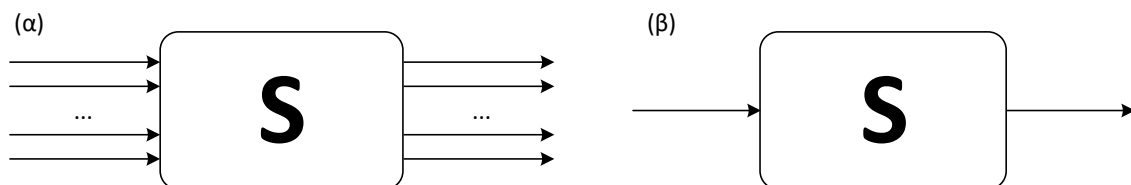


2.5 Συστήματα

Όπως ήδη γνωρίζετε από το προηγούμενο Κεφάλαιο, τα συστήματα χρησιμοποιούνται για να επεξεργαστούν ή/και να εξάγουν πληροφορία από σήματα που δέχονται στην είσοδό τους.

Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται από τρία στοιχεία: την είσοδό του, την έξοδό του, και τις αρχές από τις οποίες διέπεται η λειτουργία του. Οι αρχές λειτουργίας του δεν είναι τίποτε άλλο από το *μαθηματικό μοντέλο* που μπορεί κανείς να αναπτύξει για να περιγράψει τη σχέση που συνδέει την είσοδο με την έξοδό του. Για παράδειγμα, ένα ηλεκτρικό κύκλωμα διέπεται από τους γνωστούς από τη Φυσική νόμους του Kirchhoff, και από τις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν την τάση και την ένταση του ρεύματος στα άκρα των στοιχείων του (αντιστάτες, πυκνωτές, κλπ.). Το σύνολο αυτών των εξισώσεων αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο του ηλεκτρικού κυκλώματος.

Παρόλο που τα ηλεκτρικά κυκλώματα είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα συστήματος, το να συνδέσουμε την έννοια του συστήματος με ένα συγκεκριμένο είδος υλοποίησης θα ήταν αρκετά περιοριστικό. Θα προτιμήσουμε λοιπόν μια πιο αφαιρετική έννοια για τα συστήματα που θα συζητήσουμε. Θα μπορούσε κανείς να τα δει ως “μαύρα κουτιά”, των οποίων οι εσωτερικές λεπτομέρειες υλοποίησης δεν μας ενδιαφέρουν, παρά μόνο ο τρόπος λειτουργίας τους, η επίδρασή τους στις εισόδους που δέχονται, και το αποτέλεσμα (έξοδοι) που παράγουν. Επίσης, τα συστήματα μπορεί να είναι *πολλαπλών εισόδων και πολλαπλών εξόδων* ή *μιας εισόδου και μιας εξόδου*, όπως στο Σχήμα 2.14.



Σχήμα 2.14: (α) Σύστημα MIMO, (β) Σύστημα SISO.

Στο παρόν σύγγραμμα, θα μας απασχολήσουν σχεδόν αποκλειστικά συστήματα μιας εισόδου και μιας εξόδου. Τέτοια συστήματα αποκαλούνται Single Input - Single Output (SISO) συστήματα.

Ένα SISO σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας *τελεστής* $T[\cdot]$ ο οποίος εφαρμόζεται στην είσοδο $x(t)$ του συστήματος, και παράγει μια έξοδο $y(t)$. Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = T[x(t)] \quad (2.78)$$

2.5.1 Κατηγορίες Συστημάτων

Τα συστήματα διακρίνονται σε ορισμένες κατηγορίες, τις πιο σημαντικές από τις οποίες θα συζητήσουμε εδώ. Για λόγους συντομίας και ευκολίας, θα υιοθετήσουμε το συμβολισμό

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad (2.79)$$

για να αναπαράστούμε την είσοδο $x(t)$ η οποία περνά από ένα σύστημα και δίνει την έξοδο $y(t)$.

2.5.1.1 Γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα

Τα γραμμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ικανοποιούνται δυο συγκεκριμένες ιδιότητες: η ιδιότητα της *αθροιστικότητας* και η ιδιότητα της *ομογένειας*.

Η ιδιότητα της αθροιστικότητας αναφέρει ότι αν σε ένα σύστημα εφαρμόσουμε δυο διαφορετικές εισόδους $x_i(t)$, με $i = 1, 2$, και πάρουμε δυο διαφορετικές εξόδους $y_i(t)$, με $i = 1, 2$, τότε αν εφαρμόσουμε ως είσοδο το *άθροισμα* των δυο εισόδων

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (2.80)$$

θα λάβουμε ως έξοδο το *άθροισμα* των επιμέρους εξόδων

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (2.81)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί για N εισόδους.

Επιπλέον, η ιδιότητα της ομογένειας σχετίζεται με την κλιμάκωση της εισόδου κατά παράγοντα a . Η ιδιότητα της ομογένειας ικανοποιείται αν για το ζεύγος εισόδου-εξόδου

$$x(t) \longrightarrow y(t) \quad (2.82)$$

ισχύει το ζεύγος

$$ax(t) \longrightarrow ay(t) \quad (2.83)$$

για κάθε πραγματικό ή φανταστικό αριθμό a .

Οι δυο παραπάνω ιδιότητες από κοινού μας δίνουν την ιδιότητα της **γραμμικότητας**, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως εξής: αν

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \quad (2.84)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \quad (2.85)$$

είναι ζεύγη εισόδου-εξόδου για ένα σύστημα, τότε για οποιεσδήποτε μιγαδικές ή πραγματικές σταθερές a, b , το

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t) \quad (2.86)$$

είναι ζεύγος εισόδου-εξόδου για το ίδιο σύστημα. Αν θέλαμε να εκφράσουμε τη γραμμικότητα περιγραφικά, γραμμικά είναι τα συστήματα στα οποία αν εφαρμόσουμε ως είσοδο ένα άθροισμα σημάτων, θα πάρουμε ως έξοδο το άθροισμα των εξόδων που θα παίρναμε αν είχαμε δώσει ως είσοδο ένα-ένα τα σήματα, κι όχι όλα μαζί ως άθροισμα. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 2x(t+1) - 3x(t-4) \quad (2.87)$$

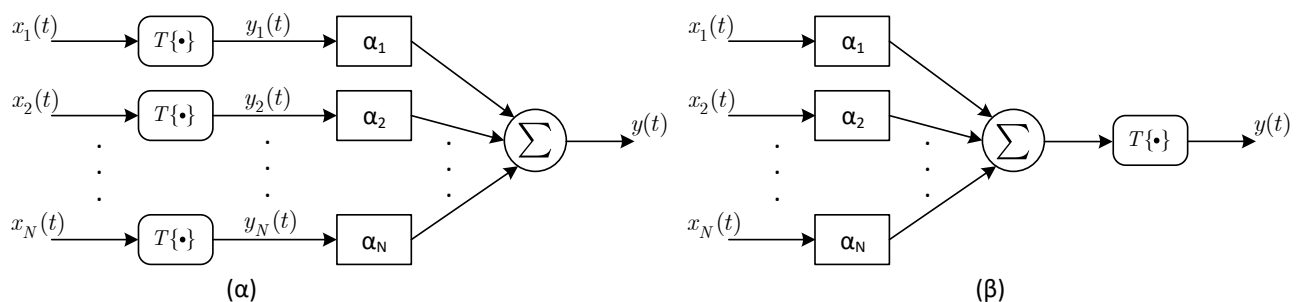
είναι γραμμικό, ενώ το σύστημα

$$y(t) = \sqrt{x(t)} \quad (2.88)$$

δεν είναι γραμμικό, όπως επίσης και το

$$y(t) = x^2(t) \quad (2.89)$$

δεν είναι γραμμικό. Μια καλή σχηματική αναπαράσταση της έννοιας της γραμμικότητας φαίνεται το Σχήμα 2.15. Αν η έξοδος στο Σχήμα 2.15(α) είναι η ίδια με αυτή του Σχήματος 2.15(β), τότε το σύστημα είναι γραμμικό.



Σχήμα 2.15: Η ιδιότητα της γραμμικότητας συστημάτων.

Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική, οπότε ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.7:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{3}x(2-t) + x(t) \quad (2.90)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $ax_1(t)$ η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \frac{1}{3}ax_1(2-t) + ax_1(t) = a\left(\frac{1}{3}x_1(2-t) + x_1(t)\right) \quad (2.91)$$

ενώ για είσοδο $bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y_2(t) = \frac{1}{3}bx_2(2-t) + bx_2(t) = b\left(\frac{1}{3}x_2(2-t) + x_2(t)\right) \quad (2.92)$$

Για είσοδο $ax_1(t) + bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y(t) = \frac{1}{3}(ax_1(2-t) + bx_2(2-t)) + ax_1(t) + bx_2(t) \quad (2.93)$$

$$= \frac{1}{3}ax_1(2-t) + \frac{1}{3}bx_2(2-t) + ax_1(t) + bx_2(t) \quad (2.94)$$

$$= a\left(\frac{1}{3}x_1(2-t) + x_1(t)\right) + b\left(\frac{1}{3}x_2(2-t) + x_2(t)\right) \quad (2.95)$$

$$= y_1(t) + y_2(t) \quad (2.96)$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό. ■

Παράδειγμα 2.8:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{x(t+1)} \quad (2.97)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $ax_1(t)$, η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \frac{1}{ax_1(t+1)} \quad (2.98)$$

ενώ για είσοδο $bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y_2(t) = \frac{1}{bx_2(t+1)} \quad (2.99)$$

Για είσοδο $ax_1(t) + bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y(t) = \frac{1}{ax_1(t+1) + bx_2(t+1)} \neq y_1(t) + y_2(t) \quad (2.100)$$

άρα το σύστημα δεν είναι γραμμικό. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της ομογένειας, απλά παρατηρώντας ότι

$$ax(t) \not\rightarrow ay(t) \quad (2.101)$$

Οπότε θα μπορούσαμε να αποφανθούμε εξ' αρχής ότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό, παρ' όλα αυτά προχωρήσαμε το παράδειγμα ως το τέλος για λόγους πληρότητας. ■

Τα παραπάνω συστήματα ήταν αντιπροσωπευτικά για το πως μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα σύστημα είναι γραμμικό ή όχι. Στην πράξη, τα περισσότερα φυσικά συστήματα συνεχούς χρόνου περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις. Ας δούμε δυο τέτοια παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.9:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) \quad (2.102)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $x_1(t)$, η έξοδος είναι

$$\frac{d}{dt}y_1(t) + 2y_1(t) = x_1(t) \quad (2.103)$$

ενώ για είσοδο $x_2(t)$, η έξοδος είναι

$$\frac{d}{dt}y_2(t) + 2y_2(t) = x_2(t) \quad (2.104)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με a και b αντίστοιχα, έχουμε

$$\frac{d}{dt}ay_1(t) + 2ay_1(t) = ax_1(t) \quad (2.105)$$

$$\frac{d}{dt}by_2(t) + 2by_2(t) = bx_2(t) \quad (2.106)$$

Το άθροισμά τους δίνει

$$\frac{d}{dt}ay_1(t) + 2ay_1(t) + \frac{d}{dt}by_2(t) + 2by_2(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (2.107)$$

Όμως η παραπάνω σχέση δεν είναι άλλη από τη Σχέση (2.102) με

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (2.108)$$

$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t) \quad (2.109)$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό. ■

Εύκολα μπορεί να γενικεύσει κανείς το παραπάνω αποτέλεσμα για μια διαφορική εξίσωση N -οστού βαθμού: η διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} b_k x(t) \quad (2.110)$$

αναπαριστά ένα γραμμικό σύστημα. Οι συντελεστές a_k, b_k της διαφορικής εξίσωσης μπορούν να είναι σταθεροί ή συναρτήσεις του χρόνου. Στη συνέχεια, θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πάρα πολύ σημαντική καθώς απλοποιεί αρκετά την ανάλυση των συστημάτων. Στην πράξη, σχεδόν όλα τα συστήματα είναι *μη* γραμμικά για μεγάλες τιμές εισόδου. Όμως για μικρές τιμές εισόδου, η λειτουργία τους είναι σχεδόν απόλυτα γραμμική. Παρ' όλο που τα μη γραμμικά συστήματα έχουν συγκεκριμένα πλεονεκτήματα, είναι αρκετά δύσκολα στην ανάλυσή τους και αποτελούν μια κατηγορία από μόνα τους. Έτσι, δε θα ασχοληθούμε καθόλου με αυτά.

2.5.1.2 Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβλητά συστήματα

Τα συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα είναι αυτά για τα οποία οι παράμετροί τους δεν αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου, δηλ. η έξοδός τους δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο t ως παράγοντα. Σε τέτοια συστήματα, αν το

$$x(t) \longrightarrow y(t) \quad (2.111)$$

είναι ένα ζεύγος εισόδου-εξόδου, τότε

$$x(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0) \quad (2.112)$$

είναι επίσης ζεύγος εισόδου-εξόδου, δηλ. αν η είσοδος μετατοπιστεί κατά t_0 , τότε η έξοδος θα είναι ίδια με πριν, μόνο που θα είναι κι αυτή μετατοπισμένη κατά t_0 . Μια απεικόνιση της ιδιότητας της χρονικής αμεταβλητότητας φαίνεται στο Σχήμα 2.16.

Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 3x(t + 2) - 2\cos(x(t - 2)) \quad (2.113)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ το σύστημα

$$y(t) = tx(t) \quad (2.114)$$

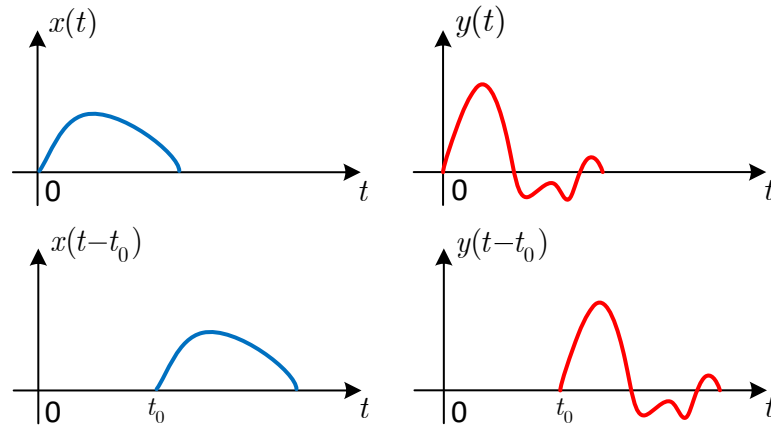
είναι χρονικά μεταβλητό. Ας το αποδείξουμε.

Παράδειγμα 2.10:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = 3x(t + 2) - 2\cos(x(t - 2)) \quad (2.115)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.



Σχήμα 2.16: Χρονική Αμεταβλητότητα ως σχέση εισόδου-εξόδου.

Λύση:

Για είσοδο $x(t - t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = 3x(t - t_0 + 2) - 2 \cos(x(t - t_0 - 2)) \quad (2.116)$$

Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$y(t - t_0) = 3x(t - t_0 + 2) - 2 \cos(x(t - t_0 - 2)) \quad (2.117)$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι ίδιες, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. ■

Παράδειγμα 2.11:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = tx(t) \quad (2.118)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:

Για είσοδο $x(t - t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = tx(t - t_0) \quad (2.119)$$

Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$y(t - t_0) = (t - t_0)x(t - t_0) \quad (2.120)$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις δεν είναι ίδιες, άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό. ■

Παράδειγμα 2.12:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = 4x(t) \quad (2.121)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:

Για είσοδο $x(t - t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = 4x(t - t_0) \quad (2.122)$$

με $z(t)$ την έξοδο όταν η είσοδος είναι $x(t - t_0)$. Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t - t_0) = 4x(t - t_0) = \frac{d^2}{dt^2}z(t) \quad (2.123)$$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. ■

Στη συνέχεια, θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα.

2.5.1.3 Δυναμικά και μη-δυναμικά συστήματα

Τα δυναμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία η έξοδός τους απαιτεί προηγούμενες ή επόμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 2x(t) \quad (2.124)$$

είναι ένα μη-δυναμικό (ή στατικό, όπως λέγεται εναλλακτικά) σύστημα, ενώ το σύστημα

$$y(t) = e^{x(t-1)} \quad (2.125)$$

είναι ένα σύστημα δυναμικό. Τα μη-δυναμικά συστήματα ονομάζονται στη βιβλιογραφία και ως συστήματα χωρίς μνήμη. Αντίστοιχα, τα δυναμικά συστήματα ονομάζονται και ως συστήματα με μνήμη. Ο λόγος αυτής της ονοματοδοσίας πρέπει να σας είναι προφανής.

2.5.1.4 Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα

Τα αιτιατά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου δεν απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 2x(t - 1) + \sin(x(t)) \quad (2.126)$$

είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα

$$y(t) = x(t - 2)^2 + 4x(t + 4) \quad (2.127)$$

είναι μη αιτιατό, επειδή για τον υπολογισμό του $y(t)$ απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου, η $x(t + 4)$.

Πιο περιγραφικά, ένα αιτιατό σύστημα είναι ένα σύστημα το οποίο δεν παράγει κάποια έξοδο προτού εφαρμοστεί σε αυτό μια είσοδος. Αν το σύστημα παράγει έξοδο πριν την είσοδο, σημαίνει ότι το σύστημα γνωρίζει τη μελλοντική είσοδο και παράγει έξοδο βάσει αυτής της γνώσης, και άρα είναι μη αιτιατό.

Προφανώς, κάθε σύστημα υλοποιήσιμο σε πραγματικό χρόνο πρέπει να είναι αιτιατό. Οπότε κάποιος θα μπορούσε να θέσει το ερώτημα “γιατί να μελετήσει κανείς τότε ένα μη αιτιατό σύστημα;” Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έχει - τουλάχιστον - τρεις συνιστώσες:

1. Ένα μη αιτιατό σύστημα απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να παράξει έξοδο. Αν όμως η είσοδος είναι διαθέσιμη σε κάποιον αποθηκευτικό χώρο (μνήμη), τότε το σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί, αφού οι μελλοντικές τιμές της εισόδου είναι διαθέσιμες. Αυτό σημαίνει ότι τα μη αιτιατά συστήματα είναι μεν πραγματοποιήσιμα, αλλά όχι σε πραγματικό χρόνο. Παρ’ όλα αυτά, η χρησιμότητά τους είναι μεγάλη, καθώς υπάρχουν πολλές εφαρμογές (επεξεργασία φωνής, ήχου, εικόνas, γεωφυσική, μετεωρολογία, ανάλυση βιοσημάτων) όπου η είσοδος υπάρχει ολόκληρη διαθέσιμη σε μια π.χ. βάση δεδομένων.
2. Ένα μη αιτιατό σύστημα μπορεί να κάνει πράγματα που ένα αιτιατό σύστημα δεν μπορεί. Για παράδειγμα, στα πρότυπα συμπίεσης εικόνas και ήχου (MP3, JPEG, MPEG κλπ), η υψηλή συμπίεση επιτυγχάνεται επειδή ο αλγόριθμος συμπίεσης (ο οποίος αποτελεί το σύστημα) γνωρίζει μελλοντική πληροφορία της εισόδου (ήχος, εικόνα, βίντεο), την οποία χρησιμοποιεί για να αυξήσει την επίδοσή του (συμπιεσμένη έξοδος).
3. Τα μη αιτιατά συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως το άνω όριο των επιδόσεων αιτιατών συστημάτων. Όπως θα δούμε αρκετά αργότερα, ένα αιτιατό φίλτρο (δηλ. ένα σύστημα που επιλέγει την “ποσότητα” του σήματος εισόδου που θα περάσει στην έξοδο) εισάγει πάντα παραμόρφωση στο σήμα εισόδου του, μεταβάλλοντάς το με ανεπιθύμητο (αλλά ελεγχόμενο) τρόπο. Όμως, ένα μη αιτιατό φίλτρο εισάγει μηδενική ανεπιθύμητη παραμόρφωση στο σήμα εξόδου του.

2.5.1.5 Ευσταθή και ασταθή συστήματα

Τα ευσταθή συστήματα είναι αυτά για τα οποία ισχύει:

$$|x(t)| < M_x \implies |y(t)| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathbb{R}_+ \quad (2.128)$$

Πιο περιγραφικά, αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή. Αυτού του τύπου η ευστάθεια ονομάζεται Bounded Input - Bounded Output (BIBO)-ευστάθεια.

Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = x(t-1) + t \quad (2.129)$$

δεν είναι ευσταθές, όπως επίσης και το σύστημα

$$y(t) = \frac{t}{x(t+2)} \quad (2.130)$$

ενώ το σύστημα

$$y(t) = \sin(x(t)) \quad (2.131)$$

είναι ευσταθές. Ας το αποδείξουμε.

Παράδειγμα 2.13:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = x(t-1) + t \quad (2.132)$$

είναι ευσταθές.

Λύση:

Αν η είσοδος $x(t)$ είναι φραγμένη από έναν πραγματικό αριθμό $M_x > 0$ δηλ.

$$|x(t)| < M_x \quad (2.133)$$

τότε η έξοδος $y(t)$ θα είναι

$$|y(t)| = |x(t-1) + t| \leq |x(t-1)| + |t| < M_x + |t| \rightarrow +\infty \quad (2.134)$$

όταν $t \rightarrow \pm\infty$. Άρα το σύστημα είναι ασταθές. ■

Παράδειγμα 2.14:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = e^{x(t-2)} \quad (2.135)$$

είναι ευσταθές.

Λύση:

Αν η είσοδος $x(t)$ είναι φραγμένη από έναν πραγματικό αριθμό $M_x > 0$ δηλ.

$$|x(t)| < M_x \quad (2.136)$$

τότε η έξοδος $y(t)$ θα είναι

$$|y(t)| = |e^{x(t-2)}| \leq |e^{M_x}| < +\infty \quad (2.137)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα το σύστημα είναι ευσταθές. ■

Από όλες αυτές τις κατηγορίες σημάτων, τα πιο σημαντικά είναι τα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα (ΓΧΑ) συστήματα, και σε τέτοια θα αναφερόμαστε από εδώ και πέρα. Η ευστάθεια ή η αιτιατότητα είναι επιθυμητές ιδιότητες αλλά δε θα τις θεωρήσουμε πάντα δεδομένες, οπότε θα αναφερόμαστε ρητά σε αυτές όταν χρειάζεται.

Συνοψίζοντας, έχουμε:

Ιδιότητες Συστημάτων

• Γραμμικότητα: Αν

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \quad (2.138)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \quad (2.139)$$

είναι ζεύγη εισόδου-εξόδου για ένα σύστημα, τότε για οποιεσδήποτε μιγαδικές ή πραγματικές σταθερές a, b , το

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t) \quad (2.140)$$

είναι ζεύγος εισόδου-εξόδου για το ίδιο σύστημα.

- **Χρονική Αμεταβλητότητα:** Αν

$$x(t) \longrightarrow y(t) \quad (2.141)$$

είναι ένα ζεύγος εισόδου-εξόδου, τότε

$$x(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0) \quad (2.142)$$

δηλ. αν η είσοδος καθυστερήσει κατά t_0 , τότε η έξοδος θα είναι ίδια με πριν, μόνο που θα είναι και αυτή καθυστερημένη κατά t_0 .

- **Δυναμικότητα:** Δυναμικά συστήματα λέγονται τα συστήματα για τα οποία η έξοδός τους απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί.
- **Αιτιατότητα:** Αιτιατά συστήματα λέγονται τα συστήματα για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου δεν απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου.
- **Ευστάθεια:** BIBO-ευσταθή λέγονται τα συστήματα για τα οποία ισχύει:

$$|x(t)| < M_x \implies |y(t)| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathbb{R}_+ \quad (2.143)$$

δηλ. αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή.

Ας δούμε ένα παράδειγμα για όλες τις παραπάνω ιδιότητες των συστημάτων.

Παράδειγμα 2.15:

Εξετάστε αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, ευσταθή, και αιτιατά.

(α') $y(t) = 2x(t - 1) + 3x(t - 3)$

(β') $y(t) = t^2 x^2(t + 2) - x(t)$

(γ') $y(t) = x^2(t - 4),$

(δ') $y(t) = \log_{10}(|x(t)|),$

(ε') $y(t) = \frac{1}{x(t)}$

Λύση:

- (α') • Το σύστημα $y(t) = 2x(t - 1) + 3x(t - 3)$ είναι γραμμικό. Ας το δείξουμε. Έστω

$$y_1(t) = 2ax_1(t - 1) + 3ax_1(t - 3)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $ax_1(t)$. Έστω

$$y_2(t) = 2bx_2(t - 1) + 3bx_2(t - 3)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $bx_2(t)$. Έχουμε

$$y_1(t) + y_2(t) = 2ax_1(t - 1) + 3ax_1(t - 3) + 2bx_2(t - 1) + 3bx_2(t - 3)$$

και

$$y_{1+2}(t) = 2ax_1(t - 1) + 3ax_1(t - 3) + 2bx_2(t - 1) + 3bx_2(t - 3)$$

που είναι ταυτόσημα, άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

- Το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο γιατί αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = 2x(t - t_0 - 1) + 3x(t - t_0 - 3)$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = 2x(t - t_0 - 1) + 3x(t - t_0 - 3)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι αιτιατό, γιατί για να υπολογίσουμε μια δεδομένη τιμή της εξόδου (π.χ. την $y(0)$), χρειαζόμαστε παρελθούσες τιμές της εισόδου (τις $x(-1), x(-3)$).
- Το σύστημα είναι, τέλος, ευσταθές γιατί αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, $|x(t)| < M_x$, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη, γιατί

$$|y(t)| = |2x(t - 1) + 3x(t - 3)| < 2M_x + 3M_x = 5M_x = M_y$$

- (β') • Το σύστημα $y(t) = t^2 x^2(t + 2) - x(t)$ δεν είναι γραμμικό. Έστω

$$y_1(t) = t^2 a x_1^2(t + 2) - a x_1(t)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $a x_1(t)$. Έστω

$$y_2(t) = t^2 b x_2^2(t + 2) - b x_2(t)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $b x_2(t)$. Έχουμε

$$y_1(t) + y_2(t) = t^2 a x_1^2(t + 2) - a x_1(t) + t^2 b x_2^2(t + 2) - b x_2(t)$$

και

$$y_{1+2}(t) = t^2 (a x_1(t + 2) + b x_2(t + 2))^2 - (a x_1(t) + b x_2(t))$$

που προφανώς δεν είναι ταυτόσημα, άρα το σύστημα είναι μη γραμμικό.

- Το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό, γιατί αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = t^2 x^2(t - t_0 + 2) - x(t - t_0)$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = (t - t_0)^2 x^2(t - t_0 + 2) - x(t - t_0)$$

που ΔΕΝ είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι μη αιτιατό, γιατί για τον υπολογισμό μιας δεδομένης τιμής της εξόδου (π.χ. $y(0)$), απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου ($x(2)$).
- Το σύστημα είναι, τέλος, ασταθές γιατί αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, $|x(t)| < M_x$, τότε η έξοδος είναι μη-φραγμένη, γιατί

$$|y(t)| = |t^2 x^2(t + 2) + (-x(t))| < |t^2 x^2(t + 2)| + |x(t)| < t^2 M_x^2 + M_x \rightarrow +\infty$$

όταν $t \rightarrow \pm\infty$.

- (γ') • Το σύστημα είναι μη γραμμικό, με παρόμοια απόδειξη με το προηγούμενο ερώτημα.
- Το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, διότι αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = x^2(t - t_0 - 4)$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = x^2(t - t_0 - 4)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι αιτιατό, γιατί απαιτούνται μόνο παρελθοντικές τιμές της εισόδου για τον υπολογισμό μιας οποιασδήποτε τιμής της εξόδου.
- Το σύστημα είναι προφανώς ευσταθές, γιατί αν $|x(t)| < M_x$, τότε $|y(t)| = |x^2(t - 4)| < M_x^2$.

(δ') • Το σύστημα είναι μη γραμμικό. Έστω

$$y_1(t) = \log_{10}(|ax_1(t)|)$$

η έξοδος για είσοδο $ax_1(t)$. Έστω

$$y_2(t) = \log_{10}(|bx_2(t)|)$$

η έξοδος για είσοδο $bx_2(t)$. Είναι

$$y_1(t) + y_2(t) = \log_{10}(|ax_1(t)|) + \log_{10}(|bx_2(t)|)$$

ενώ

$$y_{1+2}(t) = \log_{10}(|ax_1(t) + bx_2(t)|) \neq y_1(t) + y_2(t)$$

άρα μη γραμμικό.

- Επίσης, το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο γιατί αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = \log_{10} |x(t - t_0)|$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = \log_{10} |x(t - t_0)|$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι αιτιατό.
- Το σύστημα δεν είναι ευσταθές γιατί αν $x(t) = 0$ για κάποιο t , τότε $\log(|x(t)|) \rightarrow -\infty$.

(ε') Εξασκηθείτε! ☺

