6.115)$$

το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα ιδανικό

(α') χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

(β') υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

Βρείτε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:

Μπορούμε απ' ευθείας να απαντήσουμε ότι αφού τα φίλτρα μας αποκόπτουν τις συχνότητες μεγαλύτερες από 15 Hz (χαμηλοπερατό) και μικρότερες από 15 Hz (υψιπερατό), και η είσοδός μας αποτελείται μόνο από τις συχνότητες 10, 20 Hz, τότε πολύ απλά οι έξοδοι θα είναι

$$(α') \quad y(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8)$$

$$(β') \quad y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3)$$

αντίστοιχα, αφού τα φίλτρα είναι ιδανικά (μοναδιαίου πλάτους) και η φάση τους είναι μηδέν, οπότε δεν υπάρχει καμιά μεταβολή στα πλάτη και τις φάσεις των σημάτων που περνούν στην έξοδο.

Ας επικυρώσουμε αυτό το αποτέλεσμα αναλυτικά. Ο μετασχ. Fourier του σήματος εισόδου είναι

$$X(f) = e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) + e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20) \quad (6.116)$$

(α') Η έξοδος στο χώρο της συχνότητας θα είναι το γινόμενο των μετασχ. Fourier της εισόδου και του συστήματος, δηλ.

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (6.117)$$

$$= (e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) + e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20)) \text{rect}\left(\frac{f}{30}\right) \quad (6.118)$$

$$= e^{j\pi/8} \text{rect}\left(\frac{1}{3}\right) \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \text{rect}\left(\frac{-1}{3}\right) \delta(f + 10) \quad (6.119)$$

$$+ e^{-j5\pi/6} \text{rect}\left(\frac{2}{3}\right) \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \text{rect}\left(\frac{-2}{3}\right) \delta(f + 20) \quad (6.120)$$

λόγω της γνωστής ιδιότητας

$$X(f) \delta(f \pm f_0) = X(\mp f_0) \delta(f \pm f_0) \quad (6.121)$$

Όμως

$$\text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) = \begin{cases} 1, & |f| < \frac{3}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.122)$$

και άρα

$$\text{rect}\left(\frac{\pm 2}{3}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \text{rect}\left(\frac{\pm 1}{3}\right) = 1 \quad (6.123)$$

Οπότε τελικά

$$Y(f) = e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) \longleftrightarrow y(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8) \quad (6.124)$$

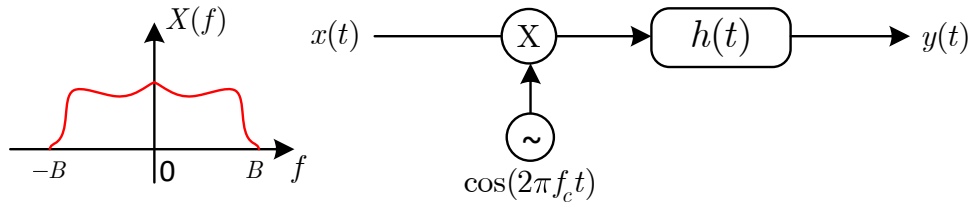
(β') Εντελώς ανάλογα με παραπάνω, δείξτε ότι

$$Y(f) = e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20) \longleftrightarrow y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3) \quad (6.125)$$

Είναι αρκετά προτιμότερο να ακολουθείτε την περισσότερο διαισθητική λύση, καθώς σας σώζει χρόνο και ενισχύει την κατανόηση για το πως λειτουργούν τα φίλτρα στην πράξη.

Παράδειγμα 6.8:

Έστω το σήμα $x(t)$ το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα σύστημα του Σχήματος 6.3,



Σχήμα 6.3: Σύστημα Παραδείγματος 6.8.

με $f_c = 100$ Hz, και με το σύστημα $h(t)$ να είναι της μορφής

$$h(t) = 400\text{sinc}(200t) \quad (6.126)$$

Σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:

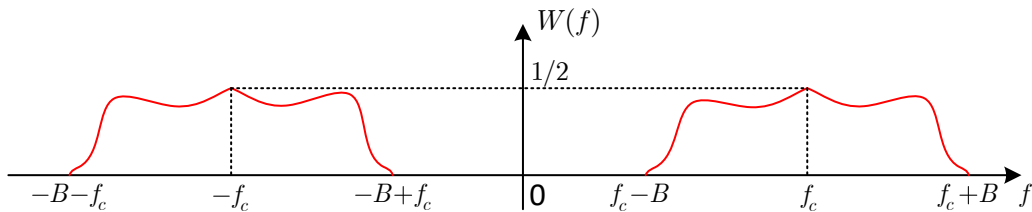
Το σήμα $x(t)$ πολλαπλασιάζεται με ένα συνημίτονο συχνότητας f_c , οπότε αν συμβολίσουμε με $w(t)$ το αποτέλεσμα της πράξης αυτής, θα είναι

$$w(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c) \right) \quad (6.127)$$

και λόγω γνωστής ιδιότητας της συνέλιξης με συνάρτηση Δέλτα, είναι

$$W(f) = \frac{1}{2}X(f - f_c) + \frac{1}{2}X(f + f_c) \quad (6.128)$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 6.4.



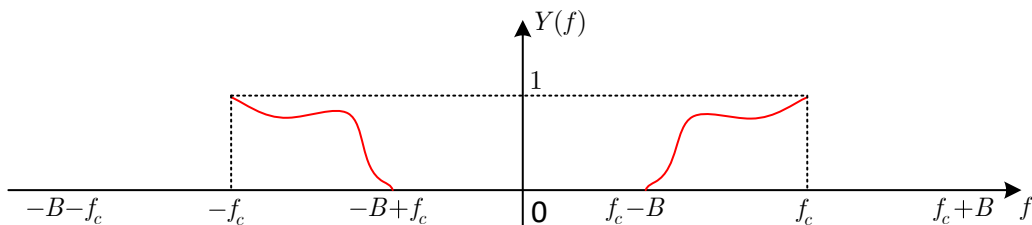
Σχήμα 6.4: Είσοδος συστήματος Παραδείγματος 6.8.

Το σύστημα $h(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$h(t) = 400\text{sinc}(200t) = 2 \times 200\text{sinc}(200t) \longleftrightarrow H(f) = 2\text{rect}\left(\frac{f}{200}\right) \quad (6.129)$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 100$ Hz με πλάτος 2. Άρα το φίλτρο αυτό θα κρατήσει τις συχνότητες της εισόδου που βρίσκονται στο διάστημα $[-100, 100]$ Hz, θα διπλασιάσει το πλάτος τους, ενώ θα αποκόψει τελείως τις συχνότητες εκτός του παραπάνω διαστήματος.

Η έξοδος του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 6.5.

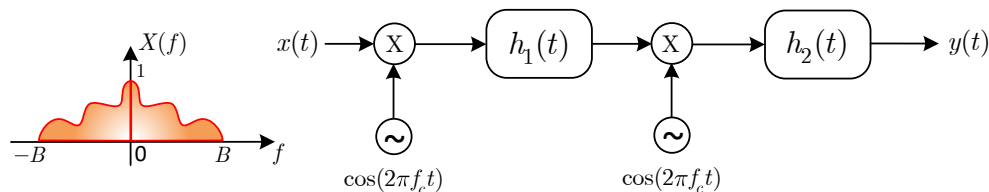


Σχήμα 6.5: Έξοδος συστήματος Παραδείγματος 6.8.

Ας μελετήσουμε τώρα ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.9:

Έστω η διάταξη του Σχήματος 6.6,



Σχήμα 6.6: Διάταξη Παραδείγματος 6.9.

με το σήμα εισόδου $x(t)$ να έχει μετασχ. Fourier όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα συστήματα $h_i(t)$ δίνονται ως:

$$h_1(t) = 4f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (6.130)$$

$$h_2(t) = 8B \text{sinc}(2Bt) \quad (6.131)$$

και η συχνότητα f_c είναι $f_c \gg B$.

(α') Σχεδιάστε το σήμα $W(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_1(t)$ συναρτήσει του $X(f)$.

(β') Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier του συστήματος $h_1(t)$.

(γ') Σχεδιάστε το σήμα $Z(f)$ που προκύπτει ως έξοδος από το σύστημα $h_1(t)$.

(δ') Σχεδιάστε το σήμα $V(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_2(t)$.

(ε') Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier, $H_2(f)$, του δεύτερου συστήματος, $h_2(t)$.

(ϛ') Σχεδιάστε την τελική έξοδο της όλης διάταξης στο χώρο της συχνότητας, $Y(f)$, και γράψτε τη μαθηματική μορφή του $y(t)$ συναρτήσει του $x(t)$.

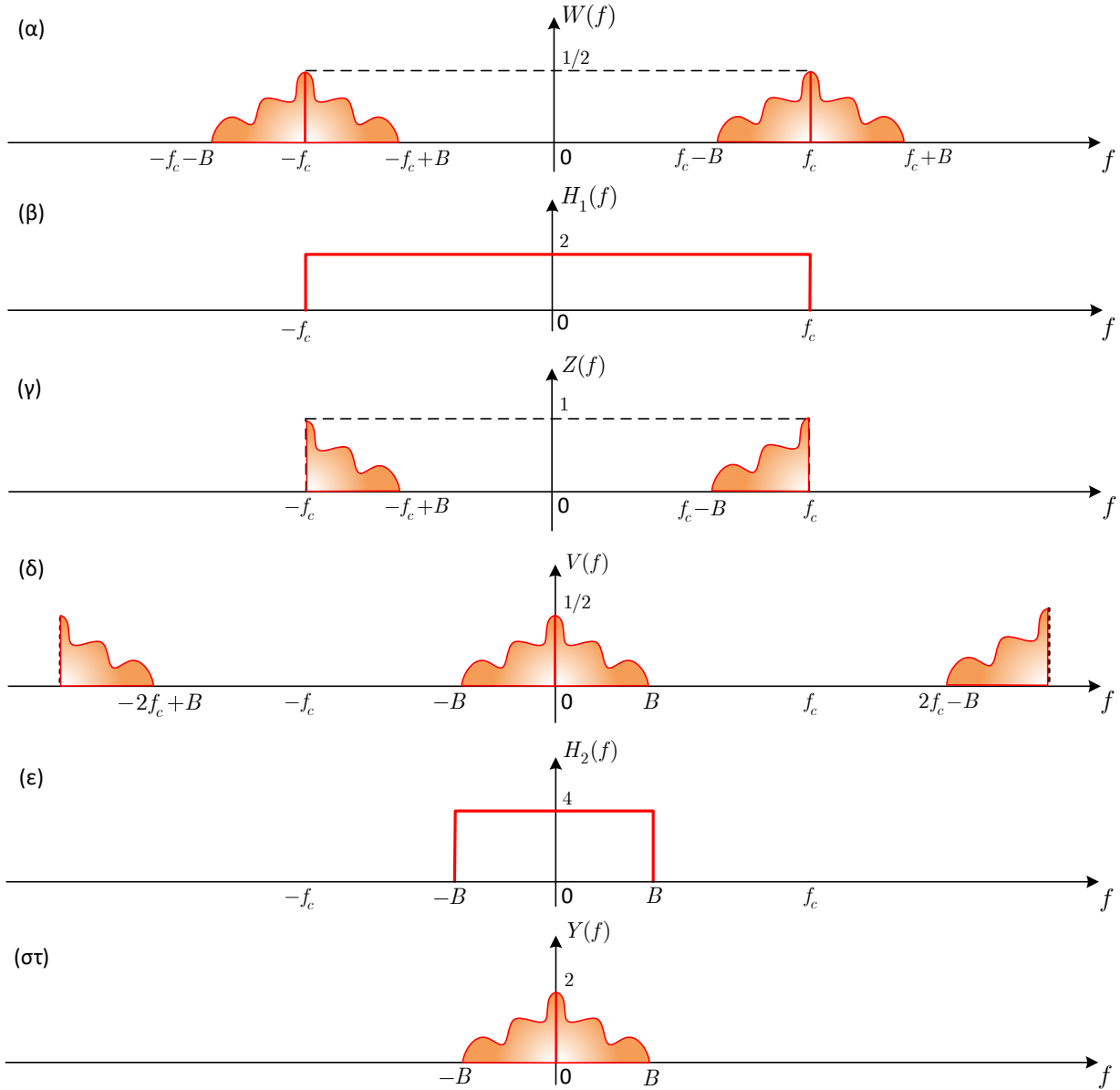
Λύση:

(α') Είναι

$$w(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c) \right) \quad (6.132)$$

$$= \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c) \quad (6.133)$$

Το φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 6.7(α) και είναι ουσιαστικά το φάσμα του σήματος εισόδου μετατοπισμένο γύρω από τη συχνότητα $\pm f_c$.



Σχήμα 6.7: Φάσματα Παραδείγματος 6.9.

(β') Είναι

$$h_1(t) = 4f_c \text{sinc}(2f_c t) \longleftrightarrow H_1(f) = 2\text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (6.134)$$

το οποίο φαίνεται στο 6.7(β), και αποτελεί ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής f_c και πλάτους 2.

(γ') Είναι

$$Z(f) = W(f)H_1(f) = \frac{1}{2}X(f - f_c)H_1(f) + \frac{1}{2}X(f + f_c)H_1(f) \quad (6.135)$$

που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα κομμάτι του αρχικού φάσματος $W(f)$ όπως στο Σχήμα 6.7(γ), που παραμένει στην έξοδο μετά την εφαρμογή του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου $H_1(f)$.

(δ') Το $V(f)$ θα είναι το φάσμα του $Z(f)$ μετατοπισμένο στις συχνότητες $\pm f_c$, δηλ.

$$v(t) = z(f) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow V(f) = \frac{1}{2}Z(f - f_c) + \frac{1}{2}Z(f + f_c) \quad (6.136)$$

όπως στο Σχήμα 6.7(δ).

(ε') Είναι

$$h_2(t) = 8B \text{sinc}(2Bt) \longleftrightarrow H_2(f) = 4 \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (6.137)$$

το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 6.7(ε), και αποτελεί ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής B και πλάτος 4.

(ς') Η έξοδος $Y(f)$ θα είναι της μορφής

$$Y(f) = V(f)H_2(f) = \frac{1}{2}Z(f - f_c)H_2(f) + \frac{1}{2}Z(f + f_c)H_2(f) \quad (6.138)$$

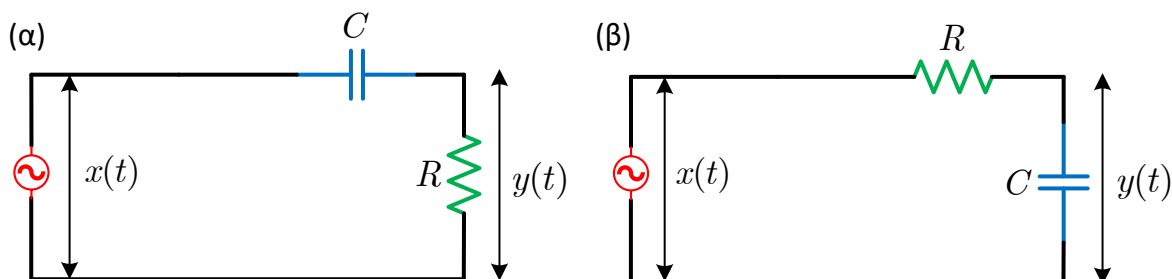
όπως στο Σχήμα 6.7(στ), αφού το φίλτρο $H_2(f)$ αποκόπτει όλες τις συχνότητες εκτός του διαστήματος $(-B, B)$, και αυτό που απομένει είναι ένα σήμα ίδιο με το αρχικό σήμα εισόδου $x(t)$ πολλαπλασιασμένο επί 2, δηλ.

$$y(t) = 2x(t) \quad (6.139)$$

Ας δούμε, τέλος, έναν απλό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να πραγματοποιήσουμε δυο από τα φίλτρα που περιγράψαμε.

Παράδειγμα 6.10:

Για τα ηλεκτρικά κυκλώματα που φαίνονται στο Σχήμα 6.8



Σχήμα 6.8: (α) υψιπερατό και (β) χαμηλοπερατό φίλτρο.

βρείτε τις αποκρίσεις πλάτους και φάσης, αν γνωρίζετε ότι οι εξισώσεις διαφορών που τα περιγράφουν είναι

$$(\alpha') \quad \frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$(\beta') \quad RC \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$$

Λύση:

(α') Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγωγίσισης στην εξίσωση διαφορών έχουμε

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j2\pi fY(f) + \frac{1}{RC}Y(f) = j2\pi fX(f) \quad (6.140)$$

$$\left(\frac{1}{RC} + j2\pi f\right)Y(f) = j2\pi fX(f) \quad (6.141)$$

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{\frac{1}{RC} + j2\pi f} \quad (6.142)$$

το οποίο γράφεται

$$H(f) = \frac{(2\pi f)^2}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + (2\pi f)^2} + j \frac{\frac{2\pi f}{RC}}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + (2\pi f)^2} \quad (6.143)$$

Η απόκριση πλάτους δίνεται ως

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{j2\pi fRC}}} \quad (6.144)$$

και η απόκριση φάσης ως

$$\phi_H(f) = \tan^{-1} \frac{1}{2\pi fRC} \quad (6.145)$$

(β') Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία για την επόμενη διαφορική εξίσωση

$$RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t) \longleftrightarrow RCj2\pi fY(f) + Y(f) = X(f) \quad (6.146)$$

$$(j2\pi fRC + 1)Y(f) = X(f) \quad (6.147)$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad (6.148)$$

το οποίο γράφεται

$$H(f) = \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} + j \frac{-2\pi fRC}{1 + (2\pi fRC)^2} \quad (6.149)$$

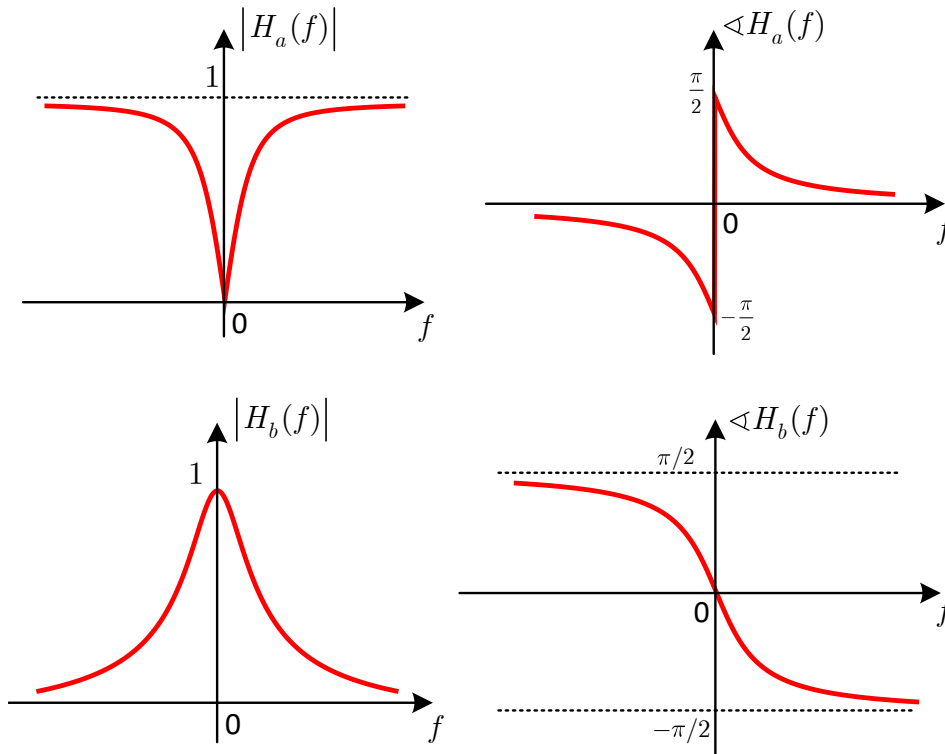
Η απόκριση πλάτους δίνεται ως

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}} \quad (6.150)$$

και η απόκριση φάσης ως

$$\phi_H(f) = -\tan^{-1}(2\pi fRC) \quad (6.151)$$

Οι αποκρίσεις φαίνονται στο Σχήμα 6.9. Καταλαβαίνετε ότι τα δυο ηλεκτρικά κυκλώματα μοντελοποιούν ένα



Σχήμα 6.9: Απόκριση πλάτους και φάσης για (α) υψιπερατό και (β) χαμηλοπερατό φίλτρο.

υψιπερατό (α) και χαμηλοπερατό (β) φίλτρο!