Μαθηματικό Υπόβαθρο

0.3 Εισαγωγή

Η μελέτη των σημάτων και των συστημάτων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια βασίζεται κατά κύριο λόγο σε βασικές γνώσεις Απειροστικού Λογισμού και Μιγαδικών Αριθμών. Εν γένει, η θεωρία σημάτων και συστημάτων έχει πολύ ισχυρά μαθηματικά θεμέλια τα οποία εκτείνονται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε μόνο στα απαραίτητα, τα οποία και αποτελούν το αναγκαίο υπόβαθρο για τον αναγνώστη. Ο λόγος της σύντομης αυτής ανασκόπησης έγκειται στο ότι αφ΄ ενός το περισσότερο περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου δεν (πρέπει να) είναι καινούριο στον αναγνώστη που έχει ολοκληρώσει την τριτοβάθμια εκπαίδευση ή που έχει στοιχειώδες υπόβαθρο στον Απειροστικό Λογισμό, αφ΄ ετέρου είναι χρήσιμο να ‘‘φρεσκαριστούν’’ μερικές βασικές μαθηματικές έννοιες οι οποίες ‘‘διαπερνούν’’ ολόκληρο το βιβλίο ως το τέλος του.

0.4 Μιγαδικοί Αριθμοί

Θα ξεκινήσουμε με μια μικρή ανασκόπηση στους **μιγαδικούς αριθμούς**. Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι ένα σπουδαίο μαθηματικό εργαλείο με εφαρμογές σε πολλές επιστήμες μηχανικού. Παρ΄ όλο που οι μιγαδικοί αριθμοί δεν υπάρχουν πουθενά στη φύση και αποτελούν καθαρά θεωρητικό κατασκεύασμα, έχουν αποδειχθεί πολύτιμοι στην απλοποίηση πραγματικών προβλημάτων.

Ο λόγος πίσω από αυτό είναι ότι ενώ ένα πραγματικό πρόβλημα πρέπει να ξεκινά και να τελειώνει με πραγματικούς αριθμούς, η πορεία προς την επίλυση δεν είναι απαραίτητο να περνά μέσα από το ‘‘βασίλειο’’ των πραγματικών αριθμών. Φυσικά κάθε πραγματικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί αποκλειστικά χρησιμοποιώντας πραγματικούς αριθμούς και σχέσεις. Όμως, η χρήση μιγαδικών αριθμών και σχέσεων μπορεί να απλοποιήσει σημαντικά τη διαδικασία. Άρα, ο μοναδικός πρακτικός λόγος μελέτης των μιγαδικών αριθμών είναι ένας: *γιατί μας διευκολύνουν!*

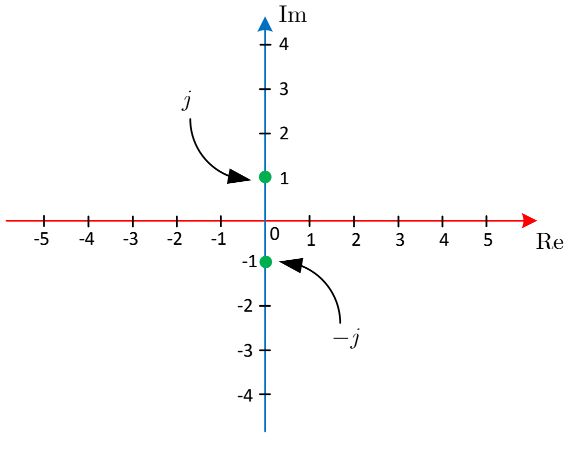
Ας θέσουμε το εξής πρόβλημα ως κίνητρο: έστω ότι σας ζητείται να βρείτε τη λύση της εξίσωσης

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

Αβιάστα θα απαντούσε κανείς ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει πραγματική λύση. Πράγματι, αυτή είναι η σωστή απάντηση. Αν όμως ‘‘χαλαρώσουμε’’ λίγο τη μαθηματική μας αυστηρότητα, μπορούμε να αναρωτηθούμε τι τιμή θα έπρεπε να έχει το x^2 ώστε το x να αποτελεί ρίζα της εξίσωσης. Προφανώς θα πρέπει

$$x^2 = -1 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{-1} \tag{2}$$

Έστω ότι ορίζουμε αυτήν την περίεργη λύση της παραπάνω εξίσωσης ως $j = \sqrt{-1}$. Αν λοιπόν αποδεσμευθούμε από το χώρο των πραγματικών αριθμών, μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο χώρο, αυτό των *μιγαδικών* αριθμών, ο οποίος συμβολίζεται ως $\mathbb{C}$ και στον οποίο λύσεις των εξισώσεων όπως η παραπάνω είναι απόλυτα αποδεκτές! Στο χώρο αυτό, οι αριθμοί δεν αναπαρίστανται επάνω σε έναν άξονα (όπως στο χώρο των πραγματικών αριθμών) αλλά σε ένα *επίπεδο*. Δείτε το Σχήμα 7. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των πραγματικών αριθμών όπως τον γνωρίζετε (και αναμενόμενα ονομάζεται *πραγματικός άξονας*), ενώ ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται *φανταστικός άξονας*, και αποτελείται από πραγματικά πολλαπλάσια της φανταστικής μονάδας j. Προσέξτε όμως ότι η φανταστική μονάδα j δεν αποτελεί μέρος του άξονα, αλλά εμείς πρέπει να καταλαβαίνουμε ότι ο άξονας αυτός αφορά το τμήμα του μιγαδικού αριθμού που σχετίζεται με τη φανταστική μονάδα. Στο ίδιο Σχήμα απεικονίζονται οι μιγαδικοί αριθμοί $\pm j$ που αποτελούν λύσεις της παραπάνω



Σχήμα 7: *Μιγαδικό επίπεδο.*

εξίσωσης[7].

Ας γενικεύσουμε το παραπάνω παράδειγμα για ένα πολυώνυμο της μορφής

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \tag{3}$$

Οι ρίζες του δίνονται ως

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \tag{4}$$

με

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \tag{5}$$

Γνωρίζετε ότι αν $\Delta > 0$ το πολυώνυμο έχει δυο διακριτές πραγματικές ρίζες, αν $\Delta = 0$ το πολυώνυμο έχει μια διπλή ρίζα, και αν $\Delta < 0$ μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Delta = -\Delta_+ \tag{6}$$

με $\Delta_+ = |\Delta|$, και τότε

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} && (7)\\ &= \frac{-\beta \pm \sqrt{(-1)\Delta_+}}{2\alpha} && (8)\\ &= \frac{-\beta \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{\Delta_+}}{2\alpha} && (9)\\ &= \frac{-\beta \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} && (10)\\ &= \frac{-\beta \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} && (11) \end{aligned}$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 0.2.1:

Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \tag{12}$$

Λύση:
Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = (-2)^2 - 20 = 4 - 20 = -16 < 0 \tag{13}$$

άρα η εξίσωση δεν έχει λύση για πραγματικά x. Όμως, στο χώρο των μιγαδικών αριθμών, έχουμε

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} = \frac{2 \pm j\sqrt{16}}{2} = 1 \pm j2 \tag{14}$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $x_{1,2} = 1 \pm j2$.

■

Επιβεβαιώστε κάνοντας πράξεις ότι οι παραπάνω αριθμοί αποτελούν ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι ένα εύπλαστο εργαλείο. Μπορούν να πάρουν πολλές μορφές, έχουν αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες και ερμηνείες, γι' αυτό και η χρήση τους στη μηχανική είναι αρκετά διαδεδομένη. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς ως ξεχωριστές "οντότητες", χωρίς να συνδέονται απαραίτητα με τη λύση πολυωνυμικών εξισώσεων. Θα δούμε τις διάφορες μορφές και ιδιότητές τους, τις σχέσεις τους με την τριγωνομετρία, δηλ. με τα γνωστά σας ημίτονα και συνημίτονα, θα γνωρίσουμε τη βασική θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων, και αρκετά άλλα χρήσιμα στοιχεία.

[7] Ακριβέστερα, η αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο ονομάζεται *εικόνα* του μιγαδικού αριθμού.

0.4.1 Καρτεσιανή μορφή

Ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + jy$ αναπαρίσταται στο *μιγαδικό επίπεδο* ως ένα σημείο με συντεταγμένες $(x, y) \in \Re \times \Re$. Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται *καρτεσιανή*. Στο μιγαδικό επίπεδο, ένας μιγαδικός μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα με αρχή το $(0, 0)$ και πέρας τις συντεταγμένες του μιγαδικού αριθμού, όπως στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων του Σχήματος 8.

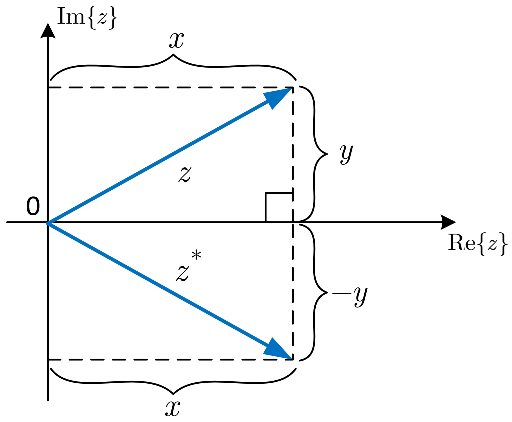
Η τετμημένη x ονομάζεται *πραγματικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού, ενώ η τεταγμένη y ονομάζεται *φανταστικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού. Είναι πολύ σύνηθες να συμβολίζουμε τα παραπάνω ως

$$\Re\{z\} = x \tag{15}$$
$$\Im\{z\} = y \tag{16}$$

δηλ.

$$z = x + jy = \Re\{z\} + j\Im\{z\} \tag{17}$$

Το μήκος του διανύσματος που αναπαριστά το μιγαδικό z ονομάζεται *μέτρο* του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται ως $|z|$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο του Σχήματος 8 και με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος παρατηρούμε ότι



Σχήμα 8: *Ζεύγος συζυγών μιγαδικών* z, z^*.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{18}$$

Ο *συζυγής* μιγαδικός αριθμός

$$z^* = x - jy \tag{19}$$

έχει ίδιο μέτρο, ίδιο πραγματικό μέρος, και αντίθετο φανταστικό μέρος με τον z. Δυο τυχαίοι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί z, z^* αναπαρίστανται στο Σχήμα 8.

Αν επιστρέψουμε στο εισαγωγικό πρόβλημα της λύσης ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ένα τριώνυμο με *πραγματικούς* συντελεστές και αρνητική διακρίνουσα Δ έχει πάντα *συζυγείς* ρίζες. Ακόμα γενικότερα, ένα πολυώνυμο N βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει N μιγαδικές (εν γένει) ρίζες, οι οποίες αποτελούνται από ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών. Για παράδειγμα, το πολυώνυμο $x^{100} + 3x^{50} + 10$ έχει 100 ρίζες, και όσες από αυτές είναι μιγαδικές πρέπει απαραίτητα να έρχονται σε συζυγή ζεύγη. Αντίθετα, το πολυώνυμο $jx^2 + x + 1$ έχει δυο *μη*-συζυγείς μιγαδικές ρίζες - επιβεβαιώστε το υπολογίζοντάς τες!

Παράδειγμα 0.2.2:

Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \Re$ για τις οποίες το πολυώνυμο

$$2z^2 + 8z + k^2 = 0 \tag{20}$$

έχει δυο μιγαδικές ρίζες μέτρου 5.

Λύση:
Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι

$$z_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 8k^2}}{4} = -2 \pm \frac{\sqrt{64 - 8k^2}}{4} \tag{21}$$

Εφ' όσον έχει δυο μιγαδικές ρίζες, η διακρίνουσά του θα είναι αρνητική. Έτσι

$$z_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 8k^2}}{4} = \frac{-8 \pm j\sqrt{8k^2 - 64}}{4} = -2 \pm j\frac{\sqrt{8k^2 - 64}}{4} \tag{22}$$

Οι ρίζες ικανοποιούν τη σχέση $|z_{1,2}| = 5 \iff |z_{1,2}|^2 = 25$, και από την τελευταία έχουμε

$$|z_{1,2}|^2 = 25 \iff (-2)^2 + \left(\frac{\sqrt{8k^2 - 64}}{4}\right)^2 = 25 \tag{23}$$
$$4 + \frac{8k^2 - 64}{16} = 25 \iff 8k^2 - 64 = 336 \tag{24}$$

$$8k^2 = 400 \iff k^2 = 50 \tag{25}$$

Άρα οι τιμές του k που ικανοποιούν την απαίτηση της εκφώνησης είναι οι $k = \pm\sqrt{50}$.

■

Οι μιγαδικοί αριθμοί διαθέτουν ένα σύνολο από πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, μερικές από τις οποίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Η απόδειξή τους είναι καθαρά θέμα πράξεων.

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή	
Ιδιότητα	**Μαθηματική περιγραφή**
	$z_1 = x + jy$
	$z_2 = u + jv$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \left(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}\right) + j\left(\frac{uy - xv}{u^2 + v^2}\right)$
Συζυγία	$z_1^* = x - jy$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\}$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\}$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \lvert z_1\rvert^2 = x^2 + y^2$
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j\frac{2xy}{x^2 + y^2}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$ $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\Re\{z_1\} = \Re\{z_2\}$ και $\Im\{z_1\} = \Im\{z_2\}$
$z \in \Re$	$z = z^*$
$z \in \Im$	$z = -z^*$

Πίνακας 1: *Πίνακας Ιδιοτήτων των Μιγαδικών Αριθμών (καρτεσιανή μορφή)*

Μπορείτε να δοκιμάσετε να τις αποδείξετε, για εξάσκηση. Είναι σημαντικό να παρατηρήσετε ότι οι βασικές πράξεις του αθροίσματος και της διαφοράς έχουν διαισθητική ερμηνεία υπό την οπτική της διανυσματικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, καθώς ισοδυναμούν με πράξεις μεταξύ διανυσμάτων. Δείτε το Σχήμα 9, όπου εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για να βρούμε το άθροισμα και τη διαφορά δυο μιγαδικών στο μιγαδικό επίπεδο. Πρέπει να μπορείτε να παρατηρήσετε ότι απλά προσθέτουμε γραφικά τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των μιγαδικών μεταξύ τους. Επίσης, δείτε τις πράξεις και τις ιδιότητες που σχετίζονται με τη συζυγία και προσπαθήστε να τις αποδείξετε. Θα τις χρησιμοποιήσουμε αρκετά στη συνέχεια.

Αντίθετα, οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης δεν έχουν ιδιαίτερη διαίσθηση, καθώς το αποτέλεσμα μοιάζει πολύπλοκο να ερμηνευτεί. Σύντομα θα δούμε μια καλύτερη αναπαράσταση και ερμηνεία για αυτές τις δυο πράξεις.

Ας δούμε ένα παράδειγμα των παραπάνω.

Παράδειγμα 0.2.3:

Αν $z_1 = 1 + j$ και $z_2 = 1 - j2$, υπολογίστε τους μιγαδικούς

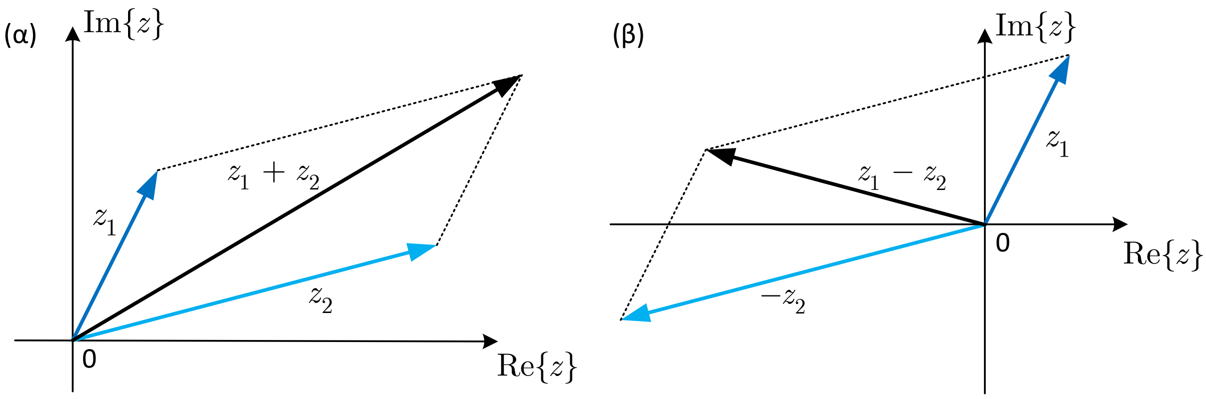
(α′) $z_1^2 z_2$

(β′) $\frac{2j}{z_1} + \frac{1-j}{z_2}$

(γ′) z_2^4

(δ′) $\frac{z_1\Re\{z_1^*\} - z_2^*\Im\{z_2\}}{z_2^*\Re\{z_2\} + z_1\Im\{z_1^*\}}$

Λύση:



Σχήμα 9: *(α) Πρόσθεση και (β) αφαίρεση μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο.*

(α΄) Έχουμε

$$z_1^2 z_2 = (1+j)^2(1-j2) = (1+2j+j^2)(1-j2) = 2j(1-j2) = 2j - 4j^2 = 2j + 4 = 4 + j2 \tag{26}$$

(β΄) Θα είναι

$$\frac{2j}{z_1} + \frac{1-j}{z_2} = \frac{2jz_2}{z_1z_2} + \frac{(1-j)z_1}{z_1z_2} = \frac{2jz_2 + (1-j)z_1}{z_1z_2} \tag{27}$$

$$= \frac{(2jz_2 + z_1 - jz_1)(z_1z_2)^*}{z_1z_2(z_1z_2)^*} = \frac{(2jz_2 + z_1 - jz_1)z_1^*z_2^*}{|z_1z_2|^2} \tag{28}$$

$$= \frac{(2j(1-j2) + (1+j) - j(1+j))(1-j)(1+j2)}{10} = \frac{(2j - 4j^2 + 1 + j - j - j^2)(3+j)}{10} \tag{29}$$

$$= \frac{(2j+6)(3+j)}{10} = \frac{(2j+6))(3+j)}{10} = \frac{6j + 2j^2 + 18 + 6j}{10} \tag{30}$$

$$= \frac{8}{5} + j\frac{6}{5} \tag{31}$$

(γ΄) Είναι

$$z_2^4 = (z_2^2)^2 = \big((1-j2)^2\big)^2 = (1-4j+4j^2)^2 = (-3-4j)^2 = 9 + 24j + 16j^2 = -7 + 24j \tag{32}$$

(δ΄) Έχουμε

$$\frac{z_1\Re\{z_1^*\} - z_2^*\Im\{z_2\}}{z_2^*\Re\{z_2\} + z_1\Im\{z_1^*\}} = \frac{z_1 + 2z_2^*}{z_2^* - z_1} = \frac{1+j+2+j4}{1+j2-(1+j)} = 5 - j3 \tag{33}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

$$\pm j = \mp\frac{1}{j} \tag{34}$$

την οποία θα χρησιμοποιούμε συχνά.

0.4.2 Πολική μορφή

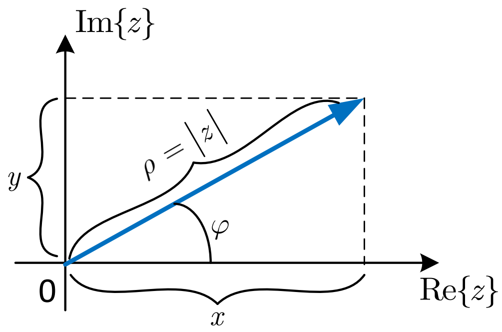
Μια εναλλακτική - και πιο χρήσιμη - μορφή ενός μιγαδικού αριθμού είναι η περίφημη **πολική μορφή**. Ένας μιγαδικός αριθμός z με συντεταγμένες (x, y) μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα διαφορετικό ζεύγος τιμών, (ρ, ϕ), που αναπαριστούυν την απόσταση ρ του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων - δηλ. το μέτρο του - και τη γωνία ϕ μεταξύ του οριζόντιου άξονα και του διανύσματος που αντιπροσωπεύει το μιγαδικό αριθμό.

Το Σχήμα 10 απεικονίζει τις παραμέτρους ρ και ϕ. Σημειώστε ότι η γωνία ϕ ορίζεται κατά την ορθή μαθηματική φορά (αντίθετα της φοράς του ρολογιού).

Από το Σχήμα, είναι εμφανές ότι

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{35}$$

το οποίο έχουμε ήδη ονομάσει *μέτρο* του μιγαδικού αριθμού z. Μερικές χρήσιμες ιδιότητες για το μέτρο ενός



Σχήμα 10: *Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού z.*

μιγαδικού αριθμού είναι οι ακόλουθες.

(α΄) $|z| = |z^*| = |-z|$

(β΄) $|z|^2 = zz^* = z^*z$

(γ΄) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(δ΄) $|z^k| = |z|^k$

(ε΄) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(ϛ΄) Τριγωνική Ανισότητα I: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(ζ΄) Τριγωνική Ανισότητα II: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Η γωνία ϕ, η οποία αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία ως **φάση**, ορίζεται ως

$$\phi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0,\ y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0,\ y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0 \\ \text{απροσδιόριστη}, & x = y = 0 \end{cases} \tag{36}$$

Η *πρωτεύουσα τιμή* της φάσης ϕ ορίζεται πάντα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, όπως παραπάνω, και θα προσπαθούμε να εκφράζουμε κάθε τιμή της φάσης στο διάστημα αυτό. Μερικές σπουδαίες ιδιότητες της φάσης είναι οι ακόλουθες.

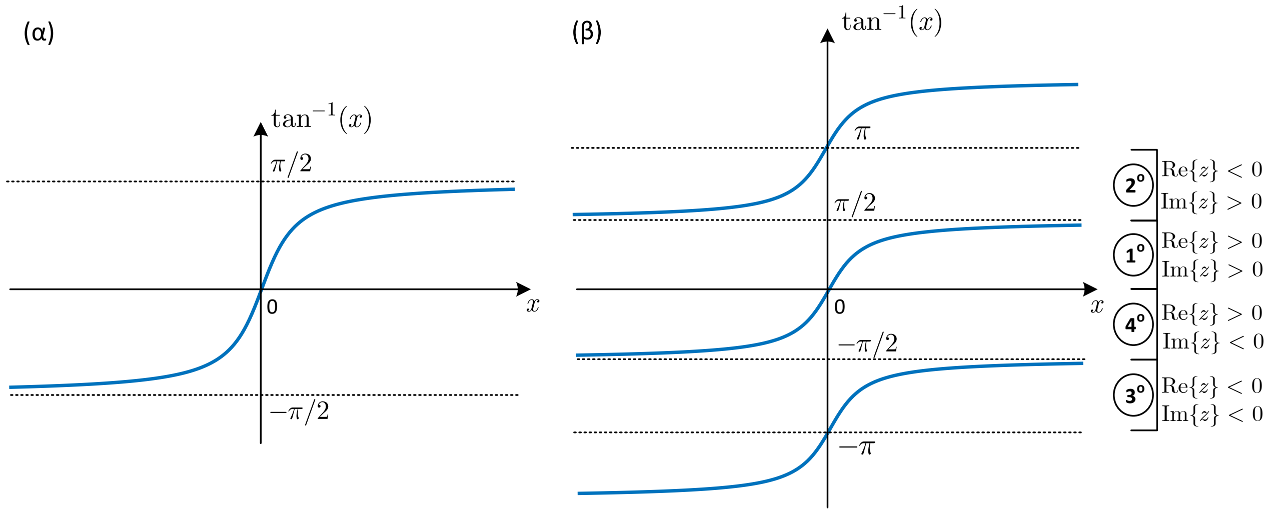
(α΄) $\phi_{z_1 z_2} = \phi_{z_1} + \phi_{z_2}$

(β΄) $\phi_{z_1^k} = k\phi_{z_1}$

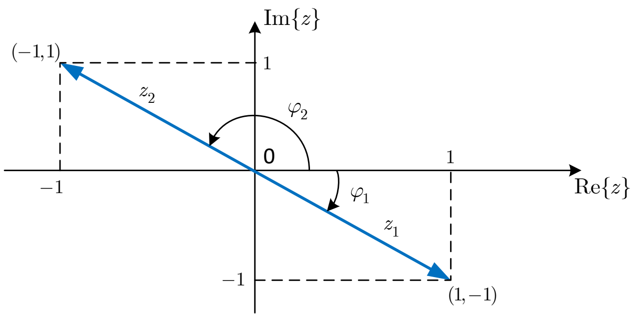
(γ΄) $\phi_{z_1/z_2} = \phi_{z_1} - \phi_{z_2}$

Προτού προχωρήσουμε, θα ήταν ενδιαφέρον να συζητήσουμε λίγο την (φαινόμενη) πολυπλοκότητα της φάσης και να εξηγήσουμε γιατί υπάρχουν τόσες περιπτώσεις στον υπολογισμό της. Η συνάρτηση της αντίστροφης εφαπτομένης έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ και πεδίο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, όπως στο Σχήμα 11(α), δηλ. αφορούν το πρώτο και το τέταρτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου. Σε αυτά, το *πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού είναι θετικό*. Οι τιμές αυτές τις φάσης είναι αυτές που ονομάσαμε νωρίτερα ως *πρωτεύουσες*. Κάθε άλλη τιμή της φάσης εκτός του $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ονομάζεται *δευτερεύουσα* τιμή. Είναι φανερό λοιπόν ότι η αντίστροφη εφαπτομένη μπορεί να μας δώσει τιμές φάσης μόνο στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, δηλ. να μας υποδείξει σωστά τους μιγαδικούς που ανήκουν είτε στο πρώτο είτε στο τέταρτο τεταρτημόριο. Για τους υπόλοιπους;

Για τον υπολογισμό της φάσης μέσω της αντίστροφης εφαπτομένης χρειάζεται να υπολογίσουμε το λόγο $\mathrm{Im}\{z\}/\mathrm{Re}\{z\}$. Ο λόγος αυτός μπορεί φυσικά να είναι θετικός ή αρνητικός. Δείτε για παράδειγμα τους μιγαδικούς $z_1 = 1 - j$ και $z_2 = -1 + j$ του Σχήματος 12. Πέραν αμφιβολίας, οι μιγαδικοί αυτοί βρίσκονται στο 4ο και στο 2ο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου, αντίστοιχα, οπότε οι φάσεις τους θα είναι σίγουρα διαφορετικές (εν γένει).



Σχήμα 11: *(α) Πρωτεύουσα τιμή φάσης και (β) πρωτεύουσα και δευτερεύουσες τιμές φάσης.*



Σχήμα 12: *Μιγαδικοί z_1 και z_2.*

Ας υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της αντίστροφης εφαπτομένης για τη φάση τους χωρίς να λάβουμε υπόψη μας τη Σχέση (36). Θα είναι

$$\phi_{z_1} = \tan^{-1}\frac{-1}{1} = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} \tag{37}$$

$$\phi_{z_2} = \tan^{-1}\frac{1}{-1} = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad (!!!) \tag{38}$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση αντίστροφης εφαπτομένης είναι ‘‘τυφλή’’ στο πρόσημο του πραγματικού και του φανταστικού μέρους των μιγαδικών αριθμών! Θεωρεί πως και οι δυο, επιβεβαιωμένα διαφορετικοί, μιγαδικοί αριθμοί σχηματίζουν την ίδια γωνία με την οριζόντιο άξονα, δηλ. 45^o κάτω από αυτόν. Ασφαλώς η γωνία του μιγαδικού αριθμου z_1 είναι σωστή: πράγματι ο μιγαδικός αριθμός z_1 σχηματίζει γωνία -45 μοίρες με τον οριζόντιο άξονα. Δε μας κάνει εντύπωση καθώς ο μιγαδικός αριθμός αυτός βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο, όπου η αντίστορφη εφαπτομένη ‘‘προβλέπει’’ σωστά. Πώς θα διορθώσουμε πρόβλημα με τον μιγαδικό z_2, ο οποίος ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο; Μα φυσικά χρησιμοποιώντας τις δευτερεύουσες τιμές της συνάρτησης φάσης! Αυτές οι τιμές φαίνονται στο Σχήμα 11(β) και η διόρθωση ‘‘υπαγορεύεται’’ από τις περιπτώσεις της Σχέσης (36).

0.4.3 Σχέσεις του Euler

Στην προσπάθειά μας να απλοποιήσουμε την πολική μορφή αλλά και να την κάνουμε πιο διαχειρίσιμη, μπορούμε - από τον Απειροστικό Λογισμό και τις Σειρές MacLaurin - να δείξουμε ότι

$$e^{j\phi} = 1 + j\phi + \frac{(j\phi)^2}{2!} + \frac{(j\phi)^3}{3!} + \frac{(j\phi)^4}{4!} + \cdots \tag{39}$$

$$= 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - j\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \cdots \tag{40}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(j\phi)^n}{n!} \tag{41}$$

και

$$\cos(\phi) = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \frac{\phi^8}{8!} + \cdots \tag{42}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\phi^{2n} \tag{43}$$

$$\sin(\phi) = \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \frac{\phi^9}{9!} + \cdots \tag{44}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\phi^{2n+1} \tag{45}$$

και άρα καταληγουμε ότι

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi) \tag{46}$$

η οποία είναι η περίφημη **Σχέση του Euler**, προς τιμήν του μεγάλου μαθηματικού Leonard Euler που την ανακάλυψε[8]. Από τη σχέση του Euler μπορούμε να ορίσουμε τις **αντίστροφες σχέσεις του Euler** ως

$$\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} \tag{47}$$

$$\sin(\phi) = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} \tag{48}$$

οι οποίες είναι κι αυτές μεγάλης σημασίας. Φροντίστε να τις συνηθίσετε! ☺

Οπότε, η πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού z, όπως αυτού στο Σχήμα 10, μπορεί να γραφεί ως

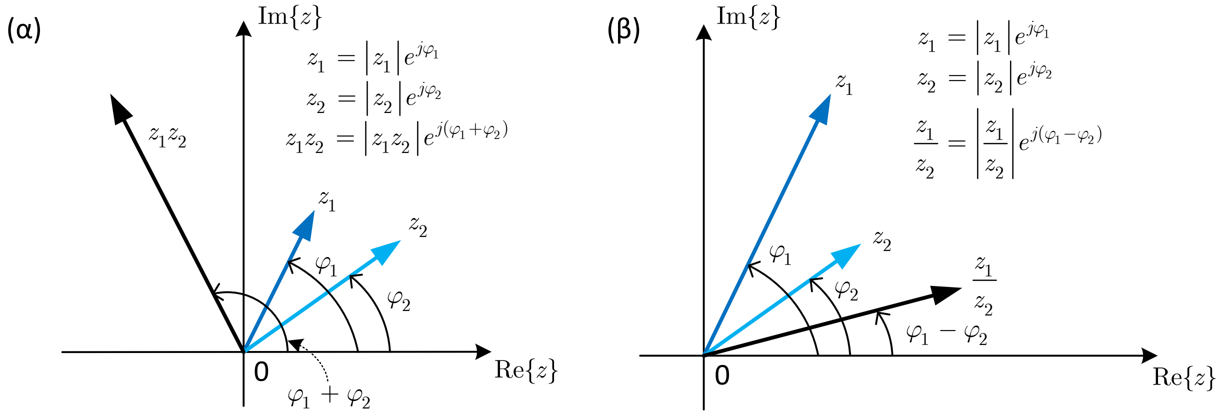
$$z = x + jy = |z|(\cos(\phi) + j\sin(\phi)) = |z|e^{j\phi} \tag{49}$$

με

$$x = |z|\cos(\phi)\ ,\ y = |z|\sin(\phi)\ ,\ |z| = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{50}$$

Ας εξετάσουμε ξανά τον Πίνακα 1 αλλά χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την πολική μορφή. Ο Πίνακας 2 είναι αυτός που προκύπτει με εφαρμογή της πολικής μορφής.

Συγκρίνοντας τους Πίνακες 1 και 2, παρατηρούμε ότι το άθροισμα και η διαφορά μιγαδικών αριθμών απλοποιείται όταν χρησιμοποιούμε καρτεσιανές συντεταγμένες, ενώ αντίθετα ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μιγαδικών αριθμών είναι προτιμότερο να γίνεται στην πολική μορφή τους. Δείτε στο Σχήμα 13 τη διαισθητική ερμηνεία του γινομένου και του πηλίκου δυο μιγαδικών αριθμών όταν τους κοιτάζει κανείς σε πολική μορφή. Μπορείτε να βρείτε



Σχήμα 13: *(α) Πολλαπλασιασμός και (β) διαίρεση μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο.*

που βρίσκεται ο μιγαδικός z^2 για ένα δοθέντα μιγαδικό $z = |z|e^{j\phi}$; ☺

Είναι χρήσιμο να βρούμε ξεχωριστά την πολική μορφή για κάποιους συγκεκριμένους μιγαδικούς αριθμούς, όπως οι $\pm 1, \pm j$, καθώς η χρήση τους απλοποιεί σημαντικά τις σχέσεις που θα συναντήσουμε στη συνέχεια. Ο Πίνακας 3

[8] Μια πιο κομψή μορφή της, η $e^{j\pi} + 1 = 0$ θεωρείται ως η ομορφότερη εξίσωση όλων των εποχών: συνδέει τους θεμελιώδεις αριθμούς e, j, π, 1, 0 και τις πράξεις της πρόσθεσης και της ύψωσης σε δύναμη.

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Πολική Μορφή	
Ιδιότητα	**Μαθηματική περιγραφή**
	$z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1},\ \rho_1 > 0$
	$z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2},\ \rho_2 > 0$
Άθροισμα	$z_1 + z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} + \rho_2 e^{j\phi_2}$
Διαφορά	$z_1 - z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} - \rho_2 e^{j\phi_2}$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \rho_2 e^{j\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1+\phi_2)}$
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1-\phi_2)}$
Συζυγία	$z_1^* = \rho e^{-j\phi_1}$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} = 2\rho\cos(\phi_1)$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\} = 2j\rho\sin(\phi_1)$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \rho_1 \rho_1 e^{j\phi_1} e^{-j\phi_1} = \rho_1^2 = \|z_1\|^2$
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_1 e^{-j\phi_1}} = e^{j2\phi_1}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} + \rho_2 e^{-j\phi_2}$ $(z_1 - z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} - \rho_2 e^{-j\phi_2}$ $(z_1 z_2)^* = \rho_1 \rho_2 e^{-j(\phi_1+\phi_2)}$ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-j(\phi_1-\phi_2)}$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{j\phi_1}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-j\phi_1}$
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\|\rho_1\| = \|\rho_2\|$ και $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Πίνακας 2: *Πίνακας Ιδιοτήτων των Μιγαδικών Αριθμών (πολική μορφή)*

συνοψίζει τις πολικές μορφές μιγαδικών αριθμών που συναντώνται συχνά στην πράξη.

Συνήθεις πολικές μορφές	
Φάση ϕ	**Πολική μορφή**
0	$e^{j0} = 1$
$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
$\pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$
$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
$\pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm j2k\pi} = 1$
$\pm\frac{\pi}{2}$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$
$\pm k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi/2} = (\pm j)^k = \begin{cases} 1, & k = 0, 4, 8, 12, \cdots \\ \pm j, & k = 1, 5, 9, 13, \cdots \\ \mp j, & k = 3, 7, 11, 15, \cdots \\ -1, & k = 2, 6, 10, 14, \cdots \end{cases}$

Πίνακας 3: *Πολική μορφή συχνά χρησιμοποιούμενων μιγαδικών αριθμών*

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 0.2.4:

Εκφράστε καθέναν από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε καρτεσιανή μορφή $(x + jy)$:

(α΄) $\frac{1}{2}e^{j\pi}$ (γ΄) $e^{j\pi/2}$ (ε΄) $e^{j5\pi/2}$ (ζ΄) $\sqrt{2}e^{j9\pi/4}$

(β΄) $\frac{1}{2}e^{-j\pi}$ (δ΄) $e^{-j\pi/2}$ (ϛ΄) $\sqrt{2}e^{j\pi/4}$ (η΄) $\sqrt{2}e^{-j9\pi/4}$

Λύση:

Θα είναι

(α′) $\frac{1}{2}e^{j\pi} = \frac{1}{2}\cos(\pi) + \frac{1}{2}j\sin(\pi) = -\frac{1}{2}$

(β′) $\frac{1}{2}e^{-j\pi} = \frac{1}{2}\cos(-\pi) + \frac{1}{2}j\sin(-\pi) = -\frac{1}{2}$

(γ′) $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + j\sin(\frac{\pi}{2}) = j$

(δ′) $e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{-\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2}) = -j$

(ε′) $e^{j\frac{5\pi}{2}} = \cos(\frac{5\pi}{2}) + j\sin(\frac{5\pi}{2}) = \cos(\frac{4\pi+\pi}{2}) + j\sin(\frac{4\pi+\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) + j\sin(\frac{\pi}{2}) = j$

(ϛ′) $\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}j\sin(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}j\frac{\sqrt{2}}{2} = 1+j$

(ζ′) $\sqrt{2}e^{j\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{j\frac{8\pi+\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = 1+j$

(η′) $\sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{-j\frac{8\pi+\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos(\frac{-\pi}{4}) + \sqrt{2}j\sin(\frac{-\pi}{4}) = 1-j$

■

Παράδειγμα 0.2.5:

Εκφράστε καθέναν από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε πολική μορφή $re^{j\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$:

(α′) 5	(γ′) $-3j$	(ε′) $(1-j)^2$	(ζ′) $\frac{1+j}{1-j}$
(β′) -2	(δ′) $\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$	(ϛ′) $j(1-j)$	(η′) $\frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{3}}$

Λύση:
Θα είναι

(α′) $5 = 5e^{j0}$

(β′) $-2 = 2e^{j\pi}$

(γ′) $-3j = 3e^{-j\frac{\pi}{2}}$

(δ′) $\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$, με $|z| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$, με $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, άρα $e^{-j\frac{\pi}{3}}$

(ε′) $(1-j)^2 = 1 - 2j + j^2 = 1 - 2j - 1 = -2j = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$

(ϛ′) $j(1-j) = j - j^2 = j + 1 = 1 + j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$

(ζ′) $\frac{1+j}{1-j} = \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}} = e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{4}} = e^{j\frac{\pi}{2}}$

(η′) $\frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1+j)}{2(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{e^{j\frac{\pi}{3}}} = e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{3}} = e^{-j\frac{\pi}{12}}$

0.4.4 Η Σχέση του De Moivre

Όταν υπολογίζουμε δυνάμεις μιγαδικών αριθμών, των οποίων ο εκθέτης είναι ακέραιος αριθμός, είναι πολύ χρήσιμη η γνωστή σχέση του De Moivre:

$$z^n = (x+jy)^n = \big(\rho\cos(\phi) + j\rho\sin(\phi)\big)^n = (\rho e^{j\phi})^n = \rho^n\big(\cos(n\phi) + j\sin(n\phi)\big) \tag{51}$$

Βλέπετε πόσο πιο απλή είναι η εύρεση μιας δύναμης ενός μιγαδικού αριθμού όταν χρησιμοποιούμε την πολική μορφή. Με την ίδια ευκολία μπορούμε να βρούμε οποιαδήποτε ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού:

$$z^{1/n} = (x+jy)^{1/n} = \big(\rho\cos(\phi) + j\rho\sin(\phi)\big)^{1/n} = (\rho e^{j\phi})^{1/n} = \rho^{1/n}\big(\cos(\phi/n) + j\sin(\phi/n)\big) \tag{52}$$

Παράδειγμα 0.2.6:

Βρείτε όλες τις ρίζες της εξίσωσης

$$z^3 - 8 = 0 \tag{53}$$

Λύση:

Περιμένουμε ότι θα υπάρχουν 3 λύσεις για αυτήν την εξίσωση. Έχουμε τότε

$$z^3 - 8 = 0 \tag{54}$$

$$z^3 = 8e^{j2\pi k} \tag{55}$$

$$z^3 = 8(\cos(2\pi k) + j\sin(2\pi k)) \tag{56}$$

$$z = \sqrt[3]{8}(\cos(2\pi k) + j\sin(2\pi k)^{\frac{1}{3}} \tag{57}$$

$$z = \sqrt[3]{8}\Big(\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)\Big), \quad k = 0, 1, 2. \tag{58}$$

Θέτοντας τιμές του k έχουμε

$$z_1 = 2 \tag{59}$$

$$z_2 = -1 + j\sqrt{3} \tag{60}$$

$$z_3 = -1 - j\sqrt{3} \tag{61}$$

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι τιμές του k διαφορετικές από αυτές τις τρεις που διαλέξαμε δίνουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

■

Το τελευταίο Παράδειγμα μας δίνει ένα γενικό τρόπο λύσης εξισώσεων της μορφής

$$z^N - a = 0, \quad N \in \mathbb{N}, \quad a = |a|e^{j\phi} \in \mathbb{C} \tag{62}$$

και μπορείτε να δείξετε (Άσκηση XXXX) ότι η γενική λύση είναι η ακόλουθη

$$z : \begin{cases} |z| & = |a|^{1/N} \\ \theta & = \frac{\phi + 2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \end{cases} \tag{63}$$

0.4.5 Γεωμετρικός τόπος

Ο γεωμετρικός τόπος μιγαδικών αριθμών δεν είναι τίποτε άλλο από ένα γεωμετρικό σχήμα του οποίου τα σημεία (οι μιγαδικοί αριθμοί δηλαδή) ικανοποιούν μια κοινή γεωμετρική ιδιότητα. Συνήθεις γεωμετρικοί τόποι είναι κύκλοι, κυκλικοί δίσκοι, ευθείες και άλλα γεωμετρικά σχήματα.

Παράδειγμα 0.2.7:

Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών $z = x + jy$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

(α΄) $|z| = 4$

(β΄) $|z - 2| = 2$

(γ΄) $|z - 1| = |z - j|$

(δ΄) $|z - 1| < 2$

(ε΄) $\Re\{z\} > -2$

(ϛ΄) $\dfrac{|z + 16|}{|z + 4|} > 2$

Λύση:

(α΄) Η σχέση αυτή ουσιαστικά περιγράφει τους μιγαδικούς z που έχουν μέτρο ίσο με 4, δηλ. η απόστασή τους από την αρχή των αξόνων ισούται με 4. Μπορείτε ίσως να φανταστείτε μερικούς: οι μιγαδικοί $z = \pm 4$, $z = \pm 4j$ σίγουρα ικανοποιούν την απαίτηση. Ποιοί άλλοι την ικανοποιούν; Θα έχουμε

$$|z| = 4 \Longleftrightarrow |x + jy| = 4 \Longleftrightarrow |x + jy|^2 = 16 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 16 \tag{64}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αυτών αποτελεί κύκλο με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 4$.

(β΄) Θα έχουμε

$$|z - 2| = 2 \Longleftrightarrow |x - 2 + jy| = 2 \Longleftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4 \tag{65}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αυτών αποτελεί κύκλο με κέντρο το $(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Εν γένει, ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που ικανοποιούν τη σχέση

$$|z - z_0| = c, \;\; c \in \Re \tag{66}$$

αποτελεί κύκλο με κέντρο το $z = z_0$ και ακτίνα c.

(γ΄) Θα έχουμε

$$|z-1| = |z-j| \Longleftrightarrow |z-1|^2 = |z-j|^2 \Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \tag{67}$$

$$\Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 - 2x = -2y \Longleftrightarrow x = y \tag{68}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αυτών αποτελεί η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $(1,0)$ και $(0,1)$. Με άλλα λόγια, οι μιγαδικοί αυτοί ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

Εν γένει, ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που ικανοποιούν τη σχέση

$$|z - z_1| = |z - z_2| \tag{69}$$

αποτελεί τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος μεταξύ των σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2), με $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$.

(δ΄) Εφόσον η σχέση

$$|z - 1| = 2 \tag{70}$$

δηλώνει το σύνολο των μιγαδικών που ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το $(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$, τότε η σχέση

$$|z - 1| < 2 \tag{71}$$

δηλώνει τους μιγαδικούς που βρίσκονται *εντός* του παραπάνω κύκλου.

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι γεωμετρικοί τόποι των μιγαδικών που ικανοποιούν τις σχέσεις

- $|z - z_0| < c$
- $|z - z_0| > c$
- $c_1 < |z - z_0| < c_2$

με $c, c_1, c_2 \in \Re$ αποτελούν

- σημεία *εντός* κύκλου με κέντρο το z_0 και ακτίνα $\rho = c$
- σημεία *εκτός* κύκλου με κέντρο το z_0 και ακτίνα $\rho = c$
- σημεία εντός *δακτυλίου* που σχηματίζεται από τους ομόκεντρους με κέντρο το z_0 κύκλους και ακτίνες $\rho_1 = c_1, \rho_2 = c_2$.

(ε΄) Θα έχουμε

$$\Re\{z\} > -2 \tag{72}$$

που προφανώς ορίζει τους μιγαδικούς αριθμούς που ανήκουν στο ημιεπίπεδο δεξιά της ευθείας $x = -2$, χωρίς να την περιλαμβάνει.

(ϛ΄) Θα έχουμε

$$\frac{|z+16|}{|z+4|} > 2 \Longleftrightarrow |z+16| > 2|z+4| \Longleftrightarrow |z+16|^2 > 4|z+4|^2 \Longleftrightarrow (x+16)^2 + y^2 > 4((x+4)^2 + y^2) \tag{73}$$

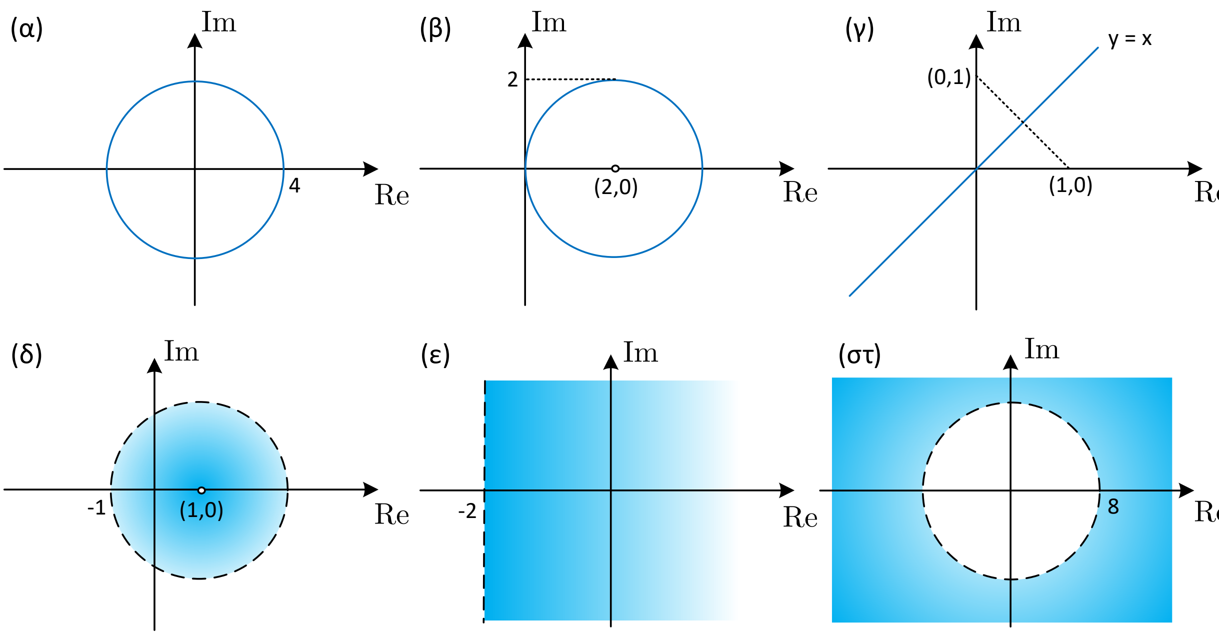
$$\Longleftrightarrow x^2 + 32x + 256 + y^2 > 4(x^2 + 8x + 16 + y^2) \Longleftrightarrow 3x^2 + 3y^2 < 192 \tag{74}$$

$$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 < 64 = 8^2 \tag{75}$$

άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος αποτελεί το εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 8$.

■

Μια απεικόνιση των γεωμετρικών τόπων του Παραδείγματος 0.2.7 φαίνονται στο Σχήμα 14.



Σχήμα 14: *Γεωμετρικοί τόποι Παραδείγματος 0.2.7.*

0.5 Μιγαδικές Συναρτήσεις

Ως αποτέλεσμα της συνεχούς χρήσης μιγαδικών αριθμών, η βασική θεωρία σημάτων και συστημάτων περιλαμβάνει ουκ ολίγες *μιγαδικές* συναρτήσεις, οι οποίες όμως είναι σχετικά απλές.

Μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ ορίζεται σε ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, το οποίο λέγεται πεδίο ορισμού, και αντιστοιχίζει κάθε σημείο του συνόλου A σε ένα μιγαδικό αριθμό. Είναι λοιπόν προφανές ότι μια μιγαδική συνάρτηση ορίζεται σε τέσσερις διαστάσεις: δυο διαστάσεις για το πεδίο ορισμού της, και δυο διαστάσεις για κάθε τιμή της συνάρτησης. Αυτό δυσκολεύει τα πράγματα γιατί δεν μπορούμε, εν γένει, να σχεδιάσουμε στο χαρτί μια μιγαδική συνάρτηση. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι

- είτε να σχεδιάσουμε ξεχωριστά το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος, δηλ. να αναλύσουμε τη μιγαδική συνάρτηση στη μορφή
$$f(z) = \Re\{f(z)\} + j\Im\{f(z)\} \tag{76}$$
- είτε να σχεδιάσουμε ξεχωριστά το μέτρο και τη φάση της, δηλ. να τη γράψουμε στη μορφή
$$f(z) = |f(z)|e^{j\phi(z)} \tag{77}$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 0.2.8:

Έστω το σύνολο $A = \mathbb{C} - \{\pm j\}$ στο οποίο ορίζεται η μιγαδική συνάρτηση
$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} \tag{78}$$
Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος, καθώς και την αναπαράσταση μέτρου και φάσης.

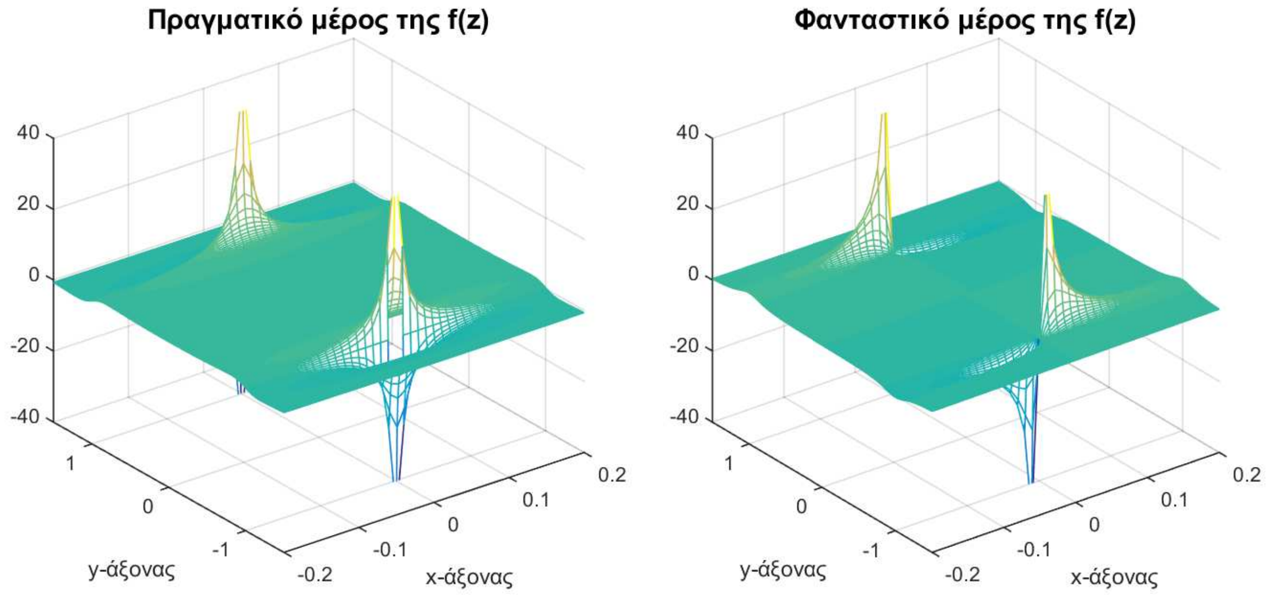
Λύση:
Το πραγματικό της μέρος ισούται με

$$\Re\{f(z)\} = \Re\Big\{\frac{1}{(x+jy)^2+1}\Big\} = \Re\Big\{\frac{1}{x^2-y^2+1+j2xy}\Big\} \tag{79}$$
$$= \Re\Big\{\frac{x^2-y^2+1-j2xy}{(x^2-y^2+1+j2xy)(x^2-y^2+1-j2xy)}\Big\} = \Re\Big\{\frac{x^2-y^2+1-j2xy}{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2}\Big\} \tag{80}$$
$$= \Re\Big\{\frac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2} - j\frac{2xy}{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2}\Big\} = \frac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2} \tag{81}$$

ενώ το φανταστικό της μέρος - από την τελευταία σχέση παραπάνω - ισούται με

$$\Im\{f(z)\} = \Im\Big\{\frac{1}{(x+jy)^2+1}\Big\} = \Im\Big\{\frac{1}{x^2-y^2+1+j2xy}\Big\} = -\frac{2xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2} \tag{82}$$

Οι γραφικές παραστάσεις τους απεικονίζονται στο Σχήμα 15. Ας βρούμε τώρα τη γραφική παράσταση του μέτρου



Σχήμα 15: *Πραγματικό και Φανταστικό μέρος της συνάρτησης του Παραδείγματος 0.2.8.*

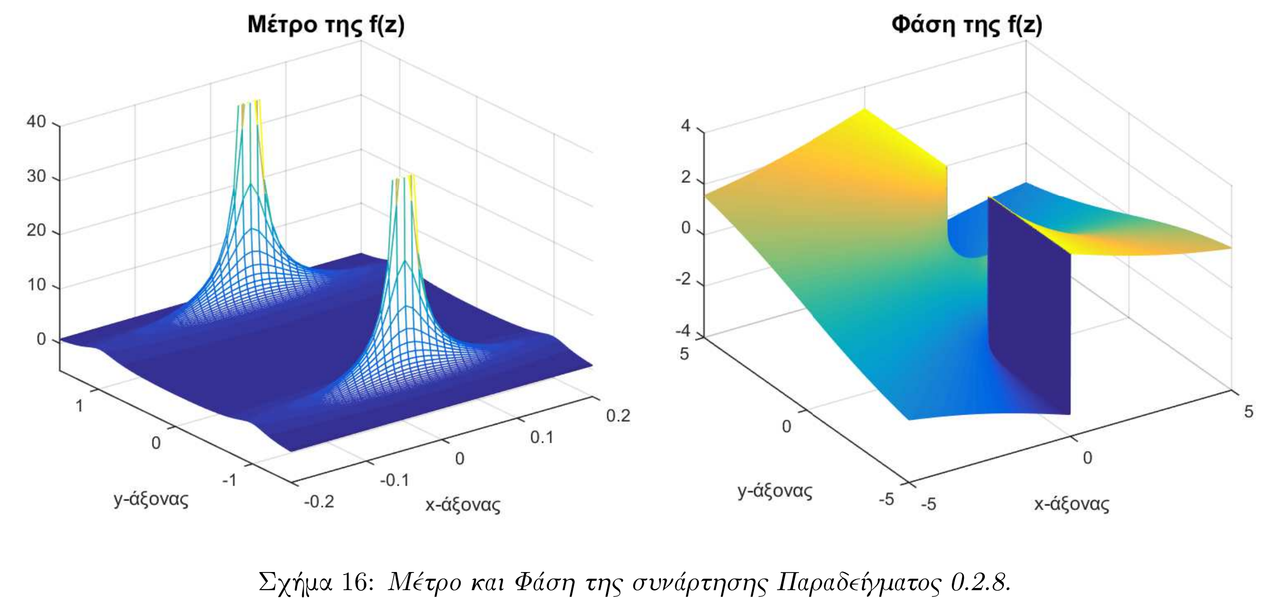
και της φάσης της συνάρτησης $f(z)$. Θα είναι

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+1|} = \frac{1}{|(x+jy)^2+1|} = \frac{1}{|x^2+2jxy-y^2+1|} = \frac{1}{\sqrt{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}} \tag{83}$$

για το μέτρο, ενώ για τη φάση θα είναι

$$\phi_f(z) = \tan^{-1}\frac{\Im\{f(z)\}}{\Re\{f(z)\}} = -\tan^{-1}\frac{2xy}{x^2-y^2+1} \tag{84}$$

Οι γραφικές παραστάσεις τους απεικονίζονται στο Σχήμα 16. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσετε ότι στα σημεία



Σχήμα 16: *Μέτρο και Φάση της συνάρτησης Παραδείγματος 0.2.8.*

$z = \pm j$, η συνάρτηση $|f(z)|$ απειρίζεται. Δείτε πως αυτό εκφράζεται στη γραφική της παράσταση. Επίσης, παρατηρήστε ότι η φάση της συνάρτησης παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, καθώς ο τρόπος υπολογισμού της γίνεται με τη γνωστή σας συνάρτηση αντίστροφης εφαπτομένης.

0.5.1 Όριο

Είναι σημαντικό να συζητηθούν οι έννοιες της *συνέχειας* και της *παραγώγισης* μιγαδικών συναρτήσεων.

Η έννοια του μέτρου μας βοηθά κατάρχάς να ορίσουμε την απόσταση και το όριο στο χώρο των μιγαδικών αριθμών. Η απόσταση μεταξύ δυο μιγαδικών αριθμών z και z_0 αποτελεί το μέτρο της διαφοράς τους, δηλ. $|z - z_0|$. Ένας μιγαδικός αριθμός z τείνει στο μιγαδικό αριθμό z_0 αν

$$|z - z_0| \to 0 \tag{85}$$

με $|z - z_0|$ την Ευκλείδια απόσταση μεταξύ των δυο μιγαδικών αριθμών.

0.5.2 Συνέχεια

Μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ η οποία ορίζεται στο ανοικτό[9] σύνολο $A \in \mathbb{C}$ είναι *συνεχής* στο σημείο $z_0 \in A$ αν και μόνον αν ισχύει ότι

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{86}$$

Εάν η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $z_0 \in A$ τότε η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ ονομάζεται συνεχής σε κάθε σημείο του A.

0.5.3 Παραγωγισιμότητα

Αντίστοιχα, μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ είναι *παραγωγίσιμη* σε ένα σημείο $z_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{87}$$

και το οποίο συμβολίζεται με $f'(z_0)$. Εάν η μιγαδική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του ανοικτού συνόλου A, τότε ονομάζεται *αναλυτική*.

Οποιοδήποτε πολυώνυμο του z αποτελεί αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$. Επίσης, οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο που αποτελείται από όλα τα z, εκτός από αυτά που ο παρονομαστής μηδενίζεται. Στη συνέχεια του βιβλίου θα ασχοληθούμε σχεδόν αποκλειστικά με συναρτήσεις που είναι αναλυτικές σε κάποιο απλό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Όλοι οι συνήθεις κανόνες του γινομένου, του πηλίκου, ο κανόνας της αλυσίδας, κλπ. ισχύουν κατά τα γνωστά από το λογισμό μιας μεταβλητής. Μια πολύ σημαντική μιγαδική συνάρτηση είναι η *εκθετική*, η οποία είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, με

$$e^z = \frac{d}{dz} e^z \tag{88}$$

όπως επίσης και η

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} \tag{89}$$

για κάθε ακέραιο n.

0.5.4 Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση $e^{j2\pi f_0 t}$

Μια πολύ σημαντική μιγαδική συνάρτηση είναι η εκθετική της μορφής $f(z) = e^{j\theta(t)}$. Νωρίτερα, εισάγαμε την περίφημη σχέση του Euler, η οποία επαναλαμβάνεται χάριν ευκολίας παρακάτω στη γενικότερη μορφή της:

$$Ae^{j\theta} = \Re\{Ae^{j\theta}\} + j\Im\{Ae^{j\theta}\} = A\cos(\theta) + jA\sin(\theta) \tag{90}$$

με $A > 0$ το *μέτρο* (ή *πλάτος*) της εκθετικής μιγαδικής συνάρτησης και θ τη *φάση* της. Αν το όρισμα θ είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου t, δηλ. της μορφής $\theta(t) = \omega_0 t + \phi = 2\pi f_0 t + \phi$, τότε στο διδιάστατο επίπεδο

[9] Ανοικτό λέγεται ένα σύνολο A όταν δεν συμπεριλαμβάνεται σε αυτό το ''σύνορό'' του. Για παράδειγμα, τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν τη σχέση

$$x^2 + y^2 < r^2$$

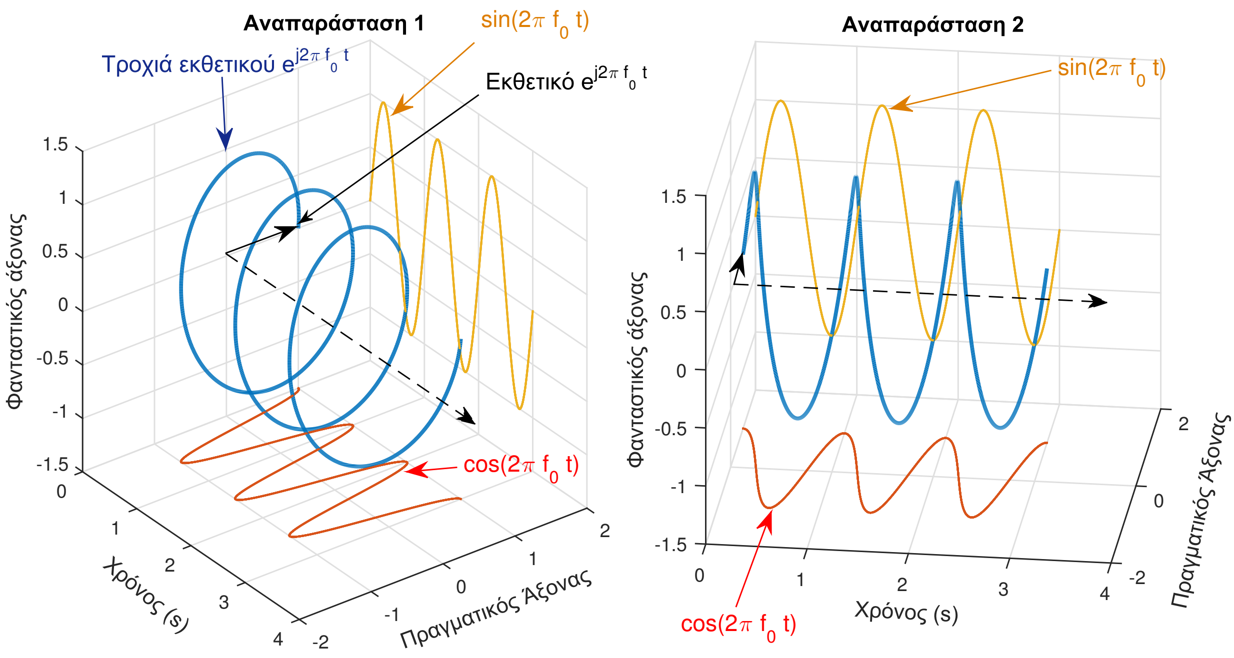
αποτελούν ένα ανοικτό σύνολο A. Το ''σύνορο'' B του ανοικτού συνόλου A είναι το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τη σχέση

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Η ένωση των δυο αυτών συνόλων αποτελεί ένα *κλειστό* σύνολο.

των μιγαδικών αριθμών, η σχέση περιγράφει ένα διάνυσμα σταθερού μήκους A στο μιγαδικό επίπεδο το οποίο περιστρέφεται συνεχώς σε έναν κύκλο ακτίνας A, με γωνιακή (ή κυκλική) συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$ rad/s. Αν ορίσουμε έναν τρίτο άξονα, αυτόν του χρόνου t, τότε ο χώρος γίνεται τριδιάστατος και το περιστρεφόμενο διάνυσμα ορίζει μια σπειροειδή τροχιά στο χώρο αυτό. Η περιστροφή αυτή γίνεται φυσικά με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$ rad/s, ή εναλλακτικά με συχνότητα f_0 Hz. Αυτό σημαίνει ότι το περιστρεφόμενο διάνυσμα εκτελεί f_0 πλήρεις "σπειροειδείς κύκλους " ανά δευτερόλεπτο.

Διάφορες όψεις - για καλύτερη κατανόηση και μόνο - αυτής της κίνησης του περιστρεφόμενου διανύσματος (μοναδιαίου μήκους A και μηδενικής φάσης ϕ εδώ, για ευκολία) φαίνονται στο Σχήμα 17, μαζί με το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του. Με χρήση της συζυγίας, οι σχέσεις του Euler δίνουν επίσης τις παρακάτω σχέσεις



Σχήμα 17: *Μιγαδική εκθετική συνάρτηση $e^{j2\pi f_0 t}$, μαζί με το πραγματικό και φανταστικό μέρος της, από δυο όψεις στον τριδιάστατο μιγαδικό χώρο.*

για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού:

$$\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A\cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t} \tag{91}$$

$$\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A\sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j}e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j}e^{-j2\pi f_0 t} \tag{92}$$

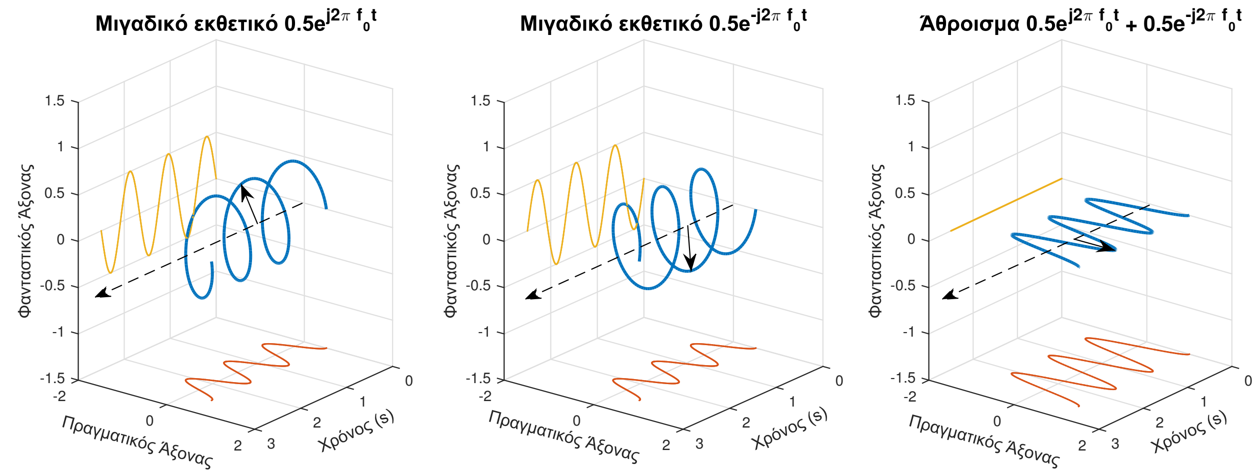
Ας πάρουμε τη Σχέση (91), η οποία περιγράφει ένα ημίτονο ως άθροισμα ενός συζυγούς ζεύγους μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων με πλάτη $\frac{A}{2}$. Ας απεικονίσουμε την κίνηση των περιστρεφόμενων διανυσμάτων που αντιστοιχούν στο ζεύγος αυτό. Βλέπουμε στο Σχήμα 18 (για $A = 1$) ότι η τροχιές τους είναι αντίθετες: η μιγαδική εκθετική συνάρτηση $\frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t}$ περιστρέφεται με την ορθή μαθηματική φορά, ενώ η αντίστοιχη $\frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$ περιστρέφεται με την αντίθετη μαθηματική φορά. Σε κάθε χρονική στιγμή t, τα φανταστικά μέρη τους έχουν το ίδιο μέτρο, $\left|\frac{A}{2}\sin(2\pi f_0 t)\right|$, αλλά αντίθετα πρόσημα, ενώ τα πραγματικά τους μέρη είναι ακριβώς ίδια. Το άθροισμα των διανυσμάτων αυτών για κάθε t ισούται με το διπλάσιο πραγματικό μέρος της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης. Σε περίπτωση που το πλάτος A είναι μιγαδικό, δηλ. είναι της μορφής

$$A = |A|e^{j\phi} \tag{93}$$

τότε η γωνία ϕ συμβολίζει την αρχική *φάση* της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης, και οι αντίστοιχες σχέσεις γίνοται

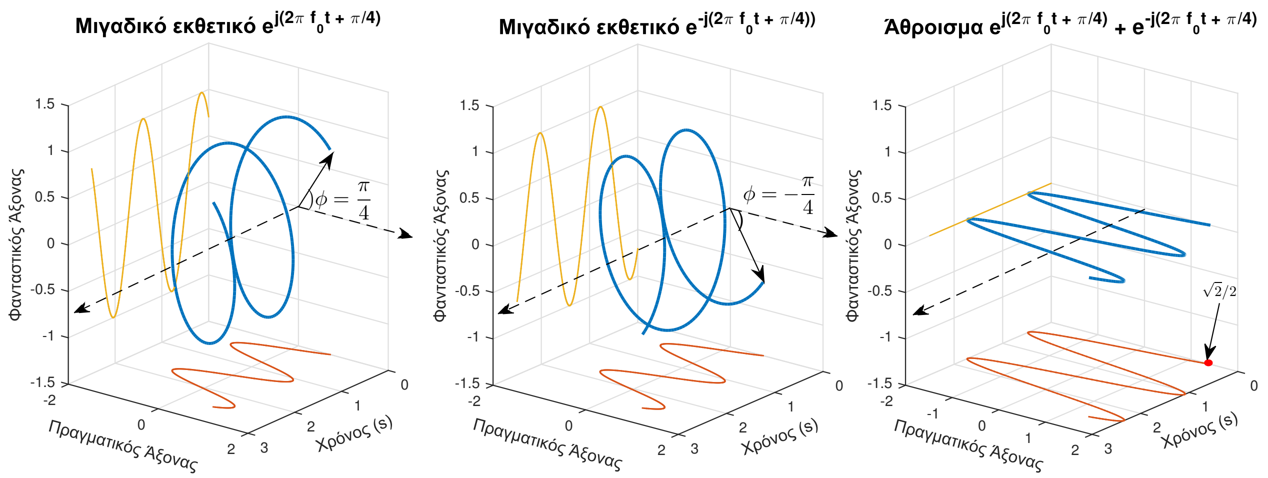
$$\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = |A|\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{|A|}{2}e^{j(2\pi f_0 t+\phi)} + \frac{|A|}{2}e^{-j(2\pi f_0 t+\phi)} \tag{94}$$

$$\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = |A|\sin(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{|A|}{2j}e^{j(2\pi f_0 t+\phi)} - \frac{|A|}{2j}e^{-j(2\pi f_0 t+\phi)} \tag{95}$$



Σχήμα 18: *Συζυγείς μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις και το πραγματικό άθροισμά τους. Το περιστρεφόμενο μιγαδικό εκθετικό διάνυσμα (με μαύρο χρώμα) βρίσκεται σε τυχαία θέση του άξονα του χρόνου (διακεκκομένη μαύρη γραμμή).*

δηλ. το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης έχει μια αρχική φάση ϕ για $t = 0$ με τιμή $\cos(\phi)$ κα $\sin(\phi)$ αντίστοιχα. Στο Σχήμα 19 μπορείτε να δείτε τη συμπεριφορά του ζεύγους συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων για $A = 1$ και $\phi = \frac{\pi}{4}$, καθώς και του αθροίσματός τους. Από τα παραπάνω είναι



Σχήμα 19: *Συζυγείς μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις με αρχική φάση $\phi = \pi/4$ και το πραγματικό άθροισμά τους. Το περιστρεφόμενο μιγαδικό εκθετικό διάνυσμα (με μαύρο χρώμα) βρίσκεται σε τυχαία θέση του άξονα του χρόνου (διακεκκομένη μαύρη γραμμή)*

εμφανής η σχέση ημιτόνων και συνημιτόνων με το συζυγές ζεύγος μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων $e^{\pm j(2\pi f_0 t + \phi)}$, σύμφωνα με τις Σχέσεις (94,95):

- Ένα συνημίτονο πλάτους A, συχνότητας f_0, και φάσης ϕ μπορεί να ειδωθεί ως το πραγματικό μέρος ενός περιστρεφόμενου μιγαδικού εκθετικού διανύσματος $Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$.
- Ένα ημίτονο πλάτους A, συχνότητας f_0, και φάσης ϕ μπορεί να ειδωθεί ως το φανταστικό μέρος ενός περιστρεφόμενου μιγαδικού εκθετικού διανύσματος $Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$.
- Ένα συνημίτονο πλάτους A, συχνότητας f_0, και φάσης ϕ μπορεί να ειδωθεί ως το *άθροισμα* δυο συζυγών περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών διανυσμάτων $\frac{A}{2}e^{\pm j(2\pi f_0 t + \phi)}$.
- Ένα ημίτονο πλάτους A, συχνότητας f_0, και φάσης ϕ μπορεί να ειδωθεί ως τη *διαφορά* δυο συζυγών περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών διανυσμάτων $\frac{A}{2}e^{\pm j(2\pi f_0 t + \phi)}$.

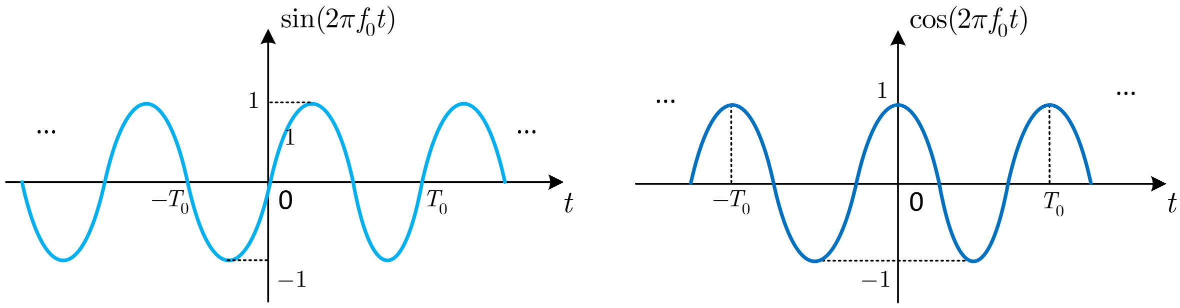
Η παράγραφος αυτή είναι σημαντική για την κατανόηση των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, τη σχέση τους με τη συχνότητα ω_0 ή f_0, και την αξιοποίησή τους σε πραγματικά προβλήματα μέσω των σχέσων της συζυγίας και του πραγματικού/φανταστικού μέρους τους. Μάλιστα, στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πόσο χρήσιμες είναι αυτές οι σχέσεις! ☺

0.6 Ημίτονα

Αφήνοντας για λίγο τις μιγαδικές συναρτήσεις και επιστρέφοντας στις καθαρά πραγματικές, μια πολύ σημαντική κατηγορία συναρτήσεων είναι τα ημιτονοειδή. Γι' αυτό αξίζει τον κόπο να τα εξετάσουμε διεξοδικά. Ας δούμε τον γενικό τύπο των συναρτήσεων αυτών:

$$x(t) = A\cos(\underbrace{\omega_0 t + \phi}_{\text{radians}}) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) \tag{96}$$

όπου A το πλάτος του ημιτονοειδούς, $\omega_0 = 2\pi f_0$ η λεγόμενη ***κυκλική συχνότητα*** σε rad/s, με f_0 να είναι η *συχνότητα σε Hz*, και ϕ η φάση μετατόπισης του ημιτονοειδούς. Για αποφυγή παρεξηγήσεων, χρησιμοποιούμε το συνημίτονο cos(.) αντί για το ημίτονο sin(.) ως τη γενική μορφή ενός ημιτονοειδούς σήματος, ανεξάρτητα αν οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται *ημιτονο*-ειδείς. Άλλωστε το ημίτονο και το συνημίτονο είναι οι ίδιες συναρτήσεις ακριβώς, μόνο που διαφέρουν κατά μια μετατόπιση, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 20.



Σχήμα 20: *Ημίτονο (αριστερά) και Συνημίτονο (δεξιά).*

Ας μελετήσουμε ένα συγκεκριμένο ημιτονοειδές, το

$$x(t) = 20\cos(2\pi 10t - 0.4\pi) \tag{97}$$

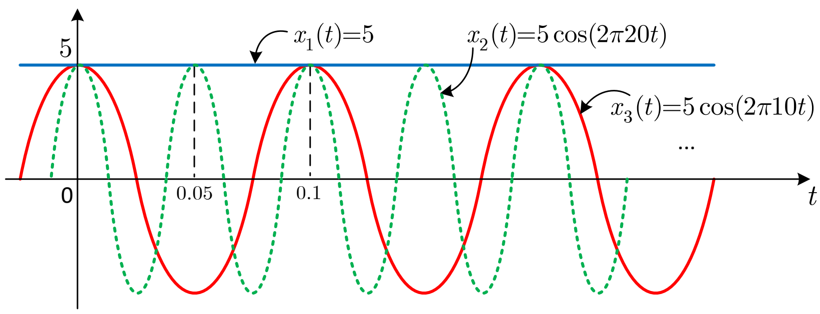
Η συχνότητά του είναι $f_0 = 10$ Hz, και η *περίοδός* του είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.1$ s. Η περίοδος μας δίνει τις χρονικές στιγμές όπου η συνάρτηση επαναλαμβάνεται. Εδώ λοιπόν θα έχουμε μέγιστο τις χρονικές στιγμές $t = ..., -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, ...$

Επομένως

$$x(t + T_0) = x(t) \tag{98}$$

$$\cos(2\pi f_0(t + T_0) + \phi) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) \tag{99}$$

$$\cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 T_0 + \phi) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \cos(2\pi f_0 t + 2k\pi + \phi), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{100}$$



Σχήμα 21: *Ημιτονοειδή για διάφορες συχνότητες* f_0.

Παρατηρούμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$2\pi f_0 T_0 = 2k\pi \Rightarrow T_0 = k\frac{1}{f_0} \tag{101}$$

Ονομάζουμε *βασική περίοδο* ή απλά *περίοδο* του σήματος την τιμή του T_0 για $k = 1$. Ετσι η περίοδος ενός ημιτονοειδούς θα δίδεται από τη σχέση:

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \tag{102}$$

και επίσης

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \Longleftrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{103}$$

Επομένως $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{10} = 0.1$

Στο Σχήμα 21 βλέπουμε μερικά ημιτονοειδή για διάφορες συχνότητες f_0: για $f_0 = 0$ Hz, το $x_1(t) = 5\cos(2\pi 0t) = 5$, για $f_0 = 10$ Hz, το $x_2(t) = 5\cos(2\pi 10t)$, και για $f_0 = 20$ Hz, το $x_3(t) = 5\cos(2\pi 20t)$. Το ημιτονοειδές $x_1(t)$ λέγεται και *DC (Direct Current) συνιστώσα*. Αυτή η ονομασία προέρχεται - και χρησιμοποιείται ακόμα - από την ηλεκτρονική.

0.6.1 Μετατόπιση Φάσης

Η συχνότητα f_0 καθορίζει το κάθε πότε επαναλαμβάνονται τα μέγιστα και τα ελάχιστα ενός ημιτονοειδούς, ενώ η φάση ϕ καθορίζει το πού ακριβώς αυτά βρίσκονται. Αν $\phi = 0$ τότε το πρώτο μέγιστο βρίσκεται στο $t = 0$ και έχει τιμή $A\cos(0) = A$, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση όπου $\phi \in (-\pi, \pi] - \{0\}$, το πρώτο μέγιστο έχει *μετατοπιστεί* στο χρόνο και έχει τιμή $A\cos(\phi) \neq A$. Όμοια ισχύουν και για τα ελάχιστα.

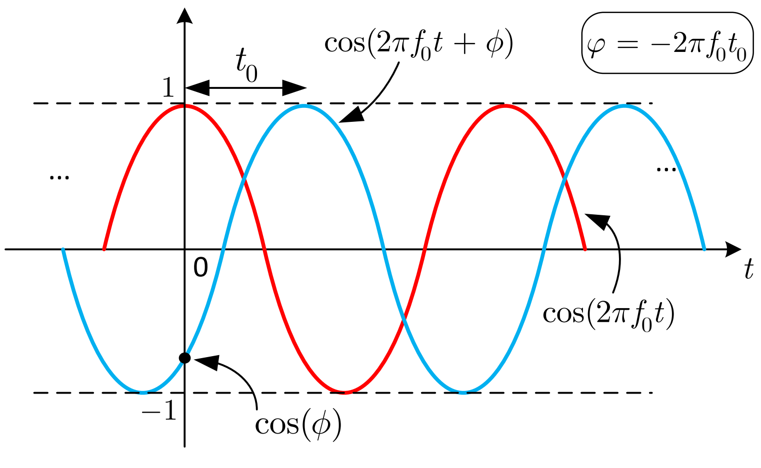
Ας συμβολίσουμε με $x_0(t)$ το ημιτονοειδές με $\phi = 0$:

$$x_0(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)\Big|_{\phi=0} = A\cos(2\pi f_0 t) \tag{104}$$

Εστω λοιπόν ότι *καθυστερούμε* το ημιτονοειδές $x_0(t)$ κατά $t = t_0 > 0$. Τότε:

$$x_0(t - t_0) = A\cos(2\pi f_0(t - t_0)) = A\cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) \tag{105}$$

όπου θέσαμε $\phi = -2\pi f_0 t_0$.



Σχήμα 22: *Φάση ϕ, μετατόπιση t_0, και η μεταξύ τους σχέση.*

Ομως, $T_0 = \frac{1}{f_0}$, επομένως έχουμε

$$\phi = -2\pi f_0 t_0 = -2\pi \frac{t_0}{T_0}, \tag{106}$$

Αυτή η σχέση μας υποδεικνύει την τιμή που πρέπει να έχει η φάση ϕ για να έχουμε καθυστέρηση του ημιτονοειδούς κατά $t = t_0$. Όμοια συζήτηση μπορεί να γίνει και για προήγησή του κατά $t = t_0 < 0$. Ένα παράδειγμα όπου απεικονίζονται όλα τα παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα 22.

Εδώ θα πρέπει να διευκρινήσουμε την ορολογία. Φάση ονομάζεται η ποσότητα που υπάρχει στο όρισμα του $\cos(.)$, δηλαδή η ποσότητα: $2\pi f_0 t + \phi$. Φάση μετατόπισης ονομάζεται η ποσότητα ϕ. Ενα μικρό μπέρδεμα που προκύπτει πολύ συχνά στην βιβλιογραφία είναι ότι για λόγους απλότητας η φάση μετατόπισης αναφέρεται απλά ως ‘‘φάση’’. Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε συχνά στην φάση μετατόπισης απλά ως φάση ενώ θα διαχωρίζουμε τις δύο φάσεις όταν αυτό είναι αναγκαίο.

Γενικά, εάν ένα ημιτονοειδές έχει περίοδο T_0, η μετατόπιση του είναι φραγμένη:

$$|t_0| \leq \frac{T_0}{2} \tag{107}$$

Φυσικά και μπορούμε να μετακινήσουμε περισσότερο τη συνάρτηση του ημιτόνου, το αποτέλεσμα όμως που θα λάβουμε είναι το ίδιο, αφού το ημιτονοειδές είναι περιοδικό με περίοδο T_0. Επομένως από τις Σχέσεις (106) και (107) έχουμε

$$-\pi < \phi \leq \pi \tag{108}$$

0.6.2 Παραγωγή ημιτόνου

Ένα ημιτονοειδές δεν έχει μόνο στενή μαθηματική ερμηνεία˙ συναντάται πάρα πολλές φορές στην πράξη, περισσότερες απ΄ όσες νομίζετε. Ίσως το πιο οικείο σας παράδειγμα να είναι η παραγωγή ηχητικών κυμάτων - τα οποία γνωρίζουμε ότι μεταβάλλονται ημιτονοειδώς - μέσω ενός διαπασών, όπως αυτό του Σχήματος 23.

Μάλιστα οι μουσικοί το χρησιμοποιούν πολύ συχνά για να ‘‘κουρδίσουν’’ τα όργανά τους. Ένα ιδανικό διαπασών εκπέμπει ένα ημίτονο μιας συγκεκριμένης συχνότητας όταν το χτυπήσουμε σε μια επιφάνεια. Αυτό σημαίνει ότι το άκρο του διαπασών δονείται μετά το χτύπημα εκτελώντας (ιδανικά) απλή αρμονική ταλάντωση. Η ταλάντωση του άκρου του προκαλεί όμοια κίνηση στα μόρια του αέρα γύρω του, αυτά ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα, διαδίδοντας το αρμονικό κύμα στα γειτονικά μόρια, και στο τέλος αυτή η κυματική διάδοση φτάνει και διεγείρει ακουστικά το αυτί μας, οπότε και αντιλαμβανόμαστε τον ήχο. Οι μεταβολές της πίεσης και της θέσης των μορίων του αέρα κατά την κυματική διάδοση έχουν ημιτονοειδή χαρακτηριστικά.

Σχήμα 23: *Διαπασών.*

Η παραγωγή του ημιτονοειδούς προέρχεται από απλές εφαρμογές γνωστών νόμων της Φυσικής. Αν θεωρήσουμε ότι το άκρο του διαπασών ταλαντώνεται όπως ένα ελατήριο, τότε η δύναμη του κυβερνά την ταλάντωση μπορεί να μοντελοποιηθεί από το νόμο του Hooke[10], δηλ.

$$F = -kx \tag{109}$$

με k μια σταθερά που σχετίζεται με την ελαστικότητα του διαπασών και x τη μετατόπιση του άκρου του από τη θέση ισορροπίας. Όμως, η δύναμη αυτή προκαλεί επιτάχυνση στο άκρο του διαπασών, οπότε μπορεί να περιγραφεί με όρους Μηχανικής ως

$$F = ma \tag{110}$$

με m τη μάζα και a την επιτάχυνση του ταλαντούμενου άκρου. Η σύνθεση των δυο εξισώσεων δίνει

$$-kx = ma \Longleftrightarrow -kx(t) = m\frac{d^2}{dt^2}x(t) \tag{111}$$

εφ΄ όσον η ταλάντωση είναι μια κίνηση που μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου και η επιτάχυνση αποτελεί το δεύτερη παράγωγο ως προς το χρόνο της συνάρτησης θέσης του άκρου του διαπασών. Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται διαφορική (καθώς εμπλέκει παραγώγους μιας συνάρτησης) και η ακριβής επίλυσή της θα μετατεθεί σε επόμενο κεφάλαιο. ☺Όμως μπορούμε να σας πούμε ότι αν θέσετε

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \tag{112}$$

στην παραπάνω εξίσωση, θα δείτε ότι επαληθεύεται! Μάλιστα η συχνότητα ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{113}$$

Τι πρέπει να προσέξουμε ώστε ένα διαπασών να παράγει μια συγκεκριμένη νότα (π.χ. τη νότα ΛΑ, η οποία είναι μια ταλάντωση στα 440 Hz); Προφανώς θα πρέπει να ρυθμίσουμε τη μάζα και το είδος του υλικού κατασκευής του διαπασών (σταθερά k). Παρατηρήστε ότι η συχνότητα δεν εξαρτάται από την ένταση με την οποία θα χτυπήσουμε το διαπασών.

Τέλος, οι παράμετροι A και ϕ εξαρτώνται από τις λεγόμενες *αρχικές συνθήκες* του προβλήματος, που ουσιαστικά μοντελοποιούν τι συμβαίνει στο βραχίονα του διαπασών όταν $t = 0$. Περισσότερα για αυτά θα πούμε σύντομα.

[10]Ίσως σας είναι γνωστός από τις δυνάμεις ελατηρίων.

0.6.3 Άθροισμα δυο ημιτόνων

Αν έχουμε δυο ημίτονα ίδιας συχνότητας αλλά με διαφορετικές φάσεις, μπορούμε να τα αθροίσουμε σε ένα ημίτονο ίδιας συχνότητας. Η τριγωνομετρία μας βοηθά σε αυτό, δίνοντάς μας τη γνωστή σχέση

$$A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = A\cos(2\pi f_0 t)\cos(\phi) - A\sin(2\pi f_0 t)\sin(\phi) \tag{114}$$

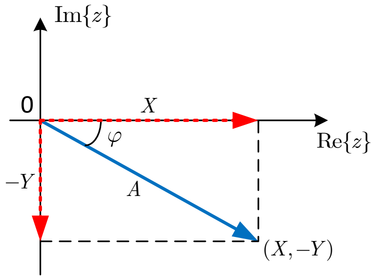
Αν τώρα θέσουμε

$$X = A\cos(\phi) \tag{115}$$
$$Y = -A\sin(\phi) \tag{116}$$

τότε η Σχέση (114) γράφεται

$$A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = X\cos(2\pi f_0 t) + Y\sin(2\pi f_0 t) \tag{117}$$

Οι ποσότητες X, Y αντιστοιχούν στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται από το μιγαδικό αριθμό $z = X - jY$ στο μιγαδικό επίπεδο (βλέπε Σχήμα 24). Πώς το καταλαβαίνουμε αυτό; Θυμηθείτε τις σχέσεις του Euler και τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση που γνωρίσαμε πριν λίγες σελίδες. Είναι



Σχήμα 24: *Μιγαδικός αριθμός $z = X - jY$ στην πρόσθεση δυο ημιτόνων ίδιας συχνότητας.*

$$A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \Re\{Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{118}$$

και

$$X\cos(2\pi f_0 t) + Y\sin(2\pi f_0 t) = \Re\{Xe^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Ye^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{119}$$

αφού $\sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi/2)$. Άρα

$$\Re\{Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{Xe^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Ye^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{120}$$
$$\Re\{Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{Xe^{j2\pi f_0 t} + Ye^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{121}$$
$$\Re\{Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{(X + Ye^{-j\frac{\pi}{2}})e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{122}$$
$$\Re\{Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{(X - jY)e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{123}$$

αφού $e^{-j\pi/2} = -j$. Άρα πράγματι ο μιγαδικός αυτός μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή ως

$$z = X - jY = Ae^{j\phi} = \sqrt{X^2 + Y^2}e^{j\tan^{-1}\left(\frac{-Y}{X}\right)} \tag{124}$$

δηλ. τελικά

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{125}$$
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-Y}{X}\right) \tag{126}$$

Άρα για να βρούμε τις τιμές των A και ϕ, η πολική μορφή είναι πολύ βολική και μας δίνει κατευθείαν το αποτέλεσμα, αρκεί να δεχθούμε να περάσουμε μέσα από το μονοπάτι των μιγαδικών συναρτήσεων. Υπενθυμίζεται ότι η φάση ϕ πρέπει πάντα να εκφράζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Η παραπάνω απλή περίπτωση γίνεται πιο σύνθετη αν θέλουμε να γράψουμε το άθροισμα

$$A\cos(2\pi f_0 t + \phi_1) + B\cos(2\pi f_0 t + \phi_2) \tag{127}$$

ως έναν ημιτονοειδή όρο, δηλ. ως $\mathcal{A}\cos(2\pi f_0 t + \psi)$. Εδώ η πολική μορφή αποτελεί σχεδόν μονόδρομο για μια εύκολη λύση.

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi_1) + B\cos(2\pi f_0 t + \phi_2) \tag{128}$$
$$= \Re\{Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi_1)}\} + \Re\{Be^{j(2\pi f_0 t + \phi_2)}\} \tag{129}$$
$$= \Re\{Ae^{j\phi_1}e^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Be^{j\phi_2}e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{130}$$
$$= \Re\{Ae^{j\phi_1}e^{j2\pi f_0 t} + Be^{j\phi_2}e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{131}$$
$$= \Re\{(Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2})e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{132}$$

$$= \Re\{\mathcal{A}e^{j\psi}e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (133)$$
$$= \mathcal{A}\cos(2\pi f_0 t + \psi) \quad (134)$$

με

$$\mathcal{A} = \sqrt{\Re\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}^2 + \Im\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}^2} \quad (135)$$
$$\psi = \tan^{-1}\frac{\Im\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}}{\Re\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}} \quad (136)$$

Τώρα μπορούμε να κάνουμε μια *πολύ* σημαντική παρατήρηση. Δείτε τις Σχέσεις (130-133). Οι μιγαδικοί συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων $e^{j2\pi f_0 t}$ ονομάζονται **φάσορες - phasors** - δεν είναι άλλοι από τους μιγαδικούς αριθμούς

$$Ae^{j\phi_1} \quad \text{και} \quad Be^{j\phi_2} \quad (137)$$

Οι φάσορες χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν ημίτονα (και τις μεταξύ τους πράξεις) με πιο εύκολο τρόπο. Παρατηρήστε ότι η τριγωνομετρική εξίσωση

$$A\cos(2\pi f_0 t + \phi_1) + B\cos(2\pi f_0 t + \phi_2) = \mathcal{A}\cos(2\pi f_0 t + \psi) \quad (138)$$

είναι ισοδύναμη με την εξίσωση μιγαδικών αριθμών

$$Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2} = \mathcal{A}e^{j\psi} \quad (139)$$

και η λύση της, δηλ. η εύρεση των $\mathcal{A}$, ψ, δίνεται από τις Σχέσεις (135-136).

0.6.4 Άθροισμα N ημιτόνων

Ακόμα γενικότερα, έστω ότι έχουμε ένα πιο σύνθετο άθροισμα, το οποίο αποτελείται από πολλά ημιτονοειδή ίδιας συχνότητας, το οποίο περιγράφεται ως

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k\cos(2\pi f_0 t + \phi_k) \quad (140)$$

Η έκφραση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά, αλλά αυτό είναι δύσκολο να γίνει με τους γνωστούς τύπους της τριγωνομετρίας που δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Αν χρησιμοποιήσουμε όμως πολικές μορφές υπάρχει αρκετή απλοποίηση:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k\cos(2\pi f_0 t + \phi_k) = \sum_{k=1}^{N}\Re\{A_k e^{j(2\pi f_0 t + \phi_k)}\} \quad (141)$$

$$(142)$$

$$= \Re\left\{\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j(2\pi f_0 t + \phi_k)}\right\} = \Re\left\{\left[\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k}\right]e^{j(2\pi f_0 t)}\right\} = \Re\{\mathcal{A}e^{j\phi}e^{j(2\pi f_0 t)}\} \quad (143)$$

$$(144)$$

$$= \Re\{\mathcal{A}\cos(2\pi f_0 t + \phi) + j\mathcal{A}\sin(2\pi f_0 t + \phi)\} = \mathcal{A}\cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (145)$$

όπου

$$\mathcal{A} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{N}\Re\{A_k e^{j\phi_k}\}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{N}\Im\{A_k e^{j\phi_k}\}\right)^2} \quad (146)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\sum_{k=1}^{N}\Im\{A_k e^{j\phi_k}\}}{\sum_{k=1}^{N}\Re\{A_k e^{j\phi_k}\}} \quad (147)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 0.2.9:

Λύστε την ακόλουθη εξίσωση ως προς θ:

$$\Re\{(1+j)e^{j\theta}\} = -1 \tag{148}$$

Λύση:
Έχουμε διαδοχικά

$$\Re\left\{(1+j)e^{j\theta}\right\} = -1 \iff \Re\left\{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\theta}\right\} = -1 \iff \Re\left\{\sqrt{2}e^{j(\theta+\frac{\pi}{4})}\right\} = -1 \tag{149}$$

$$\Re\left\{e^{j(\theta+\frac{\pi}{4})}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \tag{150}$$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \tag{151}$$

Άρα

$$\theta + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, & k \in Z \\ \theta = 2k\pi - \pi, & k \in Z \end{cases} \tag{152}$$

■

Παράδειγμα 0.2.10:

Έστω η ημιτονοειδής συνάρτηση

$$x(t) = \sqrt{3}\cos(2\pi f_0 t + \pi/3) + \sin(2\pi f_0 t + \pi/2) \tag{153}$$

Βρείτε μια μιγαδική συνάρτηση $z(t)$ για την οποία να ισχύει $x(t) = \Re\{z(t)\}$.

Λύση:
Είναι

$$x(t) = \sqrt{3}\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}) + \sin(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{3}\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}) + \cos(2\pi f_0 t) = \Re\left\{(\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{3}} + 1)e^{j2\pi f_0 t}\right\} \tag{154}$$

όπου

$$z = 1 + \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{3}} = 1 + \sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}j\sin(\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}\frac{1}{2} + j\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{3}{2} \tag{155}$$

Οπότε

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} \simeq 2.394 \tag{156}$$

και

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \tan^{-1}\frac{3}{2+\sqrt{3}} = 0.677 \text{ rad} \tag{157}$$

Άρα

$$z(t) = 2.394e^{j(2\pi f_0 t + 0.677)} \tag{158}$$

■

0.6.5 Περιοδικότητα N ημιτόνων

Γνωρίζουμε ότι ένα ημίτονο $A\cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ είναι πάντα περιοδικό με περίοδο $T_0 = 1/f_0$ s. Τι συμβαίνει όμως όταν έχουμε αθροίσματα ημιτόνων; Είναι το άθροισμα N ημιτόνων περιοδικό; Κι αν ναι, υπό ποιές συνθήκες;

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό άθροισμα δυο ημιτόνων ως

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) \tag{159}$$

Καθένα από τα επιμέρους ημίτονα έχει περίοδο $T_1 = 1/f_1$ και $T_2 = 1/f_2$, αντίστοιχα. Έστω ότι υπάρχει αριθμός

T ο οποίος αποτελεί την περίοδο του σήματος $x(t)$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$x(t) = x(t+T) \tag{160}$$
$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 (t+T) + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 (t+T) + \phi_2) \tag{161}$$
$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 t + 2\pi f_1 T + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + 2\pi f_2 T + \phi_2) \tag{162}$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα, πρέπει

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2\pi f_1 T = 2\pi k, & k \in Z \\ 2\pi f_2 T = 2\pi l, & l \in Z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} f_1 T = k, & k \in Z \\ f_2 T = l, & l \in Z \end{array} \right. \tag{163}$$

και άρα

$$T = \frac{k}{f_1} = \frac{l}{f_2} = kT_1 = lT_2, \;\; k,l \in Z \tag{164}$$

Αναδιατάσσοντας, έχουμε

$$\frac{k}{l} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{T_2}{T_1}, \;\; k,l \in Z \tag{165}$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι για να είναι περιοδική η συνάρτηση $x(t)$ πρέπει ο λόγος των περιόδων ή των συχνοτήτων των επιμέρους ημιτόνων να είναι *λόγος ακεραίων*. Αν ο λόγος των περιόδων ή των συχνοτήτων δεν είναι λόγος ακεραίων, τότε η συνάρτηση *δεν* είναι περιοδική.

Όμως η παραπάνω μελέτη μας πληροφορεί αν η συνάρτηση είναι περιοδική ή όχι. Δε μας πληροφορεί για το *ποιά* είναι η περίοδός της, σε περίπτωση που αυτή είναι περιοδική. Όμως από τη σχέση

$$T = kT_1 = lT_2, \;\; k,l \in Z \tag{166}$$

καταλαβαίνουμε ότι η περίοδος T αποτελεί το *ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο - Ε.Κ.Π* των περιόδων T_1, T_2. Αντίστοιχα, αν η παραπάνω σχέση γραφεί ως

$$f_0 = \frac{f_1}{k} = \frac{f_2}{l}, \;\; k,l \in Z \tag{167}$$

καταλαβαίνουμε ότι η θεμελιώδης συχνότητα f_0 της συνάρτησης αποτελεί το *μέγιστο κοινό διαιρέτη - Μ.Κ.Δ* των συχνοτήτων f_1, f_2.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις γενικεύονται για N το πλήθος ημίτονα.

Παράδειγμα 0.2.11:

Ας ελέγξουμε αν η συνάρτηση

$$x(t) = \cos(2\pi 200 t + \pi/3) - \sin(2\pi 400 t) + 3\cos(2\pi 500 t - \pi/6) \tag{168}$$

είναι περιοδική.

Λύση:
Αν υπάρχει περίοδος T, τότε για αυτή θα πρέπει να ισχύει

$$T = \frac{k}{200} = \frac{l}{400} = \frac{m}{500}, \;\; k,l,m \in Z \tag{169}$$

Προφανώς ο λόγος όλων των περιόδων ή συχνοτήτων ανά δυο είναι λόγος ακεραίων, άρα η συνάρτηση είναι περιοδική. Η θεμελιώδης του συχνότητα δίνεται ως

$$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{200, 400, 500\} = 100 \text{ Hz} \tag{170}$$

Άρα η περίοδος της είναι $T_0 = 1/f_0 = 0.01$ s.

■

Παράδειγμα 0.2.12:

Ας ελέγξουμε αν η συνάρτηση

$$x(t) = \cos(2\pi 200t - \pi/5) + \frac{1}{2}\sin(400t) + 2\sin(2\pi 500t + \pi/9) \tag{171}$$

είναι περιοδική.

Λύση:
Αν υπάρχει περίοδος T, τότε για αυτή θα πρέπει να ισχύει

$$T = \frac{k}{200} = \frac{l}{\frac{400}{2\pi}} = \frac{m}{500}, \quad k, l, m \in \mathrm{Z} \tag{172}$$

Παρατηρήστε ότι ο λόγος των δυο πρώτων συχνοτήτων *δεν* είναι λόγος ακεραίων, αφού

$$\frac{200}{\frac{400}{2\pi}} = \frac{400\pi}{400} = \pi \neq \frac{k}{l}, \quad k, l \in \mathrm{Z} \tag{173}$$

μια και ο αριθμός π είναι άρρητος αριθμός. Άρα η συνάρτηση $x(t)$ δεν είναι περιοδική, παρ' όλο που τα επιμέρους ημίτονα είναι περιοδικά!

■

Κλείνοντας, ο Πίνακας 4 αναφέρει μερικές χρήσιμες τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Τριγωνομετρικές Σχέσεις

Α/Α	Σχέση	Α/Α	Σχέση
1	$\cos(x \pm \pi/2) = \mp \sin(x)$	2	$\sin(x \pm \pi/2) = \pm \cos(x)$
3	$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$	4	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
5	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$	6	$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
7	$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$	8	$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
9	$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$	10	$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$
11	$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$	12	$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$
13	$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$		

Πίνακας 4: *Πίνακας Χρήσιμων Τριγωνομετρικών Σχέσεων*

0.7 Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα

Σε αυτήν την Παράγραφο, θα περιγράψουμε την μέθοδο του Αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα (Partial Fraction Expansion - PFE), που θα μας είναι χρήσιμη στη μελέτη σημάτων και συστημάτων γενικότερα. Όπως λέει και το όνομά της, η μέθοδος PFE διασπά μια ρητή συνάρτηση $F(x)$, με συνήθως υψηλής τάξης πολυώνυμα στον αριθμητή και στον παρονομαστή, σε απλά κλάσματα, με σταθερά ή πρωτοβάθμια πολυώνυμα στον αριθμητή και πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια πολυώνυμα στον παρονομαστή. Ουσιαστικά πρόκειται για την αντίστροφη διαδικασία της πρόσθεσης κλασμάτων σε κοινό παρονομαστή.

Η μέθοδος που ακολουθούμε για την PFE είναι πολύ απλή, και απλά χρειάζεται τριβή για να τη συνηθίσει κανείς. Υπάρχουν δυο συνήθεις περιπτώσεις PFE, οι οποίες εξαρτώνται από την ταξη των ριζών του παρονομαστή.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η PFE εφαρμόζεται *μόνον* όταν ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου του παρονομαστή. Αν δεν ισχύει αυτό, τότε πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή, ώστε να καταλήξουμε σε περίπτωση που μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο PFE.

Δεδομένου ότι ισχύει η παραπάνω σχέση μεταξύ των βαθμών των πολυωνύων, διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

1. Ο παρονομαστής έχει απλές ρίζες
2. Ο παρονομαστής έχει μια ή περισσότερες ρίζες πολλαπλότητας r

0.7.1 Απλές ρίζες

Θεωρούμε πρώτα την πιο απλή περίπτωση, όπου η συνάρτησή μας

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{174}$$

έχει απλές ρίζες στον παρονομαστή της, $Q(x)$. Θεωρήστε το ακόλουθο παράδειγμα:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}, \quad m < n \\ &= \frac{P(x)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)} \end{aligned} \tag{175}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$F(x) = \frac{k_1}{x-\rho_1} + \frac{k_2}{x-\rho_2} + \cdots + \frac{k_n}{x-\rho_n} \tag{176}$$

Για να βρούμε τον συντελεστή k_1, πολλαπλασιάζουμε και τις δυο πλευρές της παραπάνω σχέσης με $(x-\rho_1)$, και έπειτα θέτουμε $x = \rho_1$. Άρα

$$(x-\rho_1)F(x)\Big|_{x=\rho_1} = \Big[k_1 + \frac{k_2(x-\rho_1)}{x-\rho_2} + \frac{k_3(x-\rho_3)}{x-\rho_3} + \cdots + \frac{k_n(x-\rho_1)}{x-\rho_n}\Big]\Big|_{x=\rho_1} \tag{177}$$

Όλοι οι όροι στη δεξιά πλευρά απαλείφονται, εκτός του k_1. Άρα καταλήγουμε στο

$$k_1 = (x-\rho_1)F(x)\Big|_{x=\rho_1} \tag{178}$$

Παρόμοια, καταλήγουμε ότι

$$k_i = (x-\rho_i)F(x)\Big|_{x=\rho_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{179}$$

Η παραπάνω διαδικασία δουλεύει ανεξάρτητα από το αν οι ρίζες είναι πραγματικές ή μιγαδικές.

0.7.2 Ρίζες πολλαπλότητας r

Αν η συνάρτηση $F(x)$ έχει πολλαπλή ρίζα, με πολλαπλότητα r, στον παρονομαστή, τότε θα είναι της μορφής

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-\lambda)^r(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)\cdots(x-\rho_j)} \tag{180}$$

Το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για αυτή τη συνάρτηση δίνεται ως

$$F(x) = \frac{d_0}{(x-\lambda)^r} + \frac{d_1}{(x-\lambda)^{r-1}} + \cdots + \frac{d_{r-1}}{(x-\lambda)} \tag{181}$$

$$+ \frac{k_1}{x-\rho_1} + \frac{k_2}{x-\rho_2} + \cdots + \frac{k_n}{x-\rho_n} \tag{182}$$

Οι συντελεστές k_i αντιστοιχούν στις ρίζες χωρίς πολλαπλότητα και υπολογίζονται όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Για να βρούμε τους συντελεστές $d_0, \cdots, d_{r-1}$, πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με $(x-\lambda)^r$:

$$\begin{aligned} (x-\lambda)^r F(x) &= d_0 + d_1(x-\lambda) + d_2(x-\lambda)^2 + \cdots + d_{r-1}(x-\lambda)^{r-1} + \\ &+ k_1\frac{(x-\lambda)^r}{x-\rho_1} + k_2\frac{(x-\lambda)^r}{x-\rho_2} + \cdots + k_n\frac{(x-\lambda)^r}{x-\rho_n} \end{aligned} \tag{183}$$

Θέτοντας $x = \lambda$ και στα δυο μέλη, έχουμε

$$(x-\lambda)^r F(x)\Big|_{x=\lambda} = d_0 \tag{184}$$

Άρα το d_0 υπολογίζεται “κρύβοντας ” τον όρο $(x-\lambda)^r$ στην $F(x)$, και θέτοντας $x=\lambda$ στη σχέση που απομένει. Αν παραγωγίσουμε τη Σχέση (183) ως προς x, το δεξιό μέλος καταλήγει στο d_1+ όροι που περιέχουν το $(x-\lambda)$ στους αριθμητές. Θέτοντας $x=\lambda$ και στα δυο μέλη, έχουμε

$$\frac{d}{dx}\Big[(x-\lambda)^r F(x)\Big]\Big|_{x=\lambda} = d_1 \tag{185}$$

Άρα, το d_1 υπολογίζεται “κρύβοντας ” τον όρο $(x-\lambda)^r$ από τον όρο $F(x)$, παραγωγίζοντας την υπόλοιπη έκφραση ως προς x και μετά θέτοντας $x=\lambda$. Συνεχίζοντας κατ΄ αυτόν τον τρόπο, έχουμε ότι

$$d_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}[(x-\lambda)^r F(x)]\Big|_{x=\lambda} \tag{186}$$

Άρα ο συντελεστής d_i υπολογίζεται “κρύβοντας ” τον όρο $(x-\lambda)^r$ στο $F(x)$, υπολογίζοντας μετά την $i-$οστή παράγωγο την έκφρασης που απομένει, διαιρώντας με $i!$, και τέλος θέτοντας $x=\lambda$.

Υπάρχουν αρκετές συντομεύσεις και παραλλαγές που μπορούν να γίνουν για να διευκολυνθεί η επίτευξη της PFE, αλλά οι παραπάνω δυο περιπτώσεις είναι οι πιο γενικές και αυτές θα ακολουθήσουμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα 0.2.13:

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x+11}{x^2-x-6} \tag{187}$$

Λύση:
Η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερη του παρονομαστή, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας το ανάτπυγμα. Θα είναι

$$f(x) = \frac{3x+11}{x^2-x-6} = \frac{3x+11}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \tag{188}$$

με

$$A = \frac{3x+11}{(x-3)(x+2)}(x+2)\Big|_{x=-2} = \frac{3x+11}{x-3}\Big|_{x=-2} = \frac{-6+11}{-5} = -1 \tag{189}$$

$$B = \frac{3x+11}{(x+2)(x-3)}(x-3)\Big|_{x=3} = \frac{3x+11}{x+2}\Big|_{x=3} = \frac{9+11}{5} = 4 \tag{190}$$

Οπότε

$$f(x) = \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x+2} \tag{191}$$

■

Παράδειγμα 0.2.14:

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2} \tag{192}$$

Λύση:
Εδώ η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μεγαλύτερη του παρονομαστή, οπότε πριν το ανάπτυγμα θα χρειαστεί διαίρεση των πολυωνύμων. Η διαίρεση θα σταματήσει όταν το πολυώνυμο του υπολοίπου έχει μικρότερη τάξη από αυτή του διαιρέτη. Η διαίρεση φαίνεται στο Σχήμα 25.Άρα θα είναι

$$f(x) = \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2} = x-2-\frac{18}{x^3-3x^2} \tag{193}$$

$$= x-2+\frac{-18}{x^2(x-3)} = x-2+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3} \tag{194}$$

Οι συντελεστές A, B, C δίνονται ως (δείτε τις Σχέσεις (179, 186))

$$A = \frac{d}{dx}\left[x^2 \frac{-18}{x^2(x-3)}\right]\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}\frac{-18}{x-3}\Big|_{x=0} = \frac{18}{(x-3)^2}\Big|_{x=0} = 2 \tag{195}$$

$$B = \frac{-18}{x^2(x-3)}x^2\Big|_{x=0} = \frac{-18}{x-3}\Big|_{x=0} = 6 \tag{196}$$

$$C = \frac{-18}{(x-3)x^2}(x-3)\Big|_{x=3} = \frac{-18}{x^2}\Big|_{x=3} = -2 \tag{197}$$

Άρα τελικά

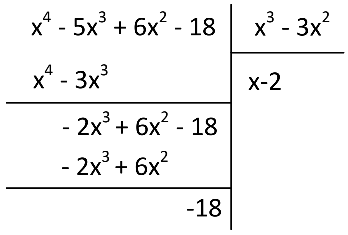
$$f(x) = x - 2 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{2}{x-3} \tag{198}$$

■

Παράδειγμα 0.2.15:

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4+jx}{2+3jx-x^2} \tag{199}$$



Σχήμα 25: *Διαίρεση πολυωνύμων.*

Λύση:
Η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερη του παρονομαστή οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν το ανάπτυγμα. Εδώ μας βολεύει να θεωρήσουμε $jx = \gamma$. Θα είναι

$$f(\gamma) = \frac{4+\gamma}{2+3\gamma+\gamma^2} = \frac{4+\gamma}{(1+\gamma)(2+\gamma)} = \frac{A}{1+\gamma} + \frac{B}{2+\gamma} \tag{200}$$

με

$$A = \frac{4+\gamma}{(2+\gamma)(1+\gamma)}(1+\gamma)\Big|_{\gamma=-1} = \frac{4+\gamma}{2+\gamma}\Big|_{\gamma=-1} = 3 \tag{201}$$

$$B = \frac{4+\gamma}{(1+\gamma)(2+\gamma)}(2+\gamma)\Big|_{\gamma=-2} = \frac{4+\gamma}{1+\gamma}\Big|_{\gamma=-2} = -2 \tag{202}$$

Άρα

$$f(x) = \frac{3}{1+jx} - \frac{2}{2+jx} \tag{203}$$

■

Ας δούμε κι ένα παράδειγμα με πολλαπλή ρίζα.

Παράδειγμα 0.2.16:

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4+jx}{2+5jx-4x^2-jx^3} \tag{204}$$

Λύση:
Το πολυώνυμο γράφεται ως

$$f(x) = \frac{4+jx}{2+5jx+4(jx)^2+(jx)^3} = \frac{4+\gamma}{2+5\gamma+4\gamma^2+\gamma^3} \tag{205}$$

και μετά από παραγοντοποίηση, έχουμε

$$f(\gamma) = \frac{4+\gamma}{(2+\gamma)(1+\gamma)(1+\gamma)} = \frac{4+\gamma}{(2+\gamma)(1+\gamma)^2} \tag{206}$$

Η παραπάνω σχέση αναλύεται σε μερικά κλάσματα ως

$$f(\gamma) = \frac{A}{2+\gamma} + \frac{B_0}{1+\gamma} + \frac{B_1}{(1+\gamma)^2} \tag{207}$$

με τους συντελεστές να δίνονται ως

$$A = \frac{4+\gamma}{(1+\gamma)^2}\bigg|_{\gamma=-2} = 2 \tag{208}$$

$$B_1 = \frac{4+\gamma}{2+\gamma}\bigg|_{\gamma=-1} = 3 \tag{209}$$

$$B_0 = \frac{1}{1!}\frac{d^1}{d\gamma^1}[(1+\gamma)^2 f(\gamma)]\bigg|_{\gamma=-1} = \frac{d}{d\gamma}\frac{4+\gamma}{2+\gamma}\bigg|_{\gamma=-1} = \frac{2+\gamma-4-\gamma}{(2+\gamma)^2}\bigg|_{\gamma=-1} = \frac{-2}{(2+\gamma)}\bigg|_{\gamma=-1} = -2 \tag{210}$$

Οπότε είναι

$$f(x) = \frac{2}{2+jx} - \frac{2}{1+jx} + \frac{3}{(1+\mathrm{j}x)^2} \tag{211}$$

■