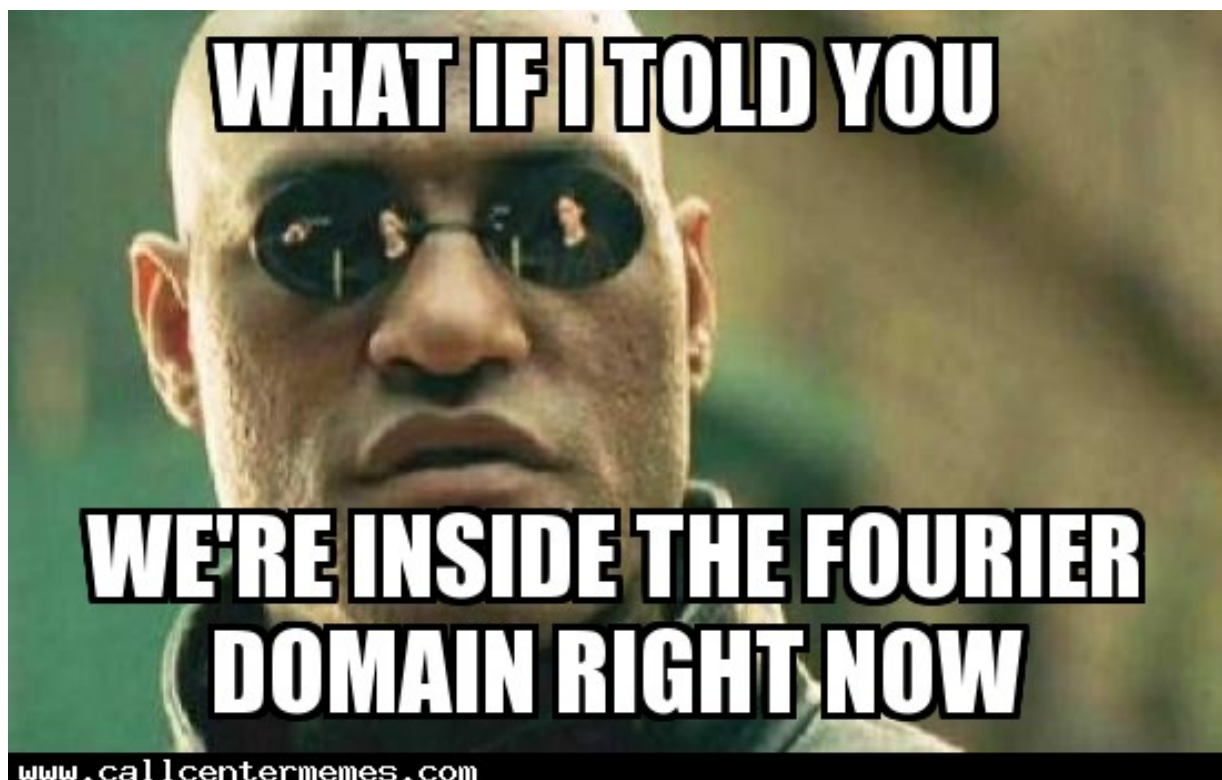


Κεφάλαιο 4

Ανάλυση Σημάτων στο Πεδίο της Συχνότητας

4.1 Εισαγωγή

Ως τώρα, η όποια ανάλυση συζητήσαμε για σήματα και συστήματα περιελάμβανε αποκλειστικά το χώρο του χρόνου. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γνωρίσουμε μια άλλη οπτική ενός σήματος (και κατά συνέπεια, ενός συστήματος). Θα ξεκινήσουμε πρώτα με τη μελέτη *περιοδικών* σημάτων, δηλ. σημάτων άπειρων σε διάρκεια, που επαναλαμβάνουν ένα τμήμα τους, τη λεγόμενη *βασική τους περίοδο*, ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Μερικές σελίδες αργότερα, θα διαβάσετε για την *ανάλυση σε Σειρές Fourier*, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά απλά μια (από τις πολλές) μέθοδος αλλαγής οπτικής γωνίας. Ναι, τόσο απλά! Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να δούμε ένα περιοδικό σήμα σε έναν διαφορετικό χώρο, το χώρο των *συχνοτήτων*. Το πώς, θα το δείτε σύντομα. Το *γιατί* όμως είναι ένα σοβαρό ερώτημα, και το παρακάτω παράδειγμα θα σας πείσει.



4.2 Μια μικρή εφαρμογή - κίνητρο

Ας υποθέσουμε ότι δυο ανταγωνιστικοί ραδιοφωνικοί σταθμοί θέλουν να εκπέμψουν το πρόγραμμά τους. Γνωρίζουμε ότι το ανθρώπινο αυτί μπορεί να ακούσει συχνότητες από 20 ως 20000 Hz. Παρ' ότι η ανθρώπινη φωνή

παράγει σημαντικές συχνότητες από 70 ως περίπου 14000 Hz, κάποια μουσικά όργανα παράγουν αρμονικές συχνότητες εκτός αυτού του διαστήματος, οπότε ας υποθέσουμε ότι το εύρος συχνοτήτων του σήματος πληροφορίας, δηλ. της εκπομπής που μεταδίδεται, είναι ανήκει στο διάστημα $[20, 20000]$ Hz, το οποίο και αποτελεί το **ακουστικό φάσμα** του ανθρώπινου αυτιού.

Ένα πρώτο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι σταθμοί είναι η πρακτική υλοποίηση της κεραίας εκπομπής. Η Θεωρία Κεραίων μας πληροφορεί ότι το μήκος μιας κεραίας εκπομπής πρέπει να είναι ανάλογο του μήκους κύματος της πληροφορίας λ που μεταδίδεται. Γνωρίζουμε ότι

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (4.6)$$

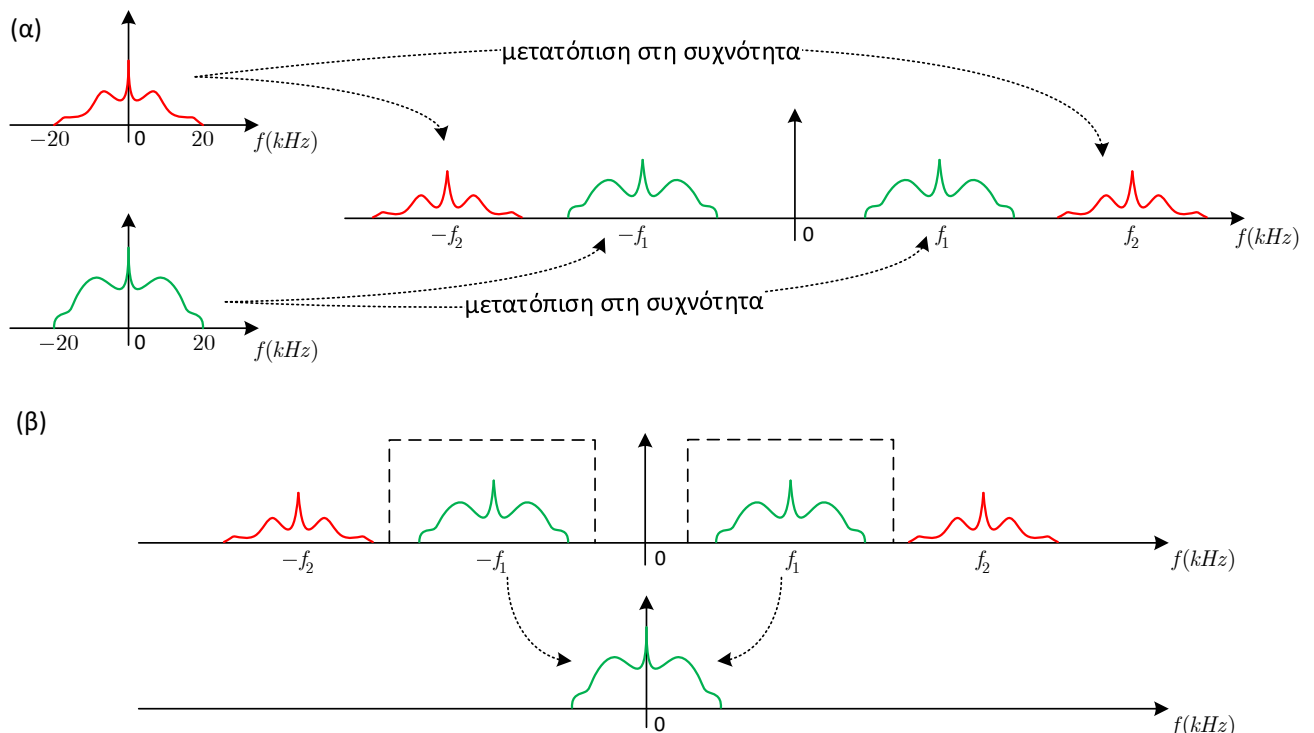
με c την ταχύτητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος (σταθερή και ίση με 3×10^8 m/s) και f τη συχνότητα του σήματος πληροφορίας. Στην περίπτωση της μετάδοσης ραδιοφωνικού προγράμματος, η συχνότητα f δεν είναι ούτε μοναδική ούτε σταθερή με την πάροδο του χρόνου. Ας πάρουμε όμως τις δυο ακραίες συχνότητες που μπορεί να μεταδίδουν οι σταθμοί, δηλ. $f_{min} = 20$ Hz και $f_{max} = 20.000$ Hz. Το μήκος κύματός τους είναι

$$\lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}} = \frac{3 \times 10^8}{20 \times 10^3} = 1.5 \times 10^4 \text{ m} \quad (4.7)$$

$$\lambda_{max} = \frac{c}{f_{min}} = \frac{3 \times 10^8}{20} = 1.5 \times 10^7 \text{ m} \quad (4.8)$$

Παρατηρήστε πόσο μη πρακτικά είναι αυτά τα μεγέθη! Αν υποθέσουμε ότι το μέγεθος της κεραίας πρέπει να είναι περίπου το 1/10 του μήκους κύματος που εκπέμπεται, τότε η κεραία πρέπει να έχει μέγεθος ίσο με 1.5×10^6 m, δηλ. 1500 χιλιόμετρα, για να μεταδώσει ένα απλό ημίτονο στα 20 Hz!

Ακόμα κι αν αυτό το πρόβλημα δεν ήταν - που είναι! - σημαντικό, υπάρχει κι ένα δεύτερο πρόβλημα! Οι σταθμοί εκπέμπουν στην ίδια περιοχή συχνοτήτων, αφού αμφότεροι εκπέμπουν φωνή και μουσική και άρα καταλαμβάνουν και οι δυο το εύρος φάσματος μεταξύ 20 Hz και 20.000 Hz. Μπορούμε να λύσουμε και τα δυο αυτά προβλήματα “στέλνοντας” το σήμα πληροφορίας σε συχνότητες αρκετά μεγάλες ώστε η κατασκευή της κεραίας να καθίσταται πρακτική, αλλά και το φασματικό περιεχόμενο των δυο εκπομπών να μην καταλαμβάνει το ίδιο εύρος συχνοτήτων. Με άλλα λόγια, τα σήματα που στέλνονται τελικά από τους σταθμούς θα περιέχουν πολύ διαφορετικές (μεγαλύτερες) συχνότητες από αυτές που μπορούμε να ακούσουμε! Μια τέτοια διαδικασία ονομάζεται **Διαμόρφωση - Modulation**. Ασφαλώς όμως θα θέλαμε ο δέκτης να μπορεί να μεταφέρει το σήμα πληροφορίας στη “φυσική” του ζώνη συχνοτήτων ώστε αυτό να είναι αντιληπτό από τον ακροατή. Η αντίστροφη αυτή διαδικασία ονομάζεται **Αποδιαμόρφωση - Demodulation**. Μια απλουστευμένη απεικόνιση των δυο αυτών διαδικασιών φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Για να μπορέσουμε να υλοποιήσουμε σωστά μια τέτοια προσέγγιση, θα πρέπει να γνωρίζουμε (α)



Σχήμα 4.1: (α) Διαμόρφωση και (β) Αποδιαμόρφωση σήματος

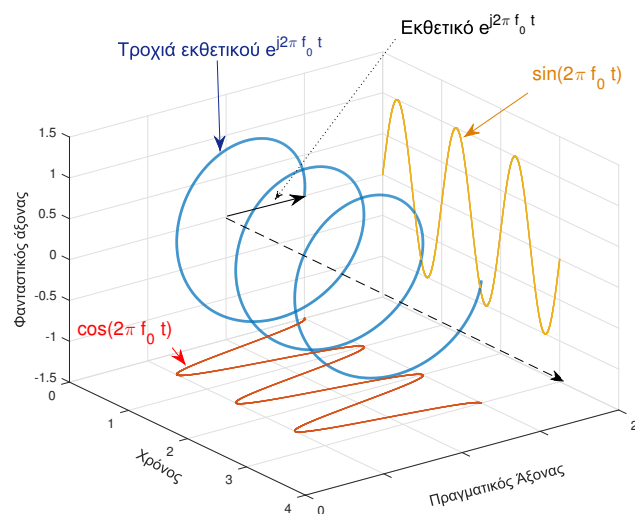
ποιές συχνότητες περιέχει το σήμα πληροφορίας που θέλουμε να μεταδώσουμε, (β) ποιό εύρος συχνοτήτων είναι ελεύθερο προς χρήση ώστε να το μεταφέρουμε εκεί, και (γ) τεχνικές για τη “επαναφορά” του στις φυσικές του συχνότητες.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε σε βάθος με το προαπαιτούμενο (α), δηλ. με το πώς αναλύουμε ένα σήμα σε μια αναπαράσταση συχνοτήτων η οποία θα μας πληροφορεί για το πλήθος και την “ισχύ” τους.

4.3 Απλές αναπαραστάσεις στο χώρο της συχνότητας

Όπως είπαμε, θα ξεκινήσουμε με τη μελέτη απλών περιοδικών σημάτων. Επειδή όμως η ερώτηση “αφού τα περιοδικά σήματα δεν υπάρχουν πουθενά στη φύση, ούτε μπορούν να παραχθούν στο εργαστήριο¹, τι ενδιαφέρον έχουν από τη σκοπιά του μηχανικού;” έρχεται πολύ εύκολα στο μυαλό, οφείλουμε μια απάντηση. Η απάντηση περιλαμβάνει δυο - τουλάχιστον - συνιστώσες:

1. Για πρακτικούς λόγους: τα περιοδικά σήματα είναι εύκολα στο χειρισμό τους, και τα συμπεράσματα που βγαίνουν από τη μελέτη τους μπορούν να γενικευθούν εύκολα για αperiοδικά σήματα (τα οποία υπάρχουν στη φύση και μπορούν να μελετηθούν στο εργαστήριο).
2. Για διδακτικούς λόγους: σκεφτείτε ότι και η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα θεωρητικό κατασκευάσμα που δεν υπάρχει στην πράξη, όμως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η σημασία της ήταν θεμελιώδης για την κατανόηση της συμπεριφοράς των συστημάτων. Ακριβώς το ίδιο ισχύει και για τα περιοδικά σήματα – μπορεί να μην υπάρχουν στη φύση, αλλά η μελέτη τους μας προσφέρει πολύτιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά των συστημάτων.



Σχήμα 4.2: Μιγαδική εκθετική συνάρτηση $Ae^{j2\pi f_0 t}$.

Πώς λοιπόν θα μπορούσαμε να έχουμε μια αναπαράσταση ενός σήματος στο χώρο των συχνοτήτων; Αυτό το ερώτημα ισοδυναμεί με το πώς θα μπορούσαμε να έχουμε μια μαθηματική έκφραση στο χώρο των συχνοτήτων ενός σήματος που μας δίνεται στο πεδίο του χρόνου. Η πιο απλή τέτοια αναπαράσταση φυσικά δεν είναι άλλη από της απλής μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης, συχνότητας f_0 :

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}, \quad A > 0 \quad (4.9)$$

Είναι ένα σήμα που ορίζεται στο χρόνο, με πλάτος A , και με συχνότητα f_0 , η οποία είναι σταθερή και συμβολίζει το πλήθος των περιστροφών που εκτελούνται στο μιγαδικό επίπεδο ανά δευτερόλεπτο. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο συντελεστής της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης $e^{j2\pi f_0 t}$ είναι η ποσότητα A , πραγματικός θετικός αριθμός. Έχουμε ξαναδεί αυτό το σήμα - γνωρίζουμε ότι αποτελεί ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο, του οποίου το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ισούνται με

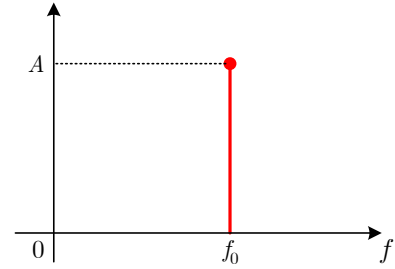
$$\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (4.10)$$

$$\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \sin(2\pi f_0 t) \quad (4.11)$$

¹Μην ξεχνάτε ότι τα περιοδικά σήματα ξεκινούν από το $-\infty$ και καταλήγουν στο $+\infty$.

και, ως υπενθύμιση, αναπαρίσταται όπως στο Σχήμα 4.2. Μια τέτοια αναπαράσταση, παρ' ό,τι καθ' όλα αληθής, δεν είναι ιδιαίτερα βολική.

Οπότε, γι' αυτό το σήμα, προτιμούμε μια διδιάστατη απεικόνιση που φαίνεται στο διάγραμμα στο χώρο της συχνότητας στο Σχήμα 4.3. Δυο άξονες, με οριζόντιο τον άξονα των συχνοτήτων και κατακόρυφο τον άξονα του πλάτους, με μια κατακόρυφη γραμμή στη συχνότητα f_0 , ύψους A , η οποία συμβολίζει το συντελεστή της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης συχνότητας f_0 . Αυτή είναι η αναπαράσταση που ζητάμε και ονομάζεται **φάσμα - spectrum!**



Σχήμα 4.3: Απλό παράδειγμα συχνοτικής ανάλυσης.

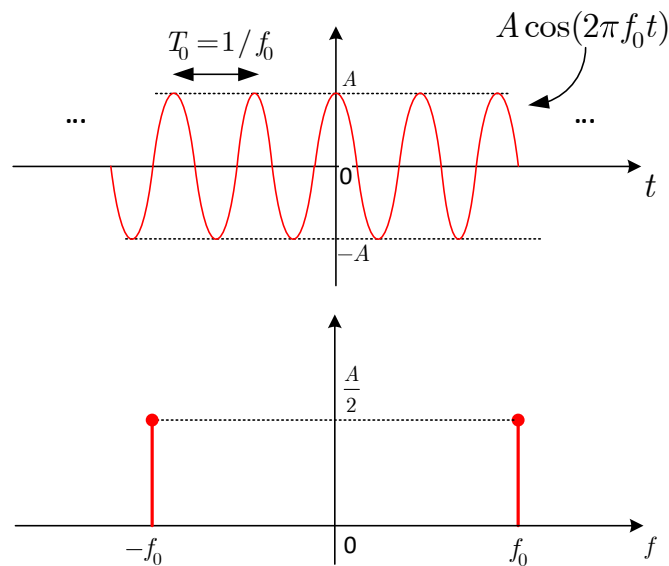
Φυσικά το σήμα που επιλέξαμε είναι το απλούστερο που μπορούσαμε να σκεφτούμε, αλλά δεν παύει να είναι ένα μιγαδικό σήμα! Αν είχαμε ένα πραγματικό σήμα όπως το

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad A > 0 \quad (4.12)$$

τότε πώς θα σχεδιάζαμε αυτή τη γραφική αναπαράσταση; Πολύ απλά, γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Euler ότι

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (4.13)$$

Οι συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων με συχνότητες $\pm f_0$ είναι τώρα $A/2$, και είναι θετικοί και πραγματικοί. Να λοιπόν που τώρα έχουμε ένα άθροισμα από δυο εκθετικά συχνοτήτων $\pm f_0$, οπότε θα έχουμε ένα διάγραμμα με δυο κατακόρυφες γραμμές που φυσικά αναπαριστούν αυτά τα δυο περιστρεφόμενα διανύσματα: μια στη συχνότητα $-f_0$ και μια στη συχνότητα f_0 Hz, με πλάτη $A/2$. Ας δούμε αυτά τα σχήματα μαζί, τόσο στο χρόνο όσο και στη συχνότητα, στο Σχήμα 4.4. Θα θέλαμε φυσικά η πληροφορία που μας δίνεται από τη



Σχήμα 4.4: Απλό παράδειγμα φασματικής ανάλυσης σήματος στους δυο χώρους.

φασματική αναπαράσταση του σήματος να είναι ισοδύναμη με αυτή του χρόνου. Δηλ. να μπορούμε, βλέποντας αυτή τη γραφική παράσταση, να καταλαβαίνουμε αμέσως για ποιά μαθηματική μορφή σήματος πρόκειται στο πεδίο του χρόνου. Πιο τυπικά, η μαθηματική/γραφική μορφή στο χώρο της συχνότητας να μπορεί να μετατραπεί μοναδικά σε μια μαθηματική μορφή στο πεδίο του χρόνου. Στο παράδειγμά μας, είναι έτσι τα πράγματα; Αρκεί η συχνότητα και το πλάτος που αναγράφονται στη φασματική αναπαράσταση για να περιγράψει πλήρως ένα οποιοδήποτε ημίτονο; Η απάντηση είναι όχι! Διότι ένα ημίτονο στη γενική του μορφή γράφεται ως

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi), \quad A > 0, \quad \phi \in (-\pi, \pi] \quad (4.14)$$

$$= \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\phi} \quad (4.15)$$

$$= \left(\frac{A}{2} e^{j\phi} \right) e^{j2\pi f_0 t} + \left(\frac{A}{2} e^{-j\phi} \right) e^{-j2\pi f_0 t} \quad (4.16)$$

$$= X_0 e^{j2\pi f_0 t} + X_0^* e^{-j2\pi f_0 t} \quad (4.17)$$

Παρατηρήστε τώρα ότι εδώ πλέον οι συντελεστές των εκθετικών, X_0, X_0^* , είναι μιγαδικοί, και συγκεκριμένα συζυγείς! Αυτοί οι μιγαδικοί συντελεστές ονομάζονται **phasors - φάσορες**, αλλά ο όρος αυτός δε θα χρησιμοποιείται συχνά στη συνέχεια.

Αυτό τι σημαίνει; Σημαίνει ότι αν δούμε τη μιγαδική συνάρτηση $X_0 e^{j2\pi f_0 t}$ ως ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα, τότε αυτό έχει μια αρχική φάση ϕ (δηλ. για $t = 0$ το διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον πραγματικό οριζόντιο άξονα), η οποία δεν μπορεί να παρασταθεί εύκολα στο ίδιο διάγραμμα με το πλάτος $\frac{A}{2}$. Τα ακριβώς αντίστοιχα ισχύουν και για το περιστρεφόμενο διάνυσμα $Z_0^* e^{-j2\pi f_0 t}$. Άρα στη γενικότερη μορφή ενός ημιτόνου, δε μας αρκεί μια γραφική παράσταση που να δείχνει το συντελεστή του εκθετικού, γιατί πολύ συχνά ο συντελεστής είναι μιγαδικός (δυο μεταβλητές, A, ϕ)! Χρειάζεται με κάποιο τρόπο να αναπαριστούμε και την (αρχική) φάση ϕ της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης ως συνάρτηση της συχνότητας. Θυμηθείτε ότι η φάση ενός ημιτόνου σχετίζεται με τη μετατόπισή του σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα.

Όμως πριν απ' όλα χρειάζεται να συμφωνήσουμε σε κάτι: οι συντελεστές X_i, X_i^* των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων $e^{\pm j2\pi f_0 t}$ πρέπει να βρίσκονται σε πολική μορφή, δηλ.

$$X_i = A_i e^{j\phi_i}, \quad \text{με } A_i = |X_i| > 0, \quad \phi_i \in (-\pi, \pi] \quad (4.18)$$

Σε αρκετές περιπτώσεις στη βιβλιογραφία, ο συντελεστής X_i αναπαρίσταται στο σύνολό του σε ένα φάσμα, ως μιγαδικός αριθμός. Σε αυτό το σύγγραμμα όμως η πλήρης περιγραφή ενός ημιτόνου στο χώρο της συχνότητας περιλαμβάνει δυο φάσματα: ένα που αφορά το πλάτος A_i του μιγαδικού συντελεστή X_i ως συνάρτηση της συχνότητας (αυτό που έχουμε δει ως τώρα) και ένα που αφορά την (αρχική) φάση ϕ_i του μιγαδικού συντελεστή X_i ως συνάρτηση της συχνότητας. Αυτές οι δυο αναπαραστάσεις λέγονται **φάσμα πλάτους** και **φάσμα φάσης**, αντίστοιχα. Ας δούμε μερικά πιο σύνθετα παραδείγματα.

4.3.1 Περισσότερα παραδείγματα

Παράδειγμα 4.1:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (4.19)$$

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του.

Λύση:

Προτού σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα, ας δούμε πως αναλύεται αυτό το σήμα. Είναι

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (4.20)$$

$$= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/6} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/6} \quad (4.21)$$

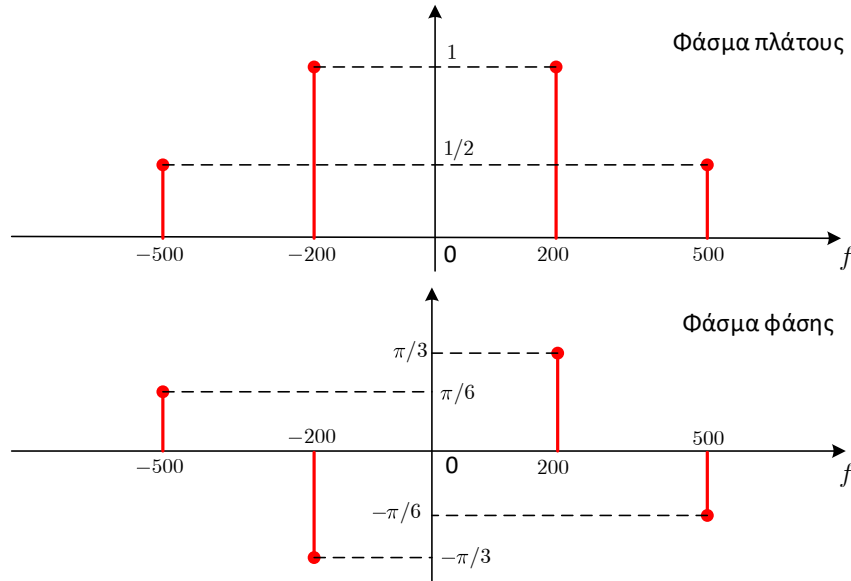
$$= \left(e^{j\pi/3} \right) e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3} \right) e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/6} \right) e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/6} \right) e^{-j2\pi 500t} \quad (4.22)$$

με τις παρενθέσεις να περικλείουν τους συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων συχνότητας $\pm 200, \pm 500$ Hz. Όπως βλέπετε εδώ, τώρα οι συντελεστές αυτοί είναι μιγαδικοί, $1e^{\pm j\pi/3}, \frac{1}{2}e^{\pm j\pi/6}$. Οι συντελεστές αυτοί είναι ήδη στην επιθυμητή πολική μορφή, $A_i e^{j\phi_i}$, με $A > 0$ και $\phi \in (-\pi, \pi]$.

Από αυτήν την αναπαράσταση, μας είναι ξεκάθαρο πώς να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης, καθώς τα A_i θα σχεδιαστούν στο φάσμα πλάτους και τα ϕ_i στο φάσμα φάσης, στις αντίστοιχες συχνότητες φυσικά. Δείτε το Σχήμα 4.5.

■

Προφανώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους και φάσης οποιωνδήποτε ημιτόνων ή συνδυασμού τους με απλή εφαρμογή των σχέσεων του Euler. Προσέξτε όμως την περίπτωση που οι συντελεστές δεν καταλήγουν τόσο εύκολα σε πολική μορφή. Δείτε το παρακάτω, πιο γενικό παράδειγμα.



Σχήμα 4.5: Παράδειγμα 4.1 ανάλυσης σήματος.

Παράδειγμα 4.2:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (4.23)$$

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

Λύση:

Οι σχέσεις του Euler μας δίνουν

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (4.24)$$

$$= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2j} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/6} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/6} \quad (4.25)$$

$$= (e^{j\pi/3}) e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3}) e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2j} e^{-j\pi/6}\right) e^{j2\pi 500t} + \left(-\frac{1}{2j} e^{j\pi/6}\right) e^{-j2\pi 500t} \quad (4.26)$$

Εδώ, οι συντελεστές των εκθετικών συναρτήσεων είναι $1e^{\pm j\pi/3}$ και $\pm \frac{1}{2j} e^{\pm j\pi/6}$. Ενώ με τους συντελεστές $1e^{\pm j\pi/3}$ των δυο πρώτων στη σειρά εκθετικών συναρτήσεων είμαστε ευχαριστημένοι (είναι ήδη σε πολική μορφή), δεν ισχύει το ίδιο για τους δυο επόμενους, τους $\pm \frac{1}{2j} e^{\pm j\pi/6}$. Ο λόγος; Αυτοί οι όροι $\pm \frac{1}{2j}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, και όχι πραγματικοί, όπως απαιτείται.

Μπορούμε όπως να τους μετατρέψουμε σε φάση, γιατί από τις σχέσεις του Euler ξέρουμε ότι

$$-\frac{1}{j} = j = \cos(\pi/2) + j \sin(\pi/2) = e^{j\pi/2} \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{j} = -j = \cos(-\pi/2) + j \sin(-\pi/2) = e^{-j\pi/2} \quad (4.28)$$

Οπότε θα έχουμε

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (4.29)$$

$$= (e^{j\pi/3}) e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3}) e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2j} e^{-j\pi/6}\right) e^{j2\pi 500t} + \left(-\frac{1}{2j} e^{j\pi/6}\right) e^{-j2\pi 500t} \quad (4.30)$$

$$= (e^{j\pi/3}) e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3}) e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/2} e^{-j\pi/6}\right) e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/2} e^{j\pi/6}\right) e^{-j2\pi 500t} \quad (4.31)$$

$$= (e^{j\pi/3}) e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3}) e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/3}\right) e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/3}\right) e^{-j2\pi 500t} \quad (4.32)$$

Προσέξτε ότι όλοι οι μιγαδικοί συντελεστές ($e^{\pm j\pi/3}$, $\frac{1}{2} e^{\pm j\pi/3}$) των εκθετικών συναρτήσεων $e^{\pm j2\pi 200t}$, $e^{\pm j2\pi 500t}$ είναι σε πολική μορφή, δηλ. στη μορφή $A e^{j\phi}$, με $A > 0$ και $\phi \in (-\pi, \pi]$. Αυτός ήταν άλλωστε και ο σκοπός

μας. Τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης! Κάντε το!

Ας δούμε ένα ακόμα πλήρες παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.3:

Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 3 - 2 \cos(2\pi 10t + \pi/9) + \sin(2\pi 15t - \pi/7) \quad (4.33)$$

Ζητείται η περίοδος του, το φάσμα πλάτους, και το φάσμα φάσης του.

Λύση:

Για την περίοδο, γνωρίζουμε ήδη ότι ένα άθροισμα ημιτόνων είναι περιοδικό αν ο λόγος των συχνοτήτων (ή των περιόδων του) είναι λόγος ακεραίων αριθμών. Προφανώς ο λόγος των αριθμών 10 και 15 (συχνότητες σε Hz) είναι λόγος ακεραίων, άρα το σήμα είναι περιοδικό. Η θεμελιώδης του συχνότητα είναι

$$f_0 = \text{M.K.}\Delta\{10, 15\} = 5 \text{ Hz} \quad (4.34)$$

και άρα η περίοδος του είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.2$ δευτερόλεπτα. Ας αναλύσουμε τώρα το σήμα μας σε μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις, ώστε να σχεδιάσουμε τα φάσματα. Θα είναι

$$x(t) = 3 - 2 \cos(2\pi 10t + \pi/9) + \sin(2\pi 15t - \pi/7) \quad (4.35)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (4.36)$$

Εδώ πρέπει λοιπόν, αφού ενός να χειριστούμε τους όρους $\pm 1/j$ όπως κάναμε και πριν, αφού ετέρου να δούμε πως θα χειριστούμε τους συντελεστές των δυο πρώτων εκθετικών συναρτήσεων συχνότητας ± 10 Hz. Κατ'αρχάς, ας μετατρέψουμε τα $\pm 1/j$ κατάλληλα, στους δυο τελευταίους όρους, αφήνοντας ήσυχους προς το παρόν τους πρώτους. Έχουμε:

$$x(t) = 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (4.37)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (4.38)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (4.39)$$

Πλέον τα δυο τελευταία εκθετικά συχνότητας ± 15 Hz έχουν μιγαδικούς συντελεστές γραμμένους σε πολική μορφή. Ας δούμε τώρα τα δυο πρώτα εκθετικά, συχνότητας ± 10 Hz, που έχουν αρνητικό πρόσημο.

Γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Euler ότι

$$e^{j\pi} = -1 \quad (4.40)$$

$$e^{-j\pi} = -1 \quad (4.41)$$

Ποιόν από τους δυο όρους θα διαλέξουμε; Η απάντηση είναι “και τους δυο!” Απλά θα προσέξουμε η επιλογή που θα κάνουμε να μας δίνει συνολική φάση που θα ανήκει στο $(-\pi, \pi]$! Αν δεν ανήκει εκεί, αλλάζουμε τις επιλογές μας! Ας το δούμε.

Επιλέγουμε να αντικαταστήσουμε το -1 της εκθετικής συνάρτησης συχνότητας 10 Hz με το $e^{-j\pi}$, και το -1 της εκθετικής συνάρτησης συχνότητας -10 Hz με το $e^{j\pi}$. Άρα θα έχουμε:

$$x(t) = 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (4.42)$$

$$= 3 + (e^{j\pi/9}e^{-j\pi})e^{j2\pi 10t} + (e^{-j\pi/9}e^{+j\pi})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (4.43)$$

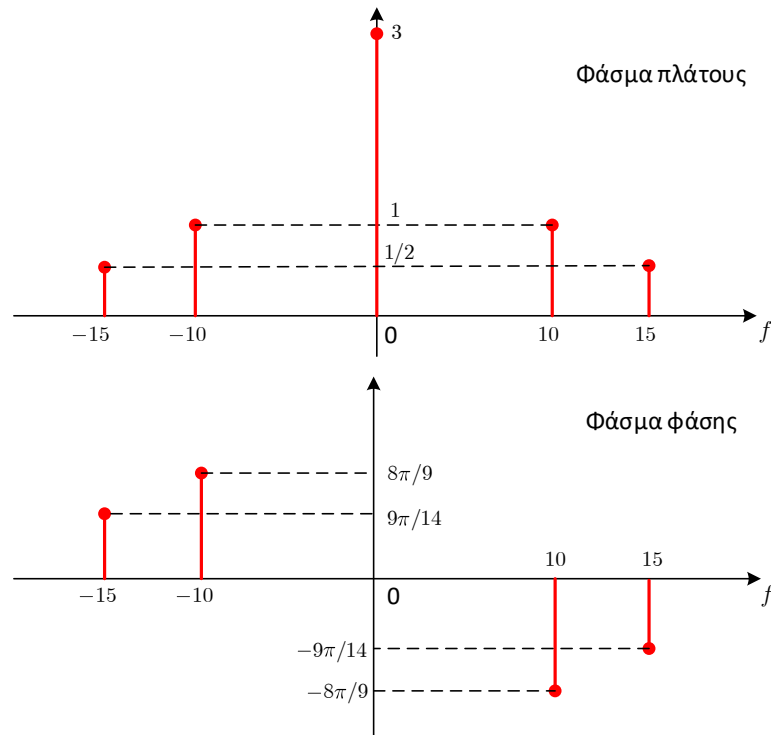
$$= 3 + (e^{-j8\pi/9})e^{j2\pi 10t} + (e^{j8\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (4.44)$$

Βλέπετε ότι με αυτήν την αντιστοίχιση, οι φάσεις που προέκυψαν στους μιγαδικούς συντελεστές των δυο πρώτων εκθετικών συχνότητας ± 10 Hz είναι $\pm 8\pi/9$, που φυσικά ανήκουν στο $(-\pi, \pi]$, ενώ τα μέτρα τους είναι μοναδιαία

(πραγματικά και θετικά). Αν κάναμε ανάποδα τις αντιστοιχίες των -1 με τις σχέσεις του Euler, τότε θα προέκυπταν φάσεις με τιμές $\pm 10\pi/9$, που ασφαλώς χρειάζονται περαιτέρω μετατροπή για να ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Τέλος, η σταθερά $c = 3$ πρέπει να εκφραστεί συχνοτικά. Είναι ένας απλός πραγματικός αριθμός, άρα που θα τον συμπεριλάβουμε; Προφανώς στο φάσμα πλάτους. Σε ποιά συχνότητα; Η απάντηση είναι τελικά απλή, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το $c = 3$ γράφεται ως $3e^{j0t}$. Άρα το $c = 3$ είναι το πλάτος της μηδενικής συχνότητας, $f = 0$. Άρα θα το βάλουμε στο φάσμα πλάτους, στη συμβολή των αξόνων, δηλ. στη θέση $f = 0^2$!

Πλέον όλες οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις έχουν μιγαδικούς συντελεστές που είναι γραμμένοι σε πολική μορφή. Εύκολα ξεχωρίζουμε τα πλάτη από τις φάσεις, οπότε μπορούμε να σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα. Δείτε το Σχήμα 4.6. Πριν κλείσουμε αυτό το παράδειγμα, παρατηρήστε το εξής: το φάσμα πλάτους έχει *άρτια*



Σχήμα 4.6: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 4.3

συμμετρία, ενώ το φάσμα φάσης έχει *περιπτή* συμμετρία! Αυτό ισχύει, όπως θα δούμε και παρακάτω, για *κάθε* πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ που αναλύουμε, και προέρχεται από το γεγονός ότι οι μιγαδικοί συντελεστές των θετικών συχνοτήτων που βρήκαμε είναι συζυγείς με τους αντίστοιχους των αρνητικών συχνοτήτων. Είναι ένας καλός τρόπος να ελέγχετε τα αποτελέσματά σας.

Σχεδίαση Φασμάτων Εκθετικών Μιγαδικών Αναπαραστάσεων

Συνοψίζοντας, για το σχεδιασμό φάσματος πλάτους και φάσης σε ένα άθροισμα εκθετικών (ή ημιτόνων που τα μετατρέπουμε σε εκθετικά), φροντίζουμε να μετατρέψουμε όλους τους συντελεστές των εκθετικών σε πολική μορφή, δηλ. με θετικούς πραγματικούς αριθμούς ως μέτρο, και προσέχοντας η φάση που προκύπτει να ανήκει στο $(-\pi, \pi]$. Αυτό γίνεται μετατρέποντας τα αρνητικά πρόσημα συντελεστών σε φάση με τη σχέση $e^{\pm j\pi} = -1$, καθώς και τους όρους $\pm 1/j = \mp j$ σε $e^{\pm k\pi/2} = \pm j$.

Δεν καταλήγουν, προφανώς, όμως όλοι οι συνδυασμοί ημιτόνων σε περιοδικό σήμα. Για παράδειγμα, το παραπάνω σήμα $x(t)$ του Παραδείγματος 4.3 είναι περιοδικό με θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = \text{Μ.Κ.}\Delta\{200, 500\} = 100$ Hz, και άρα περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.01$ δευτερόλεπτα. Όμως, το σήμα $y(t) = \cos(2\pi 50t) - \sin(5t - \pi/4)$ ΔΕΝ είναι περιοδικό, γιατί δεν υπάρχει ο Μ.Κ.Δ των δυο συχνοτήτων (ή αλλιώς, ο λόγος των συχνοτήτων τους δεν είναι λόγος ακραίων). Εμείς όμως ενδιαφερομαστε ιδιαίτερα για τα περιοδικά σήματα, σε πρώτη φάση. Όταν το σήμα που μας δίνεται είναι σε μορφή αθροίσματος ή γινομένου ημιτόνων, τότε μπορούμε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και τύπων του Euler, να το γράψουμε σε μορφή αθροίσματος ημιτόνων ή εκθετικών και να σχεδιάσουμε φάσματα πλάτους και φάσης σημάτων, όπως παραπάνω, άσχετα αν είναι το σήμα περιοδικό ή όχι.

²Τι θα συνέβαινε αν αντί για $c = 3$ ήταν $c = -3$ ο σταθερός όρος; Τότε θα τον γράφαμε ως $c = -3 = 3e^{j\pi}e^{j0t}$, και το πλάτος $A = 3$ θα άνηκε στο φάσμα πλάτους, ενώ η φάση π στο φάσμα φάσης, στην ίδια θέση, $f = 0$!

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα, όπου το σήμα προς ανάλυση δεν είναι σε μορφή αθροίσματος ημιτόνων.

Παράδειγμα 4.4:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \sin^2(5\pi t) \cos(22\pi t) \quad (4.45)$$

Βρείτε την περίοδο T_0 του σήματος και σχεδιάστε τα φάσματα πλάτους και φάσης.

Λύση:

Για να βρούμε την περίοδο, θα πρέπει να γράψουμε το $x(t)$ ως άθροισμα ημιτόνων ή/και συνημιτόνων. Είναι:

$$x(t) = \sin^2(5\pi t) \cos(22\pi t) = \left(\frac{1}{2j} e^{j5\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j5\pi t} \right)^2 \left(\frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \quad (4.46)$$

$$= \left(\frac{1}{4j^2} e^{j10\pi t} - 2 \frac{1}{2j} \frac{1}{2j} e^{j5\pi t} e^{-j5\pi t} + \frac{1}{4j^2} e^{-j10\pi t} \right) \left(\frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \quad (4.47)$$

$$= \left(-\frac{1}{4} e^{j10\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-j10\pi t} \right) \left(\frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \quad (4.48)$$

$$= -\frac{1}{8} e^{j32\pi t} - \frac{1}{8} e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4} e^{j22\pi t} + \frac{1}{4} e^{-j22\pi t} - \frac{1}{8} e^{-j32\pi t} - \frac{1}{8} e^{j12\pi t} \quad (4.49)$$

$$= \frac{1}{8} e^{j\pi} e^{j32\pi t} + \frac{1}{8} e^{-j\pi} e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4} e^{j22\pi t} + \frac{1}{4} e^{-j22\pi t} + \frac{1}{8} e^{-j\pi} e^{-j32\pi t} + \frac{1}{8} e^{j\pi} e^{j12\pi t} \quad (4.50)$$

$$= \frac{1}{4} \cos(2\pi 6t + \pi) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 11t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi 16t + \pi) \quad (4.51)$$

Προφανώς, η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι: $f_0 = \text{M.K.}\Delta(6, 11, 16) = 1 \text{ Hz}$. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1 \text{ s}$.

Εύκολα μπορείτε εσείς να σχεδιάσετε τα φάσματα! ☺

4.3.2 Μόνο ημίτονα;

Όμως τα περιοδικά σήματα, όπως αυτό της Σχέσης (4.19), έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα όταν τα αναπτύσσουμε σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Αυτά τα εκθετικά έχουν συχνότητες που είναι ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας του σήματος! Παρατηρήστε ξανά ότι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος της Σχέσης (4.19) είναι 100 Hz. Οι συχνότητες του σήματος είναι ακέραιες πολλαπλάσιες του 100, δηλ. $\pm 200, \pm 500$. Αυτό ακριβώς αντικατοπτρίζεται και στο φάσμα πλάτους και φάσης.

Τι γίνεται όμως αν το περιοδικό σήμα που μας δίνεται δεν είναι σε μορφή αθροίσματος/γινομένου/πηλίκου ημιτόνων; Αν είναι ένας περιοδικός τριγωνικός ή τετραγωνικός παλμός³, τότε ποιό είναι το συχνοτικό του περιεχόμενο; Άρα φυσιολογικά προκύπτει το ερώτημα αν μπορούμε να εκφράσουμε ένα πραγματικό περιοδικό σήμα ως άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, δηλ. ημιτόνων (μέσω των σχέσεων Euler), με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους. Αν μπορούμε, τότε υπό ποιές συνθήκες και με ποιό σφάλμα (αν υπάρχει);. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται από τη θεωρία της Ανάλυσης σε Σειρές Fourier! Πριν φτάσουμε όμως εκεί, θα ήταν πολύ χρήσιμο για τη διαίσθησή μας και την ομαλή μετάβαση και κατανόηση των Σειρών Fourier, να μελετήσουμε το γενικότερο πρόβλημα της προσέγγισης ενός οποιουδήποτε σήματος από άλλα σήματα.

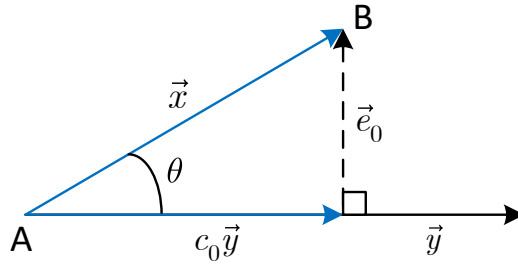
4.4 Προσέγγιση Σημάτων από Σήματα

Στις εφαρμοσμένες επιστήμες, η προσέγγιση πολύπλοκων σημάτων από άλλα απλούστερα είναι πολύ συχνό φαινόμενο. Μάλιστα, μια τέτοια προσέγγιση κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, όταν εκφράσαμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ ως συνεχές άθροισμα μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα. Η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα θεμελιώδες σήμα στη μελέτη των συστημάτων, όπως ήδη είδαμε. Στη μελέτη περιοδικών σημάτων, το αντίστοιχο θεμελιώδες σήμα είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα, $e^{j2\pi f_0 t}$, και αυτό φάνηκε ξεκάθαρα στην προηγούμενη παράγραφο, στα απλά παραδείγματα που παρουσιάστηκαν. Η ανάλυση που ακολουθεί σε αυτήν την παράγραφο ξεκινά με έννοιες οι οποίες είναι πιο οικείες στον αναγνώστη, όπως η έννοια των διανυσμάτων. Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε τις έννοιες στο χώρο των σημάτων, ώστε να καταλήξουμε στην απάντηση του ερωτήματος που τέθηκε νωρίτερα, το οποίο επαναλαμβάνουμε εδώ: *μπορεί να εκφραστεί ένα οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, τα οποία έχουν συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους;*

³Σήματα που εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη στις επιστήμες μηχανικού!

4.4.1 Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

Γνωρίζουμε ότι ένα διάνυσμα στο επίπεδο είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, με αρχή ένα σημείο A και πέρας ένα σημείο B , το οποίο συμβολίζουμε με $\vec{x}$, όπως στο Σχήμα 4.7. Θεωρώντας ένα άλλο διάνυσμα

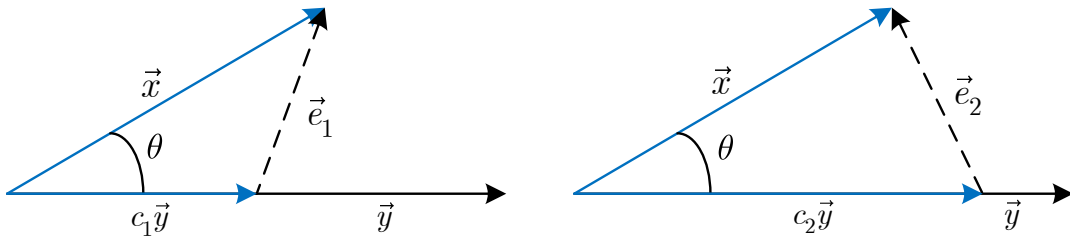


Σχήμα 4.7: Διάνυσμα $\vec{x}$ και προβολή του, $c_0 \vec{y}$, επάνω σε διάνυσμα $\vec{y}$.

$\vec{y}$, το οποίο σχηματίζει γωνία θ με το διάνυσμα $\vec{x}$, μπορούμε να φέρουμε την κάθετο από το σημείο B επάνω στο διάνυσμα $\vec{y}$. Το διάνυσμα $c_0 \vec{y}$ που δημιουργείται ονομάζεται *προβολή* του διανύσματος $\vec{x}$ επάνω στο διάνυσμα $\vec{y}$, με c_0 πραγματική σταθερά. Μπορούμε τότε να εκφράσουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως

$$\vec{x} = c_0 \vec{y} + \vec{e}_0 \quad (4.52)$$

με $\vec{e}_0$ όπως στο Σχήμα 4.7. Θα ήταν βολικό να θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{e}_0$ ως το *διάνυσμα σφάλματος* μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$, γιατί αποτελεί το διάνυσμα που πρέπει να προστεθεί στο διάνυσμα $c_0 \vec{y}$ ώστε αυτό να γίνει ίσο με το διάνυσμα $\vec{x}$. Εύκολα μπορεί κάποιος να σκεφτεί διάφορα διανύσματα σφάλματος $\vec{e}_i$, όπως αυτά που φαίνονται στο Σχήμα 4.8. Οι αντίστοιχες εκφράσεις του διανύσματος $\vec{x}$ συναρτήσει αυτών των διανυσμάτων σφάλματος και



Σχήμα 4.8: Διάφορα διανύσματα σφάλματος $\vec{e}_i$.

του διανύσματος $\vec{y}$ είναι

$$\vec{x} = c_1 \vec{y} + \vec{e}_1 \quad (4.53)$$

$$\vec{x} = c_2 \vec{y} + \vec{e}_2 \quad (4.54)$$

και τα αντίστοιχα διανύσματα σφάλματος είναι

$$\vec{e}_0 = \vec{x} - c_0 \vec{y} \quad (4.55)$$

$$\vec{e}_1 = \vec{x} - c_1 \vec{y} \quad (4.56)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{x} - c_2 \vec{y} \quad (4.57)$$

βάζοντας μαζί και το διάνυσμα σφάλματος $\vec{e}_0$, της αρχικής μας προσέγγισης. Αν θέλαμε να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως προσέγγιση του διανύσματος $\vec{y}$, δηλ.

$$\vec{x} = c_i \vec{y} \approx \vec{y} \quad (4.58)$$

τότε ποιά από τις (συνολικά άπειρες) εκφράσεις του διανύσματος $\vec{x}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{y}$ και $\vec{e}_i$ είναι η “καλύτερη”; Αν και θα μπορούσε κανείς να θέσει διάφορα κριτήρια για την εύρεση της καλύτερης έκφρασης, η πιο διαισθητικά προφανής είναι αυτή που σχετίζεται με το μήκος του διανύσματος σφάλματος, $\vec{e}_i$: όσο μικρότερο το μήκος του διανύσματος σφάλματος, τόσο “καλύτερη” η προσέγγιση του διανύσματος $\vec{y}$ από το διάνυσμα $\vec{x}$. Αυτή η προσέγγιση ονομάζεται *προσέγγιση ελάχιστου σφάλματος*. Σε ποιά περίπτωση λοιπόν είναι το μήκος $|\vec{e}_i|$ ελάχιστο; Η διαίσθησή μας ξανά δεν λανθάνει: όταν το διάνυσμα $\vec{e}_i$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$, δηλ. όπως το διάνυσμα $\vec{e}_0$ στο Σχήμα 4.7. Για να ολοκληρώσουμε την εύρεση της προσέγγισης, αρκεί να βρούμε τη σταθερά c_0 . Από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζουν τα διανύσματα αυτά, έχουμε

$$c_0 |\vec{y}| = |\vec{x}| \cos(\theta) \implies c_0 |\vec{y}|^2 = |\vec{y}| |\vec{x}| \cos(\theta) = \vec{x} \cdot \vec{y} \implies c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (4.59)$$

με $\vec{x} \cdot \vec{y}$ το **εσωτερικό γινόμενο** μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$.

Η παραπάνω σχέση εγείρει μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις.

- Αν το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$, δηλ. $\vec{x} \perp \vec{y}$, τότε η Σχέση (4.59) δίνει $c = 0$. Άρα καταλαβαίνουμε ότι δεν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα επάνω στο $\vec{y}$ που να γράφεται ως προσέγγιση του $\vec{x}$ με την έννοια της προβολής.
- Η σχέση $\vec{x} \perp \vec{y} \iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ ονομάζει τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ ως **ορθογώνια** μεταξύ τους.

Άρα λοιπόν μπορέσαμε και εκφράσαμε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{y}$ ως

$$\vec{x} \approx c\vec{y} \quad (4.60)$$

με

$$c = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (4.61)$$

δηλ. προσεγγίσαμε το διάνυσμα $\vec{x}$ με όρους - και συγκεκριμένα έναν όρο - του διανύσματος $\vec{y}$.

4.4.2 Προβολή Σήματος σε Σήμα

Ας επεκτείνουμε τις έννοιες που μόλις συζητήσαμε από το χώρο των διανυσμάτων στο χώρο των σημάτων. Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε ένα σήμα $x(t)$ με όρους ενός άλλου σήματος $y(t)$, τα οποία ορίζονται στο διάστημα $[t_1, t_2]$. Με άλλα λόγια, θέλουμε να βρούμε τη σταθερά c για την οποία η προσέγγιση

$$x(t) \approx cy(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (4.62)$$

είναι η “καλύτερη” - ας ονομάζουμε αυτήν την προσέγγιση ως **βέλτιση** στο εζής. Ας ορίσουμε τη **συνάρτηση σφάλματος** ως

$$e(t) = \begin{cases} x(t) - cy(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.63)$$

Θα θέλαμε αυτή η συνάρτηση σφάλματος να είναι κατά κάποια έννοια “ελάχιστη”, ώστε η προσέγγισή μας να είναι βέλτιστη. Μια πολύ δημοφιλής μέθοδος εύρεσης της βέλτιστης προσέγγισης είναι μέσω ελαχιστοποίησης της **ενέργειας** της συνάρτησης σφάλματος, η οποία ορίζεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt \quad (4.64)$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε τη σταθερά c για την οποία η τιμή της E_e είναι ελάχιστη στο διάστημα $[t_1, t_2]$, δεδομένων των $x(t), y(t)$. Θέτοντας την παράγωγο της E_e ως προς c ίση με μηδέν, έχουμε:

$$\frac{dE_e}{dc} = 0 \quad (4.65)$$

$$\frac{d}{dc} \left(\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt \right) = 0 \quad (4.66)$$

$$\frac{d}{dc} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - \frac{d}{dc} \int_{t_1}^{t_2} 2cx(t)y(t) dt + \frac{d}{dc} c^2 \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt = 0 \quad (4.67)$$

$$-\frac{d}{dc} 2c \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt + \frac{d}{dc} c^2 \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt}_{E_y} = 0 \quad (4.68)$$

$$2cE_y = 2 \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \quad (4.69)$$

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \quad (4.70)$$

όπου E_y η ενέργεια του σήματος $y(t)$. Άρα η σταθερά βέλτιστης προσέγγισης c δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \quad (4.71)$$

Ας συγκρίνουμε την παραπάνω σχέση με την αντίστοιχη που καταλήξαμε για τα διανύσματα:

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt \quad , \quad c = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (4.72)$$

Είναι εμφανές ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$ “μεταφράζεται” σε εμβαδό του γινομένου $x(t)y(t)$ στο χώρο των σημάτων! Ας ορίσουμε λοιπόν το **εσωτερικό γινόμενο** δυο σημάτων $x(t), y(t)$ ως

$$\langle x, y \rangle = \int_A x(t)y(t)dt \quad (4.73)$$

με A το πεδίο ορισμού των δυο σημάτων.

Συνολικά λοιπόν, δείξαμε ότι ένα σήμα $x(t)$ μπορεί να προσεγγιστεί βέλτιστα, υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, από ένα σήμα $y(t)$ ως

$$x(t) \approx cy(t), \quad t \in [t_1, t_2] \quad (4.74)$$

με

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \frac{1}{E_y} \langle x, y \rangle \quad (4.75)$$

Παρατηρήστε ότι κι εδώ $\langle x, y \rangle = 0$, τότε τα σήματα ονομάζονται **ορθογώνια** μεταξύ τους, και στην παραπάνω βέλτιστη προσέγγιση ισχύει ότι $\langle e, y \rangle = 0$!

Δυο παραδείγματα θα κάνουν την παραπάνω συζήτηση πιο πρακτική και ξεκάθαρη.

Παράδειγμα 4.5:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} t, & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.76)$$

Θέλουμε να το προσεγγίσουμε μέσω του σήματος $y(t) = \sin(t)$ στο $-\pi \leq t \leq \pi$.

(α') Δείξτε ότι η βέλτιστη, με την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, προσέγγιση του $x(t)$ από το $y(t)$ είναι η

$$x(t) \approx cy(t) = 2\sin(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad (4.77)$$

(β') Σχεδιάστε το σήμα $cy(t) = 2\sin(t)$ στον ίδιο άξονα με το $x(t)$.

(γ') Το σφάλμα της παραπάνω προσέγγισης δίνεται από τη σχέση

$$e(t) = x(t) - cy(t) = t - 2\sin(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad (4.78)$$

Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια σφάλματος $E_e = \int_{-\pi}^{\pi} e^2(t)dt$.

(δ') Δείξτε ότι $\langle e, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e(t)y(t)dt = 0$, δηλ. ότι τα σήματα $e(t), y(t)$ είναι ορθογώνια.

Λύση:

(α') Είναι

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)dt = \frac{1}{E_y} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt \quad (4.79)$$

με

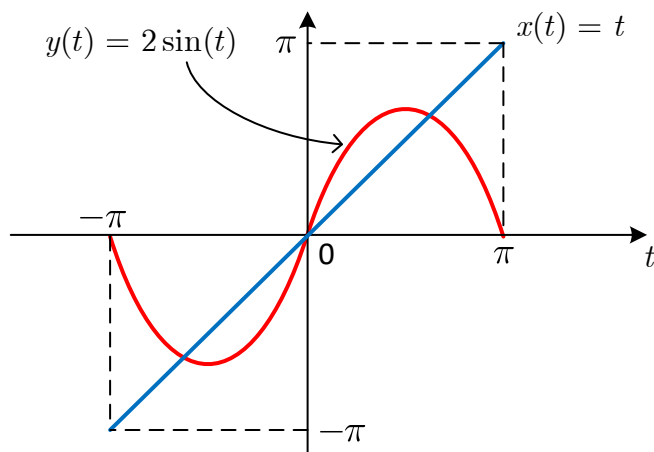
$$E_y = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi - \frac{1}{4} \cdot 0 = \pi \quad (4.80)$$

Άρα

$$c = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt = \frac{1}{\pi} \left(\sin t \Big|_{-\pi}^{\pi} - t \cos t \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} (0 - \pi \cos \pi + (-\pi) \cos(-\pi)) = 2 \quad (4.81)$$

Άρα η βέλτιστη προσέγγιση είναι $x(t) = cy(t) = 2 \sin t$, $-\pi \leq t \leq \pi$

(β') Το $x(t)$ και η βέλτιστη προσέγγισή του, $2 \sin(t)$, φαίνεται στο Σχήμα 4.9.



Σχήμα 4.9: Παράδειγμα 4.5: προσέγγιση σήματος από άλλο.

(γ') Έχουμε

$$E_e = \int_{-\pi}^{\pi} e^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} (t - 2 \sin t)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 - 4t \sin t + 4 \sin^2 t) dt \quad (4.82)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - 4 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt}_{cE_x = 2\pi} + 4 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt}_{E_x = \pi} = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} - 8\pi + 4\pi = \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right) - 4\pi \quad (4.83)$$

$$= \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi \quad (4.84)$$

(δ') Είναι

$$\langle e, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e(t)y(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} (t - 2 \sin t) \sin t dt = \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt - \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin^2 t dt = 0 \quad (4.85)$$

έχοντας υπολογίσει χωρίτερα τα ολοκληρώματα αυτά, άρα τα $e(t), y(t)$ είναι ορθογώνια.

4.4.2.1 Επέκταση σε Μιγαδικά Σήματα

Παρ' όλο που η παραπάνω ανάλυση είναι πολύ ενδιαφέρουσα, ο σκοπός μας είναι να ελέγξουμε αν μπορούμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων της μορφής $e^{j2\pi k f_0 t}$, τα οποία - όπως βλέπετε - έχουν συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους. Ας επεκτείνουμε λοιπόν την παραπάνω συζήτηση στα μιγαδικά σήματα - η ακριβώς όμοια ανάλυση με πραγματικά σήματα αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Έστω ότι τα σήματα $x(t), y(t)$ είναι μιγαδικά, και ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε το $x(t)$ με χρήση του $y(t)$ στο διάστημα $[t_1, t_2]$. Ορίζοντας τη συνάρτηση σφάλματος $e(t)$ ως

$$e(t) = x(t) - cy(t) \quad (4.86)$$

μπορούμε να αναζητήσουμε τη σταθερά c ελαχιστοποιώντας την ενέργειά της συνάρτησης σφάλματος, η οποία

δίνεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - cy(t)|^2 dt \quad (4.87)$$

Έχουμε

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - cy(t)|^2 dt = 0 \quad (4.88)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))(x(t) - cy(t))^* dt = 0 \quad (4.89)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))(x^*(t) - c^*y^*(t)) dt = 0 \quad (4.90)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (x(t)x^*(t) - c^*x(t)y^*(t) - cx^*(t)y(t) + |c|^2y(t)y^*(t)) dt = 0 \quad (4.91)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (|x(t)|^2 - c^*x(t)y^*(t) - cx^*(t)y(t) + |c|^2|y(t)|^2) dt = 0 \quad (4.92)$$

Η παραπάνω συνάρτηση ως προς c δεν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο της (λόγω της παρουσίας των όρων c^* , $|c|^2$). Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της παραγώγου μιγαδικής συνάρτησης με χρήση των παραγώγων Wirtinger, των οποίων ο ορισμός είναι εκτός σκοπού αυτού του συγγράμματος - θα τις χρησιμοποιήσουμε μόνο για να βρούμε το αποτέλεσμα που ζητάμε. Ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial c} c^* = 0 \text{ και } \frac{\partial}{\partial c} cc^* = c^* \quad (4.93)$$

με το συμβολισμό $\partial/\partial c$ να αναφέρεται στη μερική γραμμική παραγωγή. Θέτοντας λοιπόν ξανά την (μερική) παράγωγο της E_e ως προς c ίση με το μηδέν, έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial c} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \frac{\partial}{\partial c} \int_{t_1}^{t_2} c^*x(t)y^*(t) dt - \frac{\partial}{\partial c} \int_{t_1}^{t_2} cx^*(t)y(t) dt + \frac{\partial}{\partial c} |c|^2 \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt = 0 \quad (4.94)$$

$$0 - \int_{t_1}^{t_2} x^*(t)y(t) dt + c^* \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt = 0 \quad (4.95)$$

Γνωρίζοντας ότι

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt \quad (4.96)$$

για μιγαδικά σήματα, καταλήγουμε

$$-\int_{t_1}^{t_2} x^*(t)y(t) dt + c^* \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt = 0 \quad (4.97)$$

$$c^* = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x^*(t)y(t) dt \quad (4.98)$$

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t) dt \quad (4.99)$$

Άρα η σταθερά βέλτιστης προσέγγισης c δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{E_y} \langle x, y \rangle \quad (4.100)$$

με $\langle x, y \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο μιγαδικών σημάτων $x(t), y(t)$.

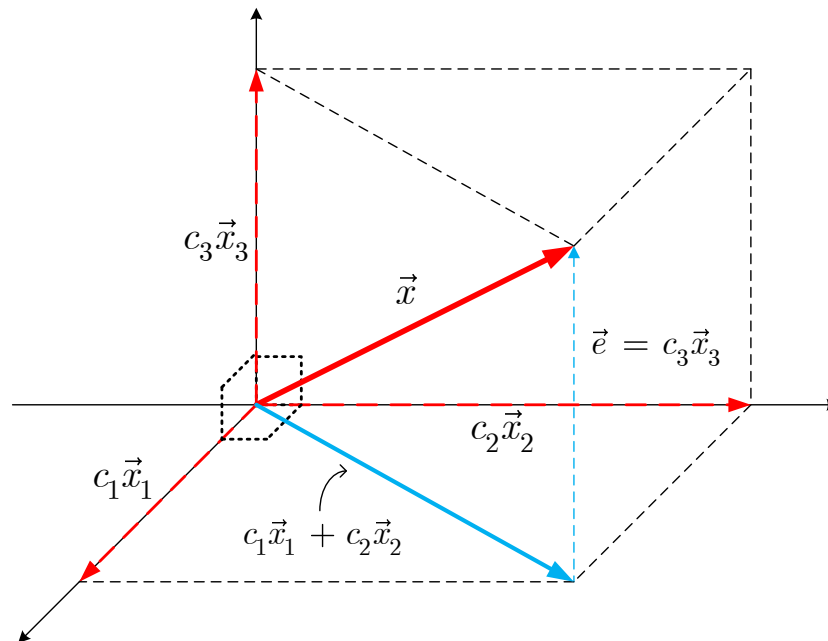
Από την τελευταία σχέση, πρέπει να σας είναι προφανές ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle$ είναι διαφορετικό από το εσωτερικό γινόμενο $\langle y, x \rangle$, πράγμα που δεν ίσχυε για πραγματικά σήματα. Για να είναι όμως δυο μιγαδικά σήματα ορθογώνια, αρκεί να ισχύει

$$\langle x, y \rangle = 0 \text{ είτε } \langle y, x \rangle = 0 \quad (4.101)$$

Οποιαδήποτε από τις δυο παραπάνω εξισώσεις ικανοποιείται, είναι αρκετό για να χαρακτηρίσει τα σήματα $x(t), y(t)$ ως ορθογώνια.

4.4.3 Αναπαράσταση Σήματος από Ορθογώνια Σήματα

Καταλαβαίνετε ότι λίγα σήματα μπορούν να προσεγγιστούν καλά από ένα μόνο όρο ενός άλλου σήματος. Καιρός να επεκτείνουμε την ανάλυσή μας σε περισσότερα από δυο σήματα. Ας επιστρέψουμε για λίγο στο χώρο των διανυσμάτων. Ας ξεκινήσουμε πρώτα διαισθητικά: γνωρίζετε ότι κάθε σημείο στον τριδιάστατο χώρο - το χώρο που ζούμε και κινούμαστε - μπορεί να παρασταθεί από ένα διάνυσμα και απαιτεί τρεις συντεταγμένες για να περιγραφεί με απόλυτη ακρίβεια, ήτοι το μήκος, το πλάτος, και το ύψος, όπως στο Σχήμα 4.10. Αν λείψει οποιαδήποτε από αυτές τις συντεταγμένες, η περιγραφή σας θα έχει ένα ποσό σφάλματος. Συγκεκριμένα, αν



Σχήμα 4.10: Ανάλυση διανύσματος στον τριδιάστατο χώρο.

αναπαράστήσουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3 \quad (4.102)$$

τότε το διάνυσμα σφάλματος είναι μηδενικό, αν τα c_i δίνονται από τις σχέσεις

$$c_i = \frac{1}{|\vec{x}_i|^2} \vec{x} \cdot \vec{x}_i \quad (4.103)$$

δηλ. τα $c_i\vec{x}_i$ είναι προβολές του διανύσματος $\vec{x}$ επάνω στους τρεις άξονες.

Αντίθετα, αν το διάνυσμα $\vec{x}$ γραφεί ως

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 \quad (4.104)$$

τότε το διάνυσμα σφάλματος είναι

$$\vec{e} = \vec{x} - (c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) = c_3\vec{x}_3 \quad (4.105)$$

Όλα αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 4.10.

Μια πρώτη ερώτηση που μπορεί να θέσει κανείς είναι *ποιά είναι τα κατάλληλα διανύσματα $\vec{x}_i$ για τα οποία το διάνυσμα $\vec{x}$ περιγράφεται πλήρως και ακριβώς;* Καταλαβαίνετε ότι δεν μπορούν να είναι οποιαδήποτε. Η εμπειρία μας οδηγεί στην εύρεση των συντεταγμένων τους: είναι

$$\vec{x}_1 = [1 \ 0 \ 0] \quad (4.106)$$

$$\vec{x}_2 = [0 \ 1 \ 0] \quad (4.107)$$

$$\vec{x}_3 = [0 \ 0 \ 1] \quad (4.108)$$

καθώς αποτελούν τα μοναδιαία διανύσματα για κάθε διάσταση του τριδιάστατου χώρου: μήκος, πλάτος, ύψος.

Ποιά είναι όμως τα χαρακτηριστικά αυτών των διανυσμάτων (ή οποιωνδήποτε άλλων, αν υπάρχουν) που τα κάνει κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα το διάνυσμα $\vec{x}$;

(α') Μπορείτε να δείξετε ότι είναι *ορθογώνια*: $x_i \perp x_j$ για $i \neq j$. Η Γραμμική Άλγεβρα μας υποδεικνύει - και μπορεί

να δειχθεί πολύ εύκολα από τον αναγνώστη - ότι η ορθογωνιότητα συνεπάγεται γραμμική ανεξαρτησία. Η γραμμική ανεξαρτησία είναι πολύ σημαντική, καθώς κατά κάποιο τρόπο εννοεί ότι τα διανύσματα αυτά έχουν κάτι ιδιαίτερο, κάτι θεμελιώδες το καθένα, καθώς δεν μπορεί κανένα τους να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

- (β') Παρατηρήστε ότι για ένα διάνυσμα στον τριδιάστατο χώρο απαιτούνται ακριβώς τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα για να τον περιγράψουν πλήρως και ακριβώς. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\vec{x}_i$ συνιστούν ένα πλήρες σύνολο ορθογωνίων διανυσμάτων του τριδιάστατου χώρου! Η έννοια της πληρότητας συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει κάποιο διάνυσμα $\vec{x}_4$ στον τριδιάστατο χώρο, το οποίο να είναι ορθογώνιο (και άρα γραμμικά ανεξάρτητο) και με τα τρία προηγούμενα $\vec{x}_i$, για $i = 1, 2, 3$.

Άρα το κλειδί για την αναπαράσταση ενός διανύσματος στον N -διάστατο χώρο με μηδενικό διάνυσμα σφάλματος είναι η εύρεση ενός συνόλου N το πλήθος διανυσμάτων που ικανοποιούν την ιδιότητα της γραμμικής ανεξαρτησίας και της πληρότητας. Αυτές οι δυο ιδιότητες μπορούν να εκφραστούν με μια λέξη: το σύνολο αυτό των διανυσμάτων αποτελεί **βάση** του N -διάστατου χώρου, δηλ. οποιοδήποτε διάνυσμα ανήκει στο χώρο μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός όλων των διανυσμάτων της βάσης, με μηδενικό σφάλμα.

Η επέκταση της παραπάνω ανάλυσης στο χώρο των σημάτων δεν (πρέπει να) είναι προφανής. Αναζητούμε ένα σύνολο σημάτων της μορφής $e^{j2\pi f_k t}$, με $f_k = k f_0$, τα οποία να αναπαριστούν με "ακρίβεια" ένα οποιοδήποτε περιοδικό σήμα. Η ανάλυσή μας ως τώρα περιελάμβανε απεριόδικα σήματα, οπότε ας παραμείνουμε σε μια περίοδο του σήματος, $[0, T_0]$. Ας θεωρήσουμε το σύνολο των περιοδικών - με περίοδο k/T_0 το καθένα - μιγαδικών σημάτων

$$\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-N}^N, \quad \text{με } k \in \mathbb{Z} \quad (4.109)$$

Ας προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ που ορίζεται στο $[0, T_0]$ ως άθροισμα $2N + 1$ τέτοιων σημάτων ως

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.110)$$

με συντελεστές X_k . Ο λόγος των αρνητικών τιμών του k έγκειται στο ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε ένα πραγματικό σήμα από άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Γνωρίζουμε από τη σχέση του Euler ότι αυτό μπορεί να συμβεί μόνον όταν οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις έρχονται σε συζυγή ζεύγη (τόσο οι ίδιες όσο και οι συντελεστές τους).

Η συνάρτηση σφάλματος $e(t)$ δίνεται ως

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.111)$$

Η ενέργεια της συνάρτησης σφάλματος, E_e , δίνεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |e(t)|^2 dt \quad (4.112)$$

Μπορούμε να βρούμε τα X_k για τα οποία η ενέργεια της συνάρτησης σφάλματος είναι ελάχιστη. Θα παραλείψουμε την ακριβή διαδικασία μια και δεν προσθέτει κάτι στη συζήτηση, ενώ μοιάζει αρκετά με όσα περιγράψαμε στην Παράγραφο 4.4.2.1 - ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να δει το Παράρτημα Α'. Αποδεικνύεται λοιπόν ότι οι συντελεστές X_k δίνονται ως

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.113)$$

Για τους συντελεστές X_k , μπορεί κανείς να δείξει ότι η ελάχιστη ενέργεια σφάλματος δίνεται από τη σχέση

$$E_e = \int_0^{T_0} x^2(t) dt - T_0 \sum_{k=-N}^N |X_k|^2 = E_x - T_0 \sum_{k=-N}^N |X_k|^2 \quad (4.114)$$

Παρατηρήστε ότι η ενέργεια σφάλματος E_e φθίνει όσο αυξάνει το N , δηλ. όσο προσθέτουμε ζεύγη συζυγών μιγαδικών εκθετικών (δηλ. ημιτόνων!). Άρα όταν $N \rightarrow +\infty$, θα πρέπει $E_e \rightarrow 0$. Όταν αυτό συμβαίνει, τότε το σύνολο $\mathbb{E}$ ονομάζεται **πλήρες**, και τότε η Σχέση (4.110) δεν είναι πια προσέγγιση αλλά ισότητα:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}, \quad t \in [0, T_0] \quad (4.115)$$

υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος πάντα.

Εφόσον το σύνολο $\mathbb{E}$ περιλαμβάνει στοιχεία που είναι ορθογώνια και είναι πλήρες όταν $N \rightarrow +\infty$, τότε το σύνολο αυτό αποτελεί **βάση** του χώρου των περιοδικών σημάτων. Η σειρά που περιγράφεται στη Σχέση (4.115) ονομάζεται **Σειρά Fourier**.

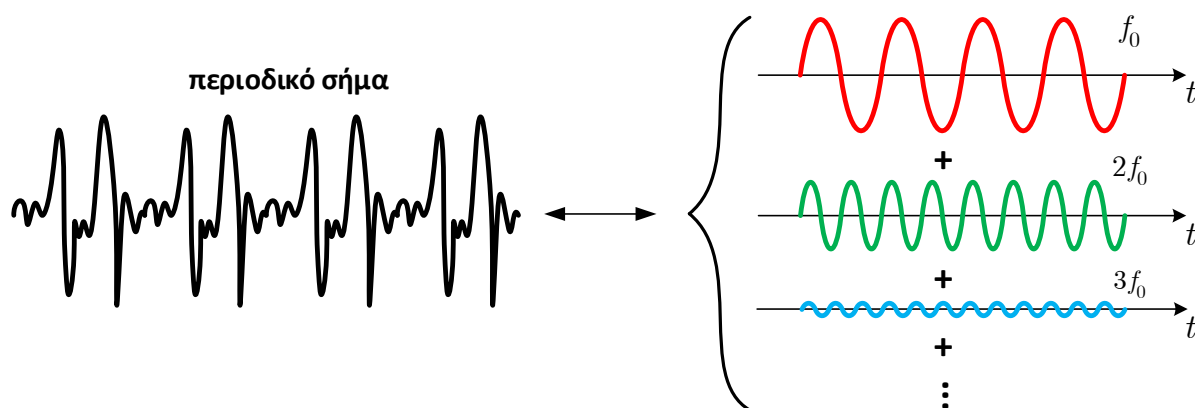
Τέλος, επειδή η ενέργεια σφάλματος E_e φθίνει στο μηδέν, η ενέργεια του αθροίσματος των μιγαδικών εκθετικών ισούται με την ενέργεια του συνολικού σήματος $x(t)$, βάσει της Σχέσης (4.114):

$$E_x = \int_0^{T_0} x^2(t) dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \quad (4.116)$$

Η Σχέση (4.116) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως το **Θεώρημα του Parseval**.

4.5 Ανάλυση σε Σειρές Fourier

Η Ανάλυση Fourier είναι ίσως το βασικότερο εργαλείο ανάλυσης σημάτων, η οποία μας δίνει πληροφορίες για το *συχνотικό τους περιεχόμενο*, δηλ. για το ποιές συχνότητες υπάρχουν στο σήμα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μας πληροφορεί για το πόσα και ποιά ημίτονα (δηλ. με ποιό πλάτος, συχνότητα, και φάση) πρέπει να προσθέσουμε μεταξύ τους για να πάρουμε το συνολικό σήμα που αναλύουμε. Ένα οπτικό παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 4.11. Με άλλα λόγια, η ανάλυση σε Σειρές Fourier δεν είναι τίποτα παραπάνω από ένα μαθηματικό εργαλείο που μας



Σχήμα 4.11: Ανάλυση σήματος σε άθροισμα ημιτόνων με ακέραιες πολλαπλάσιες συχνότητες.

επιτρέπει να γράφουμε ένα οποιοδήποτε (ή μάλλον, σχεδόν οποιοδήποτε $\odot$, όπως θα δούμε σύντομα) περιοδικό, πραγματικό σήμα ως ένα άθροισμα ημιτόνων. Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, με περίοδο T_0 , αναλύεται σε σειρά Fourier με χρήση των σχέσεων

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.117)$$

όπου

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt, \quad k \neq 0 \quad (4.118)$$

και

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \quad (4.119)$$

με

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (4.120)$$

όπου X_k είναι οι περίφημοι **συντελεστές Fourier**, και η συχνότητα f_0 είναι η γνωστή μας *θεμελιώδης συχνότητα*, γιατί όλα τα εκθετικά στη Σχέση (4.117) έχουν συχνότητες που είναι *ακέραιες πολλαπλάσιες* αυτής. Είδαμε λοιπόν εδώ πως γράφουμε ένα οποιοδήποτε περιοδικό σήμα ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων,

όπως κάναμε στην Παράγραφο 4.3 για τα απλά αθροίσματα ημιτόνων. Η Σειρά Fourier αυτής της μορφής λέγεται **εκθετική ή δίπλευρη σειρά Fourier**.

Μα ένα λεπτό... Πριν είπαμε ότι η ανάλυση Fourier μας αναλύει το σήμα και σε ημίτονα. Πού βρίσκονται αυτά στις παραπάνω σχέσεις; Μα φυσικά, απ' τις γνωστές σχέσεις του Euler, μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε εκθετική αναπαράσταση, που έχει προκύψει από ανάλυση πραγματικού σήματος, σε ημιτονοειδή αναπαράσταση. Θυμηθείτε:

$$\cos(\theta t) = \frac{e^{j(\theta t)} + e^{-j(\theta t)}}{2}, \quad \sin(\theta t) = \frac{e^{j(\theta t)} - e^{-j(\theta t)}}{2j} \quad (4.121)$$

Άρα ουσιαστικά οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις είναι κι αυτές ημίτονα, όταν βρίσκονται σε συζυγή ζεύγη. Ας δούμε πως γίνεται αυτή η μετατροπή.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.122)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.123)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (4.124)$$

Όπως όμως είπαμε, μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε οι συντελεστές X_k έρχονται σε συζυγή ζεύγη, δηλ. $X_k^* = X_{-k}$. Άρα

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (4.125)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (4.126)$$

Όμως

$$X_k^* = (|X_k| e^{j\phi_k})^* = |X_k|^* (e^{j\phi_k})^* = |X_k| e^{-j\phi_k} \quad (4.127)$$

Άρα

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (4.128)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (4.129)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \quad (4.130)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left(e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \right) \quad (4.131)$$

$$= \boxed{X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \quad (4.132)$$

Άρα δείξαμε ότι κάθε πραγματικό, περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί και ως άθροισμα ημιτόνων με πλάτη $2|X_k|$, συχνότητες $k f_0$, και φάσεις ϕ_k . Το παραπάνω ανάπτυγμα λέγεται **τριγωνομετρική ή μονόπλευρη Σειρά Fourier**, και δείχνει ξεκάθαρα πώς αναλύεται ένα περιοδικό, πραγματικό σήμα σε ένα άθροισμα από ημίτονα με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους!

Πριν πάμε σε παραδείγματα, ας ξεκινήσουμε πρώτα μερικές παρατηρήσεις σχετικά με την ανάλυση σε Σειρές Fourier.

Παρατηρήσεις

- (α') Ας ξεκινήσουμε από κάτι πολύ σημαντικό: όλες οι συχνότητες της Σχέσης (4.117) είναι *ακέραιες πολλαπλάσιες* μιας συγκεκριμένης, της θεμελιώδους συχνότητας, που ορίζεται ως το αντίστροφο της βασικής περιόδου του σήματος. Αυτό σημαίνει ότι τα φάσματα πλάτους και φάσης που - θα δούμε πως - προκύπτουν θα πρέπει να έχουν γραμμές μόνο στις συχνότητες $k f_0$, $k \in \mathbb{Z}$, και πουθενά αλλού!
- (β') Το ολοκλήρωμα στη Σχέση (4.118) μας πληροφορεί ότι για να βρούμε τους συντελεστές X_k κάθε εκθετικής συνάρτησης, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το περιοδικό σήμα $x(t)$ με τις περίφημες *συναρτήσεις βάσης*, και για την ακρίβεια τις συζυγείς τους $e^{-j2\pi k f_0 t}$, και να ολοκληρώσουμε το αποτέλεσμα σε μια περίοδο - οποιαδήποτε περίοδο του σήματος, όχι απαραίτητα από 0 ως T_0 ! Μπορούμε να βάλουμε στα άκρα του ολοκληρώματος όποιο διάστημα μιας βασικής περιόδου μας βολεύει, αρκεί να αποτελεί ένα τμήμα βασικής περιόδου του σήματος! Περισσότερα για τους συντελεστές Fourier σε επόμενη παρατήρηση...
- (γ') Ίσως παρατηρήσατε ότι, για πραγματικά σήματα, ο όρος X_0 εξ' ορισμού δεν είναι τίποτα άλλο παρά το (αλγεβρικό) εμβαδό μιας περιόδου του σήματος. Άρα ο όρος X_0 είναι απλά η μέση τιμή του σήματος. Πραγματικός αριθμός *πάντα*, για πραγματικά σήματα!
- (δ') Αντίθετα, οι συντελεστές X_k , $k \neq 0$ δεν είναι απαραίτητα πραγματικοί αριθμοί, συνήθως μάλιστα είναι μιγαδικοί. Το είδαμε άλλωστε σε προηγούμενες παραγράφους, στα σήματα που μελετήσαμε. Για το λόγο αυτό, οι συντελεστές X_k μπορούν - και συνήθως πρέπει, γιατί μας βοηθά στη σχεδίαση των φασμάτων - να γραφούν σε πολική μορφή:

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k} = |X_k| e^{j\phi_k} \quad (4.133)$$

Το $|X_k|$ - επανάληψη μήτηρ μαθήσεως - αποτελεί το **μέτρο** των συντελεστών Fourier (πάντα θετικό) και το $\angle X_k = \phi_k$ αποτελεί τη **φάση** αυτών. Η φάση *πάντα* εκφράζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Υπάρχουν πολλές ιδιότητες σχετικά με τους συντελεστές X_k ανάλογα με το είδος του σήματος $x(t)$. Για παράδειγμα, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε ισχύει ότι $X_k^* = X_{-k}$, δηλ. οι συντελεστές για αρνητικά k είναι απλά οι συζυγείς συντελεστές των όρων θετικών k . Προσοχή! Αυτό ισχύει μόνο για *πραγματικά*, περιοδικά σήματα $x(t)$!

- (ε') Σημαντικό είναι επίσης να παρατηρήσουμε ότι τα πραγματικά σήματα $x(t)$ που αναπτύσσονται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (4.134)$$

μπορούν να γραφούν ως

$$x(t) = X_0 + 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \right\} \quad (4.135)$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα μπορεί να ιδωθεί ως το πραγματικό μέρος ενός αθροίσματος περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, οι οποίες έχουν συχνότητες $k f_0$ και αρχικές φάσεις ϕ_k . Είναι ενδιαφέρον να παρουσιαστεί αυτή η οπτική στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν.

- (ζ') Παρ' όλο που ξεκινήσαμε από περιοδικά σήματα στην αρχή του Κεφαλαίου, οι έννοιες των προσεγγίσεων, των προβολών σημάτων σε σήματα, και τέλος των Σειρών Fourier ορίστηκαν σε ένα πεπερασμένο διάστημα $[t_1, t_2]$ ή στο διάστημα $[0, T_0]$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (4.136)$$

είναι περιοδική με περίοδο T_0 . Οπότε καταλαβαίνουμε ότι όταν αναπαριστούμε ένα σήμα με μια Σειρά Fourier σε ένα διάστημα διάρκειας T_0 , το σήμα και η αναπαράστασή του κατά Fourier αφορά το διάστημα αυτό - έξω από αυτό, η Σειρά Fourier επαναλαμβάνεται με περίοδο T_0 . Σύντομα θα δούμε τι συμβαίνει όταν η περιοδική επανάληψη του τμήματος διάρκειας T_0 περιέχει ασυνέχειες.

- (ζ') Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι σύμφωνα με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε οι συντελεστές Fourier είναι μοναδικοί. Η Άσκηση XXXX σας παρουσιάζει μια εναλλακτική απόδειξη.

4.5.1 Ύπαρξη Σειράς Fourier

Είπαμε πιο πριν ότι μπορούμε να γράψουμε σχεδόν οποιοδήποτε περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier. Ποιές είναι αυτές οι συνθήκες που καθορίζουν πότε μπορούμε να γράψουμε ένα περιοδικό σήμα ως σειρά Fourier και πότε όχι; Προφανώς τα σήματα που δεν μπορούν να αναπτυχθούν κατά Fourier πρέπει να είναι κάπως ασυνήθιστα. Αν και από τη σκοπιά του μηχανικού δε μας ενδιαφέρουν τέτοια σήματα, μια και υπάρχουν μόνο στη θεωρία, ενδιαφέρον είναι να δούμε ποιές είναι οι συνθήκες που καθορίζουν την ύπαρξη ή όχι του αναπτύγματος Fourier.

Υπάρχουν δύο βασικές συνθήκες για την ύπαρξη της σειράς Fourier.

- (α') Οι συντελεστές X_k πρέπει να έχουν πεπερασμένο μέτρο, δηλ. $|X_k| < \infty$. Αυτό αποδεικνύεται ότι συμβαίνει μόνον όταν

$$|X_k| = \frac{1}{T_0} \left| \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right| \leq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad (4.137)$$

Η Σχέση 4.137 ονομάζεται *ασθενής συνθήκη του Dirichlet*. Αν μια συνάρτηση $x(t)$ ικανοποιεί την ασθενή συνθήκη του Dirichlet, η ύπαρξη της σειράς Fourier είναι εγγυημένη, αλλά μπορεί η σειρά να μη συγκλίνει σε κάθε σημείο. Για παράδειγμα, αν ένα σήμα $x(t)$ απειρίζεται σε κάποιο σημείο, τότε προφανώς κανένα άθροισμα ημιτόνων δεν μπορεί να αναπαραστήσει αυτήν την περιοχή, οπότε η σειρά που θα αναπαριστά το σήμα θα είναι “προβληματική” σε αυτήν την περιοχή, με άλλα λόγια, δε θα συγκλίνει. Παρόμοια, αν ένα σήμα έχει άπειρα σημεία μεγιστου-ελαχίστου σε μια περίοδό του. Έτσι, απαιτούμε μια ακόμα συνθήκη.

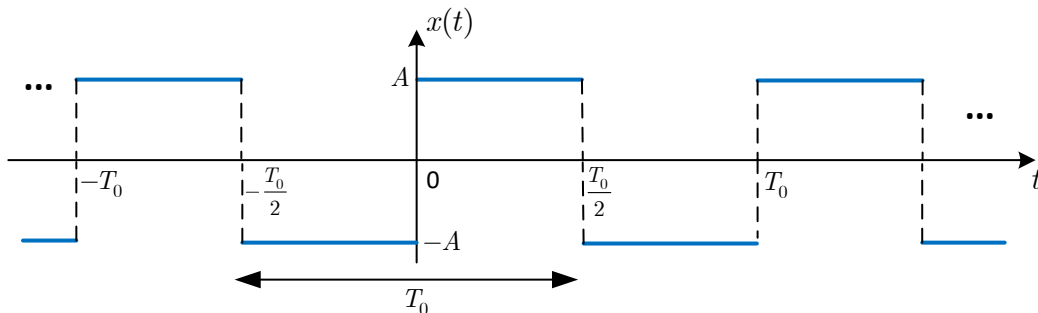
- (β') Το σήμα $x(t)$ πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων σε μια περίοδό του, και πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένων ασυνεχειών σε μια περίοδό του. Αυτές οι δυο συνθήκες λέγονται *ισχυρές συνθήκες του Dirichlet*. Αξίζει να σημειωθεί ότι οποιοδήποτε σήμα μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση (υπό την προσέγγιση της περιοδικότητας φυσικά) ικανοποιεί τις ισχυρές συνθήκες του Dirichlet, και άρα έχει σειρά Fourier που συγκλίνει. Έτσι, στην πράξη, η φυσική ύπαρξη του σήματος είναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της σειράς Fourier του.

4.5.2 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Έχοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις υπόψη μας, ας δούμε τέσσερα χαρακτηριστικά παραδείγματα, πλήρως αναλυτικά.

Παράδειγμα 4.6:

Βρείτε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 4.12.



Σχήμα 4.12: Παράδειγμα 4.6 Ανάλυσης σε Σειρά Fourier.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η περίοδός του είναι ίση με T_0 (περιλαμβάνονται σε αυτή δυο παλμοί, ένας πάνω κι ένας κάτω). Αυτό το σήμα λοιπόν γράφεται σε μια περίοδο ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < T_0/2 \\ -A, & 0 \leq T_0/2 < t \leq T_0 \end{cases} \quad (4.138)$$

Θα έχουμε λοιπόν:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} (-A) dt \quad (4.139)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} dt - \frac{A}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} dt = \frac{A}{T_0} \left[t \right]_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0} \left[t \right]_{T_0/2}^{T_0} \quad (4.140)$$

$$= \frac{A}{T_0} \left(\frac{T_0}{2} - 0 \right) - \frac{A}{T_0} \left(T_0 - \frac{T_0}{2} \right) = \frac{A}{2} \frac{T_0}{2} - \frac{A}{T_0} T_0 + \frac{A}{T_0} \frac{T_0}{2} \quad (4.141)$$

$$= \frac{A}{2} - A + \frac{A}{2} = 0 \quad (4.142)$$

που ήταν αναμενόμενο, καθώς έχουμε σε μια περίοδο δύο παλμούς ίσου εμβαδού ($AT_0/2$) που βρίσκονται εκατέρωθεν του οριζόντιου άξονα. Οπότε το συνολικό αλγεβρικό εμβαδό είναι μηδέν σε μια περίοδο.

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.143)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{A}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.144)$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{T_0/2}^{T_0} \quad (4.145)$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0) - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}}) \quad (4.146)$$

Ξέρουμε ότι $f_0 T_0 = 1$, και με αντικατάσταση έχουμε

$$X_k = \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0) - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}}) \quad (4.147)$$

$$= -\frac{A}{j2k\pi} (e^{-jk\pi} - 1) + \frac{A}{j2k\pi} (e^{-j2k\pi} - e^{-jk\pi}) = -\frac{A}{j2k\pi} (e^{-jk\pi} - 1) + \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) \quad (4.148)$$

$$= \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) + \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) = \frac{A}{jk\pi} (1 - e^{-jk\pi}) \quad (4.149)$$

και επειδή $e^{-jk\pi} = (-1)^k$, έχουμε

$$X_k = \frac{A}{jk\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{2A}{jk\pi}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (4.150)$$

γιατί προφανώς το $1 - (-1)^k$ είναι μηδέν για k άρτια, και 2 για k περιττά. Οπότε σε πρώτη φάση, η Σειρά Fourier μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2} e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.151)$$

ή αλλιώς, περιλαμβάνοντας μόνο τα περιττά k ,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2A}{(2k-1)\pi} e^{-j\pi/2} \right) e^{j2\pi(2k-1)f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2A}{(2k-1)\pi} e^{j(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2)} \quad (4.152)$$

Αυτή λοιπόν είναι η εκθετική σειρά Fourier που αντιστοιχεί στο δεδομένο περιοδικό σήμα $x(t)$. Ας βρούμε και τη μονόπλευρη σειρά Fourier.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \frac{4A}{k\pi} \cos\left(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.153)$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4A}{(2k-1)\pi} \sin(2\pi(2k-1)f_0 t) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4A}{(2k-1)\pi} \Re\{e^{j(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2)}\} \quad (4.154)$$

Το άθροισμα 11 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 4.20.

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε φάσμα πλάτους και φάσης από τους συντελεστές X_k που βρήκαμε; Κάποιος

θα μπορούσε να πει ότι οι συντελεστές X_k είναι ήδη διαθέσιμοι και γραμμένοι σε πολική μορφή. Αυτό όμως είναι λάθος, γιατί ο όρος k στον παρονομαστή του X_k μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Αυτό σημαίνει ότι για $k < 0$, το $\frac{2A}{k\pi}$ θα λάβει αρνητικό πρόσημο, οπότε δεν μπορεί να είναι πλέον μέτρο (δηλ. θετικό). Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να διαχωρίσουμε τις καταστάσεις σε περιττά $k > 0$ και $k < 0$, στη σχέση του X_k που βρήκαμε. Η φιλοσοφία είναι η ίδια με αυτή όταν συζητούσαμε για αθροίσματα ημιτόνων και τους μιγαδικούς συντελεστές τους. Άρα θα έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{(-|k|)\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ -\frac{2A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (4.155)$$

$$= \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{|k|\pi} e^{j\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (4.156)$$

Τώρα έχουμε πλέον την πολική μορφή που θέλουμε. Το μέτρο είναι

$$|X_k| = \frac{2A}{|k|\pi}, \quad k \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\} \quad (4.157)$$

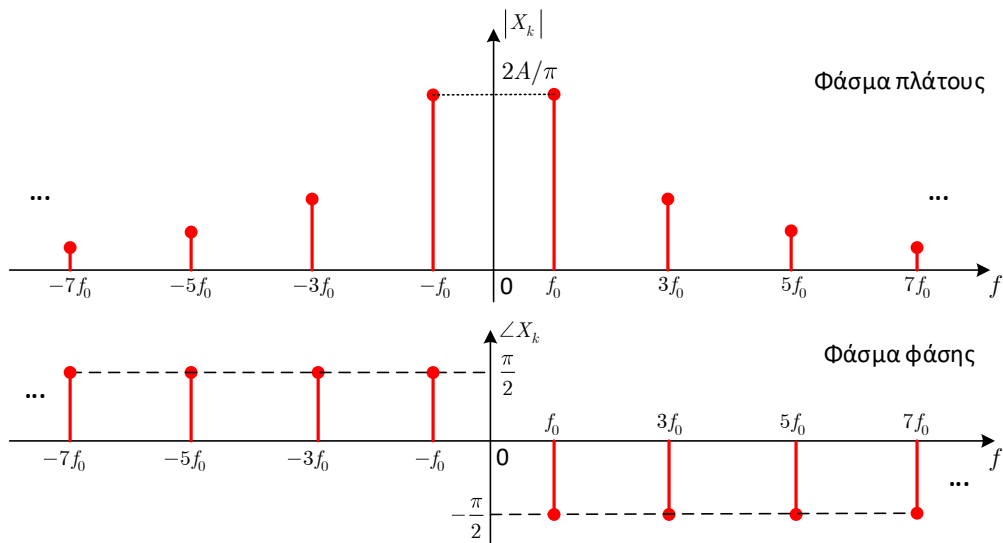
$$X_0 = 0 \quad (4.158)$$

και η φάση είναι

$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} -\pi/2, & k > 0 \text{ και περιττά} \\ \pi/2, & k < 0 \text{ και περιττά} \end{cases} \quad (4.159)$$

$$\angle X_0 = 0 \quad (4.160)$$

Έτσι, ο σχεδιασμός του φάσματος πλάτους και φάσης είναι τετριμμένη υπόθεση, αρκεί να βάλουμε μερικές ενδεικτικές τιμές (λίγες) του k , στις παραπάνω σχέσεις και να λάβουμε τελικά φάσματα όπως αυτό του Σχήματος 4.13.



Σχήμα 4.13: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 4.6.

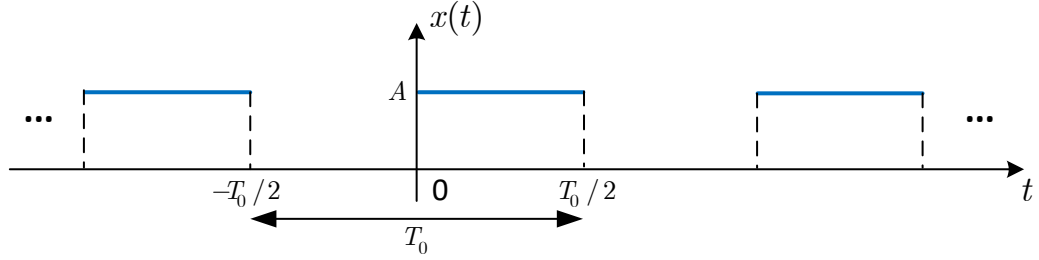
Παράδειγμα 4.7:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδο του T_0 ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t \leq T_0 \end{cases} \quad (4.161)$$

Λύση:

Σχεδιάζοντας το σήμα μας για μερικές περιόδους, παίρνουμε το Σχήμα 4.14. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις μας, θα



Σχήμα 4.14: Περιοδικός Παλμός Παραδείγματος 4.7.

έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A dt = \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} dt = \frac{A}{T_0} t \Big|_0^{T_0/2} = \frac{A}{T_0} \left(\frac{T_0}{2} - 0 \right) = \frac{AT_0}{2T_0} = \frac{A}{2} \quad (4.162)$$

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.163)$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0/2} = -\frac{A}{j2\pi k} \left(e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0 \right) \quad (4.164)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi k} (e^{-j\pi k} - 1) = \frac{A}{j2\pi k} (1 - e^{-j\pi k}) \quad (4.165)$$

Όμως,

$$e^{-j\pi k} = (e^{-j\pi})^k = (-1)^k \quad (4.166)$$

άρα

$$X_k = \frac{A}{j2\pi k} (1 - e^{-j\pi k}) = \frac{A}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) \quad (4.167)$$

Προφανώς το $1 - (-1)^k$ είναι μηδέν για k άρτια, και $1 - (-1) = 2$ για k περιττά. Οπότε

$$X_k = \frac{A}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{A}{j\pi k}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (4.168)$$

Άρα καταλήγουμε ότι

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2} e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \pi/2)} \quad (4.169)$$

Η αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά Fourier θα είναι

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \pi/2)} = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{\pi k} \cos(2\pi k f_0 t - \pi/2) \quad (4.170)$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k-1)} \cos(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k-1)} \Re\{e^{j(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2)}\} \quad (4.171)$$

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης. Υπενθυμίζουμε ότι

$$X_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2} \quad (4.172)$$

και ότι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το k μπορεί να πάρει και αρνητικές περιττές τιμές, οπότε πρέπει να το λάβουμε υπόψη μας στην πολική μορφή. Είναι:

$$X_k = \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{A}{(-|k|)\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (4.173)$$

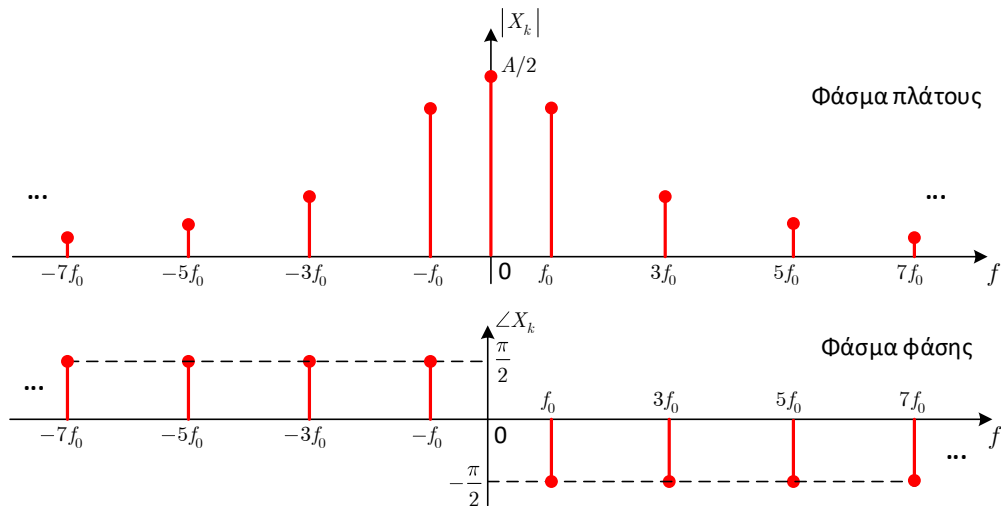
Άρα τελικά το μέτρο είναι

$$|X_k| = \frac{A}{|k|\pi}, \quad k \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\} \quad (4.174)$$

και η φάση είναι

$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} -\pi/2, & k > 0 \text{ και περιττά} \\ \pi/2, & k < 0 \text{ και περιττά} \end{cases} \quad (4.175)$$

Έτσι, ο σχεδιασμός του φάσματος πλάτους και φάσματος φάσης είναι τετριμμένη υπόθεση, αρκεί να βάλουμε μερικές ενδεικτικές τιμές (λίγες) του k , στις παραπάνω σχέσεις και να λάβουμε τελικά φάσματα όπως αυτό του Σχήματος 4.15.

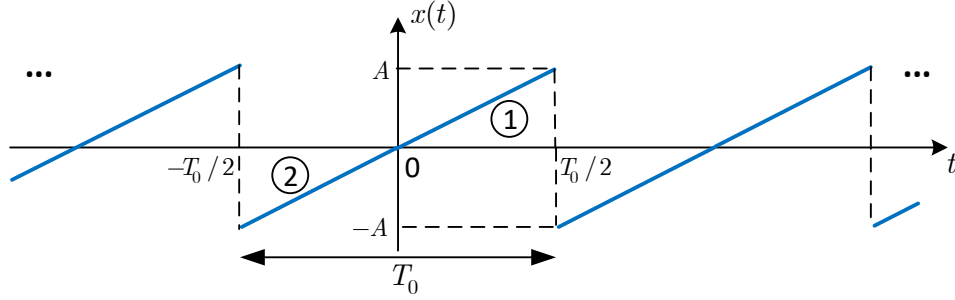


Σχήμα 4.15: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 4.7.

Το άθροισμα 6 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 4.20.

Παράδειγμα 4.8:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.16.



Σχήμα 4.16: Περιοδικό Σήμα Παραδείγματος 4.8.

Λύση:

Επιλέγουμε ως περίοδο το διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$. Η πλάγια ευθεία που ορίζεται εκεί περνάει από τα σημεία $(0, 0)$, $(T_0/2, A)$, άρα θα έχει τη μορφή

$$x(t) - 0 = \frac{A - 0}{T_0/2 - 0}(t - 0) \iff x(t) = \frac{2A}{T_0}t = x(t) \quad (4.176)$$

Έτσι θα έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{2A}{T_0} t dt = 2A \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} = 0 \quad (4.177)$$

Εναλλακτικά, θέλουμε το εμβαδό του σήματος σε μια περίοδο, επί $1/T_0$. Στο διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$, έχουμε δυο ορθογώνια τρίγωνα (σημειωμένα με (1), (2) στο Σχήμα), που έχουν εμβαδό $T_0/2 \times A = \frac{AT_0}{2}$ το καθένα. Όμως το ένα είναι κάτω από τον άξονα ενώ το άλλο επάνω, άρα το αλγεβρικό άθροισμα είναι μηδέν.

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{2A}{T_0} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{2A}{T_0^2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.178)$$

Με χρήση του δοσμένου ολοκληρώματος, θα έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{T_0^2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{2A}{T_0^2} \left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{(-j2\pi k f_0)} \left(t - \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} \right) \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} \quad (4.179)$$

$$= \frac{2A}{T_0^2} \left(-\frac{e^{-j2\pi k f_0 T_0/2}}{j2\pi k f_0} \left(\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) + \frac{e^{j2\pi k f_0 T_0/2}}{j2\pi k f_0} \left(-\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) \right) \quad (4.180)$$

Κάνοντας πράξεις, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις $f_0 T_0 = 1$, $e^{jk\pi} = (-1)^k$ και συμμαζεύοντας την κατάσταση, έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{T_0^2} \frac{e^{-jk\pi}}{(-j2\pi k f_0)} \left(\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) + \frac{2A}{T_0^2} \frac{e^{jk\pi}}{j2\pi k f_0} \left(\frac{1}{j2\pi k f_0} - \frac{T_0}{2} \right) \quad (4.181)$$

$$= \frac{2A}{T_0} \frac{T_0}{2} \frac{(-1)^k}{(-j2\pi k)} + \frac{2A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{(-1)^k}{(-j2\pi k)} + \frac{2A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{(-1)^k}{j2\pi k} - \frac{2A}{T_0} \frac{T_0}{2} \frac{(-1)^k}{j2\pi k} \quad (4.182)$$

$$= -\frac{(-1)^k}{j2\pi k} - 2A \frac{(-1)^k}{(j2\pi k)^2} + 2A \frac{(-1)^k}{(j2\pi k)^2} \quad (4.183)$$

$$= -A \frac{(-1)^k}{jk\pi} = \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j\pi/2} \quad (4.184)$$

Ουφ! Τελικά η πλήρης μορφή της δίπλευρης Σειράς Fourier ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j(2\pi k f_0 t + \pi/2)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \Re \left\{ \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j(2\pi k f_0 t + \pi/2)} \right\} \quad (4.185)$$

Το άθροισμα 11 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 4.20.

Για να σχεδιάσουμε, τέλος, φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης πρέπει να γράψουμε τους συντελεστές X_k σε πολική μορφή. Εδώ θέλει προσοχή, γιατί όχι μόνο ο όρος k στον παρονομαστή, αλλά και ο όρος $(-1)^k$ του αριθμητή πρέπει να ληφθεί υπόψη. Άρα

$$X_k = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ -\frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} \quad (4.186)$$

$$= \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, θετικά} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, θετικά} \\ -\frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, αρνητικά} \\ -\frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, αρνητικά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, θετικά} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, θετικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ άρτια, αρνητικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά, αρνητικά} \end{cases} \quad (4.187)$$

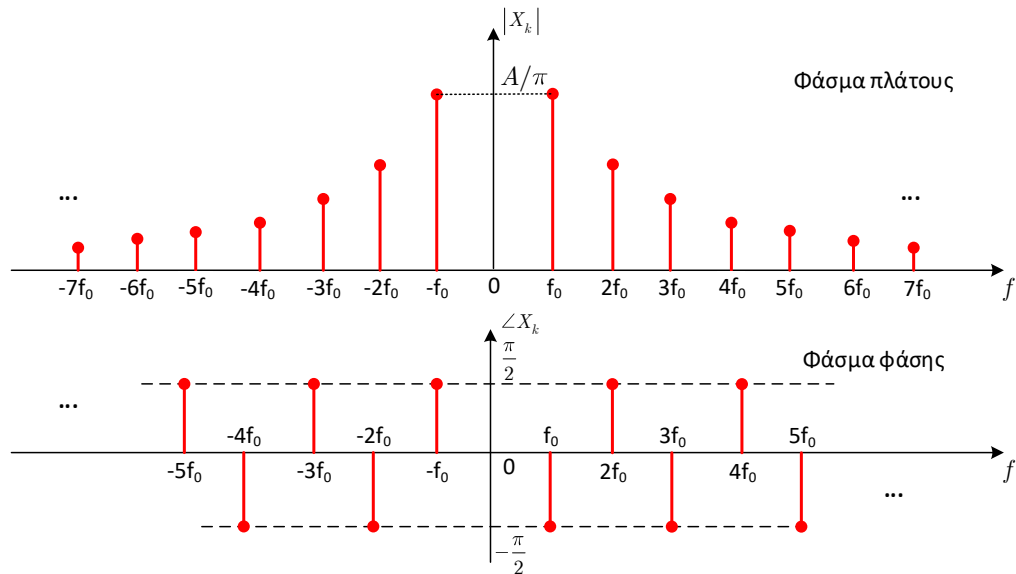
Τώρα πλέον είναι εμφανές ότι

$$|X_k| = \frac{A}{|k|\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad (4.188)$$

και

$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} \pi/2, & k > 0 \text{ και άρτια, } k < 0 \text{ και περιττά} \\ -\pi/2, & k > 0 \text{ και περιττά, } k < 0 \text{ και άρτια} \end{cases} \quad (4.189)$$

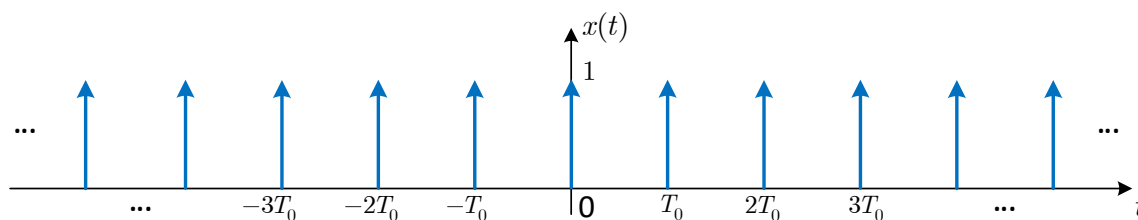
Οπότε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα 4.17.



Σχήμα 4.17: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 4.8.

Παράδειγμα 4.9:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.18.



Σχήμα 4.18: Περιοδικό Σήμα Παραδείγματος 4.9.

Λύση:

Επιλέγουμε ως περίοδο το διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$. Ας βρούμε το X_0 πρώτα.

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T_0} \quad (4.190)$$

αφού το εμβαδό της συνάρτησης Δέλτα είναι συγκεντρωμένο τη χρονική στιγμή $t = 0$. Όμοια για το X_k , έχουμε

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.191)$$

$$= \frac{1}{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0} \quad (4.192)$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές Fourier είναι πραγματικοί, σταθεροί και ίσοι με

$$X_k = \frac{1}{T_0} \quad (4.193)$$

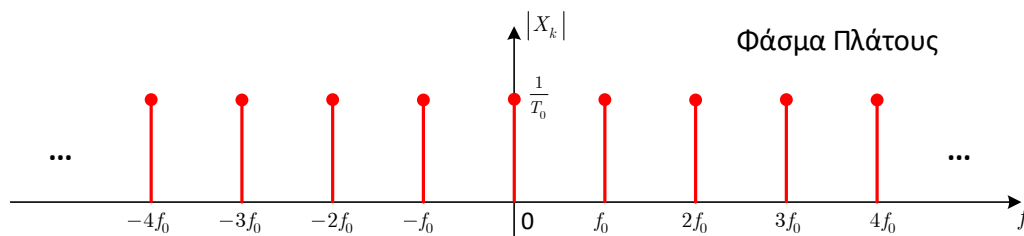
Οπότε η εκθετική Σειρά Fourier του σήματος του Σχήματος 4.18 γράφεται ως

$$x(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.194)$$

και η αντίστοιχη τριγωνομετρική ως

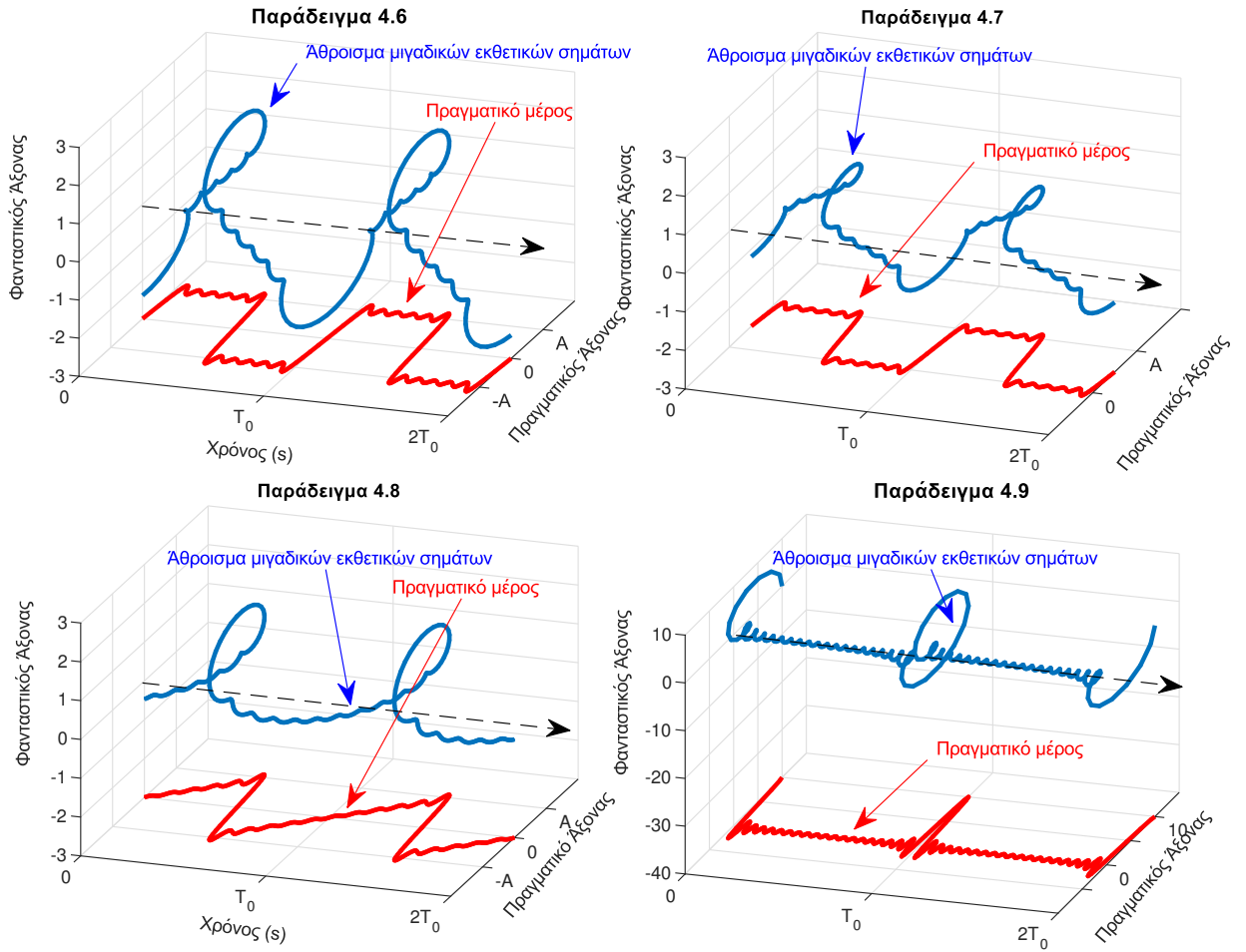
$$x(t) = \frac{2}{T_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \cos(2\pi k f_0 t) = \frac{2}{T_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \Re\{e^{j2\pi k f_0 t}\} \quad (4.195)$$

Το φάσμα πλάτους φαίνεται στο Σχήμα 4.19, ενώ το φάσμα φάσης είναι μηδενικό (και δεν παρουσιάζεται στο σχήμα). Το άθροισμα 20 μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται



Σχήμα 4.19: Φάσμα Πλάτους Παραδείγματος 4.9.

στο Σχήμα 4.20.



Σχήμα 4.20: Άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων και το πραγματικό τους μέρος για τα Παραδείγματα 4.6-9.

Παράδειγμα 4.10:

Δίδονται τρία πραγματικά, περιοδικά σήματα με μη μηδενικούς συντελεστές για $k > 0$ ως ακολούθως:

(α') $x_1(t) : T_0 = 1, X_1 = 5, X_3 = 2$

(β') $x_2(t) : T_0 = 2, X_1 = j, X_2 = -j\frac{1}{2}, X_3 = j\frac{1}{4}, X_4 = -j\frac{1}{8}$

Βρείτε τα περιοδικά σήματα $x_i(t)$.

Λύση:

Αφού τα σήματα είναι πραγματικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συντελεστές X_k και για $k < 0$, και για αυτούς θα ισχύει ότι $X_{-k} = X_k^*$.

(α') Είναι

$$x_1(t) = X_{-3}e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + X_{-1}e^{j2\pi(-1)\frac{1}{T_0}t} + X_1e^{j2\pi(+1)\frac{1}{T_0}t} + X_3e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t} \quad (4.196)$$

$$= X_3^*e^{-j2\pi3\frac{1}{T_0}t} + X_1^*e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_1e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_3e^{j2\pi3\frac{1}{T_0}t} \quad (4.197)$$

$$= 2e^{-j2\pi3\frac{1}{T_0}t} + 5e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 5e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 2e^{j2\pi3\frac{1}{T_0}t} \quad (4.198)$$

$$= 2e^{-j6\pi t} + 5e^{-j2\pi t} + 5e^{j2\pi t} + 2e^{j6\pi t} \quad (4.199)$$

$$= 2(e^{-j6\pi t} + e^{j6\pi t}) + 5(e^{-j2\pi t} + e^{j2\pi t}) \quad (4.200)$$

$$= 4\cos(6\pi t) + 10\cos(2\pi t). \quad (4.201)$$

(β') Είναι

$$x_2(t) = X_{-4}e^{j2\pi(-4)\frac{1}{T_0}t} + X_{-3}e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + \dots + X_3e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t} + X_4e^{j2\pi(+4)\frac{1}{T_0}t} \quad (4.202)$$

$$= X_4^*e^{-j2\pi4\frac{1}{T_0}t} + X_3^*e^{-j2\pi3\frac{1}{T_0}t} + \dots + X_3e^{j2\pi3\frac{1}{T_0}t} + X_4e^{j2\pi4\frac{1}{T_0}t} \quad (4.203)$$

$$= j\frac{1}{8}e^{-j2\pi4\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{4}e^{-j2\pi3\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi2\frac{1}{2}t} + \dots - j\frac{1}{2}e^{j2\pi2\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{4}e^{j2\pi3\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{8}e^{j2\pi4\frac{1}{2}t} \quad (4.204)$$

$$= j\frac{1}{8}e^{-j4\pi t} - j\frac{1}{4}e^{-j3\pi t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi t} - je^{-j\pi t} + je^{j\pi t} - j\frac{1}{2}e^{j2\pi t} + j\frac{1}{4}e^{j3\pi t} - j\frac{1}{8}e^{j4\pi t} \quad (4.205)$$

$$= j\frac{1}{8}(e^{-j4\pi t} - e^{j4\pi t}) - j\frac{1}{4}(e^{-j3\pi t} - e^{j3\pi t}) + j\frac{1}{2}(e^{-j2\pi t} - e^{j2\pi t}) - j(e^{-j\pi t} - e^{j\pi t}) \quad (4.206)$$

$$= -j\frac{1}{8}2j\sin(4\pi t) + j\frac{1}{4}2j\sin(3\pi t) - j\frac{1}{2}2j\sin(2\pi t) + j2j\sin(\pi t) \quad (4.207)$$

$$= \frac{1}{4}\sin(4\pi t) - \frac{1}{2}\sin(3\pi t) + \sin(2\pi t) - 2\sin(\pi t) \quad (4.208)$$

Παράδειγμα 4.11:

Επιστρέφοντας στα ημιτονοειδή σήματα, βρείτε τους συντελεστές Fourier του σήματος

$$x(t) = \sin\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (4.209)$$

Λύση:
Έχουμε

$$x(t) = \sin\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (4.210)$$

$$= \frac{1}{2j}e^{j\pi/6}e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\pi/6}e^{-j2\pi f_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/3}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/3}e^{-j2\pi f_0 t}\right)^2 \quad (4.211)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{j\pi/6}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{-j\pi/6}e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi/3}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi/3}e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} \quad (4.212)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/3}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/3}e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi/3}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi/3}e^{-j2\pi f_0 t} \quad (4.213)$$

Παρατηρούμε ότι

$$X_0 = \frac{1}{2} \quad (4.214)$$

$$X_1 = \frac{1}{2}e^{-j\pi/3} \quad (4.215)$$

$$X_{-1} = X_1^* = \frac{1}{2}e^{j\pi/3} \quad (4.216)$$

$$X_2 = \frac{1}{4}e^{-j2\pi/3} \quad (4.217)$$

$$X_{-2} = X_2^* = \frac{1}{4}e^{j2\pi/3} \quad (4.218)$$

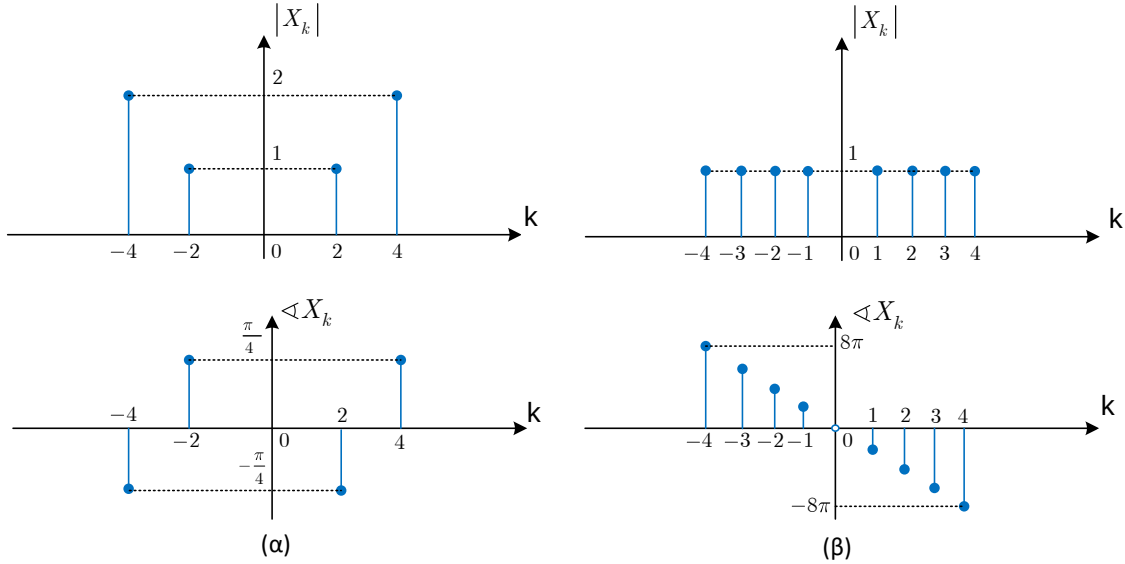
Παρατηρήστε τη συζυγία των συντελεστών, την οποία περιμέναμε αφού αναλύουμε πραγματικά σήματα. Με τους παραπάνω συντελεστές μπορείτε να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης στην Άσκηση XXXX.

Παρατηρήστε ότι μπορείτε να γράψετε την παραπάνω σχέση ως τριγωνομετρική Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \frac{1}{2} + \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4.219)$$

Παράδειγμα 4.12:

Θεωρήστε τα ζεύγη φάσματος πλάτους και φάσης του Σχήματος 4.21, με $|X_k|$ το φάσμα πλάτους και $\angle\{X_k\}$ το φάσμα φάσης.



Σχήμα 4.21: Φάσματα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 4.12.

Έστω ότι οι περίοδοι για τα δυο σήματα είναι $T_0^{(a)} = 2$ και $T_0^{(b)} = 1$. Βρείτε τις Σειρές Fourier στο πεδίο του χρόνου στις οποίες αντιστοιχούν^α.

^αΜη σας απασχολεί ότι η φάση του (b) δε βρίσκεται στο $(-\pi, \pi]$ όπως γνωρίζουμε.

Λύση:

(α') Για τα φάσματα (α) έχουμε

$$x(t) = 2e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi 4\frac{1}{2}t} + 1e^{j\pi/4}e^{-j2\pi 2\frac{1}{2}t} + 1e^{-j\pi/4}e^{j2\pi 2\frac{1}{2}t} + 2e^{j\pi/4}e^{j2\pi 4\frac{1}{2}t} \quad (4.220)$$

$$= 4 \cos\left(2\pi 2t + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(2\pi 1t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.221)$$

(β') Για τα φάσματα (β) έχουμε ότι $|X_k| = 1$ και $\phi_k = -2\pi k$, για $-4 \leq k \leq 4$. Οπότε, γνωρίζοντας ότι

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1 - a} \quad (4.222)$$

θα έχουμε

$$x(t) = \sum_{k=-4}^4 X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-4}^4 e^{-j2\pi k} e^{j2\pi k t} = \sum_{k=-4}^4 e^{j(2\pi k(t-1))} \quad (4.223)$$

$$= \frac{e^{-j8\pi(t-1)} - e^{j10\pi(t-1)}}{1 - e^{j2\pi(t-1)}} = \frac{e^{-j8\pi t} - e^{j10\pi t}}{1 - e^{j2\pi t}} \quad (4.224)$$

$$= \frac{e^{j\pi t} e^{-j9\pi t} - e^{j9\pi t}}{e^{j\pi t} e^{-j\pi t} - e^{j\pi t}} = \frac{-2j \sin(9\pi t)}{-2j \sin(\pi t)} \quad (4.225)$$

$$= \frac{\sin(9\pi t)}{\sin(\pi t)} \quad (4.226)$$

Παρατηρήσεις

- (α') Τα μαθηματικά που περιγράφουν την ανάλυση Fourier πρέπει να σας είναι ξεκάθαρα. Δεν πρέπει όμως να αρκείστε σε αυτό. Πρέπει να καταλάβετε πώς αυτά ερμηνεύονται απ'τη σκοπιά του μηχανικού. Δείξαμε ότι κάθε *πραγματικό, περιοδικό σήμα* μπορεί να γραφεί στη μορφή μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier ως

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (4.227)$$

όπου $A_0 = X_0$, $A_k = 2|X_k|$, και $\phi_k = \angle X_k$. Είναι προφανές ότι η Σχέση (4.227) προκύπτει εύκολα αν έχουμε βρει όλους τους αγνώστους της Σχέσης (4.117). Αυτή η σχέση είναι πλήρως ισοδύναμη με την αντίστοιχη σχέση των εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων. Μάλιστα υπάρχουν κλειστοί τύποι για τον υπολογισμό των A_k χωρίς τη χρήση του X_k .

- (β') Επιπλέον, τα προηγούμενα παραδείγματα πρέπει να σας έκαναν εμφανές ότι το μέτρο των συντελεστών Fourier αφορά το “πόσο” από κάθε ημίτονο περιέχεται μέσα στο περιοδικό σήμα, ενώ η φάση αφορά το “πού” πρέπει να τοποθετηθεί κάθε ημίτονο ώστε να συντεθεί το αρχικό περιοδικό σήμα.
- (γ') Αν θέλαμε να περιγράψουμε διαισθητικά την ανάλυση Fourier (όχι μόνο τη Σειρά, αλλά και κάθε άλλη συχνοτική ανάλυση που θα δούμε), τότε μια ταιριαστή αναλογία είναι αυτή της συνταγής ενός ανάμεικτου χυμού φρούτων! ☺ Το ολοκλήρωμα των συντελεστών X_k παίρνει το χυμό $x(t)$ και μας βρίσκει τη “συνταγή”. Πώς; Πέραν το χυμό ($x(t)$) μέσα από ένα σύνολο από k φίλτρα ($e^{-j2\pi k f_0 t}$), όπου το κάθε φίλτρο κρατά μόνο ένα συστατικό του χυμού και μας λέει μάλιστα και την ποσότητα (X_k) που υπάρχει! Η διαδικασία όμως πρέπει να είναι αναστρέψιμη, δηλ. πρέπει να μπορούμε αναμειγνύοντας ξανά τα συστατικά ($e^{j2\pi k f_0 t}$) στις σωστές ποσότητες (X_k) να πάρουμε πίσω το χυμό ($x(t)$): αυτό το αναλαμβάνει το άθροισμα της σειράς Fourier!

Για να μπορεί όμως να ισχύσει μια τέτοια διαδικασία πρέπει:

- **Τα φίλτρα να είναι ανεξάρτητα:** το φίλτρο που “πιάνει” το χυμό μπανάνα πρέπει να πιάνει μόνο χυμό μπανάνας, και τίποτε άλλο. Αν περάσουμε από το φίλτρο αυτό μερικά πορτοκάλια, η ένδειξη θα πρέπει να δείχνει μηδέν. Αυτό, στην ορολογία των μαθηματικών εξασφαλίζεται από τη *γραμμική ανεξαρτησία* των συναρτήσεων $e^{-j2\pi k f_0 t}$. Γνωρίζετε από τη Γραμμική Άλγεβρα την έννοια της ανεξαρτησίας: σε ένα σύνολο διανυσμάτων, ένα οποιοδήποτε από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Στα δικά μας ενδιαφέροντα, η έννοια αυτή σημαίνει ότι ένα μιγαδικό εκθετικό $e^{-j2\pi k f_0 t}$ πρέπει να μην περιέχει πληροφορία για το μιγαδικό εκθετικό $e^{-j2\pi(k+1)f_0 t}$, που πράγματι συμβαίνει, γιατί τα μιγαδικά εκθετικά είναι *ορθογώνια* μεταξύ τους.
- **Τα φίλτρα πρέπει να είναι πλήρη:** τα φίλτρα μας πρέπει να “πιάνουν” μέχρι και το τελευταίο συστατικό του χυμού. Δε θα μπορέσουμε ποτέ να φτιάξουμε τον αρχικό χυμό ($x(t)$) αν π.χ. λείπει το φίλτρο για το χυμό ροδάκινο. ☺ Αυτό εξασφαλίζεται από το ότι η προβολή του σήματος $x(t)$ γίνεται επάνω σε κάθε συχνότητα πολλαπλάσια της θεμελιώδους.
- **Τα συστατικά πρέπει να είναι “συνδυάσιμα”:** Τα συστατικά πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα ανεξαρτήτως της σειράς με την οποία συνδυάζονται.

- (δ') Μετά από το παραπάνω πολύ διαισθητικό παράδειγμα, ας πάμε λίγο στην πραγματικότητα. Έστω ότι αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, και ένας συντελεστής Fourier είναι ο $X_3 = 2e^{j\pi/4}$. Αυτό τι μας λέει; Δεδομένου ότι το περιοδικό σήμα συντίθεται από μιγαδικά εκθετικά σήματα ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.228)$$

ο προαναφερθέντας συντελεστής μας λέει ότι το εκθετικό σήμα $e^{j2\pi 3 f_0 t}$ συνεισφέρει στη σύνθεση του συνολικού περιοδικού σήματος με πλάτος 2 και φάση $\pi/4$. Αν αυτό σας φαντάζει κάπως δυσνόητο (αν και δε θα έπρεπε), τότε αφού το σήμα είναι πραγματικό, θα έχει και ένα συντελεστή $X_{-3} = X_3^* = 2e^{-j\pi/4}$. Αν προσθέσουμε τις εκθετικές συναρτήσεις $X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t}$ θα έχουμε:

$$X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t} = 2e^{j(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)} + 2e^{-j(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)} = 4 \cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4) \quad (4.229)$$

Αυτό ξεκάθαρα δηλώνει ότι το περιοδικό σήμα που αναλύουμε περιέχει τον όρο $4 \cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)$. Με άλλα λόγια, για να κατασκευάσουμε το σήμα που αναλύουμε είναι *αναγκαίο* να χρησιμοποιήσουμε

ένα ημίτονο με συχνότητα $f_3 = 3f_0$, πλάτος $A = 4$, και φάση $\phi = \pi/4$ (μεταξύ άλλων ημιτονων, πιθανότατα). Έτσι λοιπόν, τώρα σας είναι ξεκάθαρο τι ακριβώς σημαίνουν οι συντελεστές Fourier όσον αφορά τη σημασία τους στην ανάλυση και στη σύνθεση.

- (ε') Θυμίζεται ότι στο φάσμα πλάτους αναπαριστούμε τις ποσότητες $|X_k|$, δηλ. το πως αλλάζει το πλάτος των συντελεστών ανά συχνότητα, ενώ στο φάσμα φάσης αναπαριστούμε τις ποσότητες $\angle X_k$, που δηλώνει το πως αλλάζει η φάση των συντελεστών ανά συχνότητα, δηλ. ποιά είναι η σχετική μετατόπιση των ημιτόνων.
- (ς') Σίγουρα ένα στοιχείο που θα σας ξενίζει αρκετά είναι αυτό των αρνητικών συχνοτήτων των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Ξέρουμε ότι συχνότητα ορίζεται ως ο αριθμός επαναλήψεων ενός τμήματος σήματος στη μονάδα του χρόνου, και αναμφίβολα αυτός ο αριθμός είναι μια θετική ποσότητα. Δεν μπορούμε να έχουμε $f_0 = -4$ επαναλήψεις ανά δευτερόλεπτο! Άρα πώς ερμηνεύεται μια αρνητική συχνότητα; Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία, μπορούμε να εκφράσουμε ένα ημίτονο αρνητικής συχνότητας $-f_0$ ως

$$\cos(-2\pi f_0 t + \theta) = \cos(-(2\pi f_0 t - \theta)) = \cos(2\pi f_0 t - \theta) \quad (4.230)$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει καθαρά ότι η συχνότητα του ημιτόνου είναι $|f_0|$, και είναι θετική. Πώς τώρα όμως ερμηνεύουμε τις φασματικές γραμμές στις αρνητικές συχνότητες; Ένας ασφαλής τρόπος είναι να πούμε απλά ότι το φάσμα είναι μια γραφική αναπαράσταση των συντελεστών $|X_k|$ συναρτήσει του f . Η παρουσία αρνητικών συχνοτήτων απλά σημαίνει ότι υπάρχει ένα εκθετικό μιας τέτοιας αρνητικής συχνότητας στη σειρά Fourier που αναλύουμε.

- (ζ') Τα Σχήματα 4.20 δείχνουν το άθροισμα μερικών από τα πρώτα μιγαδικά εκθετικά σήματα, καθώς και το πραγματικό του μέρος, για τα παραδείγματα που είδαμε νωρίτερα. Θα ήταν περισσότερο ενδιαφέρον και διορατικό να δούμε τη συνεισφορά καθενός μιγαδικού εκθετικού στη σύνθεση ενός περιοδικού σήματος. Δείτε το Σχήμα 4.22. Αριστερά, βλέπουμε τα τρία πρώτα μη μηδενικού πλάτους περιστρεφόμενα μιγαδικά εκθετικά, κυκλικής συχνότητας $\omega_0 = 2\pi f_0$, $3\omega_0$, $5\omega_0$, καθώς και το άθροισμά τους. Η σχεδιάσή τους είναι τέτοια ώστε να μπορεί να είναι εμφανές το πως αθροίζονται. Δεξιά, βλέπουμε το πραγματικό μέρος καθενός από τα μιγαδικά εκθετικά σήματα, καθώς και το άθροισμά τους, που συνιστά το περιοδικό σήμα του Παραδείγματος 4.6. Το Σχήμα δείχνει δυο χρονικές στιγμές, μια στο πρώτο και μια στο τρίτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου.

- (η') Υπάρχει μια ακόμα αναπαράσταση περιοδικών σημάτων κατά Fourier, η οποία είναι η ακόλουθη:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2\pi k f_0 t) \quad (4.231)$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (4.232)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (4.233)$$

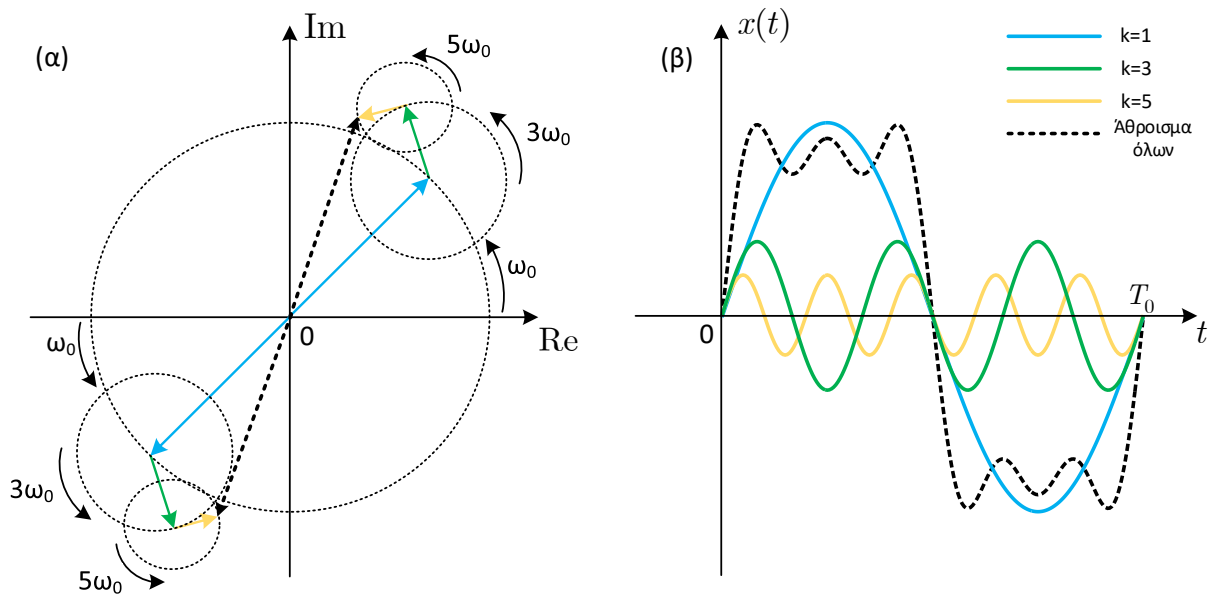
Οι παραπάνω συντελεστές a_k, b_k σχετίζονται με τους γνωστούς συντελεστές X_k ως

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - j b_k), & k > 0 \\ \frac{1}{2}a_0, & k = 0 \\ X_k^*, & k < 0 \end{cases} \quad (4.234)$$

Η αναπαράσταση αυτή είναι εξίσου δημοφιλής με την εκθετική που συζητάμε σε αυτό το κεφάλαιο, αλλά δε θα τη χρησιμοποιήσουμε για τους σκοπούς μας.

4.6 Το φαινόμενο Gibbs

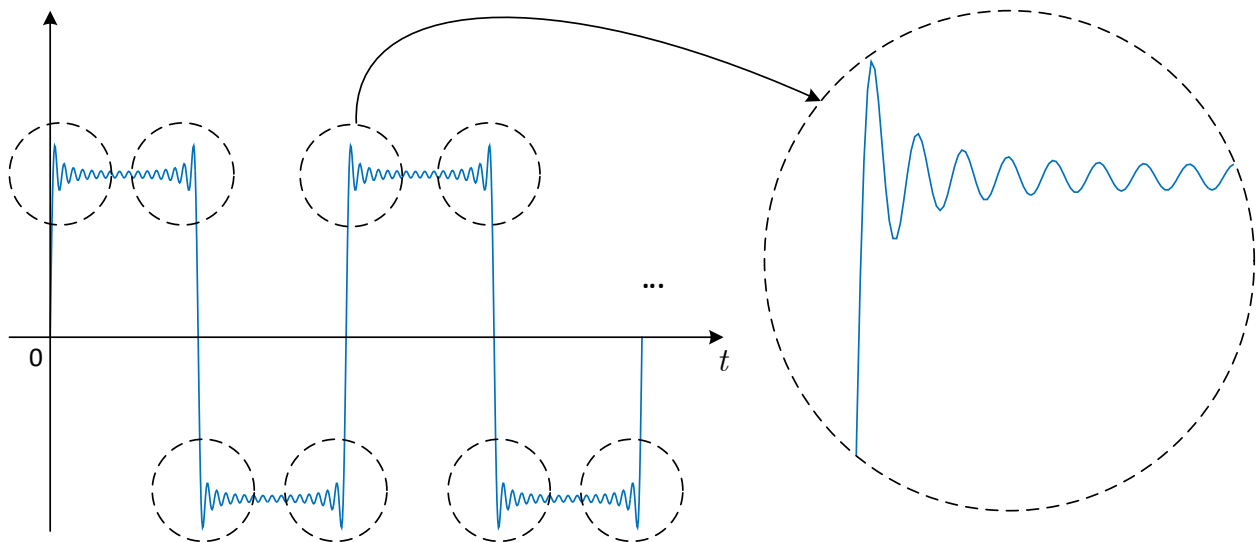
Σε όλα τα παραδείγματα που έχουμε δει ως τώρα, θα παρατηρήσατε ότι το συντινθέν σήμα δεν είναι μια ακριβής “ρέπλικα” του εκάστοτε σήματος που αναλύεται, αλλά παρουσιάζει ταλαντώσεις, τόσο στα διαστήματα που το αρχικό σήμα είναι γραμμικό ή σταθερό, όσο και στα σημεία ασυνέχειας. Μάλιστα στα τελευταία, η τιμή της Σειράς Fourier είναι σημαντικά μεγαλύτερη από οποιοδήποτε άλλο σημείο. Ας πάρουμε για παράδειγμα το σήμα του



Σχήμα 4.22: Σύνθεση πραγματικού σήματος από περιστρεφόμενα διανύσματα της μορφής $X_k e^{j2\pi k f_0 t}$: (α) περιστρεφόμενα διανύσματα, (β) το πραγματικό τους μέρος.

Παραδείγματος 1 που παρουσιάστηκε νωρίτερα, του οποίου η Σειρά Fourier φαίνεται στο Σχήμα 4.23. Επάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί όλα τα σημεία ασυνέχειας και οι ταλαντώσεις τις Σειράς Fourier που συμβαίνουν. Όλες οι Σειρές Fourier που απεικονίζονται στις προηγούμενες σελίδες χρησιμοποιούν πεπερασμένου πλήθους ημίτονα για τη σύνθεση. Θα περίμενε λοιπόν κανείς ότι όσο προσθέτουμε ημίτονα στη Σειρά Fourier, τόσο θα μειώνονται αυτές οι ταλαντώσεις. Ιδανικά, όταν το πλήθος των ημιτόνων N τείνει στο ∞ , τότε γνωρίζουμε ότι η ενέργεια σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν, οπότε θα περίμενε κανείς η Σειρά Fourier να “ταυτίζεται” με το αρχικό περιοδικό σήμα.

Αν δοκιμάσουμε πειραματικά να προσθέσουμε πολλά ημίτονα, θα δούμε ότι όντως η Σειρά Fourier προσεγγίζει



Σχήμα 4.23: Το φαινόμενο Gibbs στα σημεία ασυνέχειας ενός περιοδικού σήματος.

πολύ καλά το περιοδικό σήμα στα διαστήματα όπου το σήμα είναι γραμμικό ή σταθερό, αλλά στα σημεία ασυνέχειας παρατηρείται η ίδια προβληματική κατάσταση, με ισχυρές ταλαντώσεις της Σειράς Fourier γύρω από αυτά τα σημεία. Αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται να αντιτίθεται στο γεγονός ότι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο φθίνει στο μηδέν όσο προσθέτουμε ημίτονα στη Σειρά Fourier. Πράγματι, αυτή η φαινομενική αντίθεση προβληματίσε για πολύ καιρό τους μηχανικούς και τους μαθηματικούς. Την εξήγηση έδωσε τελικά ο J. W. Gibbs, δείχνοντας ότι το φαινόμενο αυτό μπορεί να συμβαίνει ακριβώς λόγω των ασυνεχειών του αρχικού σήματος - και μόνο παρουσία αυτών - ακόμα κι αν πράγματι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν! Συγκεκριμένα, ο Gibbs έδειξε ότι η Σειρά Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή του περιοδικού σήματος σε

κάθε σημείο, εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, όπου η Σειρά Fourier συγκλίνει στη μέση τιμή των τιμών του περιοδικού σήματος εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας. Η Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων που δεν παρουσιάζουν ασυνέχειες λέγεται ότι συγκλίνει *ομοιόμορφα* σε όλα τα σημεία της περιόδου του περιοδικού σήματος, ενώ για ασυνεχή περιοδικά σήματα, η Σειρά Fourier συγκλίνει σε κάθε σημείο της περιόδου πλην των σημείων ασυνέχειας.

Τέλος, θυμηθείτε ότι η εύρεση των συντελεστών Fourier βασίζεται στην έννοια της *ελάχιστης ενέργειας σφάλματος* E_e μεταξύ του περιοδικού σήματος και της προσέγγισής του από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, και όχι στην ελάχιστη διαφορά των δυο σημάτων ή στην ελάχιστη διαφορά σε κάθε σημείο. Αυτός ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών Fourier επιτρέπει στην ενέργεια σφάλματος να τείνει στο μηδέν όσο αυξάνει το πλήθος των ημιτόνων, και ταυτόχρονα να υπάρχουν σημεία όπου η διαφορά της Σειράς Fourier με το περιοδικό σήμα να μην είναι μηδενική (μη ομοιόμορφη σύγκλιση)!

4.7 Ιδιότητες Σειρών Fourier

Υπάρχουν πολλές χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, που βοηθούν σε πολλές εφαρμογές. Ο Πίνακας 4.1 απεικονίζει τις περισσότερες και πιο συχνά χρησιμοποιούμενες.

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 $y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X_{-k}^*
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a > 0$	X_k , με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X_{-k}^*, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ X_k = X_{-k} , \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t), x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \mathbb{R}$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t), x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \mathbb{J}$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k ^2$

Πίνακας 4.1: Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier.

4.7.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Παρακάτω ακολουθούν αποδείξεις των ιδιοτήτων, καθώς και ένα παράδειγμα χρήσης τους σε καθεμιά. Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα έχει συντελεστές Fourier X_k , και - όπου απαιτείται - ένα δεύτερο περιοδικό σήμα $y(t)$ με περίοδο T_0 έχει συντελεστές Fourier Y_k .

4.7.1.1 Γραμμικότητα

Οι συντελεστές Fourier του αθροίσματος $z(t) = Ax(t) + By(t)$ δίνονται ως

$$Z_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} z(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} (Ax(t) + By(t)) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.235)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} Ax(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0} By(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.236)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{B}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.237)$$

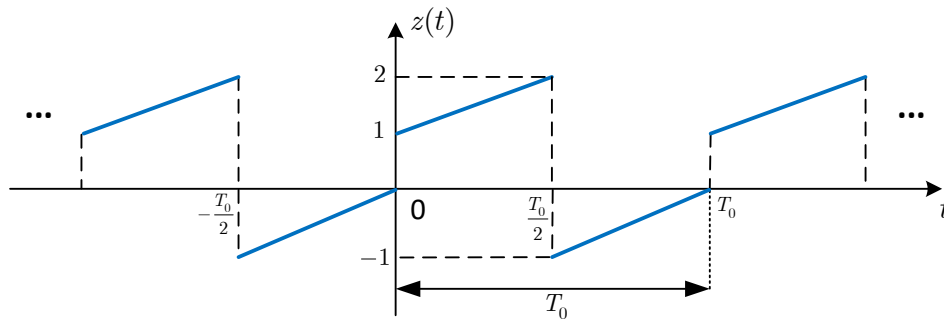
$$= AX_k + BY_k \quad (4.238)$$

Άρα

$$Ax(t) + By(t) \longleftrightarrow AX_k + BY_k \quad (4.239)$$

Παράδειγμα 4.13:

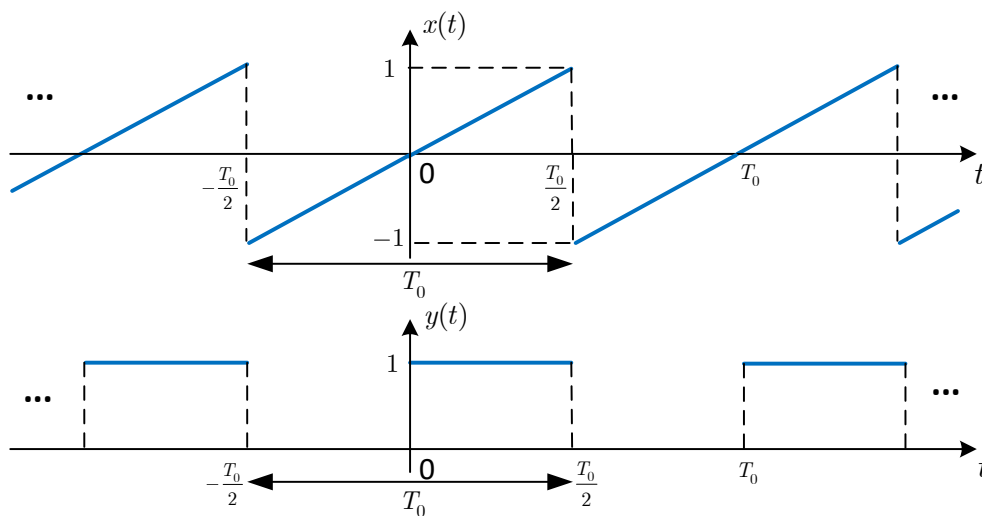
Βρείτε τους συντελεστές Fourier του περιοδικού με περίοδο T_0 σήματος $z(t)$ του Σχήματος 4.24.



Σχήμα 4.24: Εφαρμογή της Γραμμικότητας: περιοδικό σήμα $z(t)$.

Λύση:

Το περιοδικό σήμα του Σχήματος 4.24 μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των περιοδικών σημάτων που φαίνονται στο Σχήμα 4.25. Αυτά τα περιοδικά σήματα όμως είναι γνωστά από τα παραδείγματα. Οι συντελεστές Fourier



Σχήμα 4.25: Εφαρμογή της Γραμμικότητας: περιοδικά σήματα $x(t), y(t)$.

τους είναι οι

$$X_k = \frac{1}{\pi k} (-1)^k e^{j\pi/2} \quad (4.240)$$

$$Y_k = \frac{1}{2\pi k} (1 - (-1)^k) e^{-j\pi/2} \quad (4.241)$$

Άρα οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος του Σχήματος 4.24 είναι

$$Z_k = X_k + Y_k = \frac{1}{\pi k} (-1)^k e^{j\pi/2} + \frac{1}{2\pi k} (1 - (-1)^k) e^{-j\pi/2} \quad (4.242)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ -\frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2} + \frac{1}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ -\frac{2}{\pi k} \sin(\pi/2), & k \text{ περιττό} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ -\frac{2}{\pi k}, & k \text{ περιττό} \end{cases} \quad (4.243)$$

4.7.1.2 Χρονική μετατόπιση

Οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $y(t) = x(t - t_0)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t - t_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 (u - t_0)} du \quad (4.244)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 t_0} e^{-j2\pi k f_0 u} du = \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 u} du \quad (4.245)$$

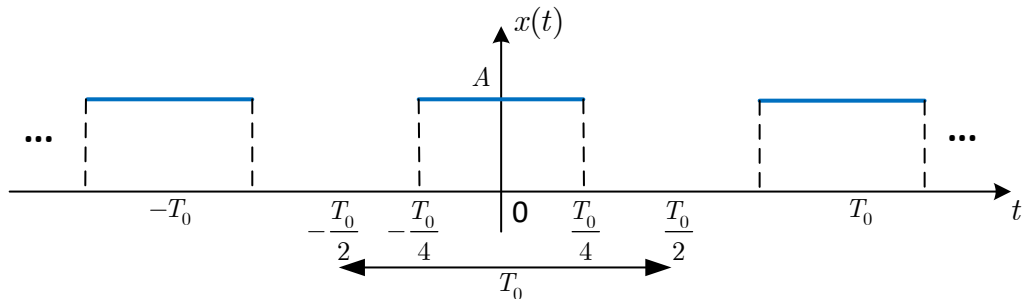
$$= X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0} \quad (4.246)$$

Άρα

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0} \quad (4.247)$$

Παράδειγμα 4.14:

Βρείτε τους συντελεστές Fourier του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 4.26.



Σχήμα 4.26: Εφαρμογή της Χρονικής Μετατόπισης: περιοδικό σήμα $y(t) = x(t - t_0)$.

Λύση:

Το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 4.26 δεν είναι άλλο από το σήμα $x(t)$ του Σχήματος 4.14 μετατοπισμένο κατά $t_0 = -T_0/4$. Οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $y(t)$ θα είναι

$$Y_k = X_k e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{4}} = \frac{A}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) e^{j\pi k/2} = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιο} \\ \frac{A}{\pi k} e^{j\left(\frac{\pi}{2}(k-1)\right)}, & k \text{ περιττό} \end{cases} \quad (4.248)$$

Είναι ενδιαφέρον να επιβεβαιώσουμε διαισθητικά την παραπάνω ιδιότητα: αν ένα περιοδικό και πραγματικό σήμα $x(t)$ έχει συντελεστές Fourier $X_k = |X_k| e^{j\phi_k}$, αυτό σημαίνει ότι μπορεί να συντεθεί από (πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους) ημίτονα με πλάτος $2|X_k|$, συχνότητες $k f_0$, και φάσεις ϕ_k . Μια μετατόπιση στο χρόνο κατά t_0 απλώς μετακινεί το περιοδικό σήμα δεξιά ή αριστερά στον οριζόντιο άξονα, χωρίς να το μεταβάλλει με άλλο τρόπο. Οπότε τα ημίτονα που συνθέτουν το σήμα θα υποστούν μεταβολή μόνο στη φάση, αφού πρέπει κι αυτά να μετακινηθούν για να εξακολουθήσουν να συνθέτουν το ίδιο σήμα. Ως συμπέρασμα, μπορούμε να πούμε ότι η χρονική μετατόπιση εισάγει φάση στη συχνοτική αναπαράστασή μας.

4.7.1.3 Μετατόπιση στη συχνότητα

Αντικαθιστώντας το δείκτη k των συντελεστών Fourier X_k με $k - M$, όπου M ακέραιος αριθμός, τότε οι συντελεστές μπορούν να γραφούν ως

$$X_{k-M} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi(k-M)f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} e^{j2\pi M f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} (x(t) e^{j2\pi M f_0 t}) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.249)$$

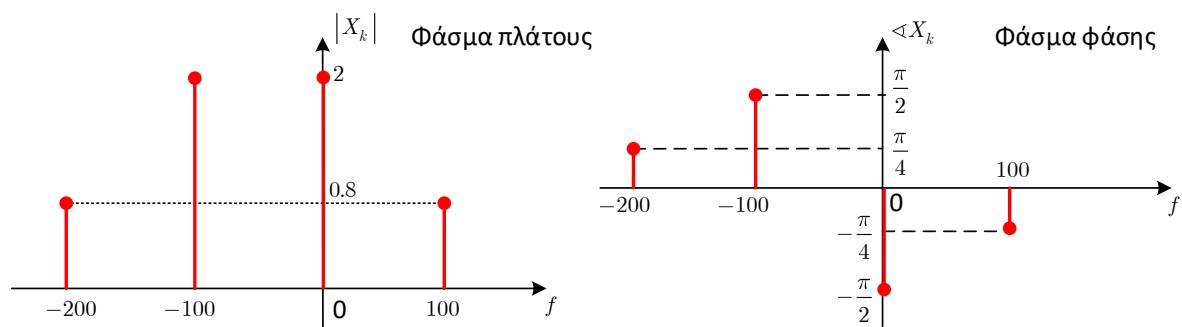
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές X_{k-M} αντιστοιχούν στο περιοδικό σήμα $x(t) e^{j2\pi M f_0 t}$, δηλ. στον πολλαπλασιασμό του αρχικού σήματος $x(t)$ με μια μιγαδική εκθετική συνάρτηση συχνότητας $M f_0$. Σημειώστε ότι η αντικατάσταση $k \leftarrow k - M$ αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση των φασματικών γραμμών κατά M . Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, τότε τα φάσματα πλάτους και φάσης θα έχουν τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία, αντίστοιχα. Μια οποιαδήποτε μετατόπιση των φασμάτων κατά M , οδηγεί σε άρση αυτών των συμμετριών, με αποτέλεσμα το περιοδικό σήμα στο χρόνο να μην είναι πια πραγματικό, όπως φαίνεται και από την παραπάνω ιδιότητα (πολλαπλασιασμός στο χρόνο με ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα).

Άρα

$$x(t) e^{j2\pi M f_0 t} \longleftrightarrow X_{k-M} \quad (4.250)$$

Παράδειγμα 4.15:

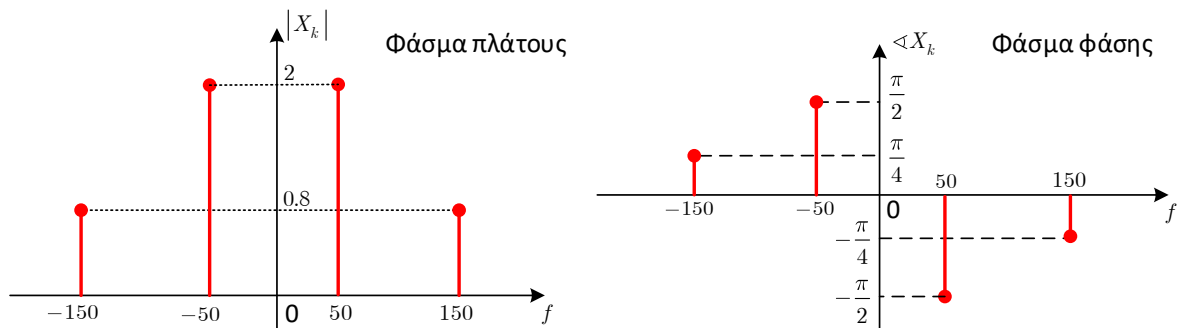
Έστω τα φάσματα του Σχήματος 4.27. Βρείτε το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί σε αυτά.



Σχήμα 4.27: Εφαρμογή της Συχνотικής Μετατόπισης: μετατοπισμένο φάσμα.

Λύση:

Θα μπορούσαμε να βρούμε αναλυτικά το σήμα στο χρόνο από την πληροφορία των φασμάτων, αλλά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα φάσματα του Σχήματος 4.27 δεν είναι άλλα από τα φάσματα του Σχήματος 4.28, τα οποία έχουν θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 50$ Hz, μετατοπισμένα αριστερά κατά $M = 1$, δηλ. μετατοπισμένα κατά $M = -1$. Τα φάσματα του Σχήματος 4.28 πληροφορούν ότι το περιοδικό σήμα στο χρόνο $x(t)$ δίνεται ως



Σχήμα 4.28: Εφαρμογή της Συχνотικής Μετατόπισης: μη μετατοπισμένο φάσμα.

$$x(t) = 4 \cos(2\pi 50t - \pi/2) + \frac{8}{5} \cos(2\pi 150t - \pi/4) \quad (4.251)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα, το σήμα στο χρόνο $y(t)$ που αντιστοιχεί στα φάσματα

του Σχήματος 4.27 είναι το

$$y(t) = e^{-j2\pi 50t} x(t) = 4e^{-j2\pi 50t} \cos(2\pi 50t - \pi/2) + \frac{8}{5} e^{-j2\pi 50t} \cos(2\pi 150t - \pi/4) \quad (4.252)$$

4.7.1.4 Αντιστροφή στο χρόνο

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = x(-t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{j2\pi k f_0 u} du \quad (4.253)$$

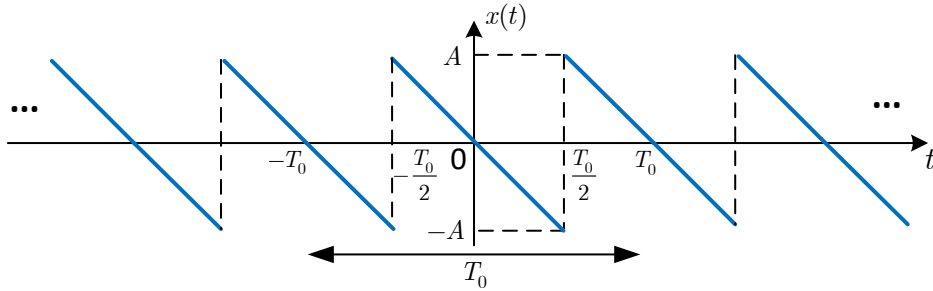
$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi(-k)f_0 u} du = X_{-k} \quad (4.254)$$

Άρα

$$x(-t) \longleftrightarrow X_{-k} \quad (4.255)$$

Παράδειγμα 4.16:

Το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 4.29



Σχήμα 4.29: Εφαρμογή της Αντιστροφής στο Χρόνο: περιοδικό σήμα $y(t) = x(-t)$.

δεν είναι άλλο από το περιοδικό σήμα του Σχήματος 4.16 ανεστραμμένο στο χρόνο. Βρείτε τους συντελεστές Fourier του.

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = X_{-k} = -\frac{A}{\pi k} (-1)^{-k} e^{j\pi/2} = \frac{A}{\pi k} (-1)^k e^{-j\pi/2} \quad (4.256)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να το δείξει αναλυτικά στην Άσκηση XXXX.

4.7.1.5 Συζυγία στο χρόνο

Για ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$, οι συντελεστές Fourier του συζυγούς σήματος $y(t) = x^*(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \right)^* \quad (4.257)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi(-k)f_0 t} dt \right)^* = X_{-k}^* \quad (4.258)$$

Άρα

$$x^*(t) \longleftrightarrow X_{-k}^* \quad (4.259)$$

Παράδειγμα 4.17:

Αν ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = -\frac{2}{\pi k} + \frac{j}{\pi k} \quad (4.260)$$

βρείτε τους συντελεστές του συζυγούς σήματος, $y(t) = x^*(t)$.

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier του συζυγούς του $y(t) = x^*(t)$ είναι

$$Y_k = X_{-k}^* = \frac{2}{\pi k} + \frac{j}{\pi k} \quad (4.261)$$

4.7.1.6 Στάθμιση στο χρόνο

Αν ορίσουμε το περιοδικό σήμα $x(t)$ και το αναπτύξουμε σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.262)$$

τότε το σταθμισμένο στο χρόνο σήμα $y(t) = x(at)$, με $a > 0$, θα είναι

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 (at)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k (af_0) t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k \frac{a}{T_0} t} \quad (4.263)$$

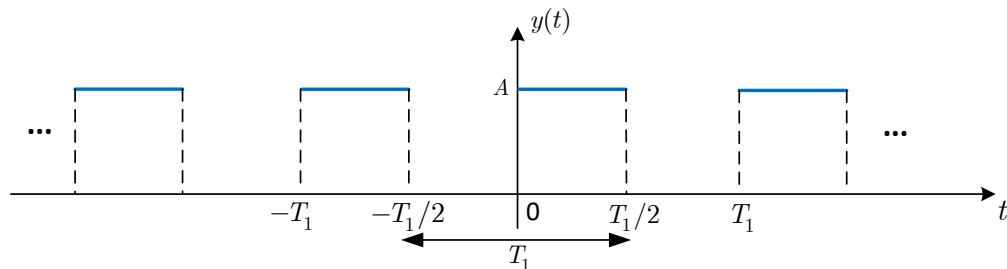
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές X_k δεν μεταβλήθηκαν καθόλου, αλλά άλλαξε η θεμελιώδης συχνότητα από f_0 σε af_0 , και άρα και η περίοδος από T_0 σε $\frac{T_0}{a}$. Αυτό σημαίνει ότι οι αποστάσεις των φασματικών γραμμών στο φάσμα πλάτους και φάσης αλλάζουν!

Άρα

$$x(at) \longleftrightarrow X_k \text{ με } \hat{T}_0 = \frac{T_0}{a} \quad (4.264)$$

Παράδειγμα 4.18:

Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 4.30.



Σχήμα 4.30: Εφαρμογή της Κλιμάκωσης στο Χρόνο: περιοδικό σήμα $y(t) = x(2t)$.

Το περιοδικό αυτό σήμα είναι μια συμπιεσμένη εκδοχή του σήματος του Σχήματος 4.14, κατά παράγοντα $a = 2$. Βρείτε τους συντελεστές Fourier του.

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier Y_k είναι οι ίδιοι με του Παραδείγματος 4.6, δηλ.

$$Y_k = X_k = \begin{cases} \frac{A}{\pi k} e^{-k\pi/2}, & k \text{ περιττό} \\ 0, & k \text{ άρτιο} \end{cases} \quad (4.265)$$

με τη διαφορά ότι η περίοδος είναι ίση με $T_1 = \frac{T_0}{2}$.

■

Η ιδιότητα αυτή συμβαδίζει με τη διαίσθησή μας: μια στάθμιση στο χρόνο “συμπιέζει” ή “εκτείνει” το σήμα στο χρόνο: τα ημίτονα που το αναπαριστούν απλώς θα πρέπει να συμπίπτουν ή να εκταθούν, χωρίς να μεταβληθούν αλλιώς. Μια τέτοια συμπίεση ή έκταση εκφράζεται

μέσω της αλλαγής της συχνότητάς τους, η οποία όμως εξαρτάται αποκλειστικά από τη θεμελιώδη συχνότητα f_0 , και άρα από την περίοδο του σήματος.

4.7.1.7 Περιοδική Συνέλιξη

Έστω το περιοδικό σήμα $z(t)$ που ορίζεται ως

$$z(t) = \int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (4.266)$$

Οι συντελεστές Fourier του δίνονται ως

$$Z_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) \left(\int_{T_0} y(t-\tau)e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) d\tau \quad (4.267)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) T_0 Y_k e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau = T_0 Y_k \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \quad (4.268)$$

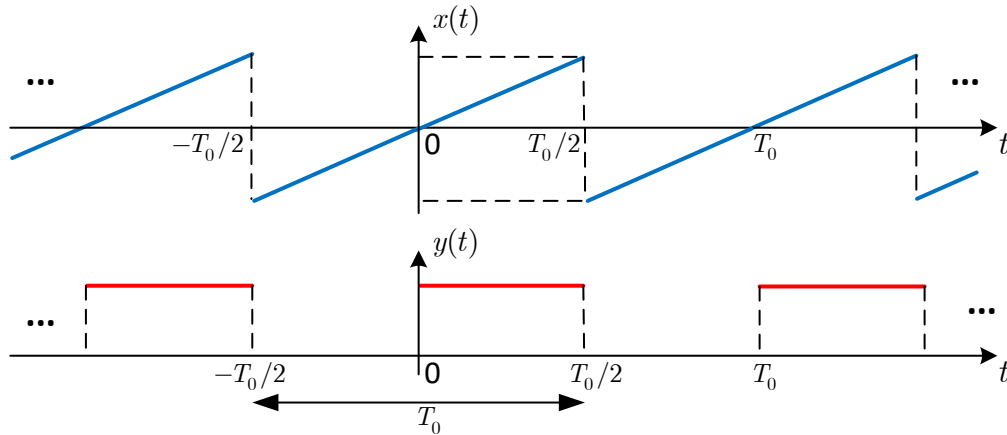
$$= T_0 Y_k X_k \quad (4.269)$$

Άρα

$$\boxed{\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \longleftrightarrow T_0 X_k Y_k} \quad (4.270)$$

Παράδειγμα 4.19:

Υπολογίστε την περιοδική συνέλιξη των σημάτων που φαίνονται στο Σχήμα 4.31.



Σχήμα 4.31: Εφαρμογή της Περιοδικής Συνέλιξης στο Χρόνο: περιοδικά σήματα $x(t), y(t)$.

Λύση:

Κατασκευάζοντας το σήμα $y(t-\tau)$, έχουμε τις περιπτώσεις που απεικονίζονται στο Σχήμα 4.32. Η περιοδική συνέλιξη υπολογίζεται σε μια περίοδο, στο διάστημα $(-T_0/2, T_0/2]$ για παράδειγμα. Η πράξη περιλαμβάνει τα ίδια ακριβώς βήματα που έχουμε ήδη δει: αντιστροφή στο χρόνο και χρονική μετατόπιση. Στην περίπτωση (α) έχουμε

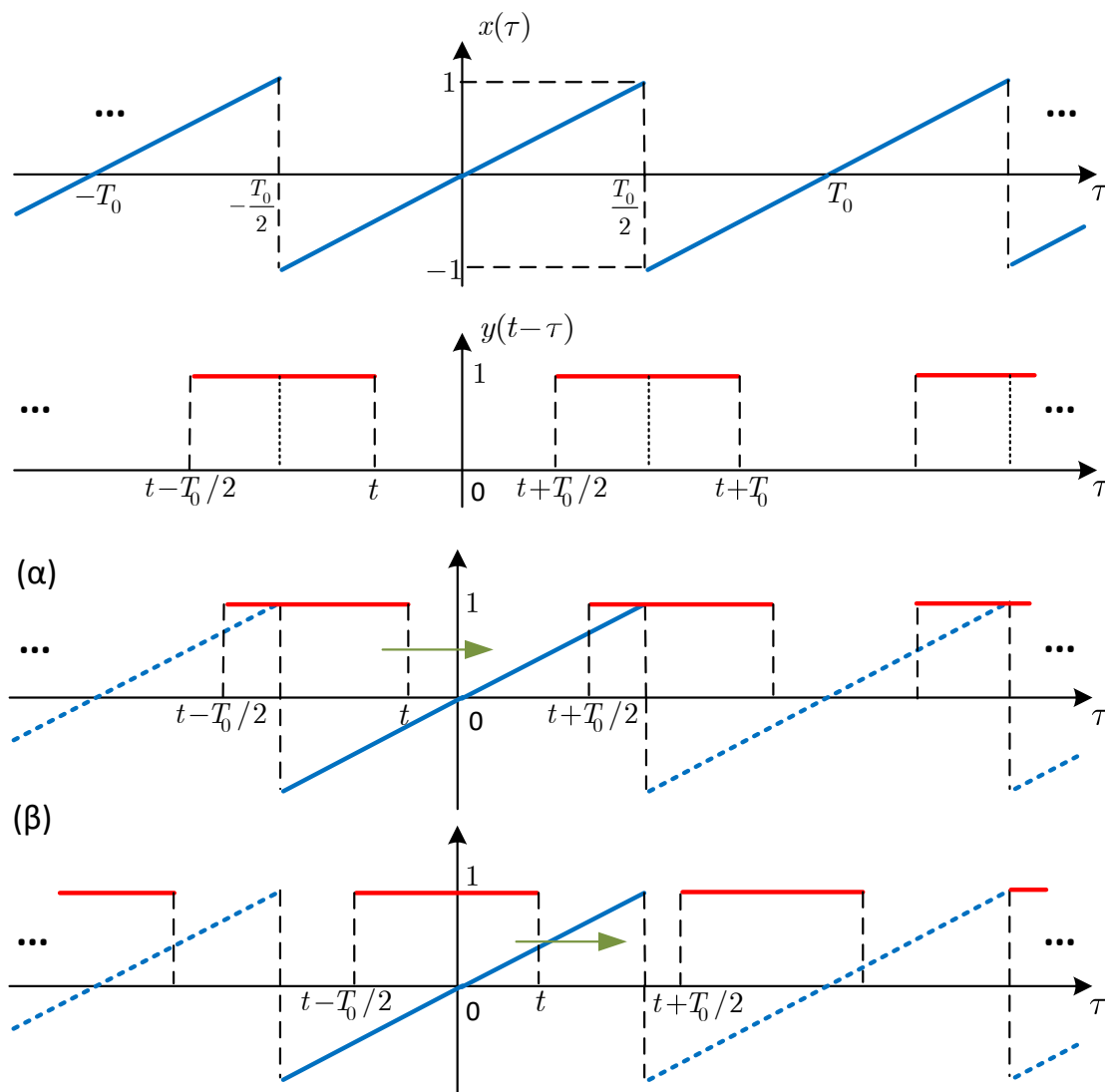
$$z(t) = \int_{-T_0/2}^t \frac{2}{T_0} \tau d\tau + \int_{t+T_0/2}^{T_0/2} \frac{2}{T_0} \tau d\tau = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^t \tau d\tau + \frac{2}{T_0} \int_{t+T_0/2}^{T_0/2} \tau d\tau \quad (4.271)$$

$$= \left. \frac{2}{T_0} \frac{\tau^2}{2} \right]_{-T_0/2}^t + \left. \frac{2}{T_0} \frac{\tau^2}{2} \right]_{t+T_0/2}^{T_0/2} = \frac{t^2}{T_0} - \frac{T_0}{4} - t - \frac{t^2}{T_0} \quad (4.272)$$

$$= -t - \frac{T_0}{4} \quad (4.273)$$

για $-T_0/2 \leq t < 0$. Στην περίπτωση (β), έχουμε

$$z(t) = \int_{t-T_0/2}^t \frac{2}{T_0} \tau d\tau = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0/2}^t \tau d\tau = \left. \frac{2}{T_0} \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-T_0/2}^t = t - \frac{T_0}{4} \quad (4.274)$$



Σχήμα 4.32: Περιπτώσεις Περιοδικής Συνέλιξης στο Χρόνο.

για $0 \leq t < T_0/2$. Άρα το αποτέλεσμα της περιοδικής συνέλιξης γράφεται σε μια περίοδο ως

$$z(t) = \begin{cases} -t - \frac{T_0}{4}, & -T_0/2 \leq t < 0 \\ t - \frac{T_0}{4}, & 0 \leq t < T_0/2 \end{cases} \quad (4.275)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της περιοδικής συνέλιξης, το περιοδικό αυτό σήμα έχει συντελεστές Fourier ως

$$Z_k = T_0 X_k Y_k \quad (4.276)$$

με X_k, Y_k τους γνωστούς από τα Παραδείγματα 4.7 και 4.8 συντελεστές Fourier, τους οποίους επαναλαμβάνουμε εδώ:

$$X_k = \frac{1}{\pi k} (-1)^k e^{j\pi/2} \quad (4.277)$$

$$Y_k = \frac{1}{2\pi k} e^{-j\pi/2} (1 - (-1)^k) \quad (4.278)$$

Οπότε οι συντελεστές Z_k θα είναι

$$Z_k = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{T_0}{\pi^2 k^2} e^{j\pi}, & k \text{ περιττός} \end{cases} \quad (4.279)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει αναλυτικά ότι το περιοδικό σήμα $z(t)$ έχει πράγματι τους παραπάνω συντε-

λεστές (Άσκηση XXXX).

4.7.1.8 Πολλαπλασιασμός στο χρόνο

Για το σήμα $z(t) = x(t)y(t)$, η Σειρά Fourier του δίνεται ως

$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y_l e^{j2\pi(k+l)f_0 t} \quad (4.280)$$

Θέτοντας $m = k + l$, έχουμε

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y_l e^{j2\pi(k+l)f_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{m-l} Y_l e^{j2\pi m f_0 t} \quad (4.281)$$

Από την παραπάνω σχέση είναι εμφανές ότι οι συντελεστές Fourier του σήματος $z(t) = x(t)y(t)$ είναι

$$Z_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l} Y_l \quad (4.282)$$

Άρα

$$x(t)y(t) \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l} Y_l \quad (4.283)$$

Παράδειγμα 4.20:

Έστω το γινόμενο

$$z(t) = x(t)y(t) \quad (4.284)$$

με

$$x(t) = 2 \cos \left(2\pi 100t + \frac{\pi}{3} \right) \longleftrightarrow X_{-1} = e^{-j\pi/3}, \quad X_1 = e^{j\pi/3} \quad (4.285)$$

$$y(t) = \cos \left(2\pi 500t - \frac{\pi}{8} \right) \longleftrightarrow Y_{-5} = \frac{1}{2} e^{j\pi/8}, \quad Y_5 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/8} \quad (4.286)$$

με τους συντελεστές Y_k να είναι μη μηδενικοί για $k = \pm 5$, αν θεωρήσουμε το σήμα $y(t)$ ως περιοδικό με περίοδο $T_0 = 1/100 = 0.01$ s, με τους ημιτονοειδείς όρους συχνοτήτων $f_k = 100k$ Hz, $k = 1, 2, 3, 4$ να είναι μηδενικού πλάτους. Παρ' όλο που είναι απλό να βρεθεί εύκολα - μέσω τριγωνομετρικών σχέσεων - το $z(t)$, και στη συνέχεια τα φάσματα πλάτους και φάσης, ας δούμε πως μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Z_k κατευθείαν.

Λύση:

Είναι

$$Z_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l} Y_l = X_{k-5} Y_5 + X_{k+5} Y_{-5} \quad (4.287)$$

Προφανώς το παραπάνω άθροισμα είναι μη μηδενικό μόνον όταν τα γινόμενα $X_{k-5} Y_5$ και $X_{k+5} Y_{-5}$ είναι μη μηδενικά. Άρα

$$Z_6 = X_1 Y_5 + X_{11} Y_{-5} = X_1 Y_5 = \frac{1}{2} e^{j\frac{5\pi}{24}} \quad (4.288)$$

$$Z_{-6} = X_{-11} Y_5 + X_{-1} Y_{-5} = X_{-1} Y_{-5} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{5\pi}{24}} \quad (4.289)$$

$$Z_4 = X_{-1} Y_5 + X_9 Y_{-5} = X_{-1} Y_5 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{11\pi}{24}} \quad (4.290)$$

$$Z_{-4} = X_{-9} Y_5 + X_1 Y_{-5} = X_1 Y_{-5} = \frac{1}{2} e^{j\frac{11\pi}{24}} \quad (4.291)$$

με την περίοδο του $z(t)$ να είναι $T_0 = 0.01$ s. Οπότε το $z(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$z(t) = \frac{1}{2} e^{j\frac{5\pi}{24}} e^{j2\pi 600t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{5\pi}{24}} e^{-j2\pi 600t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{11\pi}{24}} e^{j2\pi 400t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{11\pi}{24}} e^{-j2\pi 400t} \quad (4.292)$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις του Euler, το $z(t)$ είναι

$$z(t) = \cos\left(2\pi 400t - \frac{11\pi}{24}\right) + \cos\left(2\pi 600t + \frac{5\pi}{24}\right) \quad (4.293)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι η εφαρμογή της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$2 \cos(\theta) \cos(\phi) = \cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi) \quad (4.294)$$

δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. ■

Προσέξτε ξανά την τεχνική λεπτομέρεια στη θεωρήση του σήματος $y(t)$ ως περιοδικό με περίοδο 100 Hz αντί για 500 Hz, ώστε να “συμβαδίζει” με την περίοδο του σήματος $x(t)$. Η παραπάνω πράξη στο πεδίο της συχνότητας ονομάζεται *συνέλιξη σε ένα διακριτό χώρο* και θα τη δούμε με περισσότερη λεπτομέρεια στο Μέρος II του συγγράμματος.

4.7.1.9 Παραγωγή στο χρόνο

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{d}{dt}x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{T_0} - \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \frac{d}{dt} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.295)$$

$$= 0 - \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) (-j2\pi k f_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = j2\pi k f_0 \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.296)$$

$$= j2\pi k f_0 X_k \quad (4.297)$$

αφού η τιμή

$$\frac{1}{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{T_0} = \frac{1}{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0} = \frac{1}{T_0} (x(T_0) e^{-j2\pi k} - x(0)) = 0 \quad (4.298)$$

δεδομένου ότι $x(T_0) = x(0)$.

Άρα

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j2\pi k f_0 X_k} \quad (4.299)$$

Παρατηρήστε ότι αν το σήμα $x(t)$ είχε μια μη μηδενική μέση τιμή, τότε αυτή χάνεται κατά την παραγωγή, και αυτό φαίνεται αν θέσουμε $k = 0$ στην παραπάνω σχέση: λαμβάνουμε ότι ο συγκεκριμένος συντελεστής είναι μηδενικός.

Παράδειγμα 4.21:

Έστω ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ που εκφράζεται σε μια περίοδο του ως

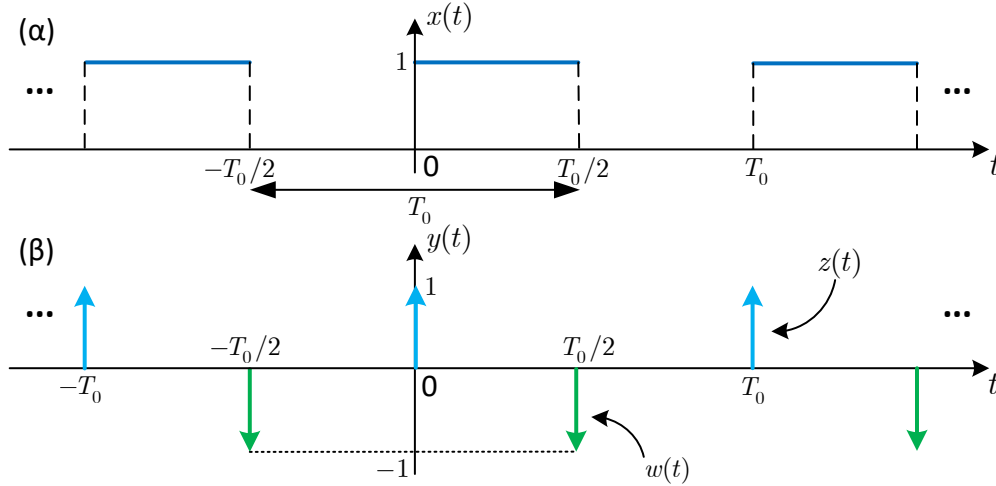
$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_0/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.300)$$

Λύση:

Θεωρώντας το περιοδικό σήμα $x(t)$ του Σχήματος 4.33(α), η παράγωγός του $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ απεικονίζεται στο Σχήμα 4.33(β). Γνωρίζουμε τους συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$, μια και αποτελεί το Παράδειγμα 4.7 της Παραγράφου 4.5.2, για $A = 1$. Οι συντελεστές είναι

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) \quad (4.301)$$

Το περιοδικό σήμα $y(t)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο περιοδικών σημάτων: του περιοδικού σήματος $z(t)$, που αποτελείται από τις συναρτήσεις Δέλτα με θετικό πλάτος, και του σήματος $w(t)$ που αποτελείται από τις συναρτήσεις Δέλτα με αρνητικό πλάτος (σημειωμένες με γαλάζιο και πράσινο χρώμα, αντίστοιχα). Οι συντελεστές Z_k μας είναι



Σχήμα 4.33: Εφαρμογή της Παραγώγισης στο Χρόνο: (α) σήμα $x(t)$, (β) η παράγωγός του.

γνωστοί από το Παράδειγμα 4.9 της Παραγράφου 4.5.2, και είναι

$$Z_k = \frac{1}{T_0} \quad (4.302)$$

ενώ οι συντελεστές W_k μας είναι επίσης γνωστοί, αφού το $w(t)$ πρόκειται για το ίδιο σήμα με το $z(t)$, με αντίθετο πρόσημο και μετατοπισμένο κατά $T_0/2$ δεξιά. Άρα από την ιδιότητα της μετατόπισης, οι συντελεστές W_k είναι

$$W_k = -\frac{1}{T_0} e^{-j2\pi k f_0 T_0/2} = -\frac{1}{T_0} e^{-j\pi k} = -\frac{1}{T_0} (-1)^k \quad (4.303)$$

Οπότε οι συντελεστές της παραγώγου του σήματος θα είναι

$$Y_k = Z_k + W_k = \frac{1}{T_0} (1 - (-1)^k) \quad (4.304)$$

Η ιδιότητα της παραγώγισης μας δίνει ότι

$$Y_k = j2\pi k f_0 X_k = j2\pi k f_0 \frac{1}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) = \frac{1}{T_0} (1 - (-1)^k) \quad (4.305)$$

που συμφωνεί με το αποτέλεσμα που βρήκαμε αναλυτικά. ■

Η παραπάνω ιδιότητα μπορεί να ερμηνευτεί διαισθητικά αν θυμηθείτε ότι η παράγωγος ενός σήματος $x(t)$ αποτελεί μια συνάρτηση που εκφράζει τις μεταβολές του σήματος $x(t)$ συναρτήσει του χρόνου. Αν οι μεταβολές είναι αργές, η παράγωγος έχει χαμηλές τιμές, ενώ αν οι μεταβολές είναι γρήγορες τότε η παράγωγος έχει υψηλότερες τιμές. Παρατηρήστε ότι η παράγωγος του σήματος $\sin(2\pi k f_0 t)$ είναι $2\pi k f_0 \cos(2\pi k f_0 t)$. Είναι εμφανές ότι το πλάτος της συχνότητας $k f_0$ αποτελεί συνάρτηση του $k f_0$ και αυξάνεται γραμμικά με την αύξηση της συχνότητας. Ως αποτέλεσμα, η επίδραση της παραγώγισης στο χώρο της συχνότητας αφορά την ενίσχυση των υψηλών συχνοτήτων του σήματος.

4.7.1.10 Ολοκλήρωση στο χρόνο

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = -\frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) \left(\frac{d}{dt} e^{-j2\pi k f_0 t} \right) dt \quad (4.306)$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{T_0} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.307)$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k} y(T_0) e^{-j2\pi k f_0 T_0} + \frac{1}{j2\pi k} y(0) e^{-j2\pi k} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.308)$$

$$-\frac{1}{j2\pi k}(y(T_0) - y(0)) + \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.309)$$

$$= \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.310)$$

$$= \frac{X_k}{j2\pi k f_0} \quad (4.311)$$

αφού για το περιοδικό σήμα $y(t)$ ισχύει $y(T_0) = y(0)$.

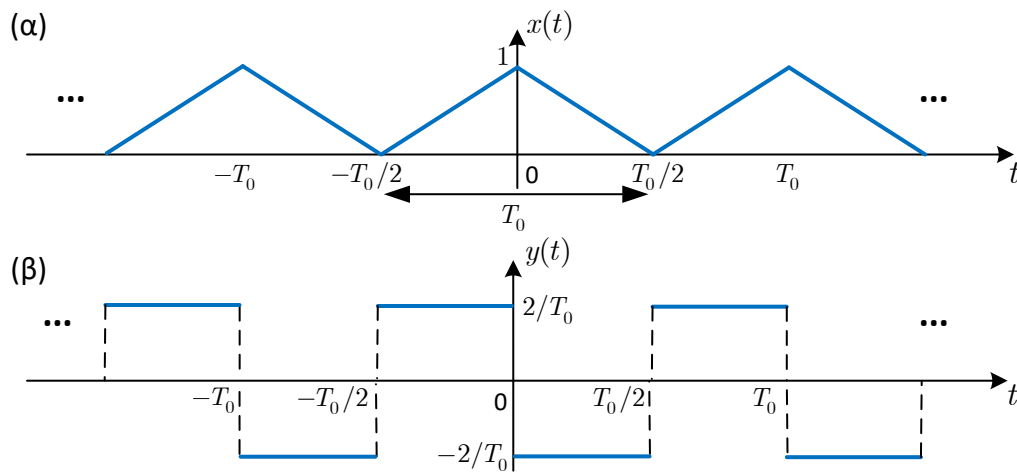
Άρα

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{X_k}{j2\pi k f_0} \quad (4.312)$$

Στην Άσκηση 4.ΞΞ θα δείξετε ότι η παραπάνω ιδιότητα ισχύει μόνον αν $X_0 = 0$.

Παράδειγμα 4.22:

Θεωρώντας το περιοδικό σήμα $x(t)$ του Σχήματος 4.34(α), η παράγωγός του $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ απεικονίζεται στο Σχήμα 4.34(β).



Σχήμα 4.34: Εφαρμογή της Ολοκλήρωσης στο Χρόνο: (α) σήμα $x(t)$, (β) η παράγωγός του, $y(t)$.

Βρείτε τους συντελεστές Fourier του σήματος $x(t)$.

Λύση:

Η εφαρμογή του ορισμού είναι δύσκολη, καθώς απαιτούνται αρκετές πράξεις. Όμως γνωρίζουμε ότι το σήμα $y(t)$ μας είναι γνωστό από τα Παραδείγματα, με $A = 2/T_0$, μόνο που έχει καθυστερήσει κατά $t_0 = T_0/2$. Οπότε οι συντελεστές Fourier του δίνονται ως

$$Y_k = \frac{2}{jk\pi T_0} (1 - e^{-jk\pi}) e^{-j2\pi k f_0 T_0/2} = \frac{2}{jk\pi T_0} (1 - e^{-jk\pi}) e^{-j\pi k} \quad (4.313)$$

$$= \frac{2}{jk\pi T_0} (1 - (-1)^k) (-1)^k = \frac{2}{jk\pi T_0} ((-1)^k - 1) \quad (4.314)$$

που καταλήγουν ως

$$Y_k = \begin{cases} -\frac{4}{jk\pi T_0}, & k \text{ περιττό} \\ 0, & k \text{ άρτιο} \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{k\pi T_0} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \\ 0, & k \text{ άρτιο} \end{cases} \quad (4.315)$$

Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης, μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Fourier του $x(t)$ ως

$$X_k = \frac{Y_k}{j2\pi k f_0} = \frac{\frac{4}{k\pi T_0} e^{j\pi/2}}{j2\pi k f_0} = \frac{4}{j2\pi^2 k^2} e^{j\pi/2} = \frac{2}{\pi^2 k^2} \quad (4.316)$$

για k περιττά. Μπορείτε να υπολογίσετε την τιμή του X_0 για αυτό το σήμα;

4.7.1.11 Συζυγής Συμμετρία

Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, δηλ. ισχύει ότι $x(t) = x^*(t)$, τότε

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.317)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \right)^* = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi(-k)f_0 t} dt \right)^* \quad (4.318)$$

$$= X_{-k}^* \quad (4.319)$$

Από την παραπάνω σχέση, εξάγουμε διαδοχικά ότι

$$X_k = X_{-k}^* \quad (4.320)$$

$$\Re\{X_k\} + j\Im\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\} - j\Im\{X_{-k}\} \quad (4.321)$$

$$\Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\} \text{ και } \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\} \quad (4.322)$$

Επίσης, η πολική μορφή της Σχέσης (4.320) δίνει

$$X_k = X_{-k}^* \quad (4.323)$$

$$|X_k| e^{j\phi_k} = |X_{-k}| e^{-j\phi_{-k}} \quad (4.324)$$

$$|X_k| = |X_{-k}| \text{ και } \phi_k = -\phi_{-k} \quad (4.325)$$

Άρα, για πραγματικά σήματα, το φάσμα πλάτους είναι άρτια συνάρτηση της συχνότητας ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτησή της.

Παράδειγμα 4.23:

Ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = -\frac{\pi^2}{2jk^2} \quad (4.326)$$

Ας ελέγξουμε αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό ή μιγαδικό.

Λύση:
Είναι

$$X_k^* = \left(-\frac{\pi^2}{2jk^2} \right)^* = \frac{\pi^2}{2jk^2} \quad (4.327)$$

και

$$X_{-k} = -\frac{\pi^2}{2j(-k)^2} = -\frac{\pi^2}{2jk^2} \quad (4.328)$$

άρα το σήμα δεν είναι πραγματικό.

4.7.1.12 Άρτιο Σήμα

Ένα σήμα λέγεται άρτιο όταν ισχύει

$$x(t) = x(-t) \quad \forall t \quad (4.329)$$

Οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt - j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \right) \quad (4.330)$$

Το ολοκλήρωμα

$$-j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (4.331)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$-j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt = 0 \quad (4.332)$$

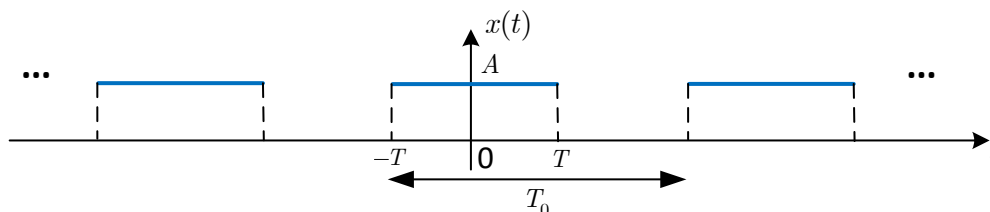
Οπότε

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (4.333)$$

που είναι ασφαλώς πραγματικοί αριθμοί, δηλ. $\Re\{X_k\} = X_k$.

Παράδειγμα 4.24:

Δείξτε ότι το περιοδικό σήμα του Σχήματος 4.35



Σχήμα 4.35: Άρτιο σήμα.

έχει πραγματικούς συντελεστές Fourier

Λύση:
Θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T A e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.334)$$

$$= \frac{A}{-j2\pi k} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{-T}^T = -\frac{A}{j2\pi k} (-2j \sin(2\pi k f_0 T)) \quad (4.335)$$

$$= \frac{A}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 T) \quad (4.336)$$

που προφανώς είναι πραγματικοί, δηλ. $\Re\{X_k\} = X_k$. Υπολογίζοντας τους συντελεστές με τη Σχέση (4.333), έχουμε

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T A \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (4.337)$$

$$= \frac{A}{2\pi k} \sin(2\pi k f_0 t) \Big|_{-T}^T = \frac{A}{2\pi k} (\sin(2\pi k f_0 T) - \sin(-2\pi k f_0 T)) \quad (4.338)$$

$$= \frac{A}{2\pi k} 2 \sin(2\pi k f_0 T) = \frac{A}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 T) \quad (4.339)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα.

4.7.1.13 Περιττό Σήμα

Ένα σήμα λέγεται περιττό όταν ισχύει

$$x(t) = -x(-t) \quad \forall t \quad (4.340)$$

Οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt - j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \right) \quad (4.341)$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (4.342)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου περιττής επί άρτιας συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt = 0 \quad (4.343)$$

Οπότε

$$X_k = -j \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (4.344)$$

που είναι ασφαλώς φανταστικοί αριθμοί, δηλ. $j\Im\{X_k\} = X_k$.

Παράδειγμα 4.25:

Στο Παράδειγμα 4.11 δείξαμε ότι το περιοδικό σήμα του Σχήματος 4.16 έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j\pi/2} = j \frac{A}{k\pi} (-1)^k \quad (4.345)$$

που προφανώς είναι φανταστικοί.

Λύση:

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει το παραπάνω αποτέλεσμα με χρήση της Σχέσης (4.344).

4.7.1.14 Άρτιο μέρος

Το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad (4.346)$$

και άρα οι συντελεστές Fourier του είναι

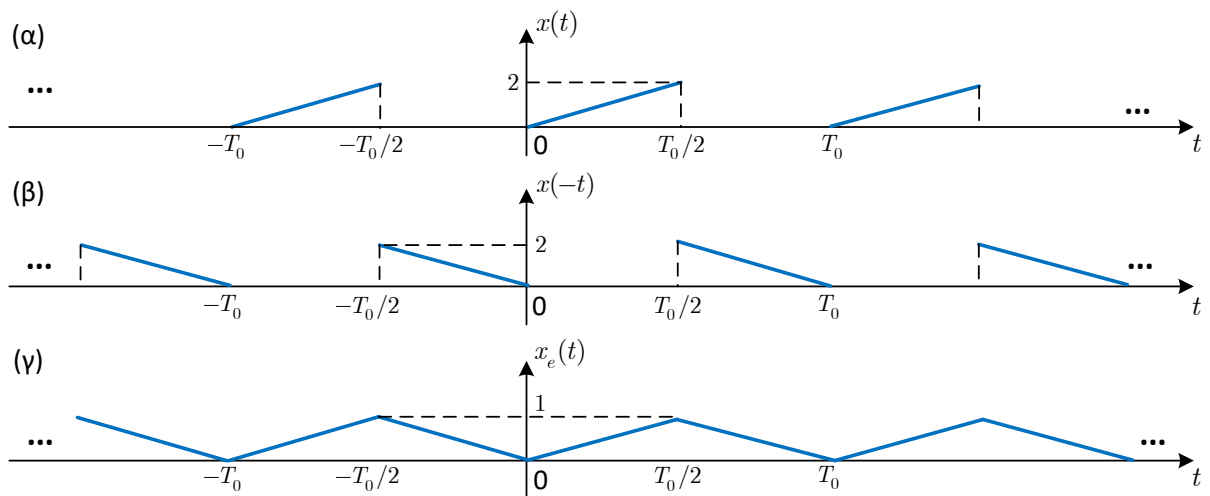
$$X_{ek} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.347)$$

$$= \frac{1}{2} X_k + \frac{1}{2} X_{-k} = \frac{1}{2} X_k + \frac{1}{2} X_k^* \quad (4.348)$$

$$= \frac{1}{2} 2\Re\{X_k\} = \Re\{X_k\} \quad (4.349)$$

Παράδειγμα 4.26:

Στο Σχήμα 4.36 φαίνεται ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, το σήμα $x(-t)$, καθώς και το άρτιο μέρος $x_e(t)$ του $x(t)$.



Σχήμα 4.36: (α) σήμα $x(t)$, (β) σήμα $x(-t)$, (γ) $x_e(t)$: άρτιο μέρος του $x(t)$.

Δείξτε ότι το άρτιο μέρος του σήματος $x_e(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_{ek} = \Re\{X_k\} = \frac{1}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1) \quad (4.350)$$

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $x(t)$ είναι (Άσκηση XXXX)

$$X_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) + j \frac{(-1)^k}{\pi k} \quad (4.351)$$

Άρα οι συντελεστές Fourier του άρτιου μέρους του σήματος, $x_e(t)$, (Άσκηση XXXX) είναι

$$X_{e_k} = \Re\{X_k\} = \frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) \quad (4.352)$$

4.7.1.15 Περιττό μέρος

Το περιττό μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (4.353)$$

και άρα οι συντελεστές Fourier του είναι

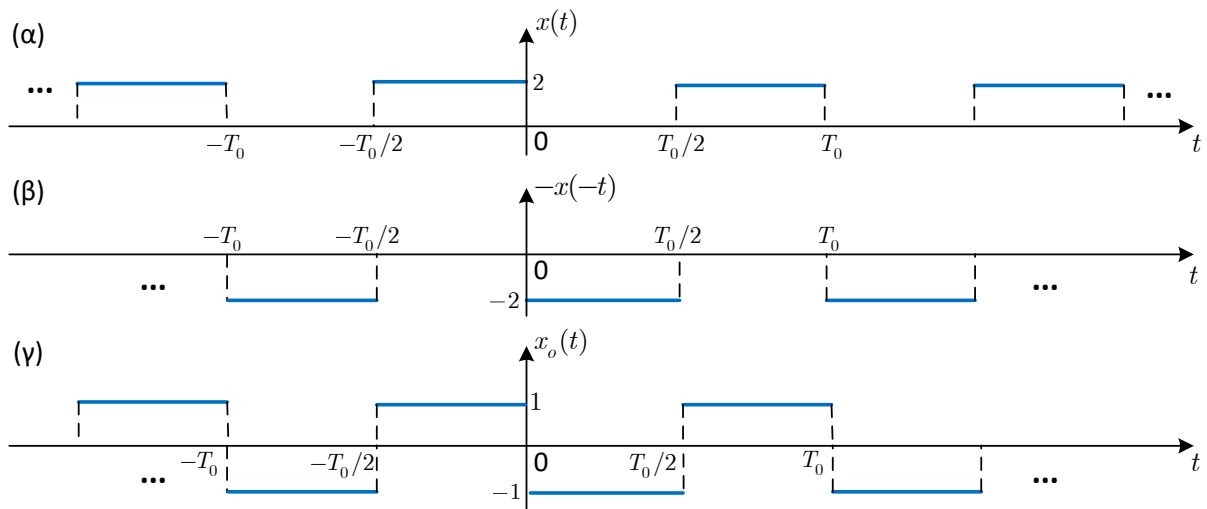
$$X_{o_k} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.354)$$

$$= \frac{1}{2} X_k - \frac{1}{2} X_{-k} = \frac{1}{2} X_k - \frac{1}{2} X_k^* \quad (4.355)$$

$$= \frac{1}{2} 2j\Im\{X_k\} = j\Im\{X_k\} \quad (4.356)$$

Παράδειγμα 4.27:

Στο Σχήμα 4.37 φαίνεται ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, το σήμα $-x(-t)$, καθώς και το περιττό μέρος $x_o(t)$ του $x(t)$.



Σχήμα 4.37: (α) σήμα $x(t)$, (β) σήμα $-x(-t)$, (γ) $x_o(t)$: περιττό μέρος του $x(t)$.

Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier του περιττού μέρους $x_o(t)$ είναι

$$X_{o_k} = j\Im\{X_k\} = -j \frac{1}{\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \quad (4.357)$$

Λύση:

Το σήμα $x(t)$ δεν είναι άλλο από το σήμα του Παραδείγματος 4.7 με πλάτος $A = 2$, κι έχοντας υποστεί αντιστροφή χρόνου. Άρα οι συντελεστές Fourier του θα είναι

$$X_k = 2 \frac{1}{j2\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \quad (4.358)$$

Οι συντελεστές Fourier του περιττού μέρους του σήματος, $x_o(t)$, είναι

$$X_{o_k} = j\Im\{X_k\} = -j\frac{1}{\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \quad (4.359)$$

Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται από το Παράδειγμα 4.6, αφού το περιττό μέρος $x_o(t)$ που συζητάμε είναι το περιοδικό σήμα του Παραδείγματος 4.6, έχοντας υποστεί αντιστροφή στο χρόνο.

4.7.1.16 Θεώρημα του Parseval

Έστω ότι το περιοδικό σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.360)$$

Η ισχύς του σήματος δίνεται ως

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right|^2 dt \quad (4.361)$$

Το σύνολο $\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ περιέχει στοιχεία που είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Μπορούμε να δείξουμε ότι λόγω της ορθογωνιότητας, η ενέργεια του αθροίσματός τους ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ενεργειών, δηλ.

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right|^2 dt \quad (4.362)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right)^* dt \quad (4.363)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 t} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \right) dt \quad (4.364)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{+\infty} X_l X_k^* e^{j2\pi(l-k)f_0 t} \right) dt \quad (4.365)$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_0^{T_0} dt + \frac{1}{T_0} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{+\infty} X_l X_k^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt \quad (4.366)$$

και αφού μπορείτε να δείξετε ότι (Άσκηση 4.XX)

$$\int_{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & l = k, \\ 0, & l \neq k \end{cases} \quad (4.367)$$

έχουμε τελικά

$$P_x = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_0^{T_0} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \quad (4.368)$$

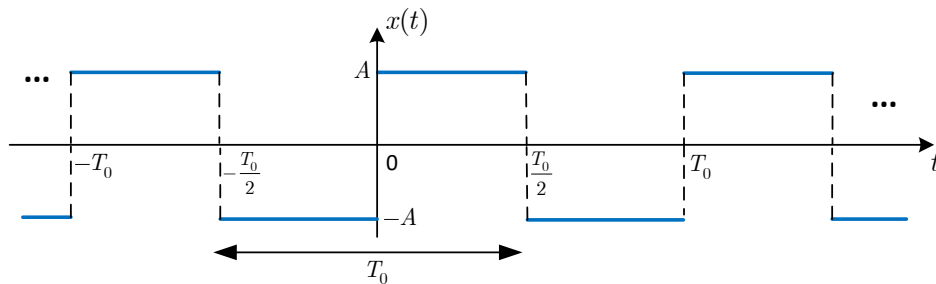
που είναι και το ζητούμενο. Άρα

$$\boxed{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2} \quad (4.369)$$

Η σχέση αυτή είναι **πάρα πολύ** σημαντική αφού μας λέει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την ισχύ ενός περιοδικού σήματος - ή εναλλακτικά, την ενέργεια σε μια περίοδό του - ως το άθροισμα του μέτρου των συντελεστών Fourier στο τετράγωνο!

Παράδειγμα 4.28:

Υπολογίστε την ισχύ P_x του περιοδικού σήματος $x(t)$ του Σχήματος 4.12, το οποίο επαναλαμβάνουμε εδώ για ευκολία.



Σχήμα 4.38: Θεώρημα του Parseval για το περιοδικό σήμα του παραδείγματος 4.6.

Λύση:

Η ισχύς του σήματος υπολογίζεται ως

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_0^{T_0/2} A^2 dt + \int_{T_0/2}^{T_0} A^2 dt \right) = A^2 \quad (4.370)$$

Βρήκαμε ωρίτερα ότι οι συντελεστές Fourier του σήματος είναι

$$X_k = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\pi/2} \quad (4.371)$$

για περιττά k . Άρα

$$|X_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττό} \quad (4.372)$$

Το Θεώρημα του Parseval δίνει

$$P_x = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2} \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4A^2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{4} = A^2 \quad (4.373)$$

γιατί μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} \quad (4.374)$$

4.8 Γνωστές Σειρές Fourier

Ο Πίνακας 4.2 δείχνει μερικές γνωστές Σειρές Fourier που είδαμε στη συζήτηση που προηγήθηκε και που είναι πολύ χρήσιμες στην πράξη.

Συνήθεις Σειρές Fourier	
Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$	$X_k = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\pi/2}, \quad k \text{ περιττό}$
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$	$X_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2}, \quad k \text{ περιττό}$
$x(t) = \frac{2A}{T_0} t, \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$	$X_k = \frac{A}{\pi k} (-1)^k e^{j\pi/2}$
$x(t) = A \text{tri}\left(\frac{t}{T_0}\right), \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$	$X_k = \frac{2A}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττό}$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$	$X_k = \frac{1}{T_0}$

Πίνακας 4.2: Πίνακας Σειρών Fourier

4.10 Όμως...

Ίσως γνωρίζετε ότι τα “Στοιχεία” του Αλεξανδρινού μαθηματικού Ευκλείδη είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα στην ιστορία της ανθρωπότητας. Η μελέτη και εμπέδωση των 13 βιβλίων των “Στοιχείων” ήταν και παραμένει ζόρικη υπόθεση! Κάποια στιγμή, ο βασιλιάς της Αλεξάνδρειας, Πτολεμαίος ο Α', ζήτησε από τον Ευκλείδη έναν τρόπο να μάθει Γεωμετρία πιο εύκολο από τη μελέτη των “Στοιχείων”. Η απάντηση του μεγάλου μαθηματικού ήταν λακωνική, σαφής, και έμεινε στην Ιστορία: “Δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη Γεωμετρία!”.

Αν λοιπόν ζούσε σήμερα ο J. B. Fourier, και τον ρωτούσατε ποιός είναι ο πιο εύκολος τρόπος να μάθετε Σειρές Fourier, θα σας απαντούσε όπως ο μεγάλος μαθηματικός της Αρχαιότητας: “Δεν υπάρχει εύκολος δρόμος για τις Σειρές Fourier!”. Αυτό σημαίνει ότι για τις Σειρές Fourier απαιτείται αρκετή εξάσκηση, η οποία είναι το κόστος που πληρώνουμε για την αγορά της διαισθητικής κατανόησης της ανάλυσης Fourier η οποία θα αποτελεί πολύτιμο συνοδοιπόρο στη συνέχεια.

Συνοψίζοντας, αναλύσαμε μια μέθοδο αναπαράστασης ενός περιοδικού σήματος ως ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών περιοδικών σημάτων των οποίων οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους. Αυτή η αναπαράσταση - Σειρά Fourier - καθώς και τα συμπεράσματά της, είναι πολύτιμη σε πολλές εφαρμογές. Όμως, η Σειρά Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για περιοδικά σήματα. Όλα όμως τα σήματα που παρατηρούμε και μετρούμε στη φύση ή μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο είναι απεριοδικά (θυμηθείτε ότι ένα περιοδικό σήμα ξεκινά από το $-\infty$ και εκτείνεται ως το $+\infty$).

Αυτό το πρόβλημα μπορεί να υπερκεραστεί με την αναπαράσταση μη περιοδικών σημάτων ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Αυτό δεν είναι άλλο από τον περίφημο μετασχηματισμό Fourier, ο οποίος μπορεί εύκολα να προκύψει ως μια εκδοχή των Σειρών Fourier όταν το περιοδικό σήμα βρίσκεται σε μια οριακή κατάσταση ως προς την περίοδό του. Αυτήν την κατάσταση θα συζητήσουμε άμεσα στην επόμενη Παράγραφο.

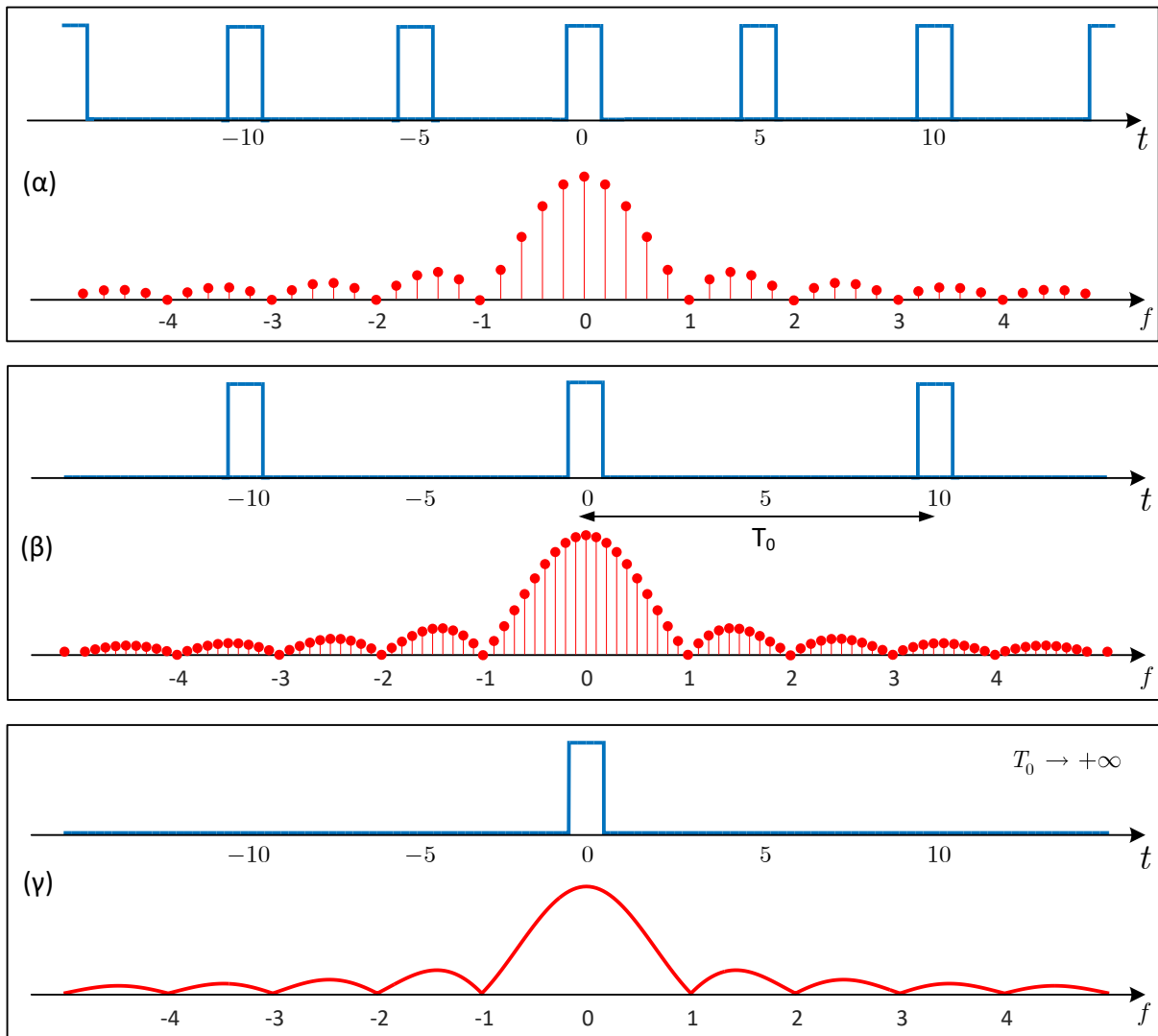
4.11 Εισαγωγή στο Μετασχ. Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να οριστεί ως μια Σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος της οποίας η περίοδος τείνει στο άπειρο, όταν δηλαδή το σήμα πλησιάζει στο να μην είναι πια περιοδικό. Τότε οι συντελεστές



X_k παύουν να ορίζονται για ακέραιους αριθμούς k και για συγκεκριμένες συχνότητες $k f_0$, και ορίζονται πλέον για κάθε συχνότητα f , σε ένα συνεχές φάσμα $X(f)$.

Διαισθητικά, μπορούμε να “αποδείξουμε” αυτή τη σχέση ως εξής. Δείτε το Σχήμα 4.44. Στο Σχήμα 4.44(α),



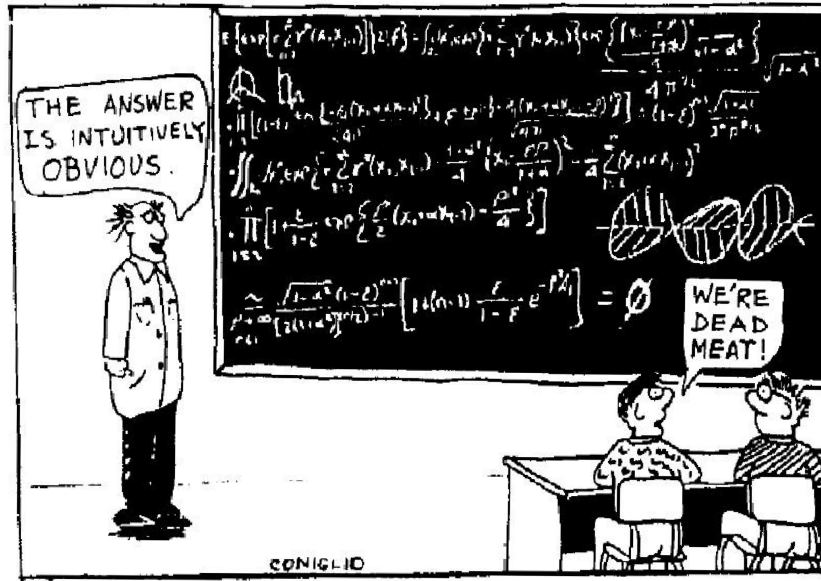
Σχήμα 4.44: Διαισθητική απόδειξη της σχέσης μεταξύ των σειρών Fourier και του μετασχ. Fourier.

βλέπουμε το φάσμα πλάτους ενός περιοδικού σήματος, που έχει περίοδο $T_0 = 5$ s. Βλέπετε πως οι φασματικές γραμμές είναι σχετικά αραιές. Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0 = 1/T_0 = 0.2$ Hz και τα πολλαπλάσιά της βρίσκονται στις θέσεις $k f_0 = 0.2k$, $k \in \mathbb{Z}$ Hz.

Δείτε τώρα το Σχήμα 4.44(β). Βλέπετε πως αν μεγαλώσουμε την περίοδο, και γίνει $T_0 = 10$ s, τότε η θεμελιώδης συχνότητα γίνεται $f_0 = 1/T_0 = 1/10 = 0.1$ Hz και είναι πιο μικρή, και άρα και τα πολλαπλάσιά της, $k f_0 = 0.1k$, $k \in \mathbb{Z}$ Hz, θα είναι πιο κοντά το ένα με το άλλο. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο φάσμα πλάτους. Οι φασματικές γραμμές είναι πολύ πιο κοντά απ’ ό,τι πριν. Σκεφτείτε να επαναλαμβάνουμε συνέχεια αυτή τη διαδικασία για όλο και πιο μεγάλες περιόδους T_0 . Η θεμελιώδης συχνότητα f_0 γίνεται συνεχώς όλο και πιο μικρή, και οι φασματικές γραμμές έρχονται όλο και πιο κοντά, καθώς τα $k f_0$ είναι όλο και πιο κοντά το ένα στο άλλο.

Όταν το T_0 γίνει πολύ πολύ (πολύ! :-)) μεγάλο, και τείνει προς το $+\infty$ – δηλ. το σήμα δέν θεωρείται πια περιοδικό – όπως στο Σχήμα 4.44(γ), τότε το f_0 θα γίνει απειροστά μικρό, και τα πολλαπλάσιά του, $k f_0$, με $k \in \mathbb{Z}$, θα είναι τόσο κοντά το ένα με το άλλο που δε θα ορίζουν πια διακριτές τιμές, αλλά ένα συνεχές άξονα του f ! Έτσι, οι φασματικές γραμμές θα είναι απειροστά κοντά μεταξύ τους, τόσο κοντά που πλέον δε θα είναι φασματικές γραμμές σε συγκεκριμένες συχνότητες, αλλά θα ορίζουν μια συνεχή συνάρτηση $X(f)$! Αυτή είναι η διαισθητική προσέγγιση της σχέσης μετασχ. Fourier και της σειράς Fourier.

Αν θεμελιώσουμε τώρα τη διαισθητική μας προσέγγιση, ξεκινώντας από τη Σειρά Fourier που μας αναπτύσσει



Σχήμα 4.45: Βασιστείτε στη διαίσθησή σας!! ☺

το σήμα σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συχνοτήτων $k f_0$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.386)$$

Αντικαθιστώντας το γνωστό μας ολοκλήρωμα του X_k , επιλέγοντας ως περίοδο το διάστημα $(-T_0/2, T_0/2]$,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.387)$$

θα έχουμε

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.388)$$

Όταν το $T_0 \rightarrow \infty$, τότε το $f_0 = \frac{1}{T_0} \rightarrow df$, δηλ. σε μια απειροστά μικρή ποσότητα, τόσο μικρούλα που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια μικρή μετατόπιση μιας συνεχούς μεταβλητής f . Άρα, $k f_0 \rightarrow f$, σε μια συνεχή μεταβλητή f που ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό (συχνότητα).

Επίσης, όταν $T_0 \rightarrow \infty$, το $1/T_0$ μπροστά από το ολοκλήρωμα τείνει στο df . Τέλος, αφού πλέον δεν έχουμε ακέραιες πολλαπλάσιες συχνότητες του f_0 , το άθροισμα της σειράς επάνω στα k μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα πάνω στη συνεχή μεταβλητή f .

Οπότε, τελικά

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) e^{j2\pi k f_0 t} \xrightarrow{T_0 \rightarrow \infty} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f t} \quad (4.389)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{X(f)} e^{j2\pi f t} df \quad (4.390)$$

με

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (4.391)$$

να είναι ο περίφημος Μετασχηματισμός Fourier.

4.12 Ο μετασχηματισμός Fourier

Αποδείξαμε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier ορίζεται ως:

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.392)$$

και ο αντίστροφος μετασχ. Fourier ως

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (4.393)$$

Η Σχέση (4.392) μας αναλύει ένα μη περιοδικό σήμα σε ένα συνεχές φάσμα $X(f)$, ενώ η Σχέση (4.393) μας συνθέτει το σήμα $x(t)$ ως ένα συνεχές άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων, με συντελεστές $X(f)$.

Η ομοιότητα με τις Σειρές Fourier είναι, όπως είδαμε, αρκετά μεγάλη. Όπως για πραγματικά περιοδικά σήματα, δυο μιγαδικά εκθετικά στις συχνότητες $\pm kf_0$ δίνουν ένα συνημίτονο συχνότητας kf_0 , αυτό συμβαίνει και εδώ. Έστω ένα απειροστά μικρό εύρος συχνοτήτων Δf του συνεχούς φάσματος του σήματος. Επειδή αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και το αντίστοιχο εύρος $-\Delta f$ και το πλάτος καθενός - υποθέτοντας ότι το εύρος Δf είναι τόσο μικρό που το πλάτος του είναι σταθερό - θα είναι $X(\Delta f)$ και $X^*(\Delta f)$ αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων συζυγίας συντελεστών για τα πραγματικά σήματα. Άρα προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} X(\Delta f)e^{j\Delta ft} + X^*(\Delta f)e^{-j\Delta ft} &= |X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + (|X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}})^*e^{-j2\pi\Delta ft} \\ &= |X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + |X(\Delta f)|e^{-j\phi_{\Delta f}}e^{-j2\pi\Delta ft} \\ &= |X(\Delta f)|e^{j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} + |X(\Delta f)|e^{-j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} \\ &= 2|X(\Delta f)|\cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f}) \end{aligned} \quad (4.394)$$

Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους $2|X(\Delta f)|$ για ένα πολύ μικρό εύρος συχνοτήτων Δf . Μάλιστα, αν θύσουμε $\Delta f \rightarrow df$ και αθροίσουμε ως προς όλες τις απειροστά μικρές συχνοτικές μεταβολές df (δηλ. ολοκληρώσουμε ως προς df), θα λάβουμε

$$X(f) = 2 \int_0^{+\infty} |X(f)|\cos(2\pi ft + \phi(f))df \quad (4.395)$$

με $|X(f)|$ και $\phi(f)$ το μέτρο και τη φάση αντίστοιχα, του μιγαδικού (εν γένει) μετασχ. Fourier. Έτσι, και ο μετασχηματισμός Fourier αναλύει ένα σήμα σε ημίτονα στην πραγματικότητα! Μια τέτοια ανάλυση όπως τη δείξαμε μόλις βοηθά πολύ στην καλύτερη κατανόηση του μετασχηματισμού, ενώ αναδεικνύει και τις ομοιότητές του με τη Σειρά Fourier.

Ο μετασχ. Fourier μπορεί εν γένει να γραφεί ως

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.396)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt \quad (4.397)$$

$$= \Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = R(f) + jI(f) \quad (4.398)$$

με $R(f), I(f)$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού, αντίστοιχα. Άρα ο μετασχ. Fourier είναι εν γένει μιγαδικό σήμα, με το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος να υπολογίζεται ως

$$R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt \quad (4.399)$$

$$I(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt \quad (4.400)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συνεπάγεται ότι

$$R(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(-2\pi ft)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt = R(f) \quad (4.401)$$

που σημαίνει ότι το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού είναι ένα άρτιο σήμα, ενώ

$$I(-f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(-2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = -I(f) \quad (4.402)$$

που σημαίνει ότι το φανταστικό του μέρους είναι περιττό σήμα.

Μια εναλλακτική και πολύ χρήσιμη αναπαράσταση του μετασχ. Fourier είναι η πολική μορφή, δηλ.

$$X(f) = |X(f)| e^{j\phi_x(f)} \quad (4.403)$$

με

$$|X(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} \quad (4.404)$$

να είναι το μέτρο του μετασχηματισμού (δηλ. το φάσμα πλάτους) και

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \left(\frac{I(f)}{R(f)} \right) \quad (4.405)$$

η φάση του μετασχηματισμού (δηλ. το φάσμα φάσης)⁵. Βλέπουμε λοιπόν πως όπως η Σειρά Fourier ανέλυε ένα περιοδικό σήμα στο φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του, το ίδιο συμβαίνει και εδώ για απεριοδικά σήματα.

4.12.1 Ύπαρξη του μετασχ. Fourier

Όπως προείπαμε, ο μετασχ. Fourier προέκυψε από την ανάγκη εύρεσης του συχνοτικού περιεχομένου μη περιοδικών σημάτων. Ο ορισμός του προέκυψε από τη Σειρά Fourier στην ακραία περίπτωση που $T_0 \rightarrow +\infty$, άρα περιμένουμε οι συνθήκες ύπαρξης να είναι παρόμοιες με αυτές της Σειράς Fourier.

Για να υπάρχει ο μετασχ. Fourier, αρκεί το ολοκλήρωμα της Σχέσης (4.392) να συγκλίνει, δηλ.

$$|X(f)| < \infty \iff \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-j2\pi ft}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (4.406)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι το $x(t)$ αρκεί να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Η σχέση αυτή όμως δεν είναι και αναγκαία. Αντίθετα, αν ένα σήμα είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμο, δηλ. αν έχει πεπερασμένη ενέργεια

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty \quad (4.407)$$

τότε εγγυημένα το σήμα αυτό έχει μετασχηματισμό Fourier και μάλιστα η ενέργεια σφάλματος μεταξύ του σήματος $x(t)$ και της ανακατασκευής του μέσω του αντιστρόφου μετασχ. Fourier, $\hat{x}(t)$, είναι μηδενική, δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt = 0 \quad (4.408)$$

Τέλος, όπως ακριβώς στα περιοδικά σήματα, οι γνωστές συνθήκες του Dirichlet ισχύουν ξανά. Τις θυμίζουμε:

(α') Το σήμα $x(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty \quad (4.409)$$

(β') Το σήμα $x(t)$ πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων σε ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα.

(γ') Το σήμα $x(t)$ πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών σε ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα.

Από τη σκοπιά του μηχανικού, ο έλεγχος ύπαρξης του μετασχ. Fourier είναι, θα λέγαμε, περιττός καθώς όλα τα σήματα που τον ενδιαφέρουν είτε υπάρχουν στη φύση είτε μπορούν να παραχθούν στο εργαστήριο, και άρα έχουν μετασχ. Fourier.

⁵Ισχύουν οι περιπτώσεις της Σχέσης (36)

4.12.2 Χαρακτηριστικά παραδείγματα

Παρακάτω παρουσιάζονται τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα σημάτων και η μεθοδολογία υπολογισμού του μετασχ. Fourier τους.

Παράδειγμα 4.29:

Ας δείξουμε ότι

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \text{sinc}(fT) \quad (4.410)$$

με

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (4.411)$$

όπως στο Σχήμα 4.46(α).

Λύση:
Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.412)$$

$$= A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt = A \left[\frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j2\pi ft} \right]_{-T/2}^{T/2} \quad (4.413)$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f} (e^{-j2\pi fT/2} - e^{j2\pi fT/2}) = \frac{A}{j2\pi f} (e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}) \quad (4.414)$$

Η παρένθεση μοιάζει πολύ με τη σχέση του Euler για το ημίτονο

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (4.415)$$

άρα χρειαζόμαστε τον όρο $2j$ στον παρονομαστή για να τη χρησιμοποιήσουμε. Είναι

$$X(f) = \frac{A}{j2\pi f} (e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}) = \frac{2A}{2\pi f} \frac{e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}}{2j} = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi fT) \quad (4.416)$$

Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (4.411), για να γράψουμε πιο όμορφα το αποτέλεσμα. Η σχέση αυτή θέλει έναν όρο π μέσα στο ημίτονο και στον παρονομαστή. Πρέπει κάπως να το βάλουμε, και επίσης να φτιάξουμε κατάλληλα το πηλίκο για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Σχέση (4.411).

Θα είναι

$$X(f) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi fT) = A \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = AT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = AT \frac{\sin(\pi(fT))}{\pi(fT)} \quad (4.417)$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (4.411) και να πάρουμε τελικά

$$X(f) = AT \text{sinc}(fT) \quad (4.418)$$

Το ζεύγος

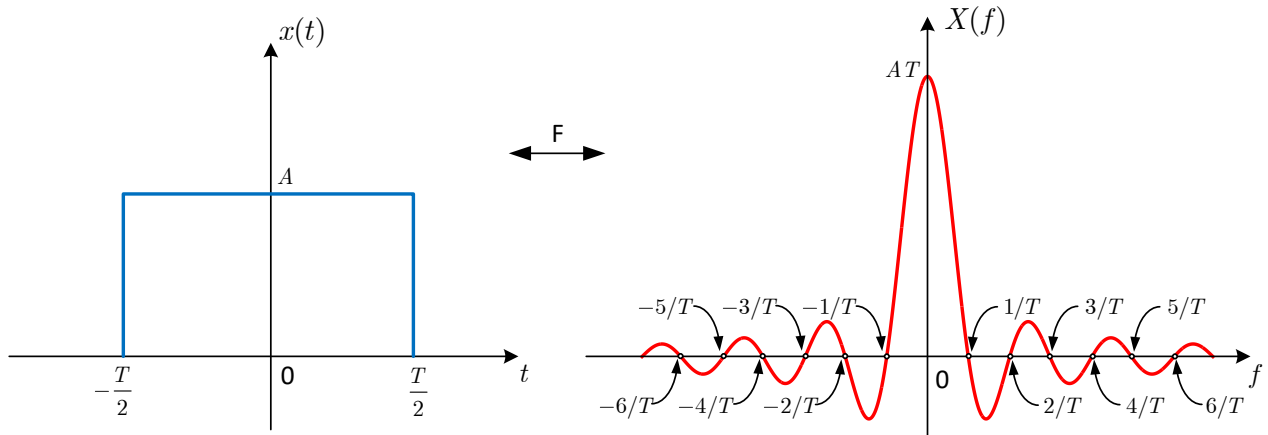
$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \text{sinc}(fT) \quad (4.419)$$

είναι πολύ χρήσιμο και θα το θεωρούμε δεδομένο από δω και στο εξής. Παρατηρήστε ότι το $\text{sinc}(fT)$ μηδενίζεται στις θέσεις $f = \pm \frac{2\pi k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$. Το $X(f)$ είναι εν γένει μιγαδική συνάρτηση, άρα κι αυτή μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή ως

$$X(f) = |X(f)| e^{j\angle X(f)} \quad (4.420)$$

όπου το $|X(f)|$ είναι πάντα θετικό, ως μέτρο, και το $\angle X(f)$ η φάση του μετασχ. Fourier, αντίστοιχα. Για το παράδειγμά μας, έστω $A = 1$, και θα είναι

$$|X(f)| = T |\text{sinc}(fT)| \quad (4.421)$$

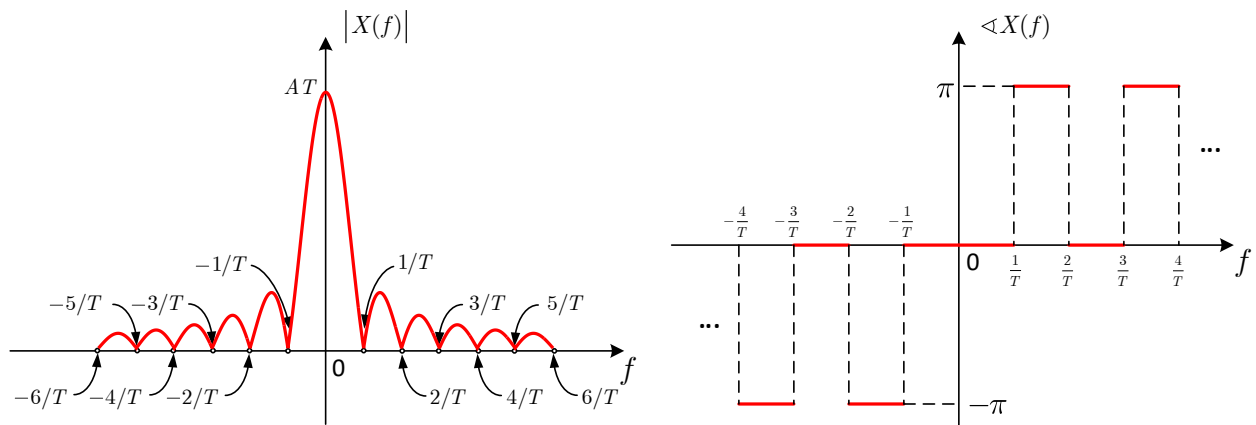


Σχήμα 4.46: Σήμα τετραγωνικού παλμού και ο Μετασχ. Fourier του.

και

$$\angle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{(1+l)}{T} < f < \frac{(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{(2+l)}{T} < f < -\frac{(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} < |f| < \frac{(l+1)}{T} \end{cases} \quad (4.422)$$

με $l = 0, 2, 4, \dots$. Ας μείνουμε λίγο στις τιμές της φάσης. Το $X(f)$ είναι σε κάποια διαστήματα θετικό και σε



Σχήμα 4.47: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier Παραδείγματος 4.29.

κάποια αρνητικό. Δείτε το Σχήμα 4.46 με προσοχή. Εκεί που το $X(f)$ είναι θετικό, η φάση είναι μηδέν. Εκεί που είναι αρνητικό, έχουμε δυο περιπτώσεις:

- αν βρισκόμαστε σε θετικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(f) = -T \operatorname{sinc}(fT) = T \operatorname{sinc}(fT) e^{j\pi}, \quad \frac{1+l}{T} < f < \frac{2+l}{T}. \quad (4.423)$$

Άρα η φάση είναι $\angle X(f) = \pi$ σε αυτά τα διαστήματα.

- αν βρισκόμαστε σε αρνητικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(f) = -T \operatorname{sinc}(fT) = T \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi}, \quad -\frac{2+l}{T} < f < -\frac{1+l}{T}. \quad (4.424)$$

Άρα η φάση είναι $\angle X(f) = -\pi$ σε αυτά τα διαστήματα.

Το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού φαίνονται στο Σχήμα 4.47. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τετραγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f| \rightarrow \infty$, ενώ η φάση είναι μηδενική για κάποια ημίτονα ή $\pm\pi$ για κάποια άλλα. Επίσης παρατηρήστε τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης, αντίστοιχα! Δεν είναι τυχαία

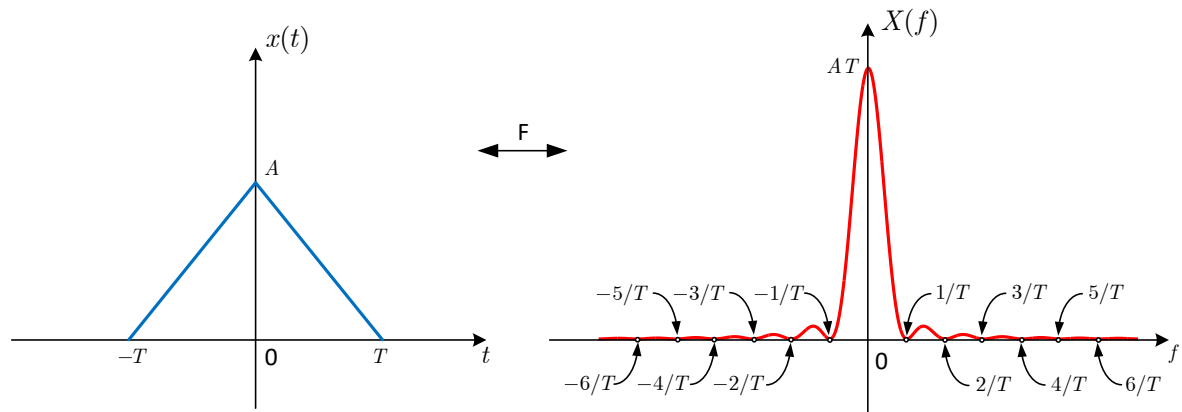
- αναλύουμε πραγματικά σήματα, και όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια, οι συμμετρίες αυτές εξακολουθούν να ισχύουν και για το μετασχηματισμό Fourier!

Παράδειγμα 4.30:

Δείξτε ότι

$$x(t) = A \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}^2(fT) \quad (4.425)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.48.



Σχήμα 4.48: Σήμα τριγωνικού παλμού και ο Μετασχ. Fourier του.

Λύση:

Προσέξτε, εδώ η μισή διάρκεια του τριγώνου είναι T , και όχι ολόκληρη, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Ο λόγος θα γίνει εμφανής τώρα. Θα είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T}^0 \left(\frac{A}{T}t + A\right) e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^T \left(-\frac{A}{T}t + A\right) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.426)$$

$$= \frac{A}{T} \int_{-T}^0 t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_{-T}^0 e^{-j2\pi ft} dt - \frac{A}{T} \int_0^T t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.427)$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\int_a^b t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2} (at - 1) \Big|_a^b \quad (4.428)$$

και έχουμε

$$X(f) = \frac{A}{T} \int_{-T}^0 t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_{-T}^0 e^{-j2\pi ft} dt - \frac{A}{T} \int_0^T t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.429)$$

$$= \frac{A}{T} \frac{e^{-j2\pi ft}}{(-j2\pi f)^2} (-j2\pi ft - 1) \Big|_{-T}^0 - \frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-T}^0 - \frac{A}{T} \frac{e^{-j2\pi ft}}{(-j2\pi f)^2} (-j2\pi ft - 1) \Big|_0^T - \frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_0^T \quad (4.430)$$

$$= \frac{A}{2T(\pi f)^2} (1 - \cos(2\pi fT)) \quad (4.431)$$

μετά από απλή αλλά βαρετή άλγεβρα, την οποία παραλείπουμε. Με χρήση της ταυτότητας

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad (4.432)$$

έχουμε

$$X(f) = \frac{A}{2T(\pi f)^2} 2 \sin^2(\pi fT) = \frac{A}{T(\pi f)^2} \sin^2(\pi fT) \quad (4.433)$$

Αν προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση sinc, θα έχουμε

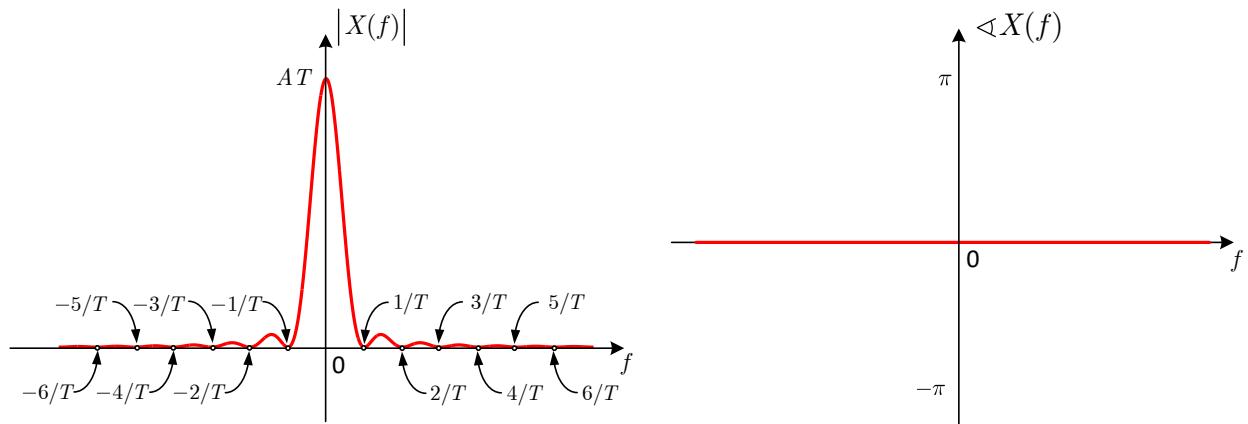
$$X(f) = \frac{A}{T(\pi f)^2} \sin^2(\pi f T) = \frac{AT}{T^2 \pi^2 f^2} \sin^2(\pi f T) \quad (4.434)$$

$$= AT \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2 = AT \text{sinc}^2(fT) \quad (4.435)$$

Άρα τελικά

$$x(t) = A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \text{sinc}^2(fT) \quad (4.436)$$

Προφανώς, επειδή το $X(f)$ είναι μόνιμα θετικό, για κάθε f , η φάση του είναι πάντα μηδέν. Το φάσμα πλάτους



Σχήμα 4.49: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$.

φαίνεται στο Σχήμα (4.48) και είναι ο ίδιος ο μετασχ. Fourier. Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 4.49. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τριγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f| \rightarrow \infty$, ενώ η φάση είναι μηδενική όλα τα ημίτονα - άρα δε χρειάζεται καμιά μετατόπιση στα ημίτονα αυτά ώστε να συντεθεί ο τριγωνικός παλμός. Επίσης παρατηρήστε ξανά τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4.31:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier ενός άλλου συνήθους σήματος ενέργειας, του

$$x(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0 \quad (4.437)$$

Λύση:

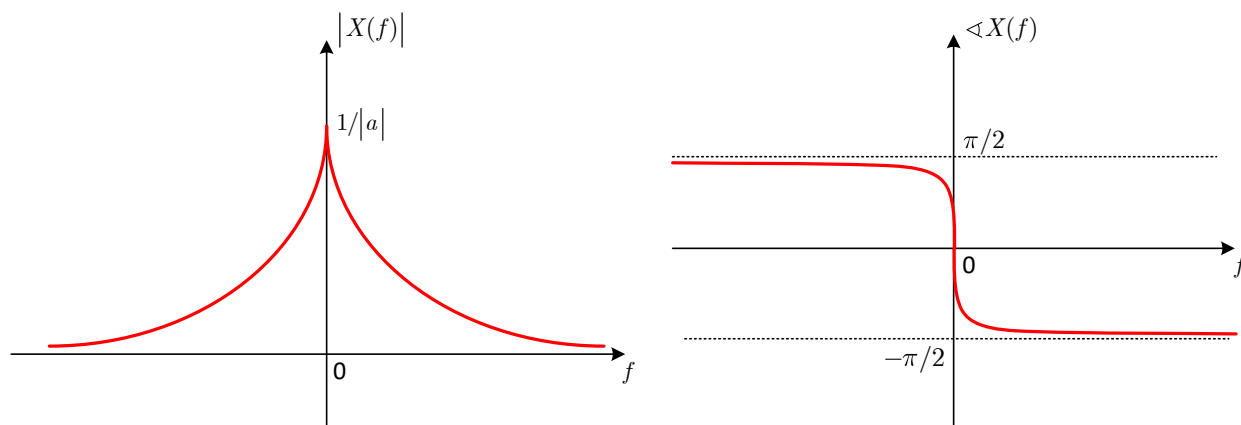
Είναι:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt \\ &= \frac{1}{-(a+j2\pi f)} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j2\pi f} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.438)$$

Εδώ τώρα πρέπει να σταματήσουμε. Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι για να μην αποκλίνει ένα τέτοιο όριο στο ∞ , θα πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι αρνητικό, ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν. Όμως το $a + j2\pi f$ είναι μιγαδικός αριθμός. Ως γνωστόν, οι μιγαδικοί αριθμοί δεν έχουν διάταξη, άρα το να πούμε ότι πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι θετικό ή αρνητικό είναι άνευ νοήματος! Όμως στην Παράγραφο 3.8.1 βρήκαμε τις τιμές αυτού του ορίου, στη Σχέση (3.350), την οποία επαναλαμβάνουμε για ευκολία εδώ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a+jb)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} e^{jbt} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \infty, & a > 0 \end{cases} \quad (4.439)$$

Για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα, θα πρέπει να είναι $a > 0$, οπότε τελικά



Σχήμα 4.50: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

$$X(f) = -\frac{1}{a + j2\pi f} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right) = -\frac{1}{a + j2\pi f} (0 - 1) = \frac{1}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (4.440)$$

Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, είναι

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (4.441)$$

Παρατηρήστε ότι ο μετασχ. Fourier είναι μιγαδικό σήμα, και μπορεί να διαχωριστεί στο άθροισμα του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους ως

$$X(f) = \Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} + j \frac{-2\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (4.442)$$

Το μέτρο και η φάση του δίνονται ως

$$|X(f)| = \frac{1}{|a + j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (4.443)$$

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{\Im\{X(f)\}}{\Re\{X(f)\}} = -\tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} \quad (4.444)$$

και φαίνονται στο Σχήμα 4.50. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τετραγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f| \rightarrow \infty$, ενώ η φάση παίρνει διακριτές τιμές, $\pm\pi/2$.

Παράδειγμα 4.32:

Ας υπολογίσουμε επίσης το μετασχ. Fourier ενός άλλου σήματος ενέργειας, του

$$x(t) = e^{at}u(-t), \quad a > 0 \quad (4.445)$$

Λύση:

Βλέπετε ότι μοιάζει αρκετά με το προηγούμενο παράδειγμα. Ας δούμε τι θα συμβεί. Έχουμε

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a - j2\pi f} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-j2\pi f)t} \right) \quad (4.446)$$

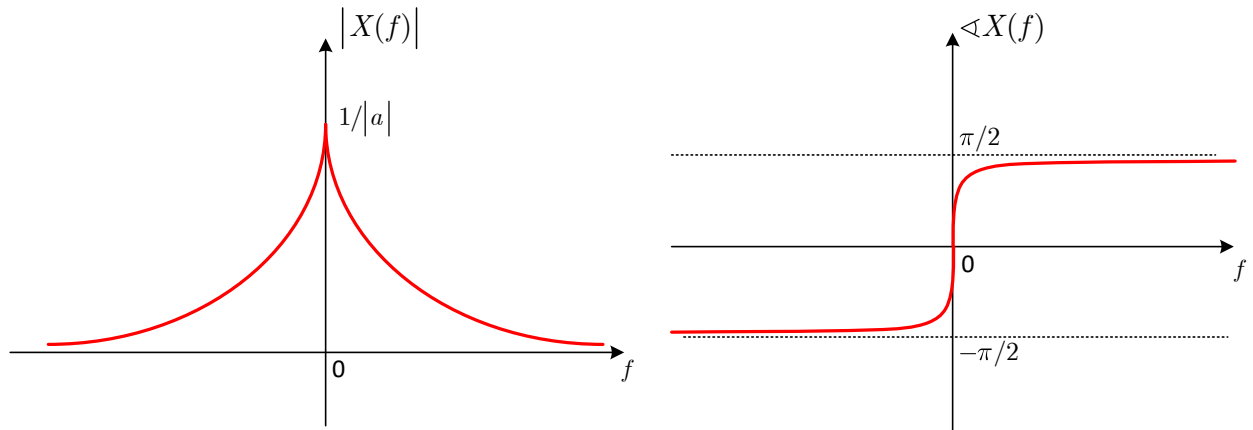
Με ακριβώς όμοιο με πριν σκεπτικό, η συνάρτηση e^{at} φθίνει στο 0 όταν $t \rightarrow -\infty$, **μόνο αν** $a > 0$, που ισχύει από υπόθεση. Άρα

$$X(f) = \frac{1}{a - j2\pi f} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-j2\pi f)t} \right) = \frac{1}{a - j2\pi f} (1 - 0) = \frac{1}{a - j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (4.447)$$

Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$, είναι

$$x(t) = e^{at}u(-t), \quad a > 0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (4.448)$$

Αν εξετάσουμε την πολική μορφή του μετασχηματισμού, τότε θα δούμε ότι είναι



Σχήμα 4.51: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$.

$$|X(f)| = \frac{1}{|a - j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (4.449)$$

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{\Im\{X(f)\}}{\Re\{X(f)\}} = \tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} \quad (4.450)$$

Το Σχήμα 4.51 απεικονίζει το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού. Παρατηρήστε ότι ενώ το μέτρο του μετασχ. Fourier είναι ίδιο με του Παραδείγματος 4.31, η φάση είναι αντίθετη! Αυτό σημαίνει ότι για να συνθέσουμε το σήμα $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ημίτονα ίδιου πλάτους με αυτά που συνθέτουν το $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, μόνο που οι φάσεις του θα είναι αντίθετες!

Παράδειγμα 4.33:

Τέλος, ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) = \delta(t) \quad (4.451)$$

Λύση:
Είναι

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = e^{j2\pi ft} \Big|_{t=0} = 1 \quad (4.452)$$

από τις γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. Άρα πολύ απλά

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(f) = 1 \quad (4.453)$$

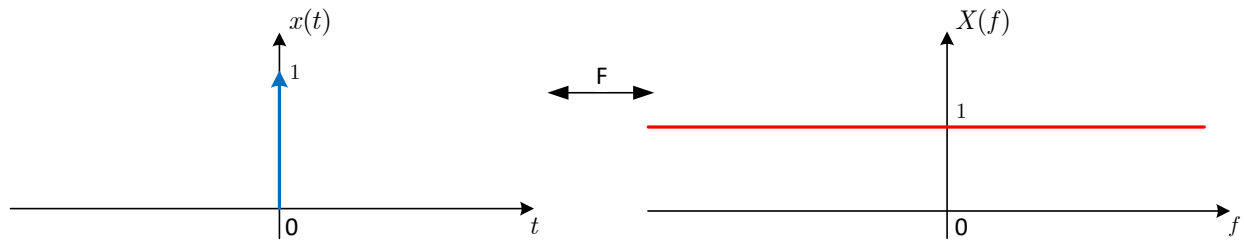
Το ζεύγος αυτό αναπαρίσταται στο Σχήμα 4.52. Ερμηνεύοντας αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να πούμε ότι για να συνθέσουμε ένα τόσο “ακαριαίο” σήμα στο χρόνο όπως το $x(t) = \delta(t)$ χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των δυνατών συχνοτήτων (όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα), με σταθερό, μοναδιαίο πλάτος και μηδενική φάση!

Παράδειγμα 4.34:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) = \delta(t - t_0) \quad (4.454)$$

Λύση:

Σχήμα 4.52: Σήμα $x(t) = \delta(t)$ και μετασχ. Fourier του.

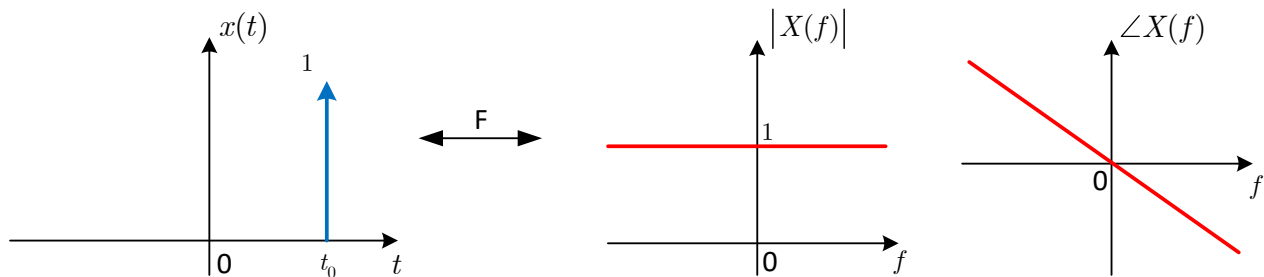
Είναι

$$F\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=t_0} = e^{-j2\pi ft_0} \quad (4.455)$$

από τις γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. Άρα πολύ απλά

$$x(t) = \delta(t - t_0) \longleftrightarrow X(f) = e^{-j2\pi ft_0} \quad (4.456)$$

Το ζεύγος αυτό αναπαρίσταται στο Σχήμα 4.53. Ερμηνεύοντας αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να πούμε ότι για

Σχήμα 4.53: Σήμα $x(t) = \delta(t)$ και μετασχ. Fourier του σε μέτρο και φάση.

να συνθέσουμε ένα τόσο “ακαριαίο” σήμα στο χρόνο όπως το $x(t) = \delta(t - t_0)$ χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των δυνατών συχνοτήτων (όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα), με σταθερό, μοναδιαίο πλάτος και γραμμική φάση!

Από τα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να εξάγουμε μερικές σχέσεις που θα είναι χρήσιμες στη συνέχεια:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df \quad (4.457)$$

$$\delta(t \pm t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t \pm t_0)} df \quad (4.458)$$

Ας δούμε και δυο παραδείγματα χρήσης αντίστροφου μετασχ. Fourier, του οποίου τα αποτελέσματα θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

Παράδειγμα 4.35:

Ας υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα στο χώρο της συχνότητας

$$X(f) = \delta(f) \quad (4.459)$$

Λύση:

Θα έχουμε τότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi ft} \Big|_{f=0} = 1 \quad (4.460)$$

Οπότε με αυτό το αποτέλεσμα βρήκαμε το μετασχ. Fourier του σταθερού σήματος! Άρα πολύ απλά

$$x(t) = 1 \longleftrightarrow X(f) = \delta(f) \quad (4.461)$$

Παράδειγμα 4.36:

Ας υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier της μετατοπισμένης συνάρτησης Δέλτα στο χώρο της συχνότητας

$$X(f) = \delta(f - f_0) \quad (4.462)$$

Λύση:

Θα έχουμε τότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_0 t} \Big|_{f=f_0} = e^{j2\pi f_0 t} \quad (4.463)$$

Άρα

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \delta(f - f_0) \quad (4.464)$$

Από τα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να εξάγουμε μερικές σχέσεις που θα είναι χρήσιμες στη συνέχεια:

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.465)$$

$$\delta(f \pm f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f \pm f_0)t} dt \quad (4.466)$$

4.13 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Υπάρχουν πολλές ιδιότητες του μετασχ. Fourier που βοηθούν να αποφεύγουμε την επαναλαμβανόμενη χρήση του ορισμού. Στον Πίνακα 4.3 απεικονίζονται οι περισσότερες. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε καθεμιά από αυτές, παραθέτοντας και ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της.

4.13.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Fourier $X(f)$, και - όπου απαιτείται - ένα δεύτερο σήμα $y(t)$ έχει μετασχ. Fourier $Y(f)$.

4.13.1.1 Γραμμικότητα

Ο μετασχ. Fourier του αθροίσματος $z(t) = Ax(t) + By(t)$ δίνεται ως

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax(t) + By(t)) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.467)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Ax(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} By(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.468)$$

$$= A \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + B \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.469)$$

$$= AX(f) + BY(f) \quad (4.470)$$

Άρα

$$Ax(t) + By(t) \longleftrightarrow AX(f) + BY(f) \quad (4.471)$$

Παράδειγμα 4.37:

Έστω το σήμα

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0, \quad \forall t \quad (4.472)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Λύση:

Το παραπάνω σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο σημάτων ως

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \quad (4.473)$$

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(f)$ $Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f - f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X(\frac{f}{a})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυσικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Παραγωγή στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f) = X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\ X(f) = X(-f) , \\ \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$

Πίνακας 4.3: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier

με μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} = \frac{a - j2\pi f + a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)(a - j2\pi f)} \quad (4.474)$$

$$= \frac{2a}{(a + j2\pi f)(a - j2\pi f)} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (4.475)$$

4.13.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Ο μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = x(t - t_0)$ δίνεται ως

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi f(u - t_0)} du \quad (4.476)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi ft_0} e^{-j2\pi fu} du = e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi fu} du \quad (4.477)$$

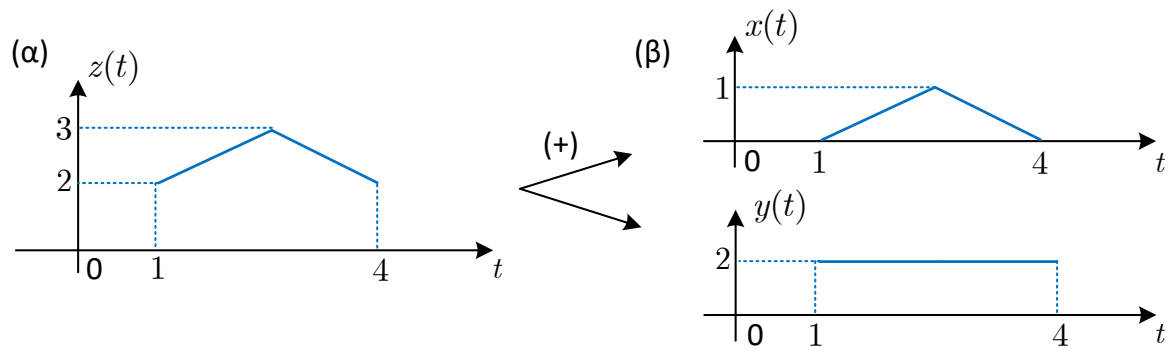
$$= X(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (4.478)$$

Οπότε

$$\boxed{x(t - t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0}} \quad (4.479)$$

Παράδειγμα 4.38:

Έστω το σήμα $z(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 4.54(α).



Σχήμα 4.54: Εφαρμογή της Χρονικής Μετατόπισης: σήματα $z(t), x(t), y(t)$.

Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Λύση:

Μπορεί κανείς να γράψει το $z(t)$ ως άθροισμα δυο μετατοπισμένων γνωστών σημάτων $x(t), y(t)$, τα οποία φαίνονται στο Σχήμα 4.54(β) ως

$$z(t) = x(t) + y(t) \quad (4.480)$$

Τα $x(t), y(t)$ είναι τα γνωστά μας σήματα

$$x(t) = \text{tri}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}\right) \longleftrightarrow X(f) = \frac{3}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{3}{2}f\right) e^{-j5\pi f} \quad (4.481)$$

$$y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{3}\right) \longleftrightarrow Y(f) = 6\text{sinc}(3f) e^{-j5\pi f} \quad (4.482)$$

Οπότε το $z(t)$ είναι

$$z(t) = \text{tri}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}\right) + \text{rect}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{3}\right) \quad (4.483)$$

και ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Z(f) = \frac{3}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{3}{2}f\right) e^{-j5\pi f} + 6\text{sinc}(3f) e^{-j5\pi f} \quad (4.484)$$

4.13.1.3 Μετατόπιση στη συχνότητα

Ο μετασχ. Fourier ενός σήματος $x(t)$ είναι $X(f)$. Έστω ότι μετατοπίζουμε το φάσμα κατά $f = \pm f_0$, με $f_0 > 0$, δηλ. έχουμε το $X(f \pm f_0)$. Το σήμα στο χρόνο $y(t)$ που αντιστοιχεί σε αυτό το φάσμα είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f \pm f_0) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{j2\pi(u \mp f_0)t} du \quad (4.485)$$

$$= e^{\mp j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{j2\pi u t} du = e^{\mp j2\pi f_0 t} x(t) \quad (4.486)$$

Παράδειγμα 4.39:

Έστω ένα σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, το οποίο πολλαπλασιάζεται με ένα ημίτονο συχνότητας f_0 και πλάτους 2, δηλ.

$$y(t) = 2x(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (4.487)$$

Εξετάστε τι συμβαίνει στο φάσμα του σήματος.

Λύση:

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = 2\left(\frac{1}{2}x(t)e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{j2\pi f_0 t}\right) \quad (4.488)$$

και από την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα έχουμε

$$Y(f) = X(f - f_0) + X(f + f_0) \quad (4.489)$$

Βλέπουμε ότι το φάσμα του σήματος $x(t)$ έχει μεταφερθεί γύρω από τις συχνότητες $f = \pm f_0$! ■

Αυτή η ιδιότητα είναι κεντρική στην εφαρμογή που παρουσιάστηκε στην αρχή του Κεφαλαίου: ένα σήμα μπορεί να μεταφερθεί σε διαφορετικές φασματικές περιοχές από αυτές που κανονικά ορίζεται, απλά πολλαπλασιάζοντας το σήμα με ένα ημιτονοειδές $2\cos(2\pi f_0 t)$! Φυσικά, διαφορετικές συχνότητες f_0 “στέλνουν” σε διαφορετικές συχνοτικές περιοχές το εκάστοτε σήμα. Με αυτόν τον τρόπο δουλεύει η AM ραδιοφωνία!

4.13.1.4 Συζυγές σήμα στο χρόνο

Για ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, το συζυγές σήμα $y(t) = x^*(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt \right)^* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^* = X^*(-f) \quad (4.490)$$

Παράδειγμα 4.40:

Ελέγξτε αν το σήμα με μετασχ. Fourier

$$X(f) = j\frac{\pi^2}{2f} \quad (4.491)$$

είναι πραγματικό ή όχι.

Λύση:

Για να είναι πραγματικό, δηλ. για να ισχύει ότι $x(t) = x^*(t)$, θα πρέπει να ισχύει ότι $X(f) = X^*(-f)$. Οπότε

$$X^*(-f) = \left(j\frac{\pi^2}{2(-f)} \right)^* = -j\frac{\pi^2}{(-2f)} = j\frac{\pi^2}{2f} = X(f) \quad (4.492)$$

άρα το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό.

4.13.1.5 Αντιστροφή στο χρόνο

Το σήμα $y(t) = x(-t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-j2\pi ft} dt = - \int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{j2\pi fu} du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{j2\pi fu} du = X(-f) \quad (4.493)$$

Παράδειγμα 4.41:

Στα Παραδείγματα 4.30-31 δείξαμε ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (4.494)$$

$$y(t) = e^{at}u(-t), \quad a > 0 \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (4.495)$$

Τα παραπάνω ζεύγη μπορούν να αποδειχθούν από την ιδιότητα της αντιστροφής στο χρόνο.

Λύση:

Είναι

$$x(-t) = e^{-a(-t)}u(-t) = e^{at}u(-t) = y(t) \longleftrightarrow X(-f) = \frac{1}{a + j2\pi(-f)} = \frac{1}{a - j2\pi f} = Y(f) \quad (4.496)$$

που αποτελεί το ζεύγος της Σχέσης (4.495).

4.13.1.6 Στάθμιση στο χρόνο

Ας θεωρήσουμε το σήμα $y(t) = x(at)$, $a > 0$. Ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u} du = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (4.497)$$

Για το σήμα $y(t) = x(at)$, $a < 0$, ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u} du = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u} du = -\frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (4.498)$$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (4.499)$$

Παράδειγμα 4.42:

Ας θεωρήσουμε το γνωστό μας σήμα

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (4.500)$$

το οποίο έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = T \text{sinc}(fT) \quad (4.501)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(2t)$.

Λύση:

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, θα έχουμε

$$x(2t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{2} X\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{T}{2} \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) \quad (4.502)$$

$$x\left(\frac{t}{2}\right) = \text{rect}\left(\frac{t/2}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \longleftrightarrow 2X(2f) = 2T \text{sinc}(2fT) \quad (4.503)$$

Τα παραπάνω απεικονίζονται στο Σχήμα 4.55. ■

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική γιατί μας πληροφορεί ότι **δεν μπορούμε να έχουμε μικρή διάρκεια τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας**. Αυτή η εγγενής ιδιότητα του μετασχ. Fourier είναι πολύ χρήσιμη στην ερμηνεία της φασματικής ανάλυσης σημάτων.

4.13.1.7 Συνέλιξη στο χρόνο

Ο μετασχ. Fourier της συνέλιξης δυο σημάτων στο χρόνο είναι

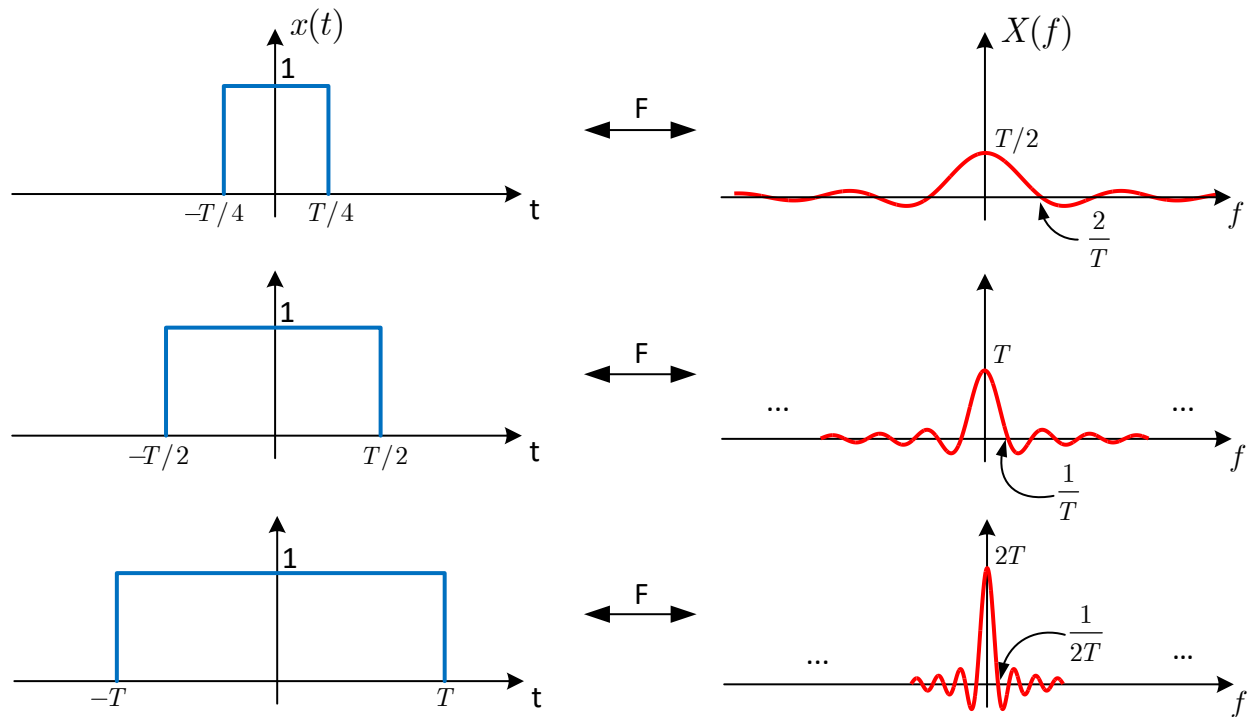
$$F\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t))e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.504)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-j2\pi ft} dt \right) d\tau = Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (4.505)$$

$$= X(f)Y(f) \quad (4.506)$$

όπου στις Σχέσεις (4.505) έγινε χρήση της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό. Μας πληροφορεί ότι **η πράξη της συνέλιξης στο χρόνο μετατρέπεται σε γινόμενο στο χώρο της συχνότητας**. Γνωρίζουμε ήδη ότι η συνέλιξη αποτελεί σημαντικότερη πράξη στο χώρο των συστημάτων. Αργότερα θα δούμε πως λειτουργεί αυτή η ιδιότητα στο χώρο της συχνότητας των συστημάτων. Προς το παρόν, ας δούμε πως η ιδιότητα αυτή, σε συνδυασμό με τη μέθοδο αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα μπορεί να δώσει το αποτέλεσμα που ζητάμε αρκετά πιο εύκολα.



Σχήμα 4.55: Εφαρμογή της Χρονικής Κλιμάκωσης: σήματα χρόνου και συχνότητας.

Παράδειγμα 4.43:

Έστω η συνέλιξη μεταξύ δυο σημάτων

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \quad (4.507)$$

$$y(t) = e^t u(-t) \quad (4.508)$$

Υπολογίστε τη τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας.

Λύση:

Για το πεδίο του χρόνου, θα χρησιμοποιήσουμε την αλγεβρική λύση για λόγους συντομίας. Έχουμε

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau}u(-\tau)e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \quad (4.509)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$u(-\tau) = 1, \tau < 0 \text{ και } u(t-\tau) = 1, \tau < t \quad (4.510)$$

οπότε

$$c_{xy}(t) = e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau}u(-\tau)e^{2\tau}u(t-\tau)d\tau = e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{3\tau}u(-\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (4.511)$$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή του t .

- $t > 0$: έχουμε

$$c_{xy}(t) = e^{-2t} \int_{-\infty}^0 e^{3\tau}d\tau = e^{-2t} \left[\frac{1}{3}e^{3\tau} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{3}e^{-2t}(1-0) = \frac{1}{3}e^{-2t} \quad (4.512)$$

- $t < 0$: έχουμε

$$c_{xy}(t) = e^{-2t} \int_{-\infty}^t e^{3\tau}d\tau = e^{-2t} \left[\frac{1}{3}e^{3\tau} \right]_{-\infty}^t = \frac{1}{3}e^{-2t}(e^{3t}-0) = \frac{1}{3}e^t \quad (4.513)$$

Οπότε συνολικά

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{3}e^t u(-t) \quad (4.514)$$

Περνώντας στο πεδίο της συχνότητας έχουμε

$$X(f) = \frac{1}{2 + j2\pi f} \quad (4.515)$$

$$Y(f) = \frac{1}{1 - j2\pi f} \quad (4.516)$$

σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά παραδείγματα της Παραγράφου 4.12.2. Το γινόμενο τους δίνει

$$C_{xy}(f) = X(f)Y(f) = \frac{1}{(2 + j2\pi f)(1 - j2\pi f)} \quad (4.517)$$

το οποίο μπορούμε να αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα ως

$$C_{xy}(f) = \frac{A}{2 + j2\pi f} + \frac{B}{1 - j2\pi f} \quad (4.518)$$

με

$$A = \frac{1}{(2 + j2\pi f)(1 - j2\pi f)}(2 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -2} = \frac{1}{1 - j2\pi f} \Big|_{j2\pi f = -2} = \frac{1}{3} \quad (4.519)$$

$$B = \frac{1}{(2 + j2\pi f)(1 - j2\pi f)}(1 - j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = 1} = \frac{1}{2 + j2\pi f} \Big|_{j2\pi f = 1} = \frac{1}{3} \quad (4.520)$$

Άρα

$$C_{xy}(f) = \frac{1}{3} \frac{1}{2 + j2\pi f} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - j2\pi f} \quad (4.521)$$

και από τα παραδείγματα της Παραγράφου 4.12.2 βλέπουμε ότι

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{3}e^t u(-t) \quad (4.522)$$

το οποίο είναι ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με το πεδίο του χρόνου! - αλλά με πιο εύκολο τρόπο.

4.13.1.8 Δυσικότητα

Είναι

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (4.523)$$

Θέτουμε $u = -t$, και τότε

$$x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi fu} du \quad (4.524)$$

και αλλάζοντας τις μεταβλητές u, f μεταξύ τους, έχουμε

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{-j2\pi fu} du = F\{X(t)\} \quad (4.525)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σπουδαίο, γιατί εκτός των άλλων, **για κάθε ζεύγος μετασχηματισμού Fourier, μας δίνει άλλο ένα (το δυικό του)!**

Παράδειγμα 4.44:

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$X(t) = AT \operatorname{sinc}(Tt) \quad (4.526)$$

Λύση:

Σύμφωνα με το θεώρημα της δυικότητας, ο μετασχ. Fourier του θα είναι

$$x(-f) = \text{Arect}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{Arect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (4.527)$$

λόγω αρτιότητας της συνάρτησης $\text{rect}(\cdot)$.

4.13.1.9 Πολλαπλασιασμός στο χρόνο

Ο μετασχ. Fourier του γινομένου δυο σημάτων στο χρόνο είναι

$$F\{x(t)y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.528)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut} du \right) y(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.529)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-u)t} dt \right) du \quad (4.530)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)du \quad (4.531)$$

$$= X(f) * Y(f) \quad (4.532)$$

Άρα το γινόμενο δυο σημάτων στο χρόνο μετατρέπεται σε συνέλιξη στο χώρο της συχνότητας.

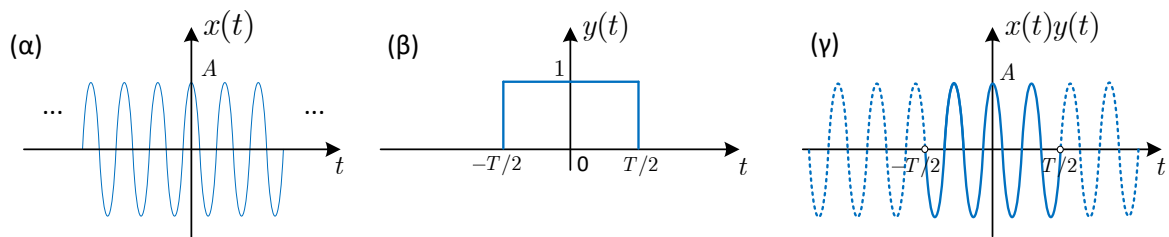
Παράδειγμα 4.45:

Ας θεωρήσουμε δυο απλά σήματα, τα

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (4.533)$$

$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (4.534)$$

Τα σήματα αυτά, καθώς και το γινόμενο $x(t)y(t)$ φαίνονται στο Σχήμα 4.56.



Σχήμα 4.56: Εφαρμογή του Γινομένου στο Χρόνο: σήματα (α) $x(t)$, (β) $y(t)$, (γ) $x(t)y(t)$.

Βρείτε το μετασχ. Fourier του γινομένου τους.

Λύση:

Παρατηρήστε ότι το γινόμενο ενός σήματος με το τετραγωνικό παλμό “κόβει” ένα τμήμα του σήματος που αντιστοιχεί στη διάρκεια του παλμού. Αναζητούμε πλέον το μετασχ. Fourier του σήματος $z(t) = x(t)y(t)$. Η ιδιότητα του γινομένου στο χρόνο δηλώνει ότι ο μετασχ. Fourier ενός γινομένου σημάτων ισούται με τη συνέλιξη των μετασχ. Fourier τους. Γνωρίζουμε ότι

$$X(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0) \quad (4.535)$$

$$Y(f) = T \text{sinc}(fT) \quad (4.536)$$

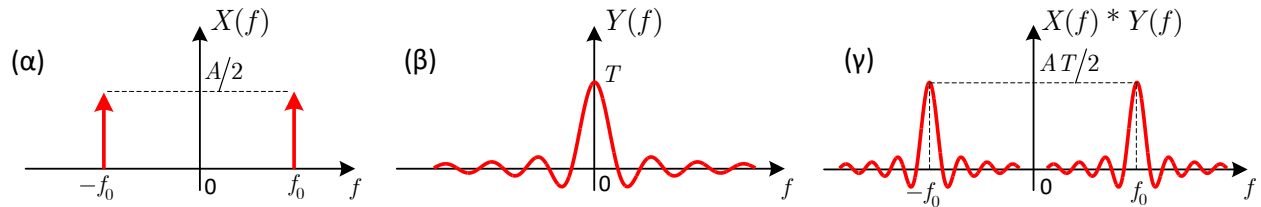
Το $X(f)$ αποτελείται από συναρτήσεις Δέλτα, και η ιδιότητα

$$X(f) * \delta(f - f_0) = X(f - f_0) \quad (4.537)$$

μας είναι πολύ χρήσιμη. Άρα τελικά

$$Z(f) = X(f) * Y(f) = \frac{AT}{2} \text{sinc}(T(f - f_0)) + \frac{AT}{2} \text{sinc}(T(f + f_0)) \quad (4.538)$$

Τα σήματα αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 4.57. Το παράδειγμα αυτό είναι μια καλή ευκαιρία να σκεφτεί κανείς



Σχήμα 4.57: Εφαρμογή του Γινομένου στο Χρόνο: σήματα (α) $X(f)$, (β) $Y(f)$, (γ) $X(f) * Y(f)$.

την επιρροή της διάρκειας του τετραγωνικού παλμού στο φάσμα πλάτους. Τι συμβαίνει στο φάσμα πλάτους του γινομένου των σημάτων όταν η διάρκεια του τετραγωνικού παλμού είναι μεγάλη; Τι συμβαίνει όταν είναι μικρή;

4.13.1.10 Παραγωγή στη συχνότητα

Παραγωγίζοντας το μετασχ. Fourier $X(f)$ του σήματος $x(t)$ έχουμε

$$\frac{d}{df} X(f) = \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{d}{df} e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.539)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (-j2\pi t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-j2\pi t x(t)) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.540)$$

$$= -j2\pi F\{tx(t)\} \quad (4.541)$$

$$F\{tx(t)\} = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f) \quad (4.542)$$

Παράδειγμα 4.46:

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$y(t) = te^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (4.543)$$

Λύση:

Θα ήταν χρονοβόρο να λύσει κανείς το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού αναλυτικά. Με χρήση της ιδιότητας της παραγωγής στη συχνότητα, έχουμε

$$y(t) = te^{-at}u(t) = tx(t) \quad (4.544)$$

με $x(t) = e^{-at}u(t)$. Άρα

$$Y(f) = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f) = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{1}{(a + j2\pi f)^2} \quad (4.545)$$

4.13.1.11 Παραγωγή στο χρόνο

Το σήμα $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.546)$$

$$= x(t) e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.547)$$

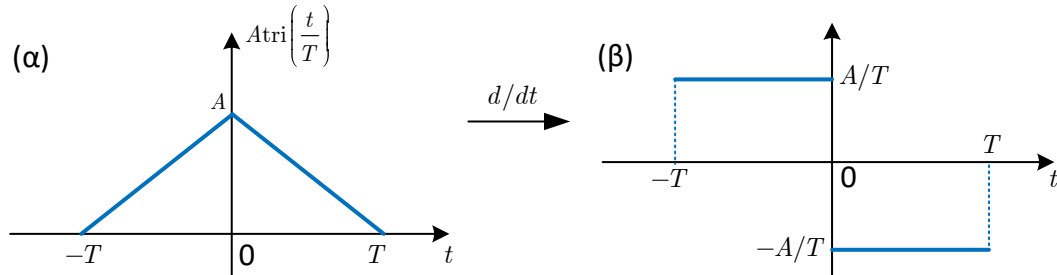
$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) e^{-j2\pi ft}) - \lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t) e^{-j2\pi ft}) + j2\pi f X(f) \quad (4.548)$$

$$= j2\pi f X(f) \quad (4.549)$$

διότι το $x(t)$ φθίνει στο μηδέν όταν $t \rightarrow \pm\infty$, αφού έχει μετασχ. Fourier (και άρα είναι σήμα ενέργειας).

Παράδειγμα 4.47:

Ας αποδείξουμε ξανά τη Σχέση (4.425), αυτή τη φορά με λιγότερες πράξεις, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγωγισής. Το Σχήμα 4.58 δείχνει το σήμα τριγωνικού παλμού, καθώς και την παράγωγό του.



Σχήμα 4.58: Εφαρμογή της Παραγωγισής στο Χρόνο: σήματα (α) σήμα τριγωνικού παλμού, (β) παράγωγος τριγωνικού παλμού.

Λύση:

Η παράγωγος αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς οι οποίοι γράφονται ως

$$\frac{d}{dt} \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (4.550)$$

Με την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης, ο μετασχ. Fourier της παραγώγου του σήματος είναι

$$F\left\{\frac{d}{dt} \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = F\left\{\frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)\right\} \quad (4.551)$$

$$= A \text{sinc}(fT) e^{j\pi fT} - A \text{sinc}(fT) e^{-j\pi fT} \quad (4.552)$$

$$= A \text{sinc}(fT) (e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) \quad (4.553)$$

$$= j2A \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT) \quad (4.554)$$

Όμως η ιδιότητα της παραγώγου μας δίνει ότι

$$F\left\{\frac{d}{dt} \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = j2\pi f F\left\{AT \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} \quad (4.555)$$

$$j2A \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT) = j2\pi f F\left\{AT \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} \quad (4.556)$$

$$F\left\{\text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \frac{A \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi f} \quad (4.557)$$

$$= \frac{AT \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi fT} \quad (4.558)$$

$$= AT \text{sinc}(fT) \text{sinc}(fT) \quad (4.559)$$

$$= AT \text{sinc}^2(fT) \quad (4.560)$$

4.13.1.12 Ολοκλήρωση στο χρόνο

Σε αυτήν την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα αποτέλεσμα που αποδεικνύεται στη συνέχεια του βιβλίου. Το σήμα $y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$ μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = x(t) * u(t) \quad (4.561)$$

όπου $u(t)$ η γνωστή μας βηματική συνάρτηση. Με χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο, έχουμε

$$Y(f) = X(f)U(f) \quad (4.562)$$

Στην Παράγραφο 4.16 αποδεικνύουμε ότι

$$U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (4.563)$$

οπότε

$$Y(f) = X(f)U(f) = \frac{X(0)}{2}\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} \quad (4.564)$$

Παράδειγμα 4.48:

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (4.565)$$

με $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (4.566)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα, θα είναι

$$Y(f) = \frac{X(0)}{2} + X(f)\frac{1}{j2\pi f} = \frac{1}{2a}\delta(f) + \frac{1}{(a + j2\pi f)j2\pi f} \quad (4.567)$$

Κάνοντας αναλυτικά την ολοκλήρωση, έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a}e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t) \quad (4.568)$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει αυτούς τους μετασχηματισμούς, οπότε

$$Y(f) = \frac{1}{2a}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi af} - \frac{1}{a} \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (4.569)$$

και μετά από πράξεις,

$$Y(f) = \frac{1}{2a}\delta(f) + \frac{1}{(a + j2\pi f)(j2\pi f)} \quad (4.570)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της ιδιότητας.

4.13.1.13 Συζυγής συμμετρία

Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, δηλ. ισχύει ότι $x(t) = x^*(t)$, τότε

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.571)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt \right)^* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^* \quad (4.572)$$

$$= X^*(-f) \quad (4.573)$$

Από την παραπάνω σχέση, εξάγουμε ότι

$$X(f) = X^*(-f) \quad (4.574)$$

$$\Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\} - j\Im\{X(-f)\} \quad (4.575)$$

$$\Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\} \text{ και } \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\} \quad (4.576)$$

Επίσης, η πολική μορφή της Σχέσης (4.574) δίνει

$$X(f) = X^*(-f) \quad (4.577)$$

$$|X(f)|e^{j\phi_x(f)} = |X(-f)|e^{-j\phi_x(-f)} \quad (4.578)$$

$$|X(f)| = |X(-f)| \text{ και } \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \quad (4.579)$$

Άρα, για πραγματικά σήματα, το φάσμα πλάτους είναι άρτια συνάρτηση του f ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτηση του f .

Παράδειγμα 4.49:

Για το μετασχ. Fourier ενός σήματος ισχύει ότι

- $|X(f)| = (u(f+3) - u(f-3))$
- $\phi_x(f) = -3\pi f$

Ελέγξτε αν το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό και στη συνέχεια βρείτε το.

Λύση:

Αφού γνωρίζουμε το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού, μπορούμε να τον βρούμε ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)} = (u(f+3) - u(f-3))e^{j(-3\pi f)} \quad (4.580)$$

και βλέπουμε ότι

$$|X(f)| = |X(-f)| \text{ και } \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \quad (4.581)$$

άρα το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$u(f+3) - u(f-3) = \text{rect}\left(\frac{f}{6}\right) \quad (4.582)$$

Θα έχουμε

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = F^{-1}\left\{\text{rect}\left(\frac{f}{6}\right)e^{j(-3\pi f)}\right\} \quad (4.583)$$

$$= F^{-1}\left\{\text{rect}\left(\frac{f}{6}\right)e^{j(-3\pi f)}\right\} \quad (4.584)$$

$$= F^{-1}\left\{\text{rect}\left(\frac{f}{6}\right)\right\} * F^{-1}\{e^{j(-2\pi \frac{3}{2}f)}\} \quad (4.585)$$

λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο. Στη συνέχεια,

$$x(t) = 6\text{sinc}(6t) * \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) \quad (4.586)$$

$$= 6\text{sinc}(6(t - 3/2)) \quad (4.587)$$

$$= 6\text{sinc}(6t - 9) \quad (4.588)$$

από την ιδιότητα της συνέλιξης σήματος με τη συνάρτηση δέλτα και λόγω αρτιότητας της συνάρτησης sinc.

4.13.1.14 Άρτιο σήμα

Αν το σήμα είναι άρτιο, ισχύει $x(t) = x(-t)$, και τότε το φανταστικό μέρος του μετασχ. Fourier είναι

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (4.589)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$I(f) = 0 \quad (4.590)$$

Οπότε

$$X(f) = R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (4.591)$$

με την αλλαγή των άκρων του ολοκληρώματος να οφείλεται στο ότι το γινόμενο δυο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, και το ολοκλήρωμα αυτής σε συμμετρικό διάστημα $[-a, a]$ μπορεί να γραφεί ως το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο διάστημα $[0, a]$.

Παράδειγμα 4.50:

Ο γνωστός μας τετραγωνικός παλμός

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (4.592)$$

είναι ένα άρτιο σήμα. Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Λύση:

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier του ως

$$X(f) = F\{\text{Arect}(t/T)\} = 2 \int_0^{T/2} A \cos(2\pi ft) dt \quad (4.593)$$

$$= 2A \left[\frac{1}{2\pi f} \sin(2\pi ft) \right]_0^{T/2} = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T) \quad (4.594)$$

$$= AT \text{sinc}(fT) \quad (4.595)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τον κλασικό ορισμό του μετασχηματισμού.

4.13.1.15 Περιττό σήμα

Αν το σήμα είναι περιττό, ισχύει $x(t) = -x(-t)$, και τότε το πραγματικό μέρος του μετασχ. Fourier είναι

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (4.596)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$R(f) = 0 \quad (4.597)$$

Οπότε

$$X(f) = jI(f) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = -j2 \int_0^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (4.598)$$

με την αλλαγή των άκρων του ολοκληρώματος να οφείλεται στο ότι το γινόμενο δυο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, και το ολοκλήρωμα αυτής σε συμμετρικό διάστημα $[-a, a]$ μπορεί να γραφεί ως το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο διάστημα $[0, a]$.

Παράδειγμα 4.51:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{t} \quad (4.599)$$

του οποίου ζητούμε το μετασχ. Fourier.

Λύση:

Το σήμα $x(t)$ είναι περιττό, και άρα ο μετασχ. Fourier θα έχει μόνο φανταστικό μέρος, δηλ.

$$X(f) = jI(f) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = -j2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{t} dt \quad (4.600)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t} dt = \begin{cases} \pi/2, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -\pi/2, & a < 0 \end{cases} \quad (4.601)$$

οπότε ο μετασχ. Fourier $X(f)$ είναι

$$X(f) = \begin{cases} -j\pi, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ j\pi, & f < 0 \end{cases} \quad (4.602)$$

4.13.1.16 Άρτιο μέρος

Το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad (4.603)$$

και άρα

$$F\{x_e(t)\} = \frac{1}{2}F\{x(t)\} + \frac{1}{2}F\{x(-t)\} = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}X(-f) \quad (4.604)$$

$$= \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}X^*(f) = \frac{1}{2}2\Re\{X(f)\} \quad (4.605)$$

$$= \Re\{X(f)\} \quad (4.606)$$

Παράδειγμα 4.52:

Το άρτιο μέρος του σήματος

$$x(t) = 2e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (4.607)$$

είναι το σήμα

$$x_e(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad (4.608)$$

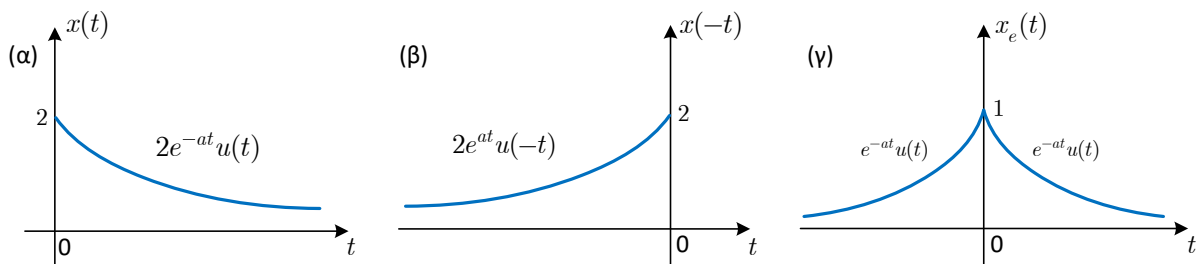
Βρείτε το μετασχ. Fourier του, $X_e(f)$.

Λύση:

Το σήμα $x_e(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$e^{-a|t|} = e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t) = x_e(t) \quad (4.609)$$

Η παραπάνω διάσπαση φαίνεται στο Σχήμα 4.59. Γνωρίζουμε ότι



Σχήμα 4.59: (α): σήμα $x(t)$, (β) σήμα $x(-t)$, (γ) $x_e(t)$: άρτιο μέρος του $x(t)$.

$$x(t) = 2e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{2}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (4.610)$$

και άρα ο μετασχ. Fourier του $x_e(t)$ θα είναι

$$X_e(f) = \Re\{X(f)\} = \Re\left\{\frac{2}{a + j2\pi f}\right\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (4.611)$$

4.13.1.17 Περιττό μέρος

Το περιττό μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (4.612)$$

και άρα

$$F\{x_o(t)\} = \frac{1}{2}F\{x(t)\} - \frac{1}{2}F\{x(-t)\} = \frac{1}{2}X(f) - \frac{1}{2}X(-f) \quad (4.613)$$

$$= \frac{1}{2}X(f) - \frac{1}{2}X^*(f) = j\frac{1}{2}\Im\{X(f)\} \quad (4.614)$$

$$= j\Im\{X(f)\} \quad (4.615)$$

Παράδειγμα 4.53:

Το περιττό μέρος του σήματος

$$x(t) = 2e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (4.616)$$

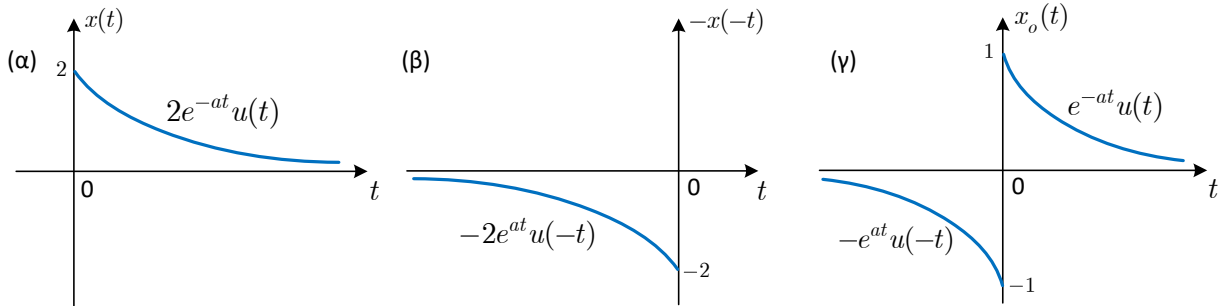
είναι το σήμα

$$x_o(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t), \quad a > 0 \quad (4.617)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του, $X_o(f)$.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 4.60. Γνωρίζουμε ότι



Σχήμα 4.60: (α): σήμα $x(t)$, (β) σήμα $-x(-t)$, (γ) $x_o(t)$: περιττό μέρος του $x(t)$.

$$x(t) = 2e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{2}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (4.618)$$

και άρα ο μετασχ. Fourier του $x_o(t)$ θα είναι

$$X_o(f) = j\Im\{X(f)\} = j\Im\left\{\frac{2}{a + j2\pi f}\right\} = -j\frac{4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (4.619)$$

4.13.1.18 Θεώρημα του Parseval

Ξεκινώντας από το αριστερό μέλος και για ένα εν γένει μιγαδικό σήμα $x(t)$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)e^{j2\pi ut} du \right)^* dt \quad (4.620)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)e^{-j2\pi ut} du dt \quad (4.621)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(u) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t} dt du df \quad (4.622)$$

Όμως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t} dt = \delta(f-u) \quad (4.623)$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u) \delta(f-u) du \right) df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (4.624)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει με όμοιο τρόπο τη γενικότερη σχέση του Parseval, η οποία είναι η

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df \quad (4.625)$$

Παράδειγμα 4.54:

Δείξαμε νωρίτερα ότι

$$x(t) = e^{-at} u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (4.626)$$

Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος.

Λύση:

Η ενέργεια του σήματος είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} \quad (4.627)$$

Ας δείξουμε ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα μέσω του χώρου της συχνότητας.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{a + j2\pi f} \right|^2 df \quad (4.628)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df \quad (4.629)$$

λόγω άρτιας συμμετρίας της συνάρτησης εντός του ολοκληρώματος. Γνωρίζουμε ότι

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \Big|_{c_1}^{c_2} \quad (4.630)$$

Άρα η Σχέση (4.629) μας δίνει

$$E_x = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df = \frac{2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{a}{2\pi} \right)^2 + f^2} df \quad (4.631)$$

$$= \frac{1}{a\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\pi f}{a} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a\pi} \left(\lim_{f \rightarrow +\infty} \tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} - \tan^{-1}(0) \right) \quad (4.632)$$

$$= \frac{1}{a\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2a} \quad (4.633)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε στο πεδίο του χρόνου.

Παρατηρήσεις

(α') Έχουμε μιλήσει για τα σήματα ισχύος, που είναι άπειρα σε διάρκεια, κι έχουν πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια. Στον αντίποδα, υπάρχουν τα σήματα ενέργειας, που έχουν πεπερασμένη ενέργεια και μηδενική ισχύ. Θυμίζουμε ότι σήματα ενέργειας είναι τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad (4.634)$$

μια σχέση που μοιάζει με τη Σχέση (4.406) αλλά όχι ακριβώς. Τα σήματα ενέργειας έχουν ΠΑΝΤΑ

μετασχηματισμό Fourier.

- (β') Αξίζει να αναφέρουμε ότι κι εδώ ισχύει η ιδέα της προβολής που είδαμε στις σειρές Fourier. Μόνο που εδώ δεν προβάλλουμε το σήμα σε εκθετικά συγκεκριμένων συχνοτήτων kf_0 , αλλά σε εκθετικά όλων των συχνοτήτων!
- (γ') Τέλος, ένα σημαντικό, όσο και αξιοθαύμαστο, στοιχείο που αξίζει να αναφερθεί είναι το εξής: τόσο στις Σειρές Fourier, όσο και στο μετασχ. Fourier, ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ αναπαρίσταται (ή αλλιώς, μπορεί να συντεθεί) από μιγαδικά εκθετικά, που στην περίπτωση των πραγματικών σημάτων είναι συνημίτονα (είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier σχετίζεται στενά με τις σειρές Fourier). Ός γνωστόν, τα συνημίτονα έχουν άπειρη διάρκεια. Σκεφτείτε το λίγο: ένα μη περιοδικό σήμα που είναι, για παράδειγμα, μη μηδενικό σε ένα διάστημα $[a, b]$ και μηδέν παντού αλλού, μπορεί να αναπαρασταθεί ΑΚΡΙΒΩΣ ως ένα άθροισμα άπειρων σε διάρκεια συνημιτόνων!

Το φάσμα $X(f)$ περιέχει άπειρα μιγαδικά εκθετικά (ή συνημίτονα) που ξεκινούν από το $-\infty$ και διαρκούν για πάντα. Τα πλάτη και οι φάσεις αυτών των συνιστωσών είναι τέτοια ώστε όταν τα προσθέσουμε, παίρνουμε ΑΚΡΙΒΩΣ το σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[a, b]$, ενώ έξω από αυτό, οι συνιστώσες αυτές αθροίζονται στο μηδέν!!!! Αν “παίζαμε” μόνοι μας με πλάτη και φάσεις άπειρου αριθμού συνημιτόνων για να πετύχουμε μια τόσο τέλεια, ακριβής, και λεπτή ισορροπία μεταξύ τους ώστε να ανακατασκευάζουμε ακριβώς το σήμα μας, θα ήταν αφάνταστα δύσκολο – πιθανώς αδύνατο – να τα καταφέρουμε! Κι όμως, ο μετασχ. Fourier (όπως και οι Σειρές Fourier) το πετυχαίνει με μεγάλη ευκολία, χωρίς πολλή σκέψη από μέρους μας. Μερικές φορές, μας απορροφούν τόσο τα μαθηματικά που ξεχνάμε να προσέξουμε μερικές τέτοιες, όμορφες, και θαυμαστές λεπτομέρειες...

4.14 Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

Ιδανικά, θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε τον μετασχ. Fourier και για σήματα ισχύος, όχι μόνο ενέργειας, ενοποιώντας τη θεωρία του μετασχ. Fourier για κάθε σήμα, ενέργειας ή ισχύος. Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό του μετασχ. Fourier σε ένα γνωστό περιοδικό σήμα ισχύος όπως το $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.635)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.636)$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε αυτά τα ολοκληρώματα!

Τι κάνουμε τότε; Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας *συνάρτηση Δέλτα*, που έχουμε ήδη δει. Με χρήση του ακόλουθου ζεύγους μετασχ. Fourier

$$e^{\mp j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f \pm f_0) \quad (4.637)$$

ο μετασχ. Fourier του δεδομένου σήματος θα είναι

$$X(f) = F\left\{\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \quad (4.638)$$

και άρα

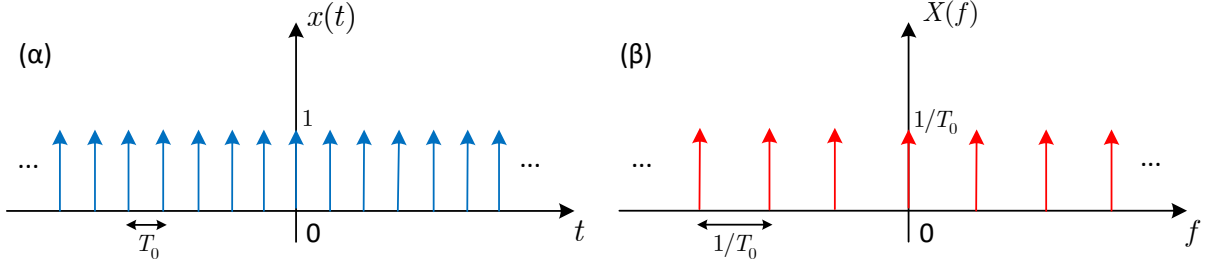
$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0) \quad (4.639)$$

Αφού λοιπόν κάθε περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ημιτόνων ή, γενικότερα, άθροισμα μιγαδικών εκθετικών $e^{j2\pi k f_0 t}$ μέσω της Σειράς Fourier, μπορούμε να βρούμε το μετασχ. Fourier ενός περιοδικού σήματος! Ας δούμε πως.

Ένα βασικό περιοδικό σήμα είναι η σειρά συναρτήσεων Δέλτα που φαίνεται στο Σχήμα 4.61(α) και που περιγράφεται μαθηματικά με την εξίσωση

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \quad (4.640)$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε μπορούμε να αναπτύξουμε ένα περιοδικό σήμα σε εκθετική Σειρά Fourier ως



Σχήμα 4.61: (α): σειρά συναρτήσεων Δέλτα στο πεδίο του χρόνου με περίοδο T_0 και (β) σειρά συναρτήσεων Δέλτα στο πεδίο της συχνότητας με περίοδο $1/T_0$, και (β) ο Μετασχηματισμός Fourier του (α).

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.641)$$

όπου οι συντελεστές Δ_k υπολογίζονται από τη σχέση

$$\Delta_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta_{T_0}(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \quad (4.642)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του συντελεστή Fourier, Δ_k στην Εξίσωση (4.641) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$e^{j2\pi k f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f - k f_0) \quad (4.643)$$

ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος της σειράς συναρτήσεων Δέλτα είναι

$$F\{\delta_{T_0}(t)\} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_0) = \frac{1}{T_0} \Delta_{1/T_0}(f) \quad (4.644)$$

Ο μετασχ. Fourier της σειράς συναρτήσεων Δέλτα φαίνεται στο Σχήμα 4.61(β). Όπως φαίνεται και από το σχήμα, ο μετασχ. Fourier είναι πάλι μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα, με περίοδο $1/T_0$ και πλάτος $1/T_0$.

Είναι πολύ σημαντικό να δούμε ποιό είναι το αποτέλεσμα της συνέλιξης ενός σήματος περιορισμένης ενέργειας (περιορισμένης διάρκειας στο χρόνο) με τη σειρά συναρτήσεων Δέλτα, $\delta_{T_0}(t)$. Από τον ορισμό της συνέλιξης είναι φανερό ότι για την συνέλιξη ισχύει η ιδιότητα της αντιμετάθεσης, η προσεταιριστική ιδιότητα καθώς και η επιμεριστική ιδιότητα. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ιδιότητα και θεωρώντας ένα σήμα ενέργειας $x(t)$ διάρκειας $B < T_0$, η συνέλιξη των δύο σημάτων θα είναι

$$x(t) * \delta_{T_0}(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \quad (4.645)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t - kT_0) \quad (4.646)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_0) \quad (4.647)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

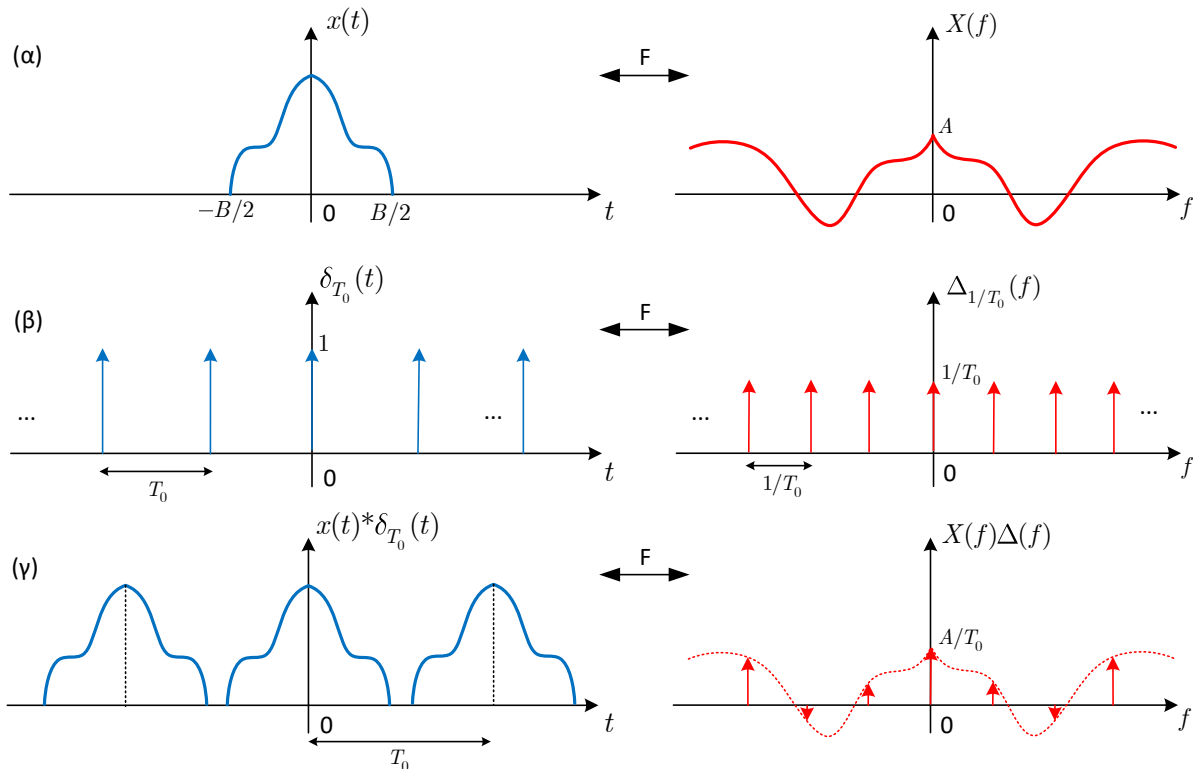
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (4.648)$$

Το αποτέλεσμα της συνέλιξης φαίνεται στο Σχήμα 4.62. Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του σήματος με τη σειρά συναρτήσεων Δέλτα με περίοδο T_0 έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T_0 .

Επομένως έχουμε έτσι έναν δεύτερο τρόπο να αναπαριστούμε ένα περιοδικό σήμα:

$$x(t + mT_0) = x(t, T_0) * \delta_{T_0}(t) \quad (4.649)$$

όπου $x(t, T_0)$ είναι η βασική περίοδος του σήματος και m ακέραιος αριθμός. Από την παραπάνω εξίσωση και γνωρίζοντας ότι η συνέλιξη στο χρόνο μετατρέπεται σε γινόμενο στη συχνότητα, μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier περιοδικών σημάτων. Πράγματι, ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος,



Σχήμα 4.62: Αριστερή στήλη: (α) σήμα ενέργειας διάρκειας B , (β) σειρά συναρτήσεων Δέλτα με περίοδο T_0 και (γ) το αποτέλεσμα της συνέλιξης των δύο παραπάνω σημάτων. Δεξιά στήλη: οι μετ. Fourier των αντίστοιχων σημάτων.

$x(t + mT)$, είναι

$$F\{x(t + mT_0)\} = F\{x(t, T_0)\} F\{\delta_{T_0}(t)\} = X(f, T_0) \frac{1}{T_0} \Delta_{1/T_0}(f) \quad (4.650)$$

όπου $X(f, T_0)$ είναι ο μετασχ. Fourier του σήματος ενέργειας $x(t, T_0)$. Προσέξτε: το σήμα $x(t, T_0)$ έχει μόνο διάρκεια T_0 , έξω από αυτό το διάστημα είναι παντού μηδέν, άρα είναι σήμα ενέργειας (ασχέτως αν το περιοδικό σήμα $x(t)$ είναι σήμα ισχύος).

Το μέγεθος

$$\left\{ \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \right\} \quad (4.651)$$

είναι συνεχές ως προς τη συχνότητα και ονομάζεται **φασματική περιβάλλουσα**. Ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος $x(t + mT_0)$ φαίνεται ενδεικτικά στο Σχήμα 4.62. Παρατηρούμε ότι το φάσμα είναι συνεχές ως προς τη συχνότητα. Όταν το συνεχές αυτό φάσμα πολλαπλασιαστεί με τη σειρά των συναρτήσεων Δέλτα, $\Delta_{1/T_0}(f)$ θα έχει ως αποτέλεσμα ένα διακριτό φάσμα. Με εξισώσεις, το παραπάνω περιγράφεται ως εξής:

$$F\{x(t + mT_0)\} = X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}, T_0\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \quad (4.652)$$

το οποίο επαναλαμβάνουμε ότι είναι διακριτό φάσμα σε αντίθεση με το συνεχές φάσμα του σήματος ενέργειας (δηλ. του σήματος της βασικής περιόδου).

4.15 Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

Παραπάνω αναφερθήκαμε στο δεύτερο τρόπο να αναπαραστήσουμε περιοδικά σήματα. Ποιος είναι ο πρώτος που έχουμε μάθει; Φυσικά η Σειρά Fourier. Γράφοντας το περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier μπορούμε να βρούμε ένα σύνδεσμο μεταξύ του διακριτού φάσματος που μόλις είδαμε και των συντελεστών του αναπτύγματος του περιοδικού σήματος σε Σειρά Fourier. Εχουμε δει ότι το εκθετικό ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού

σήματος είναι

$$x(t) = x(t + mT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.653)$$

όπου

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (4.654)$$

Ο μετασχ. Fourier του σήματος δίνεται από τη σχέση

$$F\{x(t + mT_0)\} = X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k F\{e^{j2\pi k f_0 t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - k f_0) \quad (4.655)$$

όπου $f_0 = 1/T_0$. Συγκρίνοντας τις Σχέσεις (4.652) και (4.655) είναι εύκολο να δούμε ότι

$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}, T_0\right) \quad (4.656)$$

Δηλαδή το διακριτό φάσμα δεν είναι τίποτα άλλο από τους συντελεστές Fourier X_k !

Εν κατακλείδει, για να υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier ενός περιοδικού σήματος, εκτελούμε τα παρακάτω δυο βήματα:

Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

- Υπολογίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier σε μια περίοδο του σήματος $x_{T_0}(t)$ (σαν να ήταν - που είναι - σήμα ενέργειας)
- Δειγματοληπτούμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής (θεμελιώδους) συχνότητας: $f = k f_0$ όπου $f_0 = 1/T_0$. Αυτή η δειγματοληψία μας δίνει τους συντελεστές X_k του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος.
- Υπολογίζουμε το μετασχ. Fourier ως

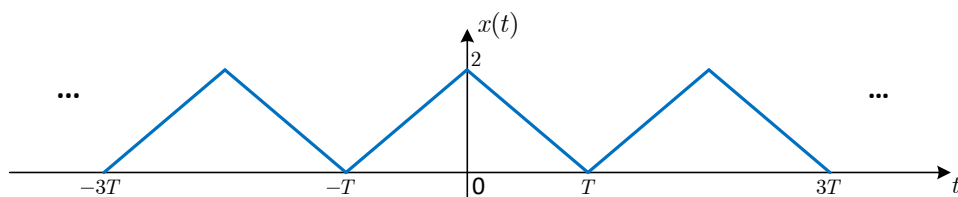
$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - k f_0) \quad (4.657)$$

Ένα πολύ ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι, όπως βλέπετε, το T_0 μπορεί να είναι οποιαδήποτε περίοδος! Με άλλα λόγια, μπορούμε από το φάσμα του μετασχ. Fourier, να βρούμε τους συντελεστές Fourier για οποιαδήποτε περίοδο του αντίστοιχου περιοδικού σήματος! Αυτό που συμβαίνει είναι ότι απλά δειγματοληπτούμε σε διαφορετικές αποστάσεις το φάσμα του μετασχηματισμού Fourier!

Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε και τον κουραστικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της Σειράς Fourier... δείτε πόσο απλά στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.55:

Βρείτε τους συντελεστές του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος του Σχήματος 4.63.



Σχήμα 4.63: Περιοδικό Τριγωνικό Σήμα Παραδείγματος 4.55

Λύση:

Θα βρούμε πρώτα το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος $x(t)$ και μετά θα δειγματοληπτήσουμε το φάσμα $X(f)$ για να βρούμε τους συντελεστές Fourier. Προφανώς το σήμα είναι περιοδικό μια περίοδο $T_0 = 2T$. Αν

απομονώσουμε μια περίοδό του, δηλ. τον κεντρικό τριγωνικό παλμό, αυτός γράφεται ως

$$x_{T_0}(t) = 2\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (4.658)$$

και έχει μετασχ. Fourier

$$X_{T_0}(f) = 2T\text{sinc}^2(fT) \quad (4.659)$$

Η περίοδος του περιοδικού σήματος είναι $T_0 = 2T$, άρα οι συντελεστές Fourier θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(f) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{2T} 2T\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2T}T\right) = \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττό} \quad (4.660)$$

που είναι και το ζητούμενο.

4.16 Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος - Μη Περιοδικά Σήματα

Επίσης, όταν το υπό εξέταση σήμα ισχύος δεν είναι περιοδικό, υπάρχουν άλλες τεχνικές για τον υπολογισμό του μετασχ. Fourier τέτοιων σημάτων. Για παράδειγμα, ένα σήμα ισχύος $\hat{x}(t)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα της μέσης τιμής του και ενός σήματος που έχει μηδενική μέση τιμή, δηλ.

$$\hat{x}(t) = x_0 + x_z(t) \quad (4.661)$$

όπου x_0 είναι η μέση τιμή του σήματος και $x_z(t)$ το τμήμα του σήματος με τη μηδενική μέση τιμή. Προφανώς, ο μετασχ. Fourier του θα είναι:

$$\hat{X}(f) = x_0\delta(f) + F\{x_z(t)\} \quad (4.662)$$

Αρκεί να βρούμε το μετασχ. Fourier του $x_z(t)$. Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.56:

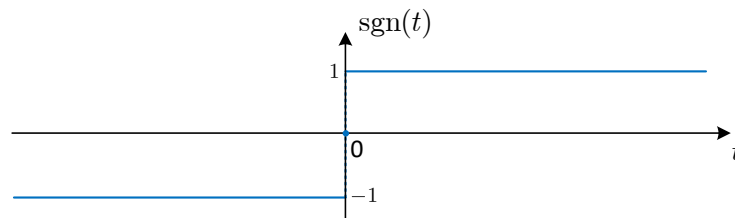
Έστω $x(t) = \text{sgn}(t)$ η συνάρτηση προσήμου

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \quad (4.663)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του $x(t)$.

Λύση:

Η συνάρτηση προσήμου φαίνεται στο Σχήμα 4.64 και προφανώς έχει μηδενική μέση τιμή. Άρα $x_z(t) = \text{sgn}(t)$ και



Σχήμα 4.64: Σήμα προσήμου $\text{sgn}(t)$

$x_0 = 0$, οπότε $x(t) = x_z(t)$. Παραγωγίζοντας το $x_z(t)$ έχουμε

$$\frac{d}{dt}x_z(t) = 2\delta(t) \quad (4.664)$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχ. Fourier, έχουμε

$$j2\pi f X_z(f) = 2F\{\delta(t)\} \iff j2\pi f X_z(f) = 2 \iff X_z(f) = \frac{1}{j\pi f} \quad (4.665)$$

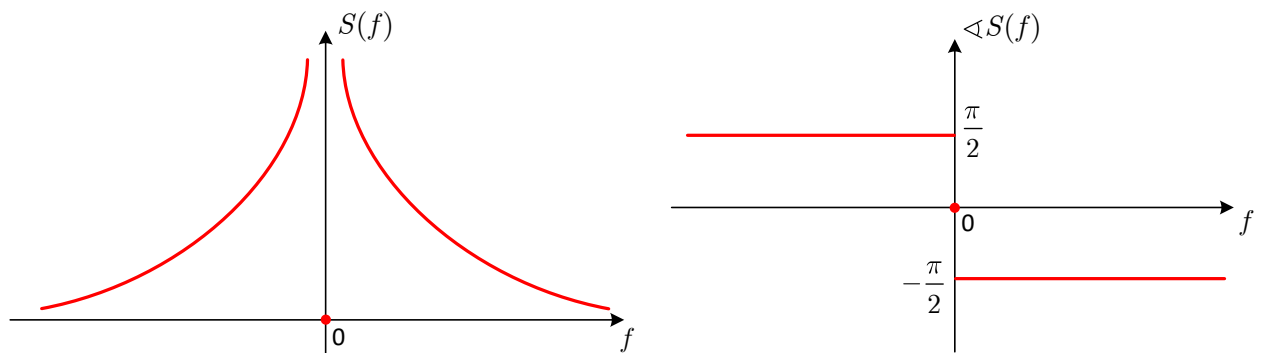
Άρα τελικά

$$x(t) = \text{sgn}(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{j\pi f} \quad (4.666)$$

Αναλύοντας το μετασχ. Fourier σε πολική μορφή, έχουμε

$$F\{\text{sgn}(t)\} = S(f) = \frac{1}{j\pi f} \implies |S(f)| = \frac{1}{\pi|f|}, \quad \phi_s(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0 \end{cases} \quad (4.667)$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 4.65.



Σχήμα 4.65: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \text{sgn}(t)$.

Παράδειγμα 4.57:

Η γνωστή βηματική συνάρτηση $x(t) = u(t)$ δεν έχει μηδενική μέση τιμή. Μπορεί όμως να γραφεί ως:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t) \quad (4.668)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier της.

Λύση:

Προφανώς $x_z(t) = \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$ και $x_0 = \frac{1}{2}$. Γνωρίζουμε όμως το μετασχ. Fourier της συνάρτησης προσήμου, οπότε τελικά η βηματική συνάρτηση έχει μετασχ. Fourier

$$x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (4.669)$$

Αναλύοντας ξανά σε πολική μορφή, θα είναι

$$F\{u(t)\} = U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \implies |U(f)| = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2\pi|f|}, \quad \phi_u(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0 \end{cases} \quad (4.670)$$

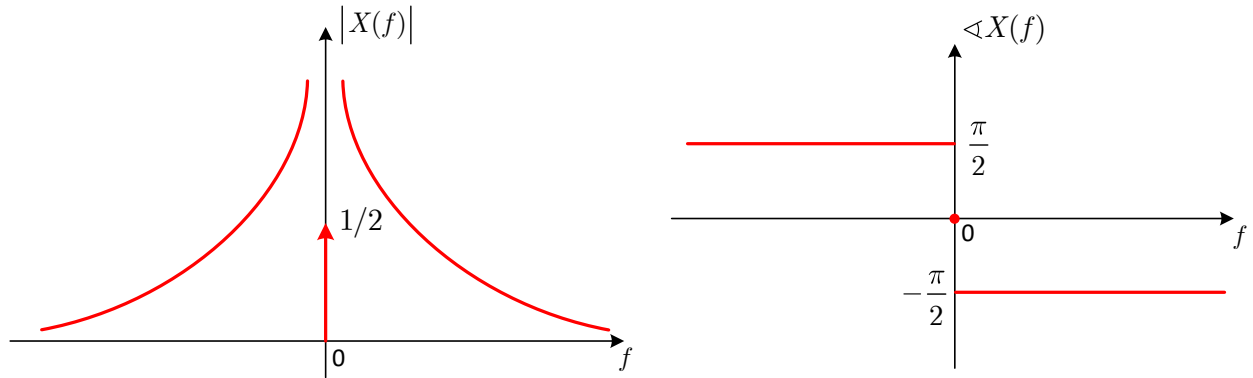
Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 4.66.

Φυσικά η παραπάνω ανάλυση για τα σήματα ισχύος έχει νόημα όταν η μέση τιμή του σήματος είναι μη μηδενική. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = e^{2t}u(t) \quad (4.671)$$

δεν έχει μέση τιμή, καθώς αυξάνει στο ∞ όσο $t \rightarrow \infty$. Ένα καλό κριτήριο – αλλά όχι και αναγκαίο – για την ύπαρξη του μετασχ. Fourier ενός σήματος ισχύος είναι το να είναι απολύτως φραγμένου πλάτους, δηλ.

$$|x(t)| < M, \quad M < \infty \quad (4.672)$$



Σχήμα 4.66: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = u(t)$.

όπως για παράδειγμα τα

$$x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t), z(t) = u(t), w(t) = \text{sgn}(t) \quad (4.673)$$

και άλλα που ικανοποιούν τη Σχέση (4.672).

Είναι αξιοσημείωτο ότι παρ' όλες τις τεχνικές που μπορούμε να εφαρμόσουμε για να βρούμε το μετασχ. Fourier σημάτων ισχύος, αυτός μπορεί να μην υπάρχει! Δεν είναι σίγουρο δηλαδή ότι ένα σήμα ισχύος έχει μετασχ. Fourier, όσες τεχνικές κι αν χρησιμοποιήσουμε. Οπότε τίθεται το πρόβλημα του τι μπορούμε να κάνουμε για να μελετήσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο τέτοιων σημάτων. Η απάντηση είναι ότι μελετούμε το μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης του σήματος, όπως θα δούμε αργότερα σε σχετικό κεφάλαιο.

4.17 Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Ο Πίνακας 4.4 δείχνει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που είναι πολύ χρήσιμα στην πράξη.

4.18 Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (4.674)$$

δε διαφέρει σε τίποτε στον τρόπο υπολογισμού του σε σχέση με τον ευθύ μετασχ. Fourier - είναι παρόμοια ολοκληρώματα και ως εκ τούτου χρησιμοποιούνται παρόμοιες τεχνικές για την εύρεση τους. Μάλιστα είδαμε κάποια παραδείγματα σχετικά.

Για τους σκοπούς μας θα χρησιμοποιήσουμε τα ζεύγη του Πίνακα 4.4, τις ιδιότητες του Πίνακα 4.3, και τη γνωστή μέθοδο του Αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα.

Ας δούμε μερικά ακόμη παραδείγματα εύρεσης του αντίστροφου μετασχ. Fourier.

Παράδειγμα 4.58:

Έστω ο μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{1}{2 - (2\pi f)^2 + j6\pi f} \quad (4.675)$$

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του παραπάνω σήματος.

Λύση:

Προσέξτε ότι

$$2 - (2\pi f)^2 + j6\pi f = 2 + (j2\pi f)^2 + j3(2\pi f) = (1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f) \quad (4.676)$$

Ο μετασχηματισμός γράφεται ως

$$X(f) = \frac{1}{2 - (2\pi f)^2 + j6\pi f} = \frac{1}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)} \quad (4.677)$$

Συνήθη ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2} e^{j\phi} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} e^{-j\phi} \delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2} e^{-j\phi} e^{-j\pi/2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} e^{j\phi} e^{j\pi/2} \delta(f + f_0)$
1	$\delta(f)$
$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \text{sinc}(fT)$
$\text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \text{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) u(t), a > 0$	$\frac{1}{2\pi f_0} \frac{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}{a + j2\pi f}$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) u(t), a > 0$	$\frac{1}{2\pi f_0} \frac{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}{a + j2\pi f}$
$e^{-a t }, \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at} u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$te^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
$-te^{at} u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at} u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^n}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2 f^2}{2}}$

Πίνακας 4.4: Πίνακας ζευγών μετασχ. Fourier

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα θα έχουμε

$$X(f) = \frac{1}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)} = \frac{A}{1 + j2\pi f} + \frac{B}{2 + j2\pi f} \quad (4.678)$$

με

$$A = X(f)(1 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -1} = \frac{1}{2 + j2\pi f} \Big|_{j2\pi f = -1} = 1 \quad (4.679)$$

$$B = X(f)(2 + j2\pi f) \Big|_{j2\pi f = -2} = \frac{1}{1 + j2\pi f} \Big|_{j2\pi f = -2} = -1 \quad (4.680)$$

και άρα

$$X(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} - \frac{1}{2 + j2\pi f} \quad (4.681)$$

Από τα ζεύγη μετασχηματισμών στους Πίνακες μας καταλήγουμε ότι

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \quad (4.682)$$

Παράδειγμα 4.59:

Δείξτε ότι

$$(\alpha') \quad \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \longleftrightarrow u(f)$$

$$(\beta') \quad \delta(t+T) + \delta(t-T) \longleftrightarrow 2\cos(2\pi fT)$$

$$(\gamma') \quad \delta(t+T) - \delta(t-T) \longleftrightarrow 2j\sin(2\pi fT)$$

Λύση:

α') Ξέρουμε ότι

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{j2\pi f} \iff u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi f} \quad (4.683)$$

Από την ιδιότητα της δυικότητας, έχουμε

$$\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi t} \longleftrightarrow u(-(-f)) = u(f) \quad (4.684)$$

β') Ξέρουμε ότι

$$\cos(2\pi Tt) \xrightarrow{F} \delta(f-T) + \delta(f+T) \quad (4.685)$$

Από την ιδιότητα της δυικότητας, έχουμε

$$\delta(t-T) + \delta(t+T) \longleftrightarrow 2\cos(2\pi T(-f)) = 2\cos(2\pi fT) \quad (4.686)$$

γ') Ξέρουμε ότι

$$2j\sin(2\pi Tt) \longleftrightarrow \delta(f-T) - \delta(f+T) \quad (4.687)$$

Από την ιδιότητα της δυικότητας, έχουμε

$$\delta(t-T) - \delta(t+T) \longleftrightarrow 2j\sin(2\pi T(-f)) = -2j\sin(2\pi fT) \quad (4.688)$$

$$\delta(t+T) - \delta(t-T) \longleftrightarrow 2j\sin(2\pi fT) \quad (4.689)$$

Παράδειγμα 4.60:

Έστω ένα σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$. Έστω ότι μας δίνουν τα παρακάτω στοιχεία:

1. Το $x(t)$ είναι πραγματικό και έχει μόνο θετικές τιμές.

2. $F^{-1}\{(2 + j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t)$, με σταθερό A .

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{4}{15}$$

Βρείτε μια κλειστή έκφραση για το $x(t)$.

Λύση:

Είναι:

$$F^{-1}\{(2 + j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t) \iff (2 + j2\pi f)X(f) = \frac{A}{3 + j2\pi f} \quad (4.690)$$

$$X(f) = \frac{A}{(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)} \quad (4.691)$$

$$= A \left(\frac{1}{2 + j2\pi f} - \frac{1}{3 + j2\pi f} \right) \quad (4.692)$$

μετά από ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, και από τον Πίνακα 4.4 έχουμε

$$x(t) = Ae^{-2t}u(t) - Ae^{-3t}u(t), \quad A \in \mathbb{R}. \quad (4.693)$$

Όμως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t))^2 dt \quad (4.694)$$

$$A^2 \int_0^{+\infty} (e^{-2t} - e^{-3t})^2 dt = \frac{1}{60} A^2 \quad (4.695)$$

$$A^2 \int_0^{+\infty} (e^{-4t} - 2e^{-5t} + e^{-6t}) dt = \frac{1}{60} A^2 \quad (4.696)$$

$$A^2 \left(-\frac{1}{4}e^{-4t} + \frac{2}{5}e^{-5t} - \frac{1}{6}e^{-6t} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{60} A^2 \quad (4.697)$$

$$\frac{1}{60} A^2 = \frac{4}{15} \quad (4.698)$$

$$A = \pm 4 \quad (4.699)$$

Από εκφώνηση, $x(t) > 0$ και άρα $A = 4$. Άρα τελικά

$$x(t) = 4(e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)) \quad (4.700)$$