

Κεφάλαιο 6

Ανάλυση Συστημάτων στο Πεδίο της Συχνότητας

6.1 Εισαγωγή

Ως τώρα συζητήσαμε για σήματα στο χώρο της συχνότητας. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γνωρίσουμε την οπτική των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας. Θα δούμε τι παραπάνω μπορεί να μας προσφέρει αυτή η οπτική σε σχέση με όσα γνωρίζουμε από το χώρο του χρόνου και πώς μπορούμε να την εκμεταλλευτούμε σε πραγματικά προβλήματα, ενώ θα συστηθούμε με πραγματικές (ή κοντά στις πραγματικές ☺) και πολύ γνωστές σας εφαρμογές που καταδεικνύουν τη χρησιμότητα του πεδίου της συχνότητας.

6.2 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

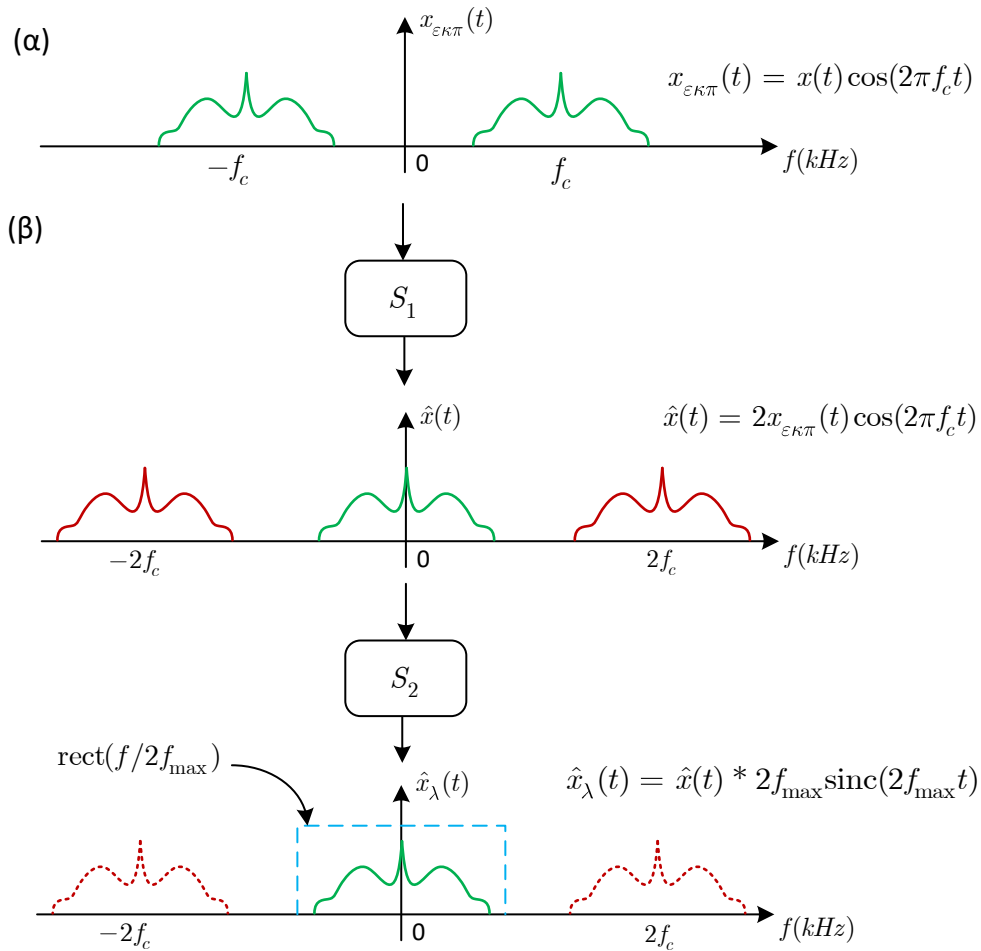
Στο κεφάλαιο αυτό θα μιλήσουμε αρκετά για τηλεπικοινωνιακά συστήματα, οπότε ας συνεχίσουμε από την εφαρμογή που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο: ραδιοφωνική μετάδοση διαμόρφωσης πλάτους. Πλέον γνωρίζετε ότι οι δυο ανταγωνιστές ραδιοφωνικοί σταθμοί μπορούν να εκπέμπουν ταυτόχρονα το πρόγραμμά τους εξ' αιτίας της ιδιότητας της μετατόπισης στη συχνότητα - ή αλλιώς, της διαμόρφωσης - του Μετασχ. Fourier. Η ιδιότητα αυτή λύνει τόσο το πρόβλημα της κατασκευής των κεραιών όσο και το πρόβλημα της απασχόλησης του ίδιου φάσματος συχνοτήτων για τους δυο σταθμούς.

Ας μπούμε τώρα στη θέση του δέκτη: ο δέκτης λαμβάνει το συχνοτικό περιεχόμενο του σταθμού που θέλει να ακούσει σε συχνότητες αρκετά μεγαλύτερες από τις πραγματικές. Για να μπορεί το ραδιοφωνικό σήμα να γίνει αντιληπτό από το ανθρώπινο αυτί, θα χρειαστεί να “κατεβούν” οι συχνότητες του εκπεμπόμενου σήματος στην περιοχή του ακουστικού φάσματος (0 – 22000 Hz) και να απομονωθούν από όποιες υπόλοιπες συχνότητες! Στο Σχήμα 6.1 βλέπετε τη διαδικασία¹ που ακολουθείται για την αποδιαμόρφωση του σήματος. Είναι εμφανές ότι απαιτούνται δυο συστήματα γι' αυτήν:

- ένα σύστημα S_1 , που απλά πολλαπλασιάζει το ληφθέν σήμα $x_{εκπ}(t)$ με ένα ημιτονοειδές ίδιας συχνότητας με τη φέρουσα συχνότητα f_c του ληφθέντος σήματος. Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής επαναφέρει το συχνοτικά μετατοπισμένο φάσμα ξανά γύρω από τη συχνότητα $f = 0$! Όμως ταυτόχρονα εισάγει “αντίγραφα” αυτού του φάσματος γύρω από τις συχνότητες $f = \pm 2f_c$.
- ένα σύστημα S_2 που απομονώνει το προαναφερθέν φάσμα, εξαλείφοντας τα “αντίγραφα” του που βρίσκονται γύρω από τις συχνότητες $f = \pm 2f_c$. Το σύστημα αυτό, θεωρητικά, αποτελεί ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο, και έχει τη μαθηματική μορφή της συνάρτησης $\text{rect}(\cdot)$ που γνωρίζετε ήδη στο χώρο της συχνότητας. Ρόλος του είναι να αποκόψει ένα επιθυμητό συχνοτικό τμήμα.

Συστήματα που εκτελούν απλές πράξεις, όπως γινόμενα με άλλα σήματα, και συστήματα που λειτουργούν ως φίλτρα, κρατώντας επιθυμητές περιοχές συχνοτήτων και αποκόπτοντας άλλες, αποτελούν ένα μεγάλο μέρος των πρακτικών εφαρμογών των συστημάτων, ειδικότερα στις τηλεπικοινωνίες. Συστήματα σαν κι αυτά θα γνωρίσουμε στο κεφάλαιο αυτό, δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στο χώρο της συχνότητας.

¹Για την ακρίβεια, μια από τις πιθανές.



Σχήμα 6.1: (α) Διαμορφωμένο σήμα, (β) ανάκτηση αρχικού σήματος εκπομπής.

6.3 Συστήματα στο χώρο της συχνότητας

Ως τώρα περιγράψαμε τα συστήματα είτε ως μια σχέση εισόδου-εξόδου $y(t) = T\{x(t)\}$, είτε μέσω διαφορικών εξισώσεων και αρχικών συνθηκών, όπου η κρουστική τους απόκριση $h(t)$ είχε θεμελιώδη ρόλο. Πλέον έχουμε ένα ισχυρό εργαλείο ανάλυσης σημάτων στο χώρο της συχνότητας, τον μετασχ. Fourier, ο οποίος είδαμε ότι αναλύει ένα σήμα σε ένα άπειρο άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων της μορφής $e^{j2\pi f_0 t}$. Ας δούμε τι συμβαίνει στα συστήματα, όταν αυτά εξετάζονται από την οπτική της συχνότητας. Θα εξετάσουμε γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα (ΓΧΑ), όπου η απόκριση μηδενικής εισόδου δεν υφίσταται, δηλ. περιγράφονται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης.

6.3.1 Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ Συστήματος

Αν υποθέσουμε ότι στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$, εφαρμόζουμε ένα εκθετικό μιγαδικό σήμα $e^{j2\pi f_0 t}$, τότε η έξοδος του συστήματος δίδεται από την πράξη της συνέλιξης, και είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi f_0(t-\tau)} d\tau = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau = H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} \quad (6.1)$$

με το $H(f_0)$ να είναι ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(t)$. Πώς ερμηνεύεται αυτή η σχέση; Παρατηρήστε ότι όταν φέρουμε ως είσοδο ένα οποιοδήποτε μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας f_0 σε ένα ΓΧΑ σύστημα, το αποτέλεσμα που θα πάρουμε στην έξοδό μας θα είναι το ίδιο σήμα της εισόδου, πολλαπλασιασμένο με το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, στη συχνότητα f_0 .

Σε μαθηματική ορολογία, η μιγαδική εκθετική συνάρτηση συχνότητας f_0 αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** του ΓΧΑ

συστήματος, ενώ η τιμή του μετασχ. Fourier $H(f_0)$ που πολλαπλασιάζεται με την είσοδο ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος.

6.3.2 Απόκριση σε Συχνότητα

Ο μετασχ. Fourier, $H(f)$, της χρονικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος όντας τόσο σημαντικός στην ανάλυση των συστημάτων, δε θα μπορούσε να μην έχει δικό του όνομα: λέγεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνοτική απόκριση**, ενώ η ανάλυσή της σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H(f)} \quad (6.2)$$

μας ονομάζει το φάσμα πλάτους της, $|H(f)|$, ως **απόκριση πλάτους** και το φάσμα φάσης της, $\phi_H(f)$, ως **απόκριση φάσης**.

Όμως ένα από τα σημαντικότερα πορίσματα της Ανάλυσης Fourier είναι ότι η *συνέλιξη στο χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα*, και το αντίστροφο (Πίνακας 4.3). Άρα η σχέση της συνέλιξης που περιγράφει την έξοδο ενός συστήματος στο πεδίο του χρόνου

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (6.3)$$

μπορεί να γραφεί στο πεδίο της συχνότητας ως:

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (6.4)$$

Τι σημαίνει η σχέση αυτή για το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης της εισόδου $X(f)$; Αν χρησιμοποιήσουμε την πολική μορφή, θα έχουμε

$$|Y(f)|e^{j\phi_Y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_X(f)}|H(f)|e^{j\phi_H(f)} \quad (6.5)$$

που οδηγεί στις σχέσεις

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)| \quad (6.6)$$

$$\phi_Y(f) = \phi_X(f) + \phi_H(f) \quad (6.7)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι πολύ σημαντικές διότι μας πληροφορούν ότι:

Συχνοτική επίδραση ΓΧΑ συστήματος στην είσοδό του

- Το φάσμα πλάτους της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεν είναι άλλο από το *γινόμενο* των επιμέρους φασμάτων πλάτους, της εισόδου και του συστήματος. Άρα, η απόκριση πλάτους του συστήματος δρα *πολλαπλασιαστικά* στο φάσμα πλάτους της εισόδου.
- Το φάσμα φάσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεν είναι άλλο από το *άθροισμα* των επιμέρους φασμάτων φάσης, της εισόδου και του συστήματος. Άρα, η απόκριση φάσης του συστήματος δρα *αθροιστικά* στο φάσμα φάσης της εισόδου.

Τα παραπάνω δυο σημεία ισχύουν ανεξαρτήτως της φύσης του σήματος εισόδου (περιοδικό ή μη, ενέργειας ή ισχύος).

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα της απόκρισης σε συχνότητα των ΓΧΑ συστημάτων είναι ότι αν η χρονική απόκριση $h(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση του χρόνου, η απόκριση σε συχνότητα είναι *συζυγής συμμετρική* συνάρτηση της συχνότητας:

$$H(f) = H^*(-f) \quad (6.8)$$

που συνεπάγεται ότι το πραγματικό της μέρος είναι άρτια συνάρτηση του f , και το φανταστικό είναι περιττή συνάρτηση του f , δηλ.

$$H_R(f) = H_R(-f) \quad (6.9)$$

$$H_I(f) = -H_I(-f) \quad (6.10)$$

Όμοια, το πλάτος της απόκρισης σε συχνότητα είναι άρτια συνάρτηση του f και η φάση είναι περιττή συνάρτηση του f , δηλ.

$$|H(f)| = |H(-f)| \quad (6.11)$$

$$\phi_H(f) = -\phi_H(-f) \quad (6.12)$$

Τα παραπάνω δεν πρέπει να σας εκπλήσσουν καθώς είναι γνωστές ιδιότητες στο χώρο της συχνότητας που έχουν τα πραγματικά σήματα στο χρόνο.

Όμως η χροστική απόκριση δεν είναι ο μόνος τρόπος περιγραφής ενός ΓΧΑ συστήματος. Μάλιστα, ο πρώτος τρόπος περιγραφής - γενικών - συστημάτων που συναντήσαμε ήταν μέσω διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Ας θυμηθούμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^M \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \quad (6.13)$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Η ιδιότητα της παραγωγίσιμης του μετασχ. Fourier μπορεί να μετατρέψει την παραπάνω σχέση ως

$$\sum_{i=0}^N (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^M (j2\pi f)^l b_l X(f) \quad (6.14)$$

$$Y(f) \sum_{i=0}^N (j2\pi f)^i a_i = X(f) \sum_{l=0}^M (j2\pi f)^l b_l \quad (6.15)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^N a_i (j2\pi f)^i} \quad (6.16)$$

Ο αριθμητής και ο παρονομαστής της παραπάνω ρητής συνάρτησης αποτελούν πολυώνυμα του $j2\pi f$. Αν υποθέσουμε ότι έχουν M και N διακριτές ρίζες $-\mu_l$ και $-\kappa_i$ αντίστοιχα, με $M < N$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$H(f) = \frac{\prod_{l=1}^M (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^N (j2\pi f + \kappa_i)} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f} \quad (6.17)$$

μέσω της τεχνικής του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα.

6.3.3 ΓΧΑ Συστήματα με Περιοδική Είσοδο

Ας αρχίσουμε τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων με περιοδική είσοδο. Το αποτέλεσμα της Σχέσης (6.1) είναι σημαντικό, γιατί αν φέρουμε ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$, με ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.18)$$

η έξοδος $y(t)$ του συστήματος είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k f_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.19)$$

Βλέπετε ότι το μόνο που αλλάζει είναι οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier: από X_k γίνονται $H(k f_0) X_k$ όπου $H(k f_0)$ είναι η τιμή της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$ του συστήματος για $f = k f_0$. Αυτομάτως, η παραπάνω σχέση μας λέει ότι ένα άθροισμα ημιτόνων που θα εμφανιστεί στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος, θα παραμείνει άθροισμα ημιτόνων στην έξοδο, ίδιων συχνοτήτων αλλά με διαφορετικά πλάτη και φάσεις!

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.1:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με χροστική απόκριση

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) \quad (6.20)$$

και στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 4 \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.21)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$. Τι παρατηρείτε;

Λύση:

Από τον Πίνακα 4.4 έχουμε

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) \longleftrightarrow H(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} \quad (6.22)$$

Η απόκριση σε συχνότητα γράφεται ως

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H(f)} \quad (6.23)$$

Άρα η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(f)| = \frac{2}{|1 + j2\pi f|} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2}} \quad (6.24)$$

ενώ για τη φάση θα έχουμε

$$H(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} = \frac{2(1 - j2\pi f)}{(1 + j2\pi f)(1 - j2\pi f)} = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2} - j \frac{4\pi f}{1 + (2\pi f)^2} = H_R(f) + jH_I(f) \quad (6.25)$$

δηλαδή

$$\phi_H(f) = \tan^{-1} \frac{H_I(f)}{H_R(f)} = \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{4\pi f}{1 + (2\pi f)^2}}{\frac{2}{1 + (2\pi f)^2}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{2\pi f}{1} \right) = -\tan^{-1}(2\pi f) \quad (6.26)$$

λόγω του ότι η αντίστροφη εφαπτομένη είναι περιττή συνάρτηση. Όμως η είσοδος είναι της μορφής

$$x(t) = 4 \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 2e^{jt}e^{j\pi/2} + 2e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (6.27)$$

δηλ. έχει συχνότητες $\pm 1/2\pi$. Γνωρίζουμε ότι οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του ΓΧΑ συστήματος, και έτσι δεδομένου ότι το σύστημα είναι πραγματικό σήμα, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = 2H\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H\left(-\frac{1}{2\pi}\right)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (6.28)$$

$$= 2H\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H^*\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (6.29)$$

$$= 2\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{j\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}e^{jt}e^{j\pi/2} + 2\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{-j\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (6.30)$$

$$= 2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}e^{jt}e^{j\pi/2} + 2\sqrt{2}e^{j\pi/4}e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (6.31)$$

$$= 4\sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.32)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος είναι πάλι ημιτονοειδούς μορφής, όπως η είσοδος, και έχει επηρεαστεί από το σύστημα τόσο στο πλάτος της (πλάτος εισόδου 4, πλάτος εξόδου $4|H(1/2\pi)|$), όσο και στη φάση της (φάση εισόδου $\pi/2$, φάση εξόδου $\pi/2 + \phi(1/2\pi) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$).

Γενικότερα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

Εύρεση εξόδου σε ΓΧΑ σύστημα με περιοδική είσοδο

(α') Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $x(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{j(2\pi f_k t + \theta_k)}$, τότε η έξοδος θα είναι

της μορφής $y(t) = \sum_{k=1}^N A_k H(f_k) e^{j(2\pi f_k t + \theta_k)}$, όπου $H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H(f)}$ η απόκριση σε συχνότητα

του συστήματος.

(β') Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_k t + \theta_k)$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $y(t) = \sum_{k=1}^N A_k |H(f_k)| \cos(2\pi f_k t + \theta_k + \phi_H(f_k))$, όπου $H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H(f)}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

6.3.4 ΓΧΑ Συστήματα με Είσοδο Μη Περιοδικά Σήματα

Πιο γενικά όμως, και για οποιαδήποτε σήματα (όχι απαραίτητα περιοδικά), η σχέση που συνδέει την είσοδο $x(t)$ με την έξοδο $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος $h(t)$ εκφράζεται μέσω της πράξης της συνέλιξης:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (6.33)$$

η οποία μετατρέπεται στο χώρο της συχνότητας ως

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (6.34)$$

Μπορούμε λοιπόν πολύ εύκολα να βρούμε την έξοδο ενός συστήματος στο χώρο της συχνότητας, και να επιστρέψουμε στο χώρο του χρόνου με χρήση του αντίστροφου μετασχ. Fourier.

Επιπλέον, η παραπάνω σχέση επιτρέπει σε ένα σύστημα $h(t)$ με απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ να υπολογιστεί στο χώρο των συχνοτήτων, και μάλιστα πολύ πιο εύκολα απ' ό,τι στο χώρο του χρόνου! Πώς; Προφανώς από τη σχέση

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (6.35)$$

που έχουμε ήδη δει. Βλέπετε ότι, εν γένει, η απόκριση σε συχνότητα είναι μια ρητή συνάρτηση της συχνότητας f . Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{N(f)}{D(f)} \quad (6.36)$$

όπου $N(f), D(f)$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$, με όποιες απλοποιήσεις μπορεί να γίνουν στο κλάσμα. Μια τέτοια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μερικά κλάσματα, δηλ. μπορεί να γραφεί ως

$$H(f) = \frac{N(f)}{D(f)} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} \quad (6.37)$$

στην απλή περίπτωση που οι ρίζες του παρονομαστή $D(f)$ είναι απλές. Σύμφωνα με τον Πίνακα 4.4, μπορούμε να βρούμε την κρουστική απόκριση $h(t)$ για ένα αιτιατό σύστημα ως

$$H(f) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^M A_k e^{-\alpha_k t} u(t) \quad (6.38)$$

Φυσικά η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί και η είσοδος $x(t)$, αφού και το $X(f)$ εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση:

$$X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} \quad (6.39)$$

και μπορούμε να καταλήξουμε στο σήμα στο χρόνο $x(t)$ με τις ίδιες ακριβώς τεχνικές.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα πάνω σε αυτά, που είναι πολύ σημαντικά.

Παράδειγμα 6.2:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \quad (6.40)$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (6.41)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος $y(t)$.Λύση:

Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον γνωστό τρόπο του ολοκληρώματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, συμβουλευόμενοι τον Πίνακα 4.4, έχουμε ότι

$$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(f) = X(f)H(f) = \left(\frac{2}{1 + j2\pi f} + \frac{1}{2 + j2\pi f} \right) \frac{1}{3 + j2\pi f} \quad (6.42)$$

$$= \frac{5 + 3j2\pi f}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)} \quad (6.43)$$

$$= \frac{A}{1 + j2\pi f} + \frac{B}{2 + j2\pi f} + \frac{C}{3 + j2\pi f} \quad (6.44)$$

με

$$A = \frac{5 + 3j2\pi f}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f = -1} = \frac{5 + 3j2\pi f}{(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f = -1} = 1 \quad (6.45)$$

$$B = \frac{5 + 3j2\pi f}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f = -2} = \frac{5 + 3j2\pi f}{(1 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f = -2} = 1 \quad (6.46)$$

$$C = \frac{5 + 3j2\pi f}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f = -3} = \frac{5 + 3j2\pi f}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f = -3} = -2 \quad (6.47)$$

και άρα

$$Y(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} + \frac{1}{2 + j2\pi f} - \frac{2}{3 + j2\pi f} \quad (6.48)$$

και γυρνώντας πίσω στο χρόνο

$$y(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) \quad (6.49)$$

Ας υπολογίσουμε το ίδιο με εφαρμογή του ορισμού της συνέλιξης. Έτσι, θα έχουμε:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (2e^{-\tau}u(\tau) + e^{-2\tau}u(\tau))e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \quad (6.50)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \quad (6.51)$$

Ισχύει ότι

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.52)$$

Άρα

$$y(t) = \int_0^t 2e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau = \int_0^t 2e^{-\tau-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau-3(t-\tau)}d\tau \quad (6.53)$$

$$= \int_0^t 2e^{2\tau-3t}d\tau + \int_0^t e^{\tau-3t}d\tau = 2e^{-3t} \int_0^t e^{2\tau}d\tau + e^{-3t} \int_0^t e^{\tau}d\tau \quad (6.54)$$

$$= e^{-3t}e^{2\tau} \Big|_0^t + e^{-3t}e^{\tau} \Big|_0^t = e^{-3t}(e^{2t} - 1) + e^{-3t}(e^t - 1) \quad (6.55)$$

$$= e^{-t} - e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-3t} = e^{-t} - 2e^{-3t} + e^{-2t}, \quad t > 0 \quad (6.56)$$

$$= e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (6.57)$$

που είναι η ίδια ακριβώς σχέση με τη Σχέση (6.49)! Διαλέξτε τι προτιμάτε. ☺

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την είσοδο $x(t)$, αν μας δίνεται το σύστημα και η έξοδος του. Δείτε:

Παράδειγμα 6.3:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f} \quad (6.58)$$

Στην είσοδό του βρίσκεται ένα σήμα $x(t)$, το οποίο δίνει έξοδο

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \quad (6.59)$$

Βρείτε την είσοδο $x(t)$.

Λύση:

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$y(t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} - \frac{1}{2 + j2\pi f} \quad (6.60)$$

Προφανώς ισχύει

$$Y(f) = H(f)X(f) \iff X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} = \frac{\frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}}{\frac{1}{3+j2\pi f}} = \frac{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}{3+j2\pi f} \quad (6.61)$$

$$= \frac{3 + j2\pi f}{(2 + j2\pi f)(1 + j2\pi f)} = \frac{A}{2 + j2\pi f} + \frac{B}{1 + j2\pi f} \quad (6.62)$$

και το οποίο δίνει το σήμα στο χρόνο

$$x(t) = Ae^{-2t}u(t) + Be^{-t}u(t) \quad (6.63)$$

με

$$A = \frac{3 + j2\pi f}{(2 + j2\pi f)(1 + j2\pi f)} (2 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -2} = \frac{3 + j2\pi f}{(1 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f = -2} = -1 \quad (6.64)$$

$$B = \frac{3 + j2\pi f}{(2 + j2\pi f)(1 + j2\pi f)} (1 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -1} = \frac{3 + j2\pi f}{(2 + j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f = -1} = 2 \quad (6.65)$$

και άρα τελικά η είσοδος θα είναι

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \quad (6.66)$$

Παράδειγμα 6.4:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t) \quad (6.67)$$

Βρείτε την χρονική του απόκριση $h(t)$.

Λύση:

Στο πεδίο της συχνότητας θα μας είναι χρήσιμη η ιδιότητα της παραγώγισης, μια και έχουμε διαφορικές εξισώσεις. Θα έχουμε

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j2\pi fY(f) + 2Y(f) = 3X(f) - 6j2\pi fX(f) \quad (6.68)$$

$$Y(f)(j2\pi f + 2) = X(f)(3 - 6j2\pi f) \quad (6.69)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{3 - 6j2\pi f}{j2\pi f + 2} \quad (6.70)$$

$$H(f) = \frac{3}{j2\pi f + 2} - \frac{6j2\pi f}{j2\pi f + 2} \quad (6.71)$$

$$= 3\frac{1}{j2\pi f + 2} - 6j2\pi f\frac{1}{j2\pi f + 2} \quad (6.72)$$

και από τα γνωστά ζεύγη και ιδιότητες μετασχηματισμών (παραγώγιση, παράγωγος Δέλτα), θα είναι

$$H(f) = 3\frac{1}{2 + j2\pi f} - 6j2\pi f\frac{1}{2 + j2\pi f} \longleftrightarrow h(t) = 3e^{-2t}u(t) - \frac{d}{dt}6e^{-2t}u(t) \quad (6.73)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) - 6\frac{d}{dt}(e^{-2t})u(t) - 6e^{-2t}\frac{d}{dt}(u(t)) \quad (6.74)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) + 12e^{-2t}u(t) - 6e^{-2t}\delta(t) \quad (6.75)$$

$$= 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t) \quad (6.76)$$

Είναι εμφανές πόσο πιο εύκολος είναι ο υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης στο πεδίο της συχνότητας.

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος για μη περιοδική είσοδο

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $h(t) \longleftrightarrow H(f)$ είναι της μορφής

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{-a_k t} u(t) \longleftrightarrow X(f) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{a_k + j2\pi f}$$

τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως $Y(f) = H(f)X(f)$, και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί η έξοδος $y(t)$.

6.3.5 ΓΧΑ Συστήματα με Συναρτήσεις Δέλτα

Πολλά συστήματα (ή και σήματα) εκφράζονται ως ένα απλό άθροισμα Συναρτήσεων Δέλτα, όπως για παράδειγμα το ΓΧΑ σύστημα

$$y(t) = 2x(t) - x(t-1) \quad (6.77)$$

που έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1) \quad (6.78)$$

Αυτή η περίπτωση είναι η πιο εύκολη, καθώς μπορούμε να δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, αντί αυτού της συχνότητας, εκμεταλλευόμενοι την παρακάτω ιδιότητα της Συναρτήσης Δέλτα:

$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = x(t \pm t_0) \quad (6.79)$$

Επαναλαμβάνουμε, ερμηνεύοντας την παραπάνω σχέση, ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια Συναρτήση Δέλτα η οποία βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = \pm t_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x(t)$ μετατοπισμένο στη θέση $t = \pm t_0$!

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.5:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1) \quad (6.80)$$

Στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{-2t}u(t) \quad (6.81)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Λύση:

Ας δούμε και τις δυο λύσεις (χρόνος και συχνότητα).

- Θα έχουμε

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) = 2e^{-2t}u(t) * (2\delta(t) - \delta(t - 1)) \quad (6.82)$$

$$= 2e^{-2t}u(t) * 2\delta(t) - 2e^{-2t}u(t) * \delta(t - 1) \quad (6.83)$$

$$= 4e^{-2t}u(t) - 2e^{-2(t-1)}u(t - 1) \quad (6.84)$$

- Στο χώρο της συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο, και μέσω μετασχ. Fourier και ιδιοτήτων, θα είναι

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{2}{2 + j2\pi f}(2 - e^{-j2\pi f}) \quad (6.85)$$

$$= \frac{4}{2 + j2\pi f} - \frac{2}{2 + j2\pi f}e^{-j2\pi f} \quad (6.86)$$

και από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier, η έξοδος στο χρόνο θα είναι

$$y(t) = 4e^{-2t}u(t) - 2e^{-2(t-1)}u(t - 1) \quad (6.87)$$

Παράδειγμα 6.6:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t + 1) - \delta(t - 1) \quad (6.88)$$

Στην είσοδο του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t - 2}{T}\right) \quad (6.89)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Λύση:

- Από τους Πίνακες, έχουμε

$$H(f) = e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f} \quad (6.90)$$

και

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t - 2}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f} \quad (6.91)$$

Είναι

$$Y(f) = H(f)X(f) = 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}(e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}) \quad (6.92)$$

$$= 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}e^{j2\pi f} - 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}e^{-j2\pi f} \quad (6.93)$$

$$= 2T\text{sinc}(fT)e^{-j2\pi f} - 2T\text{sinc}(fT)e^{-j6\pi f} \quad (6.94)$$

και

$$y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t - 1}{T}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t - 3}{T}\right) \quad (6.95)$$

- Είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * (\delta(t+1) - \delta(t-1)) \quad (6.96)$$

$$= 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * \delta(t+1) - 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * \delta(t-1) \quad (6.97)$$

$$= 2\text{rect}\left(\frac{t-1}{T}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-3}{T}\right) \quad (6.98)$$

από την ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (6.99)$$

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα δε θα άλλαζε τίποτα αν οι συναρτήσεις Δέλτα αποτελούσαν την είσοδο του συστήματος (αντί το ίδιο το σύστημα), και οι εισοδοί $x(t)$ αποτελούσαν τις χροστικές αποκρίσεις των συστημάτων.

Παρατηρήσεις

- (α') Για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, αν σας βολεύει. Το πώς θα καταλαβαίνετε ποιός τρόπος είναι πιο εύκολος ή σύντομος, απαιτεί εμπειρία. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι αρχικά εμφανές κάτι τέτοιο, και αναγκαστικά δουλεύετε όπως νομίζετε εσείς, μέχρι να επιβεβαιωθείτε ή να διαψευστείτε.
- (β') Υπενθυμίζεται ότι το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα εφαρμόζεται *μόνον* όταν ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερος από αυτόν του παρονομαστή. Στα παραπάνω παραδείγματα, αυτό ήταν αληθές. Σε περίπτωση που δεν είναι, πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων.
- (γ') Στην ανάλυση των παραπάνω συστημάτων, υποθέσαμε ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει, αφού χρησιμοποιήσαμε τα σύμβολα και τις ιδιότητές του. Αυτό είναι αρκετά περιοριστικό, διότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να μην υπάρχει για κάποια σήματα ή συστήματα που εμφανίζονται στην πράξη. Θέλουμε λοιπόν έναν ακόμα πιο γενικό μετασχηματισμό που θα μπορεί να περιγράψει συχνοτικά και μη ευσταθή σήματα! Θα δούμε σύντομα έναν τέτοιο μετασχηματισμό που άρει αυτές τις δυσκολίες.

6.4 Φίλτρα Επιλογής Συχνότητων

Κάποια συστήματα εκτελούν συγκεκριμένες λειτουργίες, οι οποίες είναι πολύ συνήθεις και πολύ χρήσιμες στην πράξη. Αυτές οι λειτουργίες περιλαμβάνουν την αποκοπή συγκεκριμένων συχνοτήτων του σήματος εισόδου και τη διέλευση κάποιων άλλων, και/ή την ενίσχυση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που διέρχονται ελεύθερα του συστήματος. Λόγω αυτής της λειτουργίας τους, αυτά τα συστήματα ονομάζονται “φίλτρα”. Ο λόγος, προφανής: όπως το φίλτρο του καφέ π.χ. δεσμεύει τον καφέ σε στέρεα μορφή και επιτρέπει τη διέλευση του υγρού καφέ, έτσι και αυτά τα φίλτρα, επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων ενώ δεσμεύουν (καταστέλλουν, μηδενίζουν το πλάτος) κάποιες άλλες.

Εδώ θα δούμε κάποια συγκεκριμένα φίλτρα, τα οποία ονομάζονται *ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων*, και είναι ΓΧΑ συστήματα με τις εξής δυο ιδιότητες:

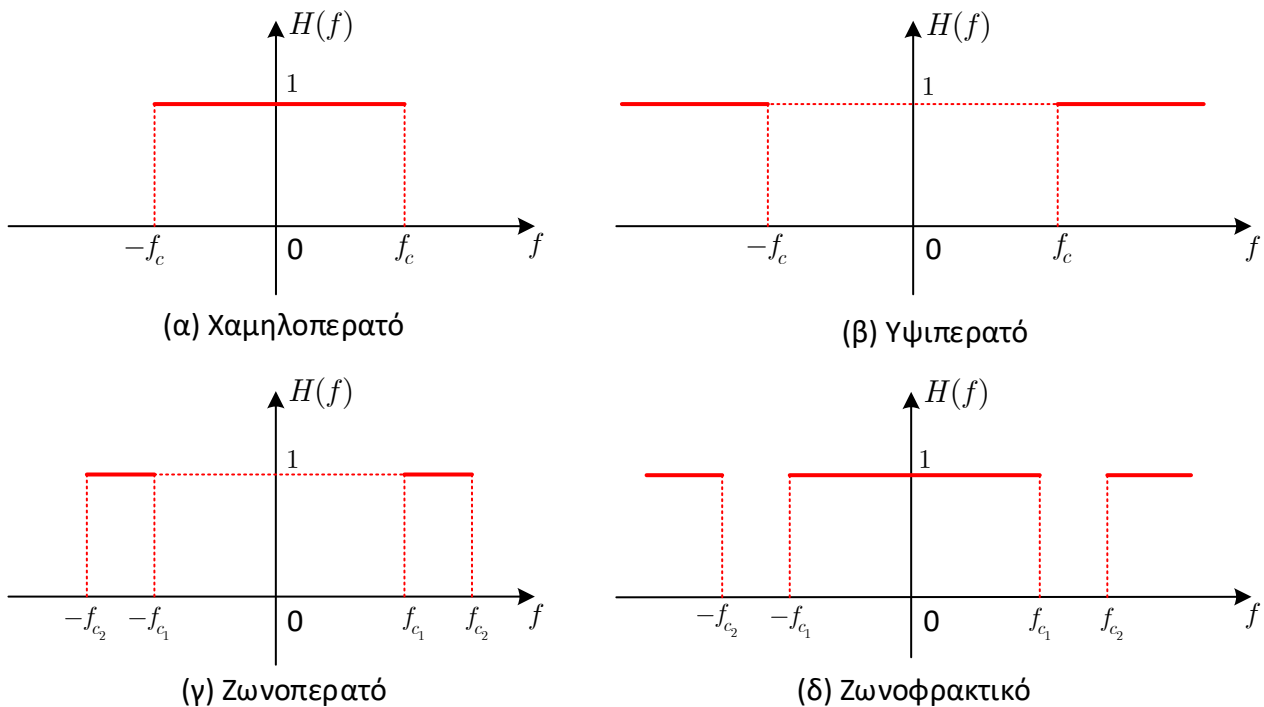
- Είναι ιδανικά, δηλ. *μη πραγματοποιήσιμα*, διότι όπως θα δούμε:
 - είναι μη-αιτιατά
 - η χροστική τους απόκριση $h(t)$ είναι άπειρης διάρκειας
- Επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων χωρίς διαταραχή στο πλάτος ή στη φάση, ενώ αποκόπτουν εντελώς κάποιες άλλες.

Παρόλα αυτά, όλα τα πραγματικά φίλτρα που κατασκευάζουν οι μηχανικοί προσπαθούν να προσεγγίσουν όσο γίνεται καλύτερα αυτά τα θεωρητικά φίλτρα, δεδομένων παραγόντων όπως η πολυπλοκότητα και το κόστος κατασκευής.

Υπάρχουν τέσσερα βασικά είδη φίλτρων επιλογής συχνοτήτων:

1. Το **βαθυπερατό (lowpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από τη μηδενική συχνότητα ως μια συγκεκριμένη συχνότητα f_c .
2. Το **υψιπερατό (highpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη συχνότητα f_c , ως το $+\infty$.
3. Το **ζωνοπερατό (bandpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.
4. Το **ζωνοφρακτικό (bandstop)** φίλτρο: απαγορεύει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.

Η συχνότητα f_c σε όλα τα παραπάνω φίλτρα ονομάζεται *συχνότητα αποκοπής - cutoff frequency*. Τα φίλτρα αυτά



Σχήμα 6.2: Ιδανικά Φίλτρα Μηδενικής Φάσης.

φαίνονται σχηματικά στο Σχήμα 6.2, και όπως παρατηρείτε, είναι πραγματικά και έχουν άρτια συμμετρία, αφού αντιστοιχούν σε πραγματικά σήματα. Ας σημειωθεί ότι τα ιδανικά φίλτρα έχουν σταθερό, μοναδιαίο μέτρο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.2, αλλά η φάση τους μπορεί να είναι μηδενική ή γραμμική (στο Σχήμα 6.2 φαίνονται τα ιδανικά φίλτρα μηδενικής φάσης).

6.4.1 Ιδανικά Φίλτρα Μηδενικής Φάσης

Ας ασχοληθούμε πρώτα με ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων μηδενικής φάσης. Θα εξηγήσουμε ένα προς ένα τα συνηθέστερα είδη φίλτρων και τις εκφράσεις τους στο χώρο του χρόνου και της συχνότητας.

6.4.1.1 Χαμηλοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{LP}(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \quad (6.100)$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί με χρήση της γνωστής συνάρτησης rect ως

$$H_{LP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (6.101)$$

Προσέξτε ότι

$$|H_{LP}(f)| = H_{LP}(f) \quad (6.102)$$

και

$$\angle H_{LP}(f) = 0 \quad (6.103)$$

Η χροστική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκειται εύκολα ως

$$h_{LP}(t) = F^{-1}\{H_{LP}(f)\} = 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (6.104)$$

6.4.1.2 Υψιπερατό φίλτρο

Το ιδανικό υψιπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{HP}(f) = \begin{cases} 0, & |f| < f_c \\ 1, & |f| > f_c \end{cases} \quad (6.105)$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί ως συνάρτηση του χαμηλοπερατού φίλτρου που είδαμε μόλις, ως

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (6.106)$$

Προσέξτε ότι κι εδώ το μέτρο του φίλτρου είναι ίσο με την απόκριση σε συχνότητα, όπως για το χαμηλοπερατό, και η φάση του είναι επίσης μηδέν.

Η χροστική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκειται εύκολα ως

$$h_{HP}(t) = F^{-1}\{H_{HP}(f)\} = \delta(t) - 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (6.107)$$

6.4.1.3 Ζωνοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BP}(f) = \begin{cases} 1, & f_{c1} < |f| < f_{c2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.108)$$

κι όπως βλέπετε στο Σχήμα 6.2, αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς γύρω από τη συχνότητα $\pm f_c = \pm \frac{f_{c1} + f_{c2}}{2}$, με διάρκεια $f_{c2} - f_{c1}$ ο καθένας. Άρα το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{BP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{f_{c2} - f_{c1}}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{f_{c2} - f_{c1}}\right) \quad (6.109)$$

Με αυτή τη γραφή, η χροστική απόκριση υπολογίζεται από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier ως

$$h_{BP}(t) = (f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) e^{-j2\pi f_c t} + (f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) e^{j2\pi f_c t} \quad (6.110)$$

η οποία μπορεί να γραφεί μέσω των σχέσεων του Euler ως

$$h_{BP}(t) = 2(f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) \cos(2\pi f_c t) \quad (6.111)$$

με $f_c = \frac{f_{c1} + f_{c2}}{2}$.

6.4.1.4 Ζωνοφρακτικό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BS}(f) = \begin{cases} 0, & f_{c1} < |f| < f_{c2} \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.112)$$

και μπορεί να γραφεί συναρτήσει του ζωνοπερατού φίλτρου ως

$$H_{BS}(f) = 1 - H_{BP}(f) \quad (6.113)$$

Έτσι, η χροστική του απόκριση μπορεί να βρεθεί εύκολα ως

$$h_{BS}(t) = \delta(t) - h_{BP}(t) = \delta(t) - 2(f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) \cos(2\pi f_c t) \quad (6.114)$$

Παρατηρήστε ότι πράγματι όλα τα ιδανικά φίλτρα έχουν χροστική απόκριση η οποία είναι μη-αιτιατή και άπειρης διάρκειας.

6.4.2 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε όμως μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα χρήσης των ιδανικών φίλτρων.

Παράδειγμα 6.7:

Εστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8) + \sin(2\pi 20t - \pi/3) \quad (6.115)$$

το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα ιδανικό

(α') χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

(β') υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

Βρείτε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:

Μπορούμε απ' ευθείας να απαντήσουμε ότι αφού τα φίλτρα μας αποκόπτουν τις συχνότητες μεγαλύτερες από 15 Hz (χαμηλοπερατό) και μικρότερες από 15 Hz (υψιπερατό), και η είσοδός μας αποτελείται μόνο από τις συχνότητες 10, 20 Hz, τότε πολύ απλά οι έξοδοι θα είναι

$$(α') y(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8)$$

$$(β') y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3)$$

αντίστοιχα, αφού τα φίλτρα είναι ιδανικά (μοναδιαίου πλάτους) και η φάση τους είναι μηδέν, οπότε δεν υπάρχει καμιά μεταβολή στα πλάτη και τις φάσεις των σημάτων που περνούν στην έξοδο.

Ας επικυρώσουμε αυτό το αποτέλεσμα αναλυτικά. Ο μετασχ. Fourier του σήματος εισόδου είναι

$$X(f) = e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) + e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20) \quad (6.116)$$

(α) Η έξοδος στο χώρο της συχνότητας θα είναι το γινόμενο των μετασχ. Fourier της εισόδου και του συστήματος, δηλ.

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (6.117)$$

$$= (e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) + e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20)) \text{rect}\left(\frac{f}{30}\right) \quad (6.118)$$

$$= e^{j\pi/8} \text{rect}\left(\frac{1}{3}\right) \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \text{rect}\left(\frac{-1}{3}\right) \delta(f + 10) \quad (6.119)$$

$$+ e^{-j5\pi/6} \text{rect}\left(\frac{2}{3}\right) \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \text{rect}\left(\frac{-2}{3}\right) \delta(f + 20) \quad (6.120)$$

λόγω της γνωστής ιδιότητας

$$X(f)\delta(f \pm f_0) = X(\mp f_0)\delta(f \pm f_0) \quad (6.121)$$

Όμως

$$\text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) = \begin{cases} 1, & |f| < \frac{3}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.122)$$

και άρα

$$\text{rect}\left(\frac{\pm 2}{3}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \text{rect}\left(\frac{\pm 1}{3}\right) = 1 \quad (6.123)$$

Οπότε τελικά

$$Y(f) = e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) \longleftrightarrow y(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8) \quad (6.124)$$

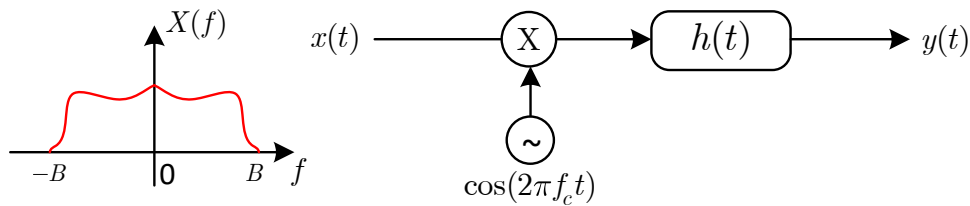
(β') Εντελώς ανάλογα με παραπάνω, δείξτε ότι

$$Y(f) = e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20) \longleftrightarrow y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3) \quad (6.125)$$

Είναι αρκετά προτιμότερο να ακολουθείτε την περισσότερο διαισθητική λύση, καθώς σας σώζει χρόνο και ενισχύει την κατανόηση για το πως λειτουργούν τα φίλτρα στην πράξη.

Παράδειγμα 6.8:

Έστω το σήμα $x(t)$ το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα σύστημα του Σχήματος 6.3,



Σχήμα 6.3: Σύστημα Παραδείγματος 6.8.

με $f_c = 100$ Hz, και με το σύστημα $h(t)$ να είναι της μορφής

$$h(t) = 400\text{sinc}(200t) \tag{6.126}$$

Σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:

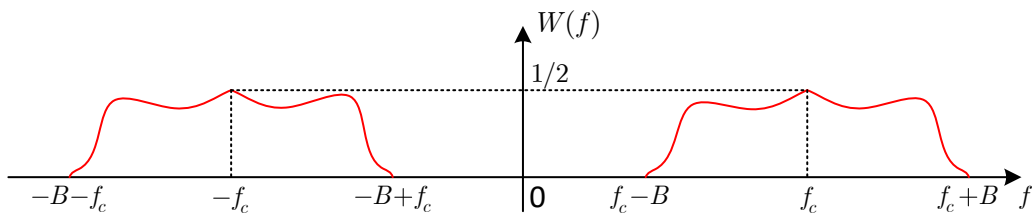
Το σήμα $x(t)$ πολλαπλασιάζεται με ένα συνημίτονο συχνότητας f_c , οπότε αν συμβολίσουμε με $w(t)$ το αποτέλεσμα της πράξης αυτής, θα είναι

$$w(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c) \right) \tag{6.127}$$

και λόγω γνωστής ιδιότητας της συνέλιξης με συνάρτηση Δέλτα, είναι

$$W(f) = \frac{1}{2}X(f - f_c) + \frac{1}{2}X(f + f_c) \tag{6.128}$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 6.4.



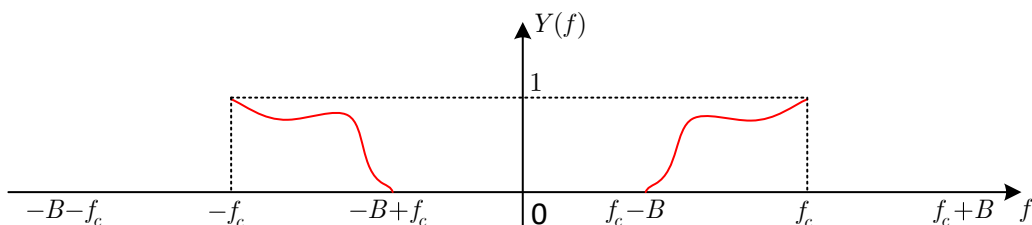
Σχήμα 6.4: Είσοδος συστήματος Παραδείγματος 6.8.

Το σύστημα $h(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$h(t) = 400\text{sinc}(200t) = 2 \times 200\text{sinc}(200t) \longleftrightarrow H(f) = 2\text{rect}\left(\frac{f}{200}\right) \tag{6.129}$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 100$ Hz με πλάτος 2. Άρα το φίλτρο αυτό θα κρατήσει τις συχνότητες της εισόδου που βρίσκονται στο διάστημα $[-100, 100]$ Hz, θα διπλασιάσει το πλάτος τους, ενώ θα αποκόψει τελείως τις συχνότητες εκτός του παραπάνω διαστήματος.

Η έξοδος του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 6.5.

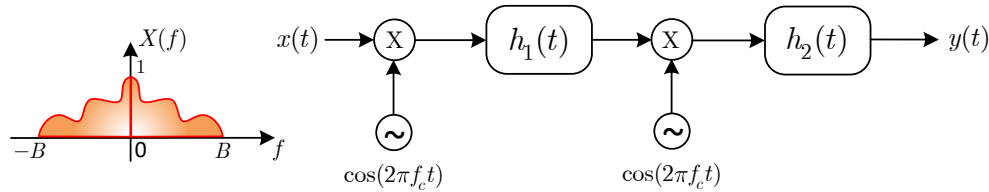


Σχήμα 6.5: Έξοδος συστήματος Παραδείγματος 6.8.

Ας μελετήσουμε τώρα ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.9:

Εστω η διάταξη του Σχήματος 6.6,



Σχήμα 6.6: Διάταξη Παραδείγματος 6.9.

με το σήμα εισόδου $x(t)$ να έχει μετασχ. Fourier όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα συστήματα $h_i(t)$ δίνονται ως:

$$h_1(t) = 4f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (6.130)$$

$$h_2(t) = 8B \text{sinc}(2Bt) \quad (6.131)$$

και η συχνότητα f_c είναι $f_c \gg B$.

(α') Σχεδιάστε το σήμα $W(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_1(t)$ συναρτήσει του $X(f)$.

(β') Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier του συστήματος $h_1(t)$.

(γ') Σχεδιάστε το σήμα $Z(f)$ που προκύπτει ως έξοδος από το σύστημα $h_1(t)$.

(δ') Σχεδιάστε το σήμα $V(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_2(t)$.

(ε') Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier, $H_2(f)$, του δεύτερου συστήματος, $h_2(t)$.

(ϛ') Σχεδιάστε την τελική έξοδο της όλης διάταξης στο χώρο της συχνότητας, $Y(f)$, και γράψτε τη μαθηματική μορφή του $y(t)$ συναρτήσει του $x(t)$.

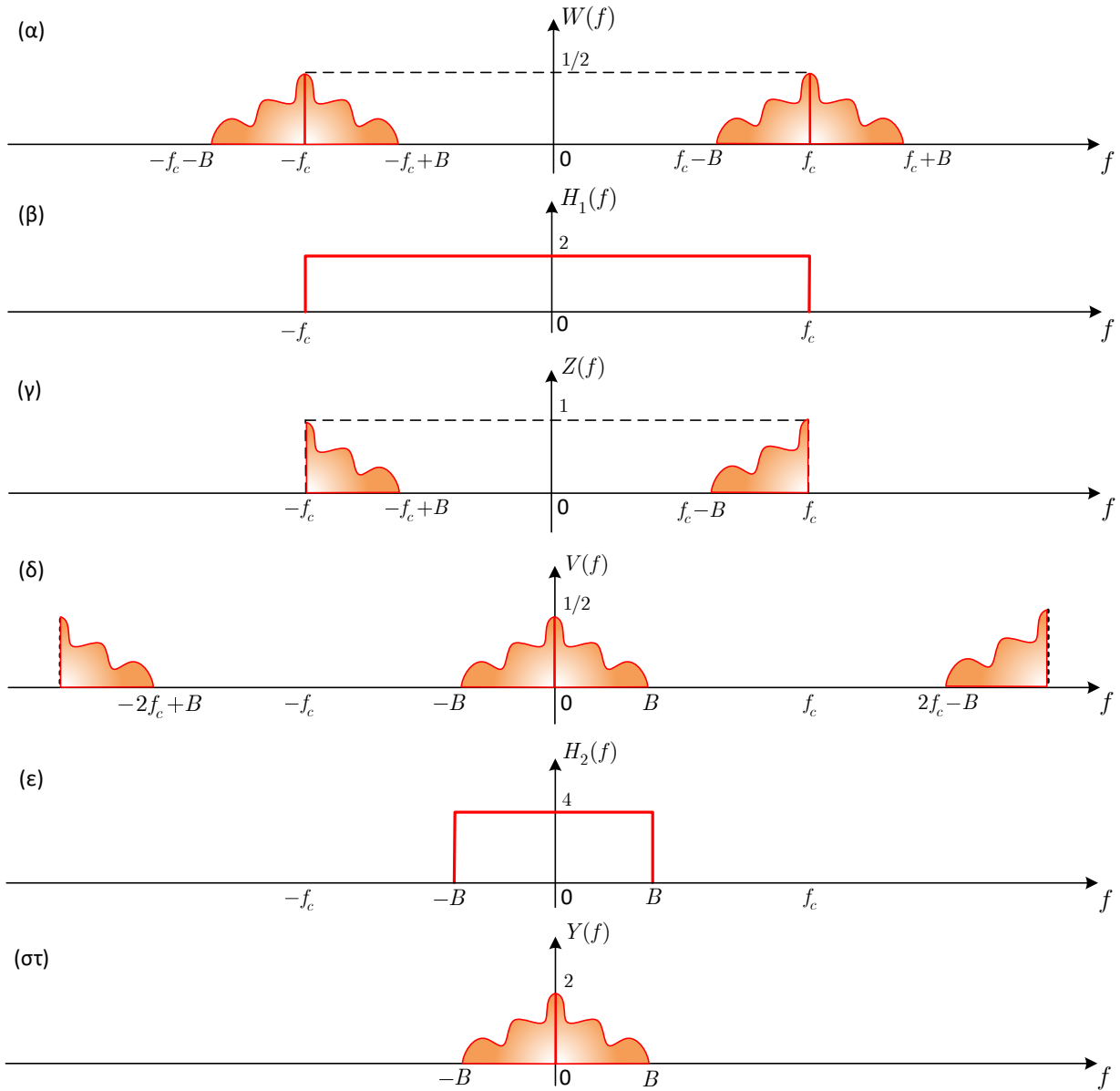
Λύση:

(α') Είναι

$$w(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c) \right) \quad (6.132)$$

$$= \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c) \quad (6.133)$$

Το φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 6.7(α) και είναι ουσιαστικά το φάσμα του σήματος εισόδου μετατοπισμένο γύρω από τη συχνότητα $\pm f_c$.



Σχήμα 6.7: Φάσματα Παραδείγματος 6.9.

(β') Είναι

$$h_1(t) = 4f_c \text{sinc}(2f_c t) \longleftrightarrow H_1(f) = 2 \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (6.134)$$

το οποίο φαίνεται στο 6.7(β), και αποτελεί ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής f_c και πλάτους 2.

(γ') Είναι

$$Z(f) = W(f)H_1(f) = \frac{1}{2}X(f - f_c)H_1(f) + \frac{1}{2}X(f + f_c)H_1(f) \quad (6.135)$$

που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα κομμάτι του αρχικού φάσματος $W(f)$ όπως στο Σχήμα 6.7(γ), που παραμένει στην έξοδο μετά την εφαρμογή του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου $H_1(f)$.

(δ') Το $V(f)$ θα είναι το φάσμα του $Z(f)$ μετατοπισμένο στις συχνότητες $\pm f_c$, δηλ.

$$v(t) = z(f) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow V(f) = \frac{1}{2}Z(f - f_c) + \frac{1}{2}Z(f + f_c) \quad (6.136)$$

όπως στο Σχήμα 6.7(δ).

(ε') Είναι

$$h_2(t) = 8B \operatorname{sinc}(2Bt) \longleftrightarrow H_2(f) = 4 \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (6.137)$$

το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 6.7(ε), και αποτελεί ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής B και πλάτος 4.

(ς') Η έξοδος $Y(f)$ θα είναι της μορφής

$$Y(f) = V(f)H_2(f) = \frac{1}{2}Z(f - f_c)H_2(f) + \frac{1}{2}Z(f + f_c)H_2(f) \quad (6.138)$$

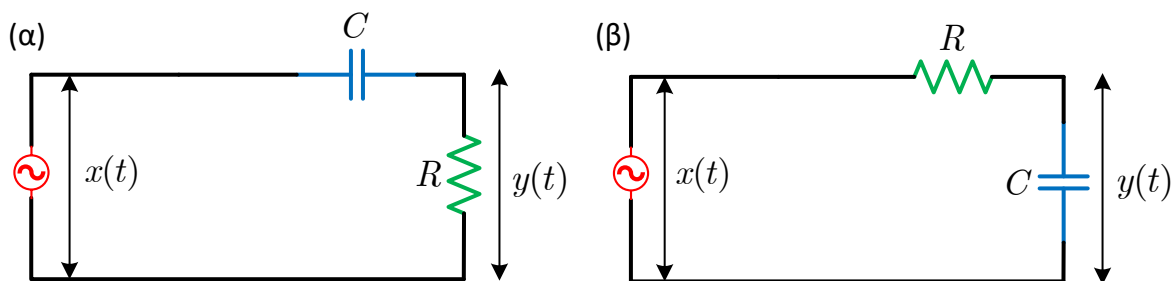
όπως στο Σχήμα 6.7(στ), αφού το φίλτρο $H_2(f)$ αποκόπτει όλες τις συχνότητες εκτός του διαστήματος $(-B, B)$, και αυτό που απομένει είναι ένα σήμα ίδιο με το αρχικό σήμα εισόδου $x(t)$ πολλαπλασιασμένο επί 2, δηλ.

$$y(t) = 2x(t) \quad (6.139)$$

Ας δούμε, τέλος, έναν απλό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να πραγματοποιήσουμε δυο από τα φίλτρα που περιγράψαμε.

Παράδειγμα 6.10:

Για τα ηλεκτρικά κυκλώματα που φαίνονται στο Σχήμα 6.8



Σχήμα 6.8: (α) υψιπερατό και (β) χαμηλοπερατό φίλτρο.

βρείτε τις αποκρίσεις πλάτους και φάσης, αν γνωρίζετε ότι οι εξισώσεις διαφορών που τα περιγράφουν είναι

$$(\alpha') \quad \frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$(\beta') \quad RC \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$$

Λύση:

(α') Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγωγίσισης στην εξίσωση διαφορών έχουμε

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j2\pi f Y(f) + \frac{1}{RC}Y(f) = j2\pi f X(f) \quad (6.140)$$

$$\left(\frac{1}{RC} + j2\pi f\right)Y(f) = j2\pi f X(f) \quad (6.141)$$

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{\frac{1}{RC} + j2\pi f} \quad (6.142)$$

το οποίο γράφεται

$$H(f) = \frac{(2\pi f)^2}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + (2\pi f)^2} + j \frac{\frac{2\pi f}{RC}}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + (2\pi f)^2} \quad (6.143)$$

Η απόκριση πλάτους δίνεται ως

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{j2\pi fRC}}} \quad (6.144)$$

και η απόκριση φάσης ως

$$\phi_H(f) = \tan^{-1} \frac{1}{2\pi fRC} \quad (6.145)$$

(β') Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία για την επόμενη διαφορική εξίσωση

$$RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t) \longleftrightarrow RCj2\pi fY(f) + Y(f) = X(f) \quad (6.146)$$

$$(j2\pi fRC + 1)Y(f) = X(f) \quad (6.147)$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad (6.148)$$

το οποίο γράφεται

$$H(f) = \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} + j \frac{-2\pi fRC}{1 + (2\pi fRC)^2} \quad (6.149)$$

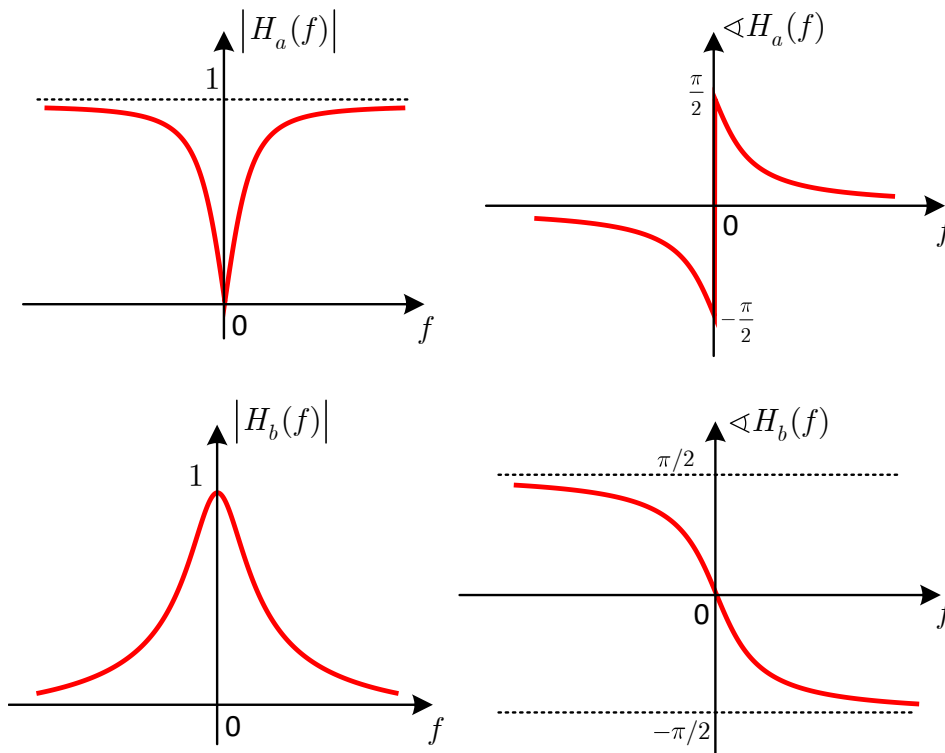
Η απόκριση πλάτους δίνεται ως

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}} \quad (6.150)$$

και η απόκριση φάσης ως

$$\phi_H(f) = -\tan^{-1}(2\pi fRC) \quad (6.151)$$

Οι αποκρίσεις φαίνονται στο Σχήμα 6.9. Καταλαβαίνετε ότι τα δυο ηλεκτρικά κυκλώματα μοντελοποιούν ένα



Σχήμα 6.9: Απόκριση πλάτους και φάσης για (α) υψιπερατό και (β) χαμηλοπερατό φίλτρο.

υψιπερατό (α) και χαμηλοπερατό (β) φίλτρο!