Κεφάλαιο 5

Ανάλυση Συστημάτων στο Πεδίο του Χρόνου

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συζητήσουμε για την αναλυτική μελέτη συστημάτων στο πεδίο του χρόνου.

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο κάποια εισαγωγικά στοιχεία για τα σήματα και τα συστήματα. Στο εξής, θα θεωρούμε ότι ένα σύστημα περιγράφεται στο πεδίο του χρόνου από μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} b_k x(t) \tag{5.1}$$

με a_k, b_k σταθερούς συντελεστές. Σύντομα θα δούμε πώς μπορούμε να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις, υπό ποιές συνθήκες, και τι σημαίνει μια τέτοια εξίσωση σε σχέση με την έννοια του γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος.

5.2 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Πολλά φυσικά συστήματα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, εξ ου και το ενδιαφέρον μας να μπορούμε να λύνουμε τέτοιες. Η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής (5.1) συνίσταται στην εύρεση της εξόδου $y(t)$ δεδομένης μιας εισόδου $x(t)$. Ας δούμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα της Μηχανικής τα οποία (πρέπει να) σας είναι γνωστά.

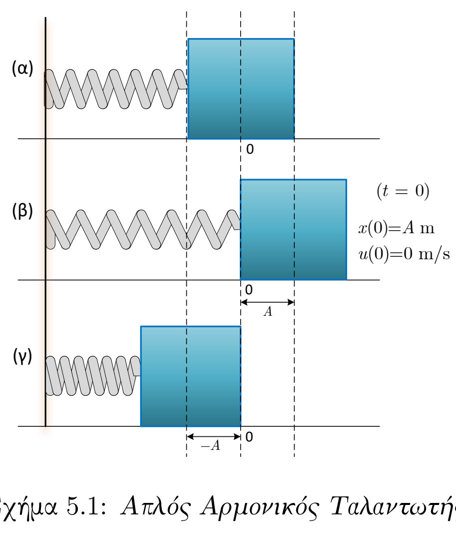
Πολλά πραγματικά, μηχανικά συστήματα περιλαμβάνουν ελατήρια και σώματα. Το πιο σύνηθες (και αρκετά απλό) τέτοιο παράδειγμα είναι ο Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής, που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σώμα μάζας m συνδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς k. Δείτε το Σχήμα 5.1.

Το σύστημα ελατήριο-σώμα βρίσκεται σε ισορροπία στο Σχήμα 5.1(α). Εκτείνουμε το ελατήριο τραβώντας το σώμα προς τα δεξιά, μέχρι τη μέγιστη έκτασή του από τη θέση ισορροπίας. Έστω ότι η έκταση αυτή βρίσκεται A μέτρα από το σημείο ισορροπίας, όπως στο Σχήμα 5.1(β). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το σώμα, το οποίο εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση. Όλη η κίνηση αυτή περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega_0^2 x(t) \Longleftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{5.2}$$

με $x(t)$ τη θέση του σώματος για κάθε χρονική στιγμή t. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση ονομάζεται *ομογενής*. Πιθανότατα γνωρίζετε ότι η εξίσωση θέσης του σώματος (που είναι και η λύση της διαφορικής εξίσωσης) οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \geq 0$ δίνεται από τη σχέση

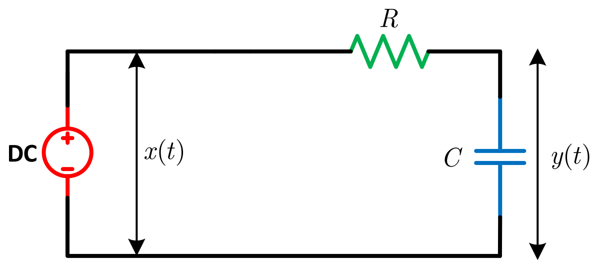
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \;\; t \geq 0 \tag{5.3}$$



Σχήμα 5.1: *Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής.*

με την τιμή ω_0 να εξαρτάται από το υλικό του ελατηρίου και τη μάζα του σώματος, και ϕ την αρχική φάση του ταλαντωτή, που εν γένει μας είναι άγνωστη και εξαρτάται από τις *αρχικές συνθήκες* του προβλήματος. Παρατηρήστε ότι η διαφορική εξίσωση (5.2) παρουσιάζει μόνο έξοδο $x(t)$, καθώς η είσοδός του είναι μηδενική[1]. Πώς προκύπτει άραγε η Σχέση (5.3) από τη Σχέση (5.2);

Επίσης, η πλειονότητα των ηλεκτρικών συστημάτων που υπάρχουν γύρω μας περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Ένα πολύ απλό παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι το *κύκλωμα πυκνωτή-αντιστάτη*, ή αλλιώς το *κύκλωμα RC*. Δείτε το Σχήμα 5.2. Η αντίσταση του αντιστάτη συμβολίζεται με R ενώ η



Σχήμα 5.2: *Κύκλωμα RC.*

χωρητικότητα του πυκνωτή συμβολίζεται με C. Είσοδος σε αυτό το σύστημα είναι η τάση της πηγής, ενώ η έξοδος είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα αυτό δίνεται ως

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{5.4}$$

Αρχικά η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι μηδενική. Αν εφαρμόσουμε στο κύκλωμα μια ιδανική πηγή σταθερής τάσης τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλ. $x(t) = V_0 u(t)$, τότε μπορεί κανείς να δείξει ότι η τάση στα άκρα του πυκνωτή δίνεται ως

$$y(t) = V_0(1 - e^{-t/RC}),\ \ t > 0 \tag{5.5}$$

Πώς προκύπτει αυτή η σχέση από τη διαφορική εξίσωση;

Το κεφάλαιο αυτό αναλαμβάνει να απαντήσει στα ερωτήματα των παραπάνω παραδειγμάτων.

5.3 Η κρουστική απόκριση $h(t)$

Μπορούμε να ορίσουμε μια πολύ βολική περιγραφή για ένα σύστημα. Θα θέλαμε να γνωρίζουμε την έξοδο ενός συστήματος όταν παρουσιάζουμε ως είσοδο ένα σήμα ‘‘ακαριαίας ’’ μορφής, ένα σήμα που υπάρχει σε απειροστά μικρό χρονικό διάστημα[2]. Δε θα ήταν λοιπόν παράλογο να ονομάσουμε αυτήν την έξοδο ως **κρουστική απόκριση**[3]! Με βάση τα παραπάνω, ένα τέτοιο σήμα ‘‘ακαριαίας ’’ εισόδου μπορεί να μοντελοποιηθεί εξαιρετικά από τη γνωστή μας συνάρτηση Δέλτα! Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που ‘‘υπάρχει’’ μόνο για $t = 0$, είναι μηδέν για $t \neq 0$, ενώ το εμβαδό του είναι μοναδιαίο.

Ας ορίσουμε λοιπόν την **κρουστική απόκριση - impulse response** $h(t)$ ενός συστήματος ως την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδο του παρουσιάζεται η συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$. Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του τελεστή $T[\cdot]$ για το σύστημα, θα είναι

$$h(t) = T[\delta(t)] \tag{5.6}$$

ή εναλλακτικά

$$\delta(t) \longrightarrow h(t) \tag{5.7}$$

[1]Παρ᾽ όλο που στις διαφορικές εξισώσεις η έξοδος συμβολίζεται με τη συνάρτηση $y(t)$, στο συγκεκριμένο παράδειγμα είθισται η έξοδος να συμβολίζεται με $x(t)$, καθώς συνδέεται νοηματικά με τη μετατόπιση του σώματος στον οριζόντιο άξονα $x'x$.

[2]Σκεφτείτε ότι χτυπάτε ένα καμπανάκι (σύστημα) με ένα σφυρί (είσοδος) πολύ γρήγορα, όσο ‘‘ακαριαία’’ γίνεται. Θα μπορούσατε να ισχυριστείτε ότι ο ήχος που θα παραχθεί, δηλ. η έξοδος του συστήματος, χαρακτηρίζει το καμπανάκι (το υλικό του, το πάχος του, την επιφάνειά του, κλπ).

[3]Σκεφτείτε το: η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ακαριαία διέγερση).

5.3.1 Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος

Ας δούμε πώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη συνάρτηση Δέλτα για να βρούμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος.

Αφού το σύστημά μας είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο, θα έχουμε τα ακόλουθα ζεύγη εισόδου-εξόδου:

$$\text{(α) κρουστική απόκριση: } \delta(t) \longrightarrow h(t) \tag{5.8}$$

$$\text{(β) χρον. αμεταβλητότητα: } \delta(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau) \tag{5.9}$$

$$\text{(γ) γραμμικότητα/ομογένεια: } x(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow x(\tau)h(t-\tau) \tag{5.10}$$

$$\text{(δ) γραμμικότητα/αθροιστικότητα: } \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau) \tag{5.11}$$

$$\text{(ε) είσοδος: } x(t) = x(t) * \delta(t) \longrightarrow \text{έξοδος: } y(t) = x(t) * h(t) \tag{5.12}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι: εφαρμόζοντας τις απλές ιδιότητες των συστημάτων που γνωρίζουμε επάνω στην αναπαράσταση ενός σήματος εισόδου ως συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα, η έξοδος $y(t)$ αναπαρίσταται ως η *συνέλιξη της εισόδου* $x(t)$ *με την κρουστική απόκριση του συστήματος* $h(t)$! Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \tag{5.13}$$

Μια σχηματική αναπαράσταση της παραπάνω διαδικασίας φαίνεται στο Σχήμα 5.3.

Η γνώση της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος μπορεί να μας δώσει την έξοδο για οποιαδήποτε είσοδο!

5.4 Συνέλιξη

Η πράξη της συνέλιξης είναι θεμελιώδους σημασίας, λόγω του ότι εμφανίζεται συχνά στις φυσικές επιστήμες, στη μηχανική, και στα μαθηματικά, οπότε της αξίζει ξεχωριστή και εκτενής αναφορά. Αμέσως παρακάτω, θα την εξετάσουμε ως γενικότερη πράξη, χωρίς να τη συνδέουμε απαραίτητα με την είσοδο και την έξοδο ενός συστήματος.

Προτού μελετήσουμε αναλυτικά το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, ας δούμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες με βάση τον ορισμό της.

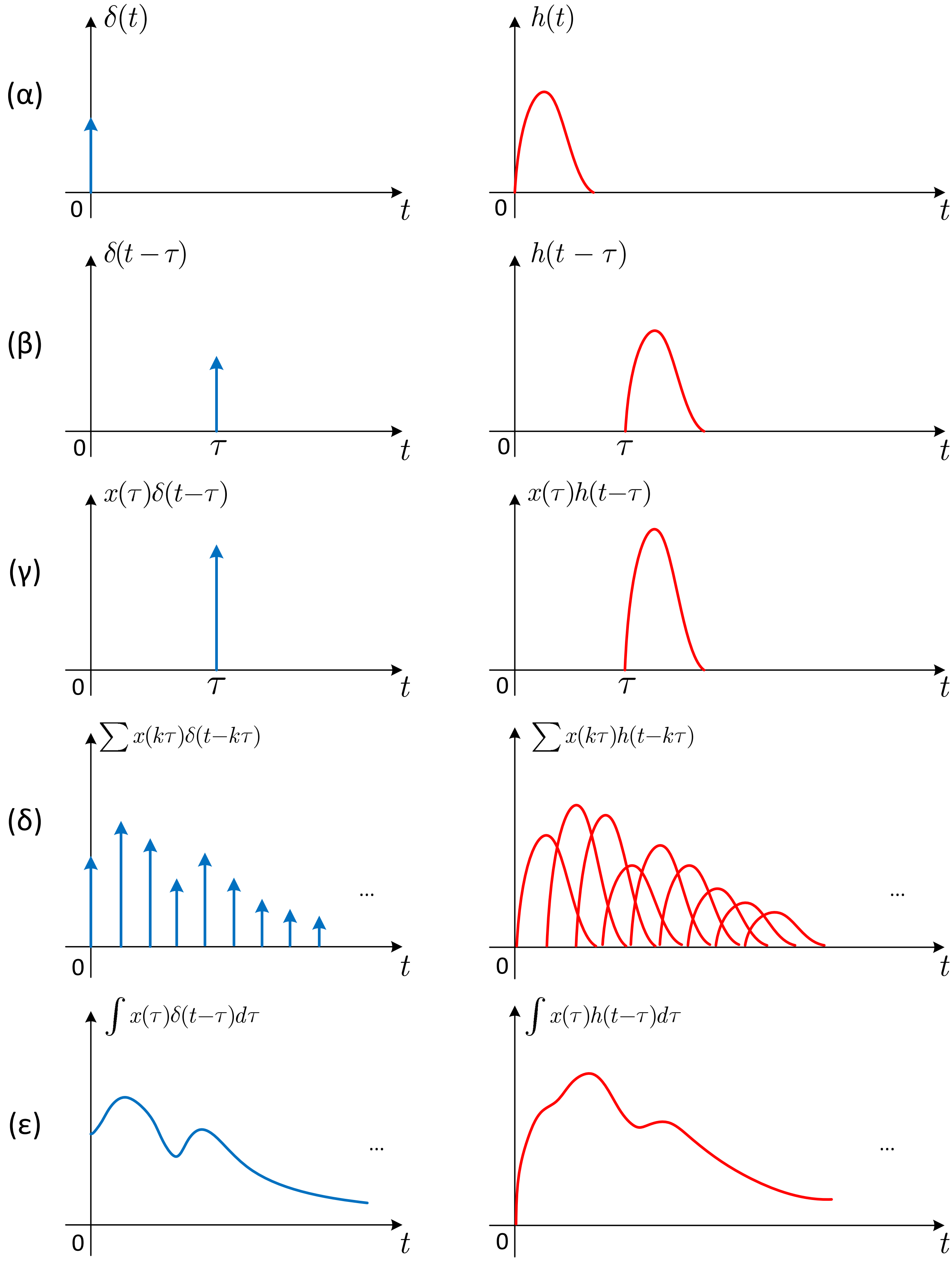
5.4.1 Ιδιότητες Συνέλιξης

Η πράξη της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από ιδιότητες, όπως αυτές στον Πίνακα 5.1.

Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)),\ \ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \Re \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \Re \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

Πίνακας 5.1: *Ιδιότητες συνέλιξης*

Ακολουθούν οι αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων, με αποκλειστική χρήση του ορισμού.



Σχήμα 5.3: *Σχηματική παραγωγή της πράξης της συνέλιξης που αναφέρονται στις Σχέσεις (5.8-5.12).*

5.4.1.1 Ομογένεια

Έχουμε

$$(ax(t)) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ax(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)ay(t-\tau)d\tau = x(t) * (ay(t)) \tag{5.14}$$

και

$$x(t) * (ay(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)ay(t-\tau)d\tau = a\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = a(x(t) * y(t)) \tag{5.15}$$

5.4.1.2 Αντιμεταθετικότητα

Θέτοντας $u = t - \tau$ στον ορισμό της συνέλιξης, έχουμε

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)y(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)y(u)du = y(t) * x(t) \tag{5.16}$$

5.4.1.3 Προσεταιριστικότητα

Είναι

$$(x(t) * y(t)) * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(\tau) * y(\tau))z(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(\tau-u)du\Big)z(t-\tau)d\tau \tag{5.17}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau-u)z(t-\tau)d\tau\Big)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} y(m)z(t-m-u)dm\Big)du \tag{5.18}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)(y(t-u) * z(t-u))du \tag{5.19}$$

$$= x(t) * (y(t) * z(t)) \tag{5.20}$$

όπου στη Σχέση (5.18) θέσαμε $m = \tau - u$.

5.4.1.4 Επιμεριστικότητα

Είναι

$$x(t) * (y(t) + z(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)(y(t-\tau) + z(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(\tau)y(t-\tau) + x(\tau)z(t-\tau)\big)d\tau \tag{5.21}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau)\big)d\tau \tag{5.22}$$

$$= x(t) * y(t) + x(t) * z(t) \tag{5.23}$$

5.4.1.5 Γραμμικότητα

Είναι

$$z(t) = x(t) * y(t) = (ax_1(t) + bx_2(t)) * y(t) \tag{5.24}$$

$$= ax_1(t) * y(t) + bx_2(t) * y(t) \tag{5.25}$$

$$= a(x_1(t) * y(t)) + b(x_2(t) * y(t)) \tag{5.26}$$

$$= az_1(t) + bz_2(t) \tag{5.27}$$

με

$$z_1(t) = x_1(t) * y(t) \tag{5.28}$$

$$z_2(t) = x_2(t) * y(t) \tag{5.29}$$

λόγω των ιδιοτήτων της ομογένειας και της επιμεριστικότητας.

5.4.1.6 Εύρος

Η απόδειξη της ιδιότητας του εύρους φαίνεται σχήματικά στο Σχήμα 5.4. Στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης, το σήμα $y(t)$ χρησιμοποιείται ως $y(t-\tau)$, με μεταβλητή το τ. Άρα υπόκειται σε πράξεις αντιστροφής χρόνου και μετατόπισης. Ως εκ τούτου, το σήμα θα είναι μη μηδενικό στο $[t-t_4, t-t_3]$. Στη διαδικασία της συνέλιξης, το γινόμενο $x(\tau)y(t-\tau)$ είναι μη μηδενικό για $t-t_3 \geq t_1$ και $t-t_4 \leq t_2$, δηλ. στο διάστημα $[t_1+t_3, t_2+t_4]$.

5.4.1.7 Ουδέτερο στοιχείο

Είναι

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(\tau)\Big|_{\tau=t} = x(t) \quad (5.30)$$

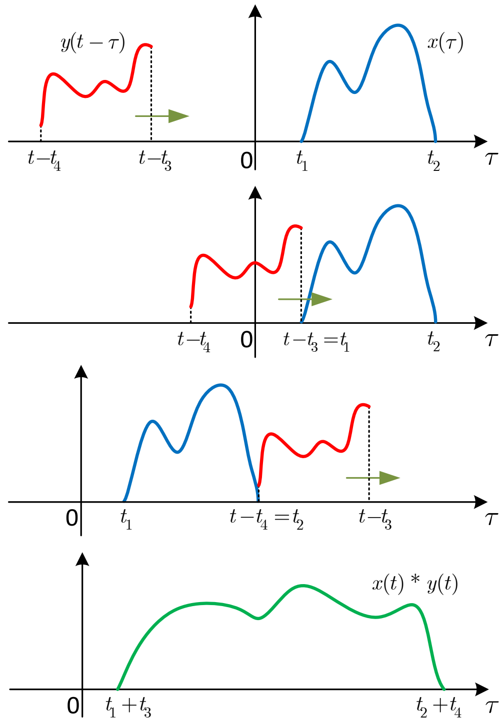
από ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. ■

Η συνέλιξη φημίζεται ως μια πράξη αρκετά περίπλοκη και δύσκολη, και σε πρώτη επαφή αποθαρρύνει τον αναγνώστη. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη της ολοκλήρωσης εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί *χρονική αντιστροφή και μετατόπιση*.

5.4.2 Η συνέλιξη αναλυτικά

Ας αναλύσουμε διεξοδικά τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (5.31)$$



Σχήμα 5.4: *Γραφική απόδειξη της ιδιότητας του εύρους.*

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το τ και *όχι* το t. Το t το θεωρούμε σταθερό μέσα στο ολοκλήρωμα. Έπειτα, το ολοκλήρωμα αυτό εμπλέκει δυο σήματα: το $x(\tau)$ και το $y(t-\tau)$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα $x(t)$, δεν έχει υποστεί κάποια μεταβολή - η αλλαγή ονόματος στη μεταβλητή δεν αλλάζει κάτι. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη πράξεων στην ανεξάρτητη μεταβλητή: *χρονική αντιστροφή και μετατόπιση*. Μια ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

$$y(t) \to y(\tau) \to y(-\tau) \to y(-\tau+t) = y(t-\tau) \quad (5.32)$$

Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση κατά* t. Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x(\tau)$ και ολοκληρώνεται ως προς τ. Το αποτέλεσμα της συνέλιξης μπορεί να βρεθεί με δυο τρόπους: *αλγεβρικά* και *γραφικά*. Συνήθως προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 5.5.

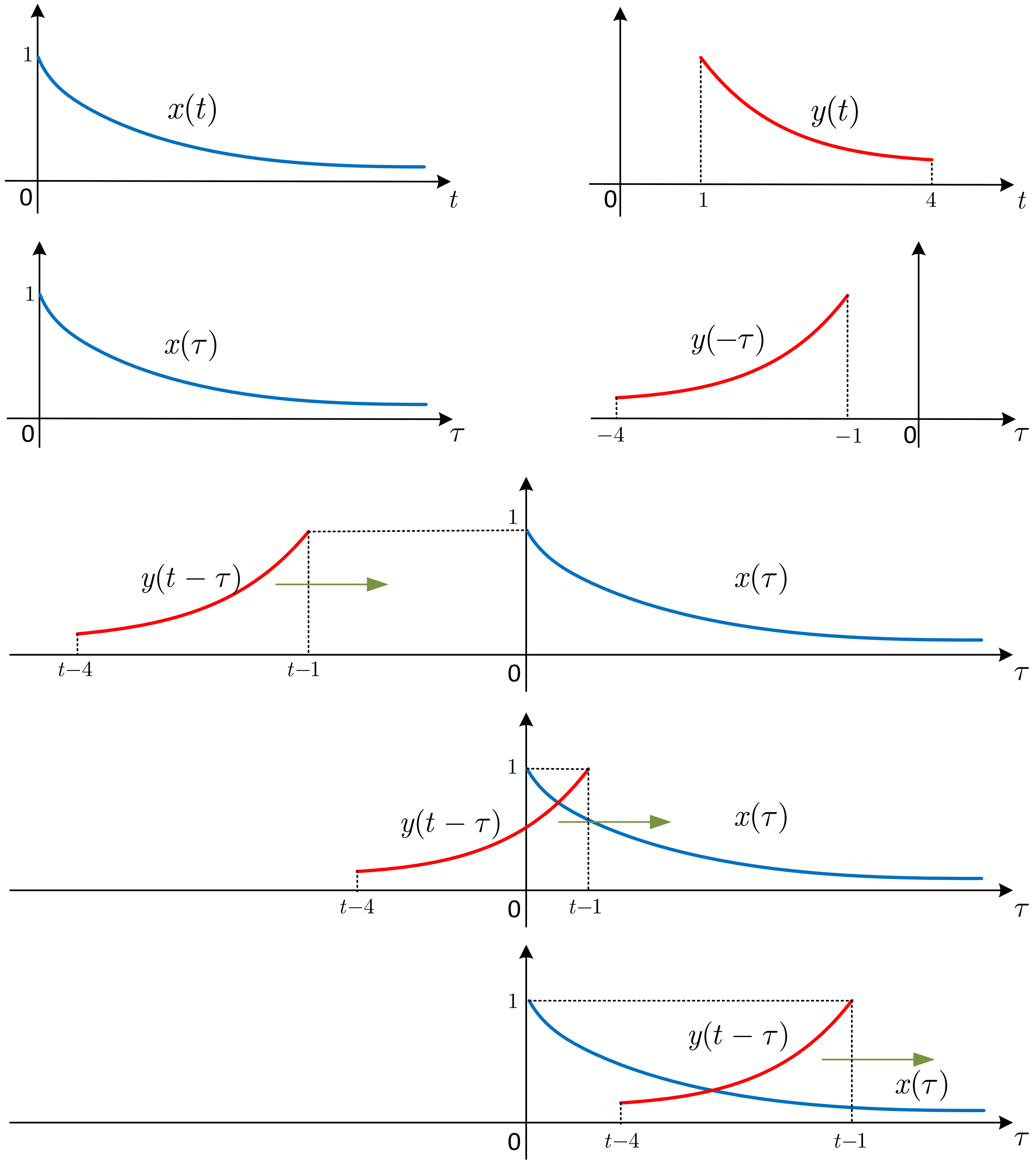
- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x(t)$ και το $y(t)$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y(t)$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα αντιστρέψουμε χρονικά σύμφωνα με τον ορισμό.

- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του τ και όχι του t, όπως ακριβώς επιτάσσει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, και το $y(\tau)$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά t. Θυμίζουμε ότι χειριζόμαστε το t ως σταθερά στο ολοκλήρωμα. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y(\tau)$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.

- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y(t-\tau)$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το ''ολισθαίνουμε'' πάνω στον ίδιο άξονα με το $x(\tau)$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.

- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι το $y(\tau)$ ''συναντά'' κάποια στιγμή το $x(\tau)$. Όταν συμβεί αυτό, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα έχουμε μια μη μηδενική τιμή για το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Αυτές οι χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξί ''άκρο'' του $y(t-\tau)$ συναντά το αριστερό ''άκρο'' του $x(\tau)$ και πέρα, *και* όταν το αριστερό ''άκρο'' του $y(t-\tau)$ *δεν* έχει περάσει το $t=0$, δηλ. όταν

$$t-1 > 0 \Rightarrow t > 1 \text{ και } t-4 < 0 \Rightarrow t < 4 \quad (5.33)$$



Σχήμα 5.5: *Γραφική απεικόνιση της συνέλιξης.*

οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $t-1$, εκεί δηλαδή που το γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων είναι μη μηδενικό, ως

$$c_{xy}(t) = \int_0^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{5.34}$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικες μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Στην πέμπτη γραμμή, το $y(t-\tau)$ έχει μπει ολόκληρο μέσα στο $x(\tau)$, πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη είναι μη μηδενική όταν το αριστερό ‘‘άκρο’’ της $y(t-\tau)$

περάσει το $t = 0$, δηλ. όταν

$$t - 4 > 0 \Rightarrow t > 4 \tag{5.35}$$

και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{5.36}$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικες μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο t εκτός από τα παραπάνω, το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι μηδέν, δηλ.

$$c_{xy}(t) = 0, \ \ t < 1 \tag{5.37}$$

Τώρα που η διαδικασία είναι περισσότερο ξεκάθαρη, ας θεωρήσουμε ότι τα παραπάνω σήματα είναι τα

$$x(t) = e^{-at}u(t) \tag{5.38}$$

$$y(t) = e^{-bt}, \ \ t \in (1,4) \tag{5.39}$$

Οπότε θα έχουμε

- Όταν $t - 1 < 0 \iff t < 1$, τότε $c_{xy}(t) = 0$.
- Όταν $t - 1 > 0$ και $t - 4 < 0$, δηλ. οταν $0 < t < 4$, τότε

$$c_{xy}(t) = \int_0^{t-1} e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}d\tau = e^{-bt}\int_0^{t-1} e^{(b-a)\tau}d\tau \tag{5.40}$$

$$= e^{-bt}\frac{1}{b-a}e^{(b-a)\tau}\Big|_0^{t-1} = e^{-bt}\frac{1}{b-a}(e^{(b-a)(t-1)} - 1) \tag{5.41}$$

$$= \frac{1}{b-a}\Big(e^{(b-a)(t-1)-bt} - e^{-bt}\Big) \tag{5.42}$$

- Τέλος, όταν $t - 4 > 0$, δηλ. $t > 4$, τότε

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^{t-1} e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}d\tau = e^{-bt}\frac{1}{b-a}e^{(b-a)\tau}\Big|_{t-4}^{t-1} \tag{5.43}$$

$$= e^{-bt}\frac{1}{b-a}(e^{(b-a)(t-4)} - e^{(b-a)(t-1)}) = \frac{1}{b-a}\Big(e^{(b-a)(t-4)-bt} - e^{(b-a)(t-1)-bt}\Big) \tag{5.44}$$

Μπορούμε λοιπόν να συνοψίσουμε την παραπάνω γραφική λύση της συνέλιξης ως ακολούθως:

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων $x(t)$ και $y(t)$

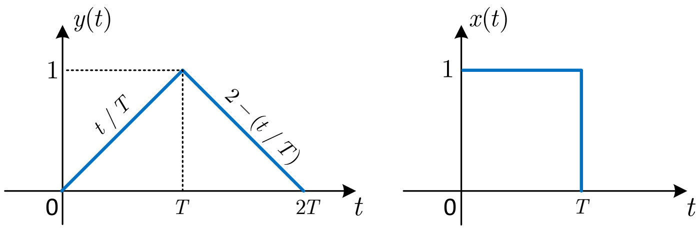
1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x(t)$, το οποίο και μετατρέπουμε σε $x(\tau)$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x(t-\tau)$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς τ, και ‘‘σύρουμε’’ το $x(t-\tau)$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα ‘‘συνυπάρχουν’’, δηλ. όπου το γινόμενο $x(t-\tau)y(\tau)$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

5.4.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Πολύ χρήσιμα είναι τα ακόλουθα παραδείγματα, τα οποία θα σας βοηθήσουμε να κατανοήσετε ακόμα περισσότερο την πράξη της συνέλιξης.

Παράδειγμα 5.1:

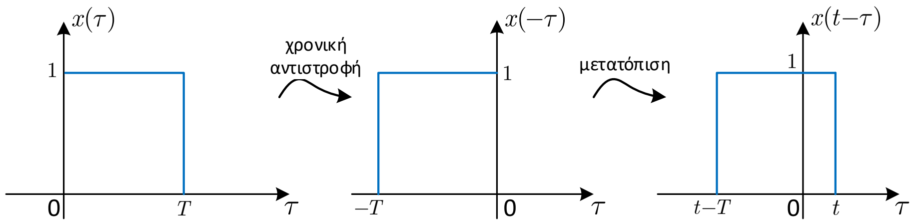
Έστω τα σήματα του Σχήματος 5.6.



Σχήμα 5.6: *Σήματα Παραδείγματος 5.1.*

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * y(t)$.

Λύση:
Επιλέγουμε να κάνουμε πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του $x(t)$, καθ' ότι ευκολότερο. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο Σχήμα 5.7. και άρα θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις, όπως αυτές



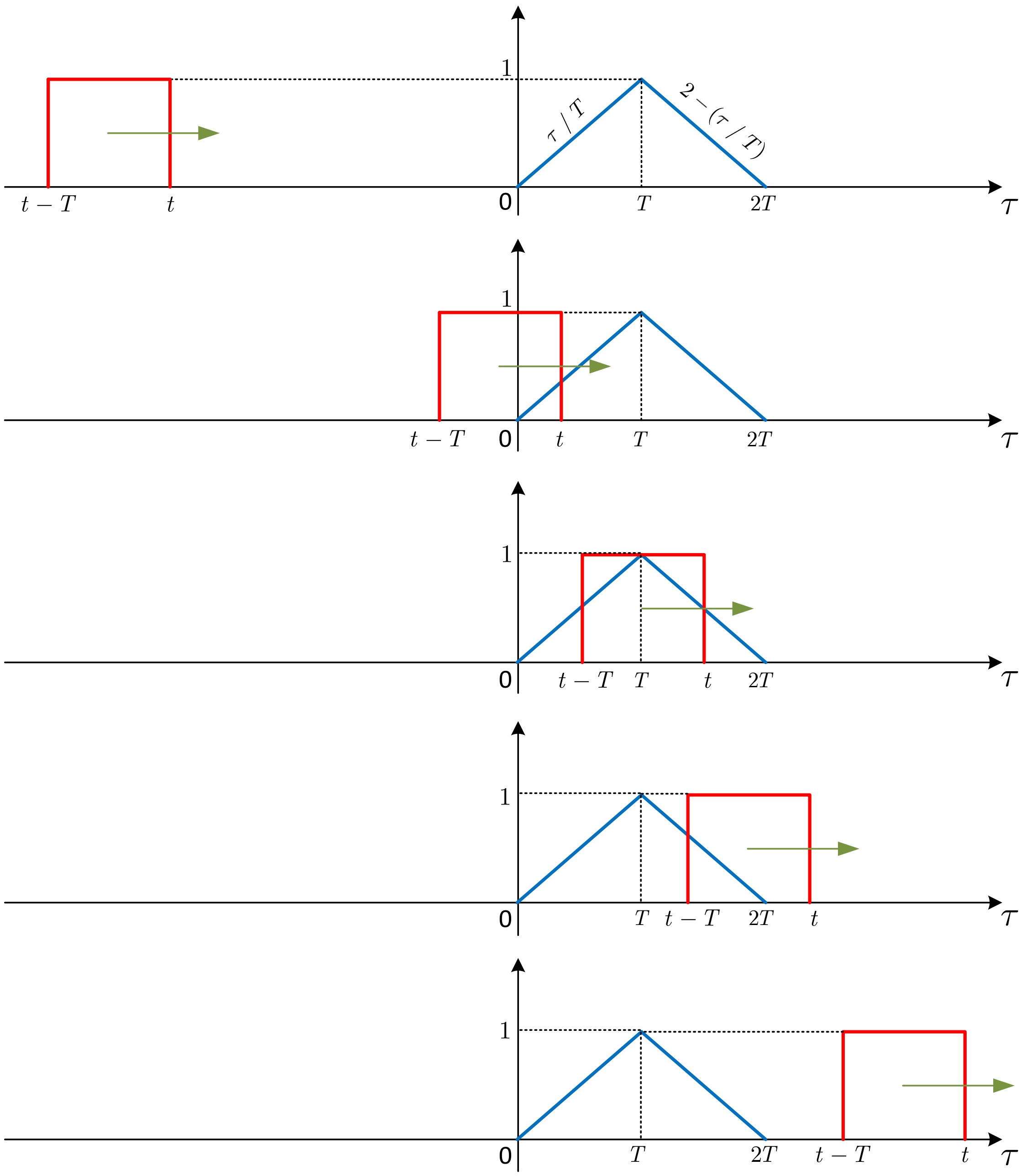
Σχήμα 5.7: *Μετατόπιση και ανάκλαση σήματος* $x(t)$.

απεικονίζονται στο Σχήμα 5.8.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι $y(t) = 0,\ t < 0$.
- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι $y(t) = \int_0^t \frac{\tau}{T} d\tau = \frac{t^2}{2T}$, για $t > 0$ και $t - T < 0$, δηλ. $0 < t < T$.
- Για την τρίτη περίπτωση είναι $y(t) = \int_{t-T}^{T} \frac{\tau}{T} d\tau + \int_T^t \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}$, για $t - T < T$ και $t > T$, δηλ. $T < t < 2T$.
- Για την τέταρτη περίπτωση είναι $y(t) = \int_{t-T}^{2T} \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}$, για $t < 3T$ και $t > 2T$, δηλ. $2T < t < 3T$.
- Για την πέμπτη περίπτωση είναι $y(t) = 0,\ t > 3T$.

Άρα τελικά θα είναι:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ και } t > 3T \\ \frac{t^2}{2T}, & 0 < t < T \\ -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}, & T < t < 2T \\ \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}, & 2T < t < 3T \end{cases} \tag{5.45}$$



Σχήμα 5.8: *Περιπτώσεις Συνέλιξης Παραδείγματος 5.1.*

■

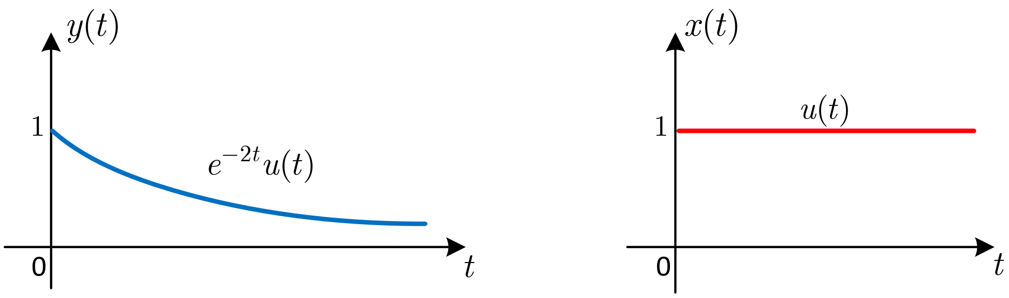
Παράδειγμα 5.2:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = u(t) \tag{5.46}$$

$$y(t) = e^{-2t}u(t) \tag{5.47}$$

Λύση:
Τα δυο σήματα φαίνονται στο Σχήμα 5.9. Το $x(t)$ είναι πιο κατάλληλο για να υποστεί τις μεταβολές που είναι απαραίτητες στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης.



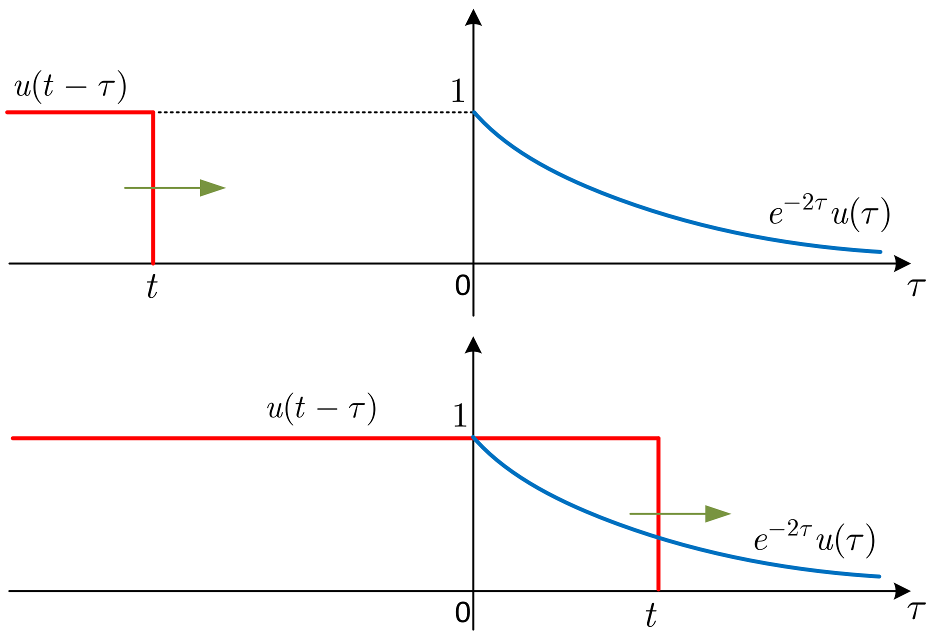
Σχήμα 5.9: *Σήματα Παραδείγματος 5.2.*

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 5.10.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι $c_{xy}(t) = 0$ για $t < 0$.
- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{t} e^{-2\tau} d\tau = \frac{1-e^{-2t}}{2} \tag{5.48}$$

  για $t > 0$.



Σχήμα 5.10: *Περιπτώσεις Παραδείγματος 5.2.*

Άρα τελικά θα είναι

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-2t}}{2}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{5.49}$$

Το παράδειγμα αυτό είναι εξαιρετικό για να δείξουμε την *αλγεβρική* μέθοδο υπολογισμού της συνέλιξης. Θα είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau \tag{5.50}$$

Είναι

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{5.51}$$

αφού

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{5.52}$$

και

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{5.53}$$

Η Σχέση (5.50) γράφεται ως

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{t} e^{-2\tau} d\tau = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), \quad \text{για } t > 0 \tag{5.54}$$

Οπότε

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) u(t) \tag{5.55}$$

■

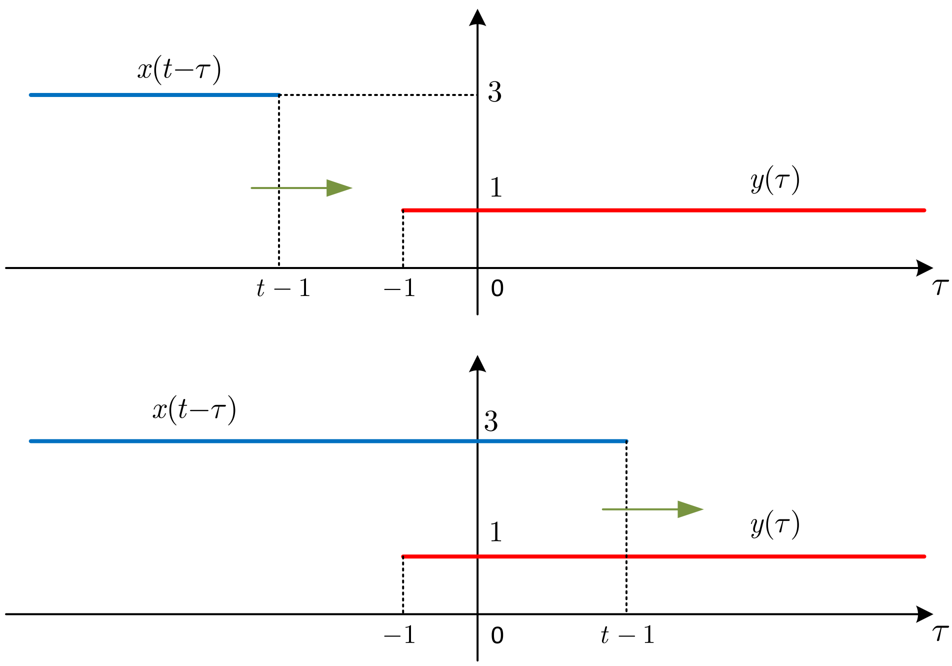
Παράδειγμα 5.3:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = 3u(t-1) \tag{5.56}$$

$$y(t) = u(t+1) \tag{5.57}$$

Λύση:
Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 5.11. Θα είναι



Σχήμα 5.11: *Περιπτώσεις Παραδείγματος 5.3.*

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = 0 \tag{5.58}$$

για $t - 1 < -1 \Longleftrightarrow t < 0$.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 3u(\tau-1)u(t-\tau)d\tau \tag{5.59}$$

$$= \int_{-1}^{t-1} 3d\tau = 3(t-1)+3 = 3t \tag{5.60}$$

για $t-1 > -1 \iff t > 0$, αφού

$$3u(\tau-1)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & -1 < \tau < t-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{5.61}$$

Άρα συνολικά

$$c_{xy} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3t, & t > 0 \end{cases} \tag{5.62}$$

ή αλλιώς

$$c_{xy}(t) = 3tu(t) \tag{5.63}$$

■

Παράδειγμα 5.4:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = 2e^{-3t}u(t-1) \tag{5.64}$$

$$y(t) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t+2}{2}\Big) \tag{5.65}$$

Λύση:

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 5.12. Θα είναι

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = 0 \tag{5.66}$$

για $t+3 < 1 \iff t < -2$.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{1}^{t+3} 2e^{-3\tau}d\tau \tag{5.67}$$

$$= -\frac{2}{3}(e^{-3(t+3)} - e^{-3}) = -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3} \tag{5.68}$$

για $t+1 < 1$ και $t+3 > 1$, άρα $-2 < t < 0$.

- Για την τρίτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{t+1}^{t+3} 2e^{-3\tau}d\tau \tag{5.69}$$

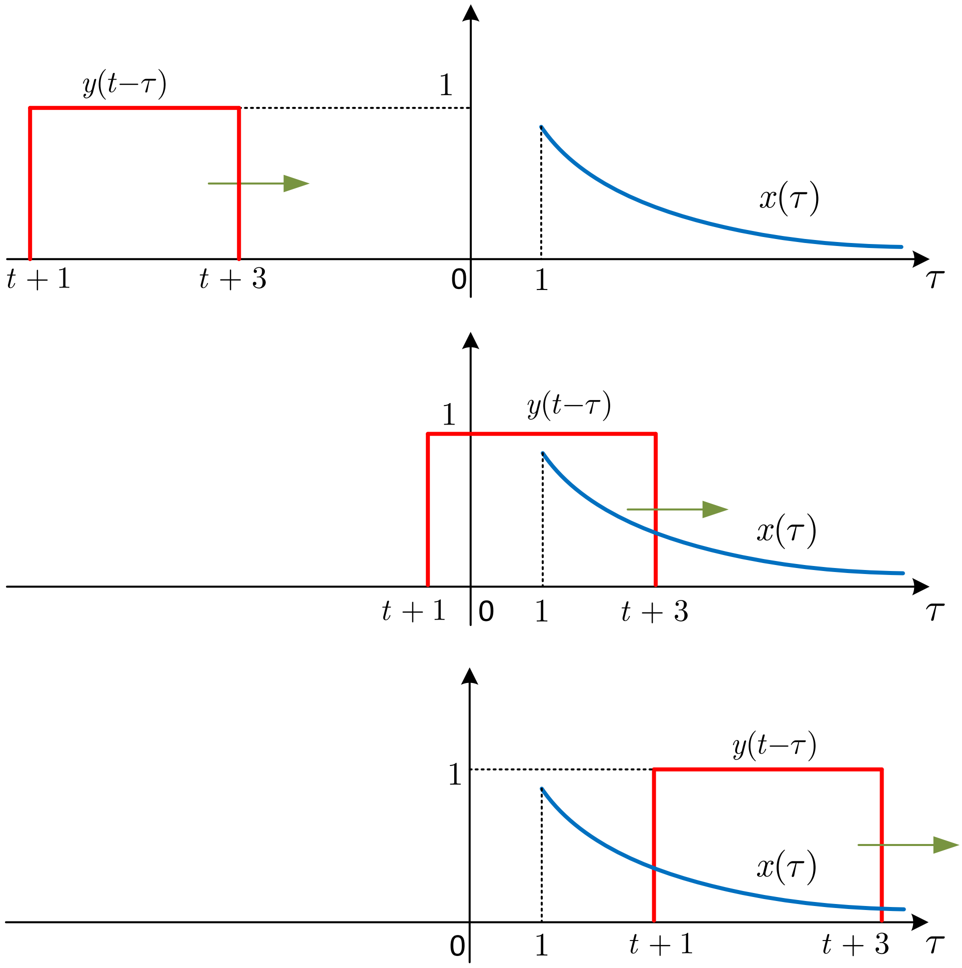
$$= -\frac{2}{3}(e^{-3(t+3)} - e^{-3(t+1)}) = -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3(t+1)} \tag{5.70}$$

για $t+1 > 1 \iff t > 0$.

Άρα συνολικά

$$c_{xy} = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3}, & -2 < t < 0 \\ -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3(t+1)}, & t > 0 \end{cases} \tag{5.71}$$

■



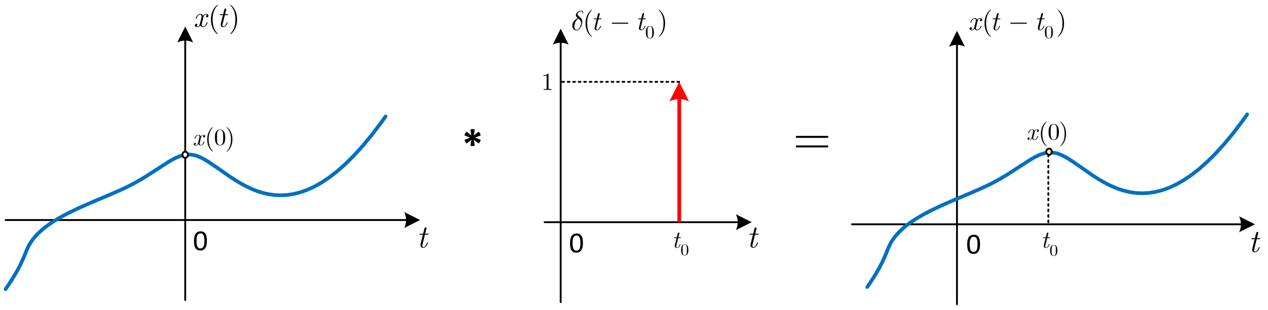
Σχήμα 5.12: *Περιπτώσεις Παραδείγματος 5.4.*

5.4.4 Συνέλιξη και Συναρτήσεις Δέλτα

Όταν ένα εκ των δυο σημάτων που εμπλέκονται σε μια συνέλιξη είναι μια συνάρτηση Δέλτα, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα

$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = x(t \pm t_0) \tag{5.72}$$

η οποά είναι πολύ χρήσιμη στη μελέτη συστημάτων - η απόδειξη αφήνεται σε σας στην Άσκηση XXXX. Η Σχέση (5.72) δηλώνει ότι όταν κάνουμε συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται στη χρονική στιγμή $t = \pm t_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x(t)$ μετατοπισμένο στη θέση $t = \pm t_0$! Θα δούμε στη συνέχεια ότι αυτή η ιδιότητα μας διευκολύνει πάρα πολύ όταν έχουμε να κάνουμε με συστήματα. Σχηματικά, δείτε το Σχήμα 5.13. Μπορούμε προς το παρόν να δούμε ένα παράδειγμα που θα μας βοηθήσει να δούμε πως δουλεύει αυτή η πράξη και πως διαφέρει η συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα με τον πολλαπλασιασμό του με την ίδια συνάρτηση, δυο πράξεις που συχνά προκαλούν σύγχυση.



Σχήμα 5.13: *Συνέλιξη σήματος με συνάρτησης Δέλτα.*

Παράδειγμα 5.5:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} -1, & t = -4 \\ 1, & t = 0 \\ -1, & t = 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{5.73}$$

(α΄) Σχεδιάστε το σήμα στο χρόνο.

(β΄) Γράψτε το σήμα ως άθροισμα Συναρτήσεων Δέλτα $\delta(t)$.

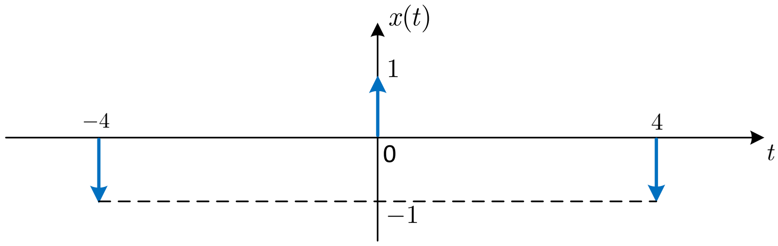
(γ΄) Πολλαπλασιάζουμε το $x(t)$ με το σήμα $y(t) = 2\text{rect}\Big(\dfrac{t}{6}\Big)$. Σχεδιάστε το αποτέλεσμα.

(δ΄) Κάνουμε συνέλιξη το $x(t)$ με το σήμα $y(t) = 2\text{rect}\Big(\dfrac{t}{6}\Big)$. Σχεδιάστε πρώτα τα σήματα που προκύπτουν και μετά γράψτε μια βολική μαθηματική σχέση που περιγράφει το αποτέλεσμα.

(ε΄) Ποιός είναι ο γενικός κανόνας που προκύπτει από τα δυο παραπάνω ερωτήματα; Δηλ. τι συμβαίνει σε ένα σήμα όταν πολλαπλασιάζεται με μια συνάρτηση Δέλτα, και τι συμβαίνει όταν γίνεται συνέλιξη με μια Συνάρτηση Δέλτα;

Λύση:

(α΄) Το σήμα στο χρόνο φαίνεται στο Σχήμα 5.14.



Σχήμα 5.14: *Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: σήμα στο χρόνο.*

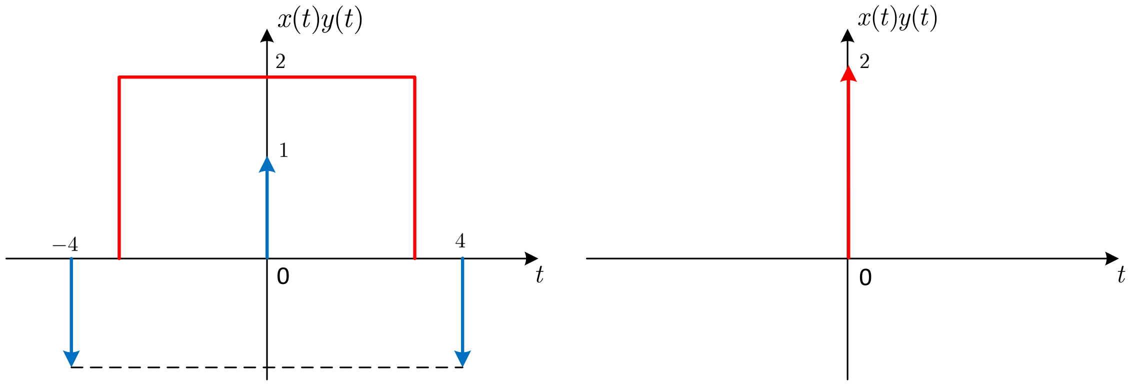
(β΄) Είναι

$$x(t) = -\delta(t+4) + \delta(t) - \delta(t-4) \tag{5.74}$$

(γ΄) Το γινόμενο των δυο σημάτων είναι

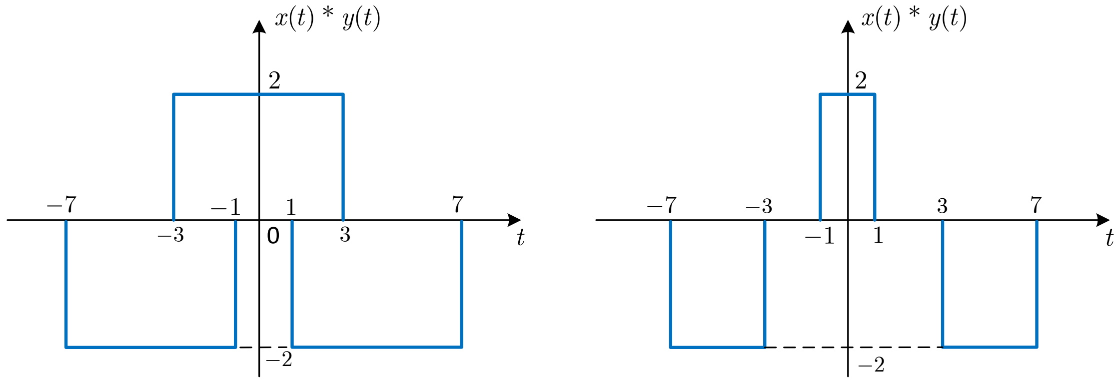
$$x(t)\cdot y(t) = x(t)\cdot 2\text{rect}\Big(\frac{t}{6}\Big) = 2\text{rect}\Big(\frac{t}{6}\Big)\cdot\Big(-\delta(t+4)+\delta(t)-\delta(t-4)\Big) = 2\delta(t) \tag{5.75}$$

και φαίνεται στο Σχήμα 5.15.



Σχήμα 5.15: *Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: γινόμενο σημάτων.*

(δ΄) Η συνέλιξη των σημάτων είναι



Σχήμα 5.16: *Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: συνέλιξη σημάτων.*

$$x(t) * y(t) = x(t) * 2\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{6}\Big) = -2\mathrm{rect}\Big(\frac{t+4}{6}\Big) + 2\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{6}\Big) - 2\mathrm{rect}\Big(\frac{t-4}{6}\Big) \tag{5.76}$$

και φαίνεται στο Σχήμα 5.16 αριστερά. Παρατηρώντας το, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$x(t) * y(t) = -2\mathrm{rect}\Big(\frac{t+5}{4}\Big) + 2\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{2}\Big) - 2\mathrm{rect}\Big(\frac{t-5}{4}\Big) \tag{5.77}$$

και φαίνεται στο Σχήμα 5.16 δεξιά.

(ε΄) Ο γενικός κανόνας είναι ότι το γινόμενο σήματος με Συνάρτηση Δέλτα δίνει μια Συνάρτηση Δέλτα με πλάτος το πλάτος του σήματος στη θέση της Συνάρτησης Δέλτα. Η συνέλιξη σήματος με Συνάρτηση Δέλτα μετατοπίζει τη θέση αναφοράς του σήματος από το μηδέν στη θέση t_0, αν $\delta(t - t_0)$ είναι η Συνάρτηση Δέλτα η οποία εμπλέκεται στη συνέλιξη.

■

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις με βάση όσα έχουμε συζητήσει ως τώρα.

Παρατηρήσεις

(α΄) Όπως βλέπετε, είναι πολύ σημαντικό να μπορείτε να υπολογίσετε σωστά το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του ολοκληρώματος. Οι πράξεις στο ολοκλήρωμα είναι συνήθως αρκετά απλές.

(β΄) Όπως είδαμε, η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει δηλ. ότι

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = y(t) * x(t) = c_{yx}(t) \tag{5.78}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν κάναμε πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του $x(t)$ αντί για του $y(t)$, θα είχαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

(γ΄) Προτιμούμε να αντιστρέψουμε χρονικά και μετατοπίσουμε το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδικασία υπολογισμού της συνέλιξης. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.

(δ΄) Χρήσιμη ιδιότητα, η οποία αναφέρεται στον Πίνακα 5.1, για πεπερασμένης διάρκειας σήματα είναι η εξής: αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[a, b]$ και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[c, d]$, τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα $[a + c, b + d]$. Γνωρίζοντας αυτό, μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας. Για παράδειγμα, αν στο Σχήμα 5.5, είχαμε συνέλιξη του σήματος $y(t)$ με τον εαυτό της, δηλ. $c_{yy}(t) = y(t) * y(t)$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μη μηδενικό στο διάστημα $[2, 8]$.

(ε΄) Στη βιβλιογραφία, θα βρείτε τον ορισμό της συνέλιξης με διαφορετικές μεταβλητές. Π.χ.

$$c_{xy}(t) = \int_{\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \tag{5.79}$$

$$c_{xy}(\tau) = \int_{\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)dt \tag{5.80}$$

Και οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι σωστές. Απλά αλλάξαμε τις μεταβλητές t, τ μεταξύ τους. Διαλέξτε όποια σας βολεύει, αρκεί να είστε συνεπείς και προσεκτικοί. Σε αυτό το βιβλίο, προτιμούμε την πρώτη σχέση.

(ϛ΄) Σε πρώτη ανάγνωση, η πράξη της συνέλιξης μοιάζει δύσκολη. Μάλιστα ένα γνωστό online λεξικό παρουσιάζει τη λέξη ‘‘συνέλιξη’’ ως συνώνυμο της πολυπλοκότητας, της περιπλοκής, και της δυσκολίας! [α΄] Σε άλλες πηγές [β΄] αναφέρεται ότι ‘‘η συνέλιξη προκαλεί τρόμο στην καρδιά του μέσου μηχανικού’’! Ελπίζω να είδατε όμως ότι τελικά η πράξη αυτή δεν είναι κάτι που πρέπει να προκαλεί φόβο.

[α΄] https://www.merriam-webster.com/dictionary/convolution#synonyms
[β΄] https://pulse.embs.org/january-2015/history-convolution-operation/

5.4.5 Πίνακας Συνέλιξης

Η διαδικασια της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από έτοιμους πίνακες συνέλιξης, όπως ο Πίνακας 5.2. Αυτός ο πίνακας, που αναφέρει διάφορα ζεύγη σημάτων και το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους, μπορεί να σας βοηθήσει στον έλεγχο των αποτελεσμάτων σας.

Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης

$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{x(t) * y(t)}$
$x(t)$	$\delta(t-T)$	$x(t-T)$
$e^{at}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1-e^{at}}{-a}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}u(t), \;\; a \neq b$
$e^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$te^{at}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}u(t)$
$t^n u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{n!e^{at}}{a^{n+1}}u(t) - \sum_{j=0}^{n}\frac{n!t^{n-j}}{a^{j+1}(n-j)!}u(t)$
$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{bt}-e^{at}+(a-b)te^{at}}{(a-b)^2}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{at}u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{at}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{bt}u(t)$	$\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j m!(n+j)!t^{m-j}e^{at}}{j!(m-j)!(a-b)!^{n+j+1}}u(t)$
		$+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!(m+k)!t^{n-k}e^{bt}}{k!(n-k)!(b-a)^{m+k+1}}u(t), \; a \neq b$
$e^{at}\cos(bt+\theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta-\phi)e^{\lambda t}-e^{-at}\cos(bt+\theta-\phi)}{\sqrt{(a+\lambda)^2+b^2}}u(t),$ $\phi = \tan^{-1}\frac{-b}{a+\lambda}$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}u(t)+e^{bt}u(-t)}{b-a}, \;\; \Re\{b\} > \Re\{a\}$
$e^{at}u(-t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{b-a}u(-t)$

Πίνακας 5.2: *Πίνακας συνελίξεων*

5.6 Ευστάθεια Συστήματος

Ας αναφερθούμε τώρα αναλυτικότερα σε μια έννοια η οποία είναι πολύ σημαντική, αυτή της *ευστάθειας* ενός συστήματος. Ένα σύστημα λέγεται **ευσταθές** αν

$$|x(t)| < M_x \Longrightarrow |y(t)| < M_y, \quad M_x, M_y \in \Re \tag{5.142}$$

και ονομάζουμε αυτού του είδους την ευστάθεια ως Bounded-Input-Bounded-Output (BIBO)-ευστάθεια.

Αν η είσοδος είναι μη μηδενική και απολύτως φραγμένη

$$|x(t)| < M_x < +\infty \tag{5.143}$$

η ευστάθεια συνεπάγεται αν

$$|y(t)| = |x(t) * h(t)| = \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Big| \tag{5.144}$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Big| \tag{5.145}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau \tag{5.146}$$

$$\leq M_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau \not\longrightarrow +\infty \tag{5.147}$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau < +\infty \tag{7.148}$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < +\infty \tag{5.149}$$

Άρα, ένα σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι ευσταθές αν η τελευταία είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το σύστημα είναι ασταθές.

Εν κατακλείδι:

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

Η ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος δεδομένης μιας οποιασδήποτε απολύτως φραγμένης εισόδου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την κρουστική του απόκριση $h(t)$, η οποία πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

Ας συζητήσουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις επάνω στο ζήτημα της ευστάθειας.

Παρατηρήσεις

(α΄) Σε ένα ευσταθές σύστημα, μια απολύτως φραγμένη είσοδος παράγει πάντα μια απολύτως φραγμένη έξοδο. Όμως, μπορεί κανείς να δείξει ότι σε ένα ασταθές ή οριακά ευσταθές σύστημα, η έξοδός του μπορεί να είναι μη απολύτως φραγμένη, ακόμα κι αν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη! Σκεφτείτε για παράδειγμα το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = u(t)$. Για είσοδο $x(t) = u(t)$, η οποία είναι απολύτως φραγμένη από τη μονάδα, έχουμε έξοδο $y(t) = tu(t)$, η οποία δεν είναι απολύτως φραγμένη.

(β΄) Όπως μπορείτε να καταλάβετε, ένα ασταθές σύστημα δεν έχει και τόση χρησιμότητα στην πράξη - κάθε σύστημα που υλοποιούμε σε υλικό ή λογισμικό πρέπει να είναι ευσταθές. Σκεφτείτε για παράδειγμα ένα απλό, ''κακοφτιαγμένο'' ηχείο, το οποίο δέχεται είσοδο από ένα μικρόφωνο. Αν το σύστημα ήταν ασταθές, τότε οποιαδήποτε και οσοδήποτε μικρή είσοδος από το μικρόφωνο, θα παρήγαγε σύντομα μια έξοδο (ήχο) υπερβολικά μεγάλης τιμής με πολύ δυσάρεστα - το λιγότερο! - αποτελέσματα.

(γ΄) Τα παραπάνω όμως δε σημαίνουν ότι δεν μπορούν να προκύψουν ασταθή συστήματα στην πράξη. Για παράδειγμα, η θεωρία του *Αυτομάτου Ελέγχου* προσπαθεί να ελέγξει τη συμπεριφορά πραγματικών συστημάτων “διορθώνοντας ” τυχούσες αστάθειες που φυσιολογικά προκύπτουν κατά τη λειτουργία τους. Για παράδειγμα, αν θέλουμε ένα αεροσκάφος να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη πορεία, με συγκεκριμένο υψόμετρο και ταχύτητα, ανεξάρτητα από τις πιθανές ροές ανέμων του περιβάλλοντος που προκαλούν αστάθειες στη συμπεριφορά του, θα πρεπει να έχουμε ένα μηχανισμό ελέγχου της ευστάθειας του συστήματος.

5.7 Αιτιατότητα Συστήματος

Τα **αιτιατά** συστήματα είναι αυτά για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου **δεν** απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 2x(t-1) + \sin(x(t)) \tag{5.150}$$

είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα

$$y(t) = x(t-2)^2 + 4x(t+4) \tag{5.151}$$

είναι μη αιτιατό, επειδή για τον υπολογισμό του $y(t)$ απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου, η $x(t+4)$.

Πιο περιγραφικά, ένα **αιτιατό** σύστημα είναι ένα σύστημα το οποίο δεν παράγει κάποια έξοδο προτού εφαρμοστεί σε αυτό μια είσοδος. Αν το σύστημα παράγει έξοδο πριν την είσοδο, σημαίνει ότι το σύστημα γνωρίζει τη μελλοντική είσοδο και παράγει έξοδο βάσει αυτής της γνώσης, και άρα είναι μη αιτιατό.

Προφανώς, κάθε σύστημα υλοποιήσιμο σε πραγματικό χρόνο πρέπει να είναι αιτιατό. Οπότε κάποιος θα μπορούσε να θέσει το ερώτημα "*γιατί να μελετήσει κανείς τότε ένα μη αιτιατό σύστημα;*" Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έχει - τουλάχιστον - τρεις συνιστώσες:

1. Ένα μη αιτιατό σύστημα απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να παράξει έξοδο. Αν όμως η είσοδος είναι διαθέσιμη σε κάποιον αποθηκευτικό χώρο (μνήμη), τότε το σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί, αφού οι μελλοντικές τιμές της εισόδου είναι διαθέσιμες. Αυτό σημαίνει ότι τα μη αιτιατά συστήματα είναι μεν πραγματοποιήσιμα, αλλά όχι σε πραγματικό χρόνο. Παρ' όλα αυτά, η χρησιμότητά τους είναι μεγάλη, καθώς υπάρχουν πολλές εφαρμογές (επεξεργασία φωνής, ήχου, εικόνας, γεωφυσική, μετεωρολογία, ανάλυση βιοσημάτων) όπου η είσοδος υπάρχει ολόκληρη διαθέσιμη σε μια π.χ. βάση δεδομένων.

2. Ένα μη αιτιατό σύστημα μπορεί να κάνει πράγματα που ένα αιτιατό σύστημα δεν μπορεί. Για παράδειγμα, στα πρότυπα συμπίεσης εικόνας και ήχου (MP3, JPEG, MPEG κλπ), η υψηλή συμπίεση επιτυγχάνεται επειδή ο αλγόριθμος συμπίεσης (ο οποίος αποτελεί το σύστημα) γνωρίζει μελλοντική πληροφορία της εισόδου (ήχος, εικόνα, βίντεο), την οποία χρησιμοποιεί για να αυξήσει την επίδοσή του (συμπιεσμένη έξοδος).

3. Τα μη αιτιατά συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως το άνω όριο των επιδόσεων αιτιατών συστημάτων. Όπως θα δούμε αρκετά αργότερα, ένα αιτιατό *φίλτρο* (δηλ. ένα σύστημα που επιλέγει την "ποσότητα" του σήματος εισόδου που θα περάσει στην έξοδο) εισάγει πάντα *παραμόρφωση* στο σήμα εισόδου του, μεταβάλλοντάς το με ανεπιθύμητο (αλλά ελεγχόμενο) τρόπο. Όμως, ένα μη αιτιατό *φίλτρο* μπορεί να σχεδιαστεί έτσι ώστε να εισάγει μηδενική ανεπιθύμητη παραμόρφωση στο σήμα εξόδου του.

Η αιτιατότητα είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα ενός συστήματος, ειδικά αν το σύστημα προορίζεται να υλοποιηθεί σε πραγματικό χρόνο. Ασφαλώς, όλα τα φυσικά συστήματα είναι αιτιατά εξ' ορισμού, διότι αποκρίνονται μόνον αν "διεγερθούν": οι ζωντανοί οργανισμοί, ο καιρός, τα μουσικά όργανα, κλπ[3]. Ένα αιτιατό σύστημα λοιπόν δεν πρέπει να αποκρίνεται αν δε διεγείρεται, ή με άλλα λόγια, δεν πρέπει να παράγει έξοδο αν δεν του παρασχεθεί μια είσοδος.

Καθαρά μαθηματικά, αν ένα σύστημα για δυο εισόδους $x_1(t)$ και $x_2(t)$ παράγει δυο εξόδους $y_1(t)$ και $y_2(t)$, τότε αυτό είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1(t) = x_2(t) \ \ \forall\, t < t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t) \ \ \forall\, t < t_0 \tag{5.152}$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τις συνθήκες αιτιατότητας για ένα σύστημα ως εξής:

Αιτιατότητα Συστήματος

Ένα σύστημα είναι αιτιατό αν βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**, δηλ.

$$\begin{aligned} \text{αν } x(t) = 0,\ \ t < t_0 \\ \text{τότε } y(t) = 0,\ \ t < t_0 \end{aligned} \tag{5.153}$$

που μπορεί να ειπωθεί χαρακτηριστικά ως "no input, no output". ☺

Όμως μπορούμε άραγε για ένα ΓΧΑ σύστημα να βρούμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, όπως κάναμε για την ευστάθεια; Η απάντηση είναι ναι! Σκεφτείτε ότι αν ένα σύστημα είναι ΓΧΑ και εμφανιστεί

[3] Φανταστείτε να είχατε ένα σύστημα που η έξοδός του ήταν οι τιμές των μετοχών της αυριανής μέρας! Προφανώς θα ήταν μη αιτιατό....

στην είσοδό του η συνάρτηση Δέλτα, τότε γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα είναι η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος. Η είσοδος όμως εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, και δεν υπήρξε πιο πριν. Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν $h(t) = 0, \ t < 0$.

Οπότε:

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος και Κρουστική Απόκριση

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$h(t) = 0, \ t < 0 \tag{5.154}$$