Κεφάλαιο 10

Συστήματα στο χώρο του Laplace

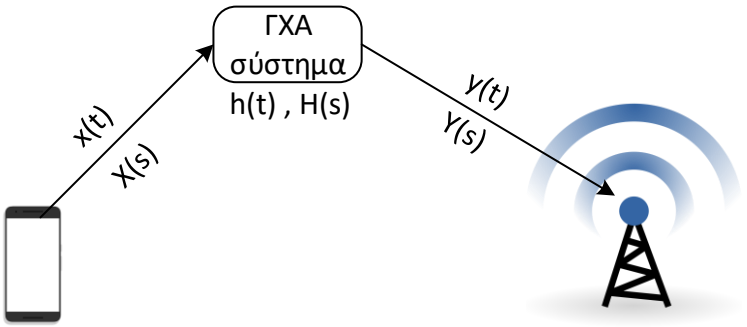
Ο μετασχ. Laplace είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την ανάλυση συστημάτων. Η ικανότητά του να ερμηνεύει συχνοτικά πλήθος σημάτων, σημαντικά περισσότερων από το μετασχ. Fourier, τον κάνει ιδανικό για τη μελέτη συστημάτων.

Έχουμε δει αρκετά πράγματα για τα συστήματα σε προηγούμενο κεφάλαιο, καθώς και σχετικά με την αιτιατότητα και την ευστάθεια ενός συστήματος. Υπάρχουν δεξιόπλευρα, αριστερόπλευρα, αμφίπλευρα, αιτιατά και μη συστήματα που ορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε στην Παράγραφο 9.2.4. Μάλιστα, την αιτιατότητα και την ευστάθεια την είχαμε ορίσει και στις πρώτες μας συζητήσεις για συστήματα, ως την ικανότητα του συστήματος να εξαρτά την έξοδό του μόνο από τωρινές ή παρελθοντικές τιμές της εισόδου (αιτιατότητα) και την ιδιότητα του συστήματος να παράγει φραγμένες εξόδους για φραγμένες εισόδους (ευστάθεια).

Ας δούμε σε αυτό το κεφάλαιο πως όλα αυτά εκφράζονται στον χώρο του μετασχ. Laplace, πόσο απλοποιούνται, και πως μας βοηθά ο μετασχ. Laplace να λύνουμε πρακτικά προβλήματα.

10.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Ας υποθέσουμε ότι επικοινωνείτε με ένα φίλο σας τηλεφωνικά μέσω ενός smartphone. Το σήμα φωνής σας κωδικοποιείται ψηφιακά και αποστέλλεται μέσω του τηλεπικοινωνιακού καναλιού - που στο παράδειγμα αυτό πρόκειται για τον ελεύθερο χώρο (αέρα) - στο σταθμό βάσης της υπηρεσίας κινητής τηλεφωνίας σας. Προτού παραδωθεί στο smartphone του συνομιλητή σας, πρέπει να "καθαριστεί" από τις παρεμβολές του τηλεπικοινωνιακού καναλιού. Ας θεωρήσουμε το τηλεπικοινωνιακό κανάλι ως ΓΧΑ σύστημα, με είσοδο το ψηφιοποιημένο σήμα φωνής σας και έξοδο μια τροποποιημένη έκδοσή του λόγω των παρεμβολών που εισήχθησαν από το κανάλι, όπως στο Σχήμα 10.1. Ο σταθμός βάσης αναλαμβάνει περιοδικά να εκτιμά το κανάλι στο χώρο που βρίσκεστε, δηλ. να υπολογίζει την



Σχήμα 10.1: *Ασύρματο τηλεπικοινωνιακό κανάλι.*

κρουστική απόκριση $h[n]$ του καναλιού. Σκοπός του σταθμού βάσης είναι να προσπαθήσει να ακυρώσει την επίδραση του καναλιού στο σήμα εισόδου, ώστε να παραδώσει στο φίλο σας ένα όσο το δυνατόν πιστότερο αντίγραφο του σήματος φωνής που εστάλη από το τηλέφωνό σας.

Αν υποθέσετε ότι το κανάλι με ευσταθή και αιτιατή κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει μετασχ. Laplace $H(s)$, τότε ο σταθμός βάσης θα ήθελε να *αντιστρέψει* την επίδραση του συστήματος επάνω στο σήμα εισόδου. Από την ιδιότητα της συνέλιξης γνωρίζετε ότι

$$Y(s) = H(s)X(s) \tag{10.1}$$

και θα θέλατε να βρείτε ένα σύστημα $H_i(s) = \frac{1}{H(s)}$ έτσι ώστε

$$H_i(s)Y(s) = H_i(s)H(s)X(s) = X(s) \tag{10.2}$$

δηλ.

$$H_i(s)H(s) = 1, \;\; R_{H_i} \cap R_H \neq \emptyset \tag{10.3}$$

Το σύστημα $H_i(s)$ θα δείτε ότι ονομάζεται *αντίστροφο σύστημα* και θα μελετήσετε τις ιδιότητές του. Όμως, πολλές φορές το αντίστροφο σύστημα δεν είναι ευσταθές και αιτιατό όπως απαιτείται για την υλοποίησή του. Γιατί συμβαίνει αυτό; Τι εναλλακτικές επιλογές υπάρχουν σε αυτήν την περίπτωση; Μπορούμε με κάποιο τρόπο να ακυρώσουμε ολικά ή μερικά την επίδραση του καναλιού, και με τι κόστος; Τέτοια ερωτήματα θα είστε σε θέση να απαντήσετε με την ολοκλήρωση του κεφαλαίου αυτού.

10.2 Η Συνάρτηση Μεταφοράς

Ας θεωρήσουμε τώρα μια είσοδο της μορφής

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j2\pi f)t} \tag{10.4}$$

σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = T\{x(t)\} = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{10.5}$$

Αντικαθιστωντας, έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{10.6}$$

Ορίζουμε ως **Συνάρτηση Μεταφοράς** το

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \tag{10.7}$$

που δεν είναι άλλο από το μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, και έτσι μπορούμε να γράψουμε οτι

$$y(t) = H\{e^{st}\} = H(s)e^{st} \tag{10.8}$$

Σας θυμίζει κάτι; ☺Βλέπουμε ότι η επίδραση της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος $H(s)$ επάνω σε μια είσοδο της μορφης e^{st} είναι ο πολλαπλασιασμός της με τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$! Θυμηθείτε οτι *ιδιοσυνάρτηση* ενός συστήματος λέγεται το σήμα που περνάει από το σύστημα χωρίς καμιά τροποποίηση πλήν του πολλαπλασιασμού του με μια συνήθως μιγαδική σταθερά, όπως είδαμε στο μετασχ. Fourier. Έτσι, αναγνωρίζουμε το e^{st} ως ιδιοσυνάρτηση του ΓΧΑ συστήματος και το $H(s)$ ως η αντίστοιχη *ιδιοτιμή*.

Τώρα, ας εκφράσουμε την μιγαδική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ σε πολική μορφή, ως

$$H(s) = |H(s)|e^{j\phi(s)} \tag{10.9}$$

όπου $|H(s)|$ και $\phi(s)$ είναι το μέτρο και η φάση του $H(s)$, αντίστοιχα. Τώρα, ξαναγράφοντας την έξοδο του συστηματος, θα έχουμε

$$y(t) = |H(s)|e^{j\phi(s)}e^{st} \tag{10.10}$$

Με χρήση του $s = \sigma + j2\pi f$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t}e^{j(2\pi f t + \phi(\sigma + j2\pi f))} \\ &= |H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t}\cos(2\pi f t + \phi(\sigma + j2\pi f)) + j|H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t}\sin(2\pi f t + \phi(\sigma + j2\pi f)) \end{aligned} \tag{10.11}$$

Μπορούμε εδώ να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα, δεδομένης της εισόδου της μορφης $x(t) = e^{st}$, αλλάζει το πλάτος της εισόδου κατα παράγοντα $|H(\sigma + j2\pi f)|$ και μετατοπίζει τη φάση των ημιτονοειδών συνιστωσών κατά $\phi(\sigma + j2\pi f)$. Το σύστημα δεν αλλάζει ούτε τον παράγοντα σ, ούτε τη συχνότητα f της εισόδου. Ενδιαφέρον! ☺

10.3 Μετασχ. Laplace και Διαφορικές Εξισώσεις Συστημάτων

Τώρα που έχουμε ένα τόσο δυνατό εργαλείο ανάλυσης σημάτων και συστημάτων, μπορούμε να μιλήσουμε ακόμα πιο γενικά για τα συστήματα, θεωρώντας ότι αυτά περιγράφονται από μια διαφορική εξίσωση. Όπως έχουμε πει, πολλά φυσικά και μηχανικά συστήματα μπορούν να αναχθούν σε διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, τα ηλεκτρικά κυκλώματα συνεχούς ρεύματος περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, και η απλοποίηση που συνεπάγεται με την ανάλυσή τους στο χώρο του Laplace είναι σημαντική. Εν γένει λοιπόν, ο μετασχ. Laplace μας επιτρέπει να λύνουμε τέτοιες διαφορικές εξισώσεις πολύ εύκολα, μετατρέποντάς τες σε απλές αλγεβρικές!

Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, έστω το σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές a_k, b_l,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{l=0}^{M} b_l \frac{d^l x(t)}{dt^l} \tag{10.12}$$

Για τη μοναδική λύση της εξίσωσης απαιτούνται οι περίφημες *βοηθητικές ή αρχικές συνθήκες*. Στην πράξη, οι αρχικές συνθήκες αφορούν την κατάσταση του συστήματος πριν την εφαρμογή της εισόδου. Αν υποθέσουμε ότι η είσοδος εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε οι αρχικές συνθήκες περιγράφουν την κατάσταση του συστήματος για $t = 0^-$, δηλ. ακριβώς πριν την εφαρμογή της εισόδου. Πολλές φορές στη βιβλιογραφία, οι αρχικές συνθήκες χρησιμοποιούν το συμβολισμό $t = 0^-$ για τη χρονική στιγμή των αρχικών συνθηκών. Στο εξής, θα υιοθετήσουμε αυτήν την πρακτική στο συμβολισμό. Ο ρόλος των αρχικών συνθηκών μας παρέχει μοναδική λύση για το σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση. Γιατί αυτό; Σκεφτείτε την πιο απλή διαφορική εξίσωση που ξέρετε: $f'(x) = f(x)$. Ξέρετε ότι η λύση της είναι $f(x) = ce^x$, $c \in \Re$, η οποία δεν είναι μοναδική. Για να την κάνετε τέτοια, θα πρέπει να σας δίνεται κάποια συνθήκη για να βρείτε το c, π.χ.

$$f(0) = 2$$

που οδηγεί σε $c = 2$. Άρα μπορείτε να καταλάβετε ότι μια διαφορική εξίσωση, και γενικότερα η παραγώγιση, είναι μια *μη αντιστρέψιμη* διαδικασία. Χρειαζόμαστε επιπλέον πληροφορία για να την αντιστρέψουμε με μοναδικό τρόπο, η οποία μας δίνεται με τη μορφή αρχικών συνθηκών.

Τα προβλήματα που συναντάμε είναι τα ακόλουθα:

(α′) Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που είναι ΓΧΑ, δηλ. έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες. Σε αυτά τα συστήματα, η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης. Αφού οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) \tag{10.13}$$

για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Laplace της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Τότε η Σχέση (10.12) γίνεται

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{l=0}^{M} b_l s^l X(s) \tag{10.14}$$

$$Y(s) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k) = X(s) \sum_{l=0}^{M} b_l s^l \tag{10.15}$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} X(s) \tag{10.16}$$

Η έξοδος στο πεδίο του χρόνου $y(t)$ υπολογίζεται από γνωστές ιδιότητες και πίνακες ή/και από το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα.

(β′) Η εύρεση της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος. Στο χώρο του Laplace αυτό γίνεται μεσω της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ που χαρακτηρίζει το σύστημα. Τότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και χρησιμοποιούμε ξανά τη σχέση

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) \tag{10.17}$$

για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική και να κατασκευάσουμε το λόγο $Y(s)/X(s)$ που θα

μας δώσει τη συνάρτηση μεταφοράς. Από τη Σχέση (10.16), θα έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \tag{10.18}$$

Η ίδια σχέση λαμβάνεται απ' ευθείας και από τη Σχέση (10.16), αφού γνωρίζουμε ότι η απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος αποτελείται από τη συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Στο χώρο του Laplace, η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ και του μετασχ. Laplace της εισόδου $X(s)$. Παρατηρήστε ότι για ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή συνάρτηση πολυωνύμων του s. Αυτό είναι χαρακτηριστικό των ΓΧΑ συστημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

(γ') Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που *δεν* είναι ΓΧΑ, δηλ. που έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες. Όμως ο δίπλευρος μετασχ. Laplace δεν περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του. Αυτό όμως μπορεί να το κάνει ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace, ο οποίος (δείτε τον Πίνακα 9.1) περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του! Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη σχέση

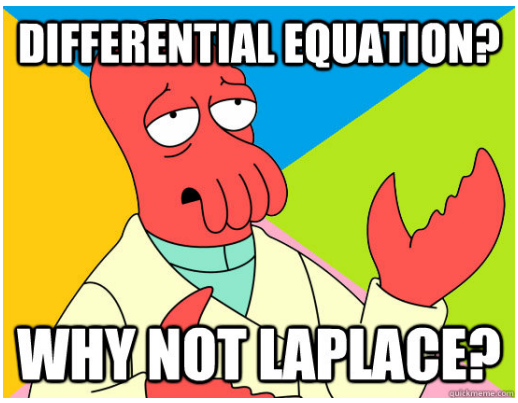
$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t)\Big]_{t=0} \tag{10.19}$$

από το μονόπλευρο μετασχ. Laplace, για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Laplace της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει (Άσκηση XXXX) ότι ο μετασχ. Laplace της εξόδου $Y(s)$ δίνεται σε αυτήν την περίπτωση ως

$$Y(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} X(s) + \frac{\sum_{k=0}^{N} \sum_{i=1}^{k} s^{k-i} \frac{d^{(i-1)}}{dt^{i-1}} y(t)\Big|_{t=0^-} + \sum_{l=0}^{M} \sum_{i=1}^{l} s^{l-i} \frac{d^{(i-1)}}{dt^{i-1}} x(t)\Big|_{t=0^-}}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \tag{10.20}$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} X(s) + \frac{\sum_{k=0}^{N} \sum_{i=1}^{k} s^{k-i} \frac{d^{(i-1)}}{dt^{i-1}} y(t)\Big|_{t=0^-}}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \tag{10.21}$$

αφού η είσοδος εφαρμόζεται πάντα σε χρονικές στιγμές $t \geq 0$. Παρατηρήστε ότι ο πρώτος όρος εξαρτάται από την είσοδο ενώ ο δεύτερος από τις αρχικές συνθήκες!



Σχήμα 10.2: *Εύκολη λύση διαφορικών εξισώσεων με μετασχ. Laplace!!*

Ας δούμε δυο παραδείγματα που δείχνουν χαρακτηριστικά πώς ο μετασχ. Laplace μπορεί να μας διευκολύνει όταν έχουμε να κάνουμε με συστήματα. Ας υποθέσουμε ότι οι λύσεις μας θα είναι αιτιατές.

Παράδειγμα 10.1:

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \tag{10.22}$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$, $y^{'}(0^-) = 1$ και είσοδο $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

Λύση:
Προφανώς θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης του μονόπλευρου μετασχ. Laplace. Εφαρμόζοντας την και στα δυο μέλη, έχουμε:

$$L\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\} + L\{5\frac{dy(t)}{dt}\} + L\{6y(t)\} = L\{\frac{dx(t)}{dt}\} + L\{x(t)\} \tag{10.23}$$

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) = sX(s) - x(0^-) + X(s) \tag{10.24}$$

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) = sX(s) - 0 + X(s) \tag{10.25}$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = X(s)(s + 1) \tag{10.26}$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = \frac{s+1}{s+4} \tag{10.27}$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = \frac{s+1}{s+4} + 2s + 11 \tag{10.28}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} \tag{10.29}$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{10.30}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, μια και η τάξη του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μεγαλύτερη της τάξης του αριθμητή. Οπότε

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4} \tag{10.31}$$

με

$$A = Y(s)(s+2)\Big]_{s=-2} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+3)(s+4)}\Big]_{s=-2} = \frac{13}{2} \tag{10.32}$$

$$B = Y(s)(s+3)\Big]_{s=-3} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+4)}\Big]_{s=-3} = -3 \tag{10.33}$$

$$C = Y(s)(s+4)\Big]_{s=-4} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)}\Big]_{s=-4} = -\frac{3}{2} \tag{10.34}$$

Για να είναι αιτιατή η έξοδος, θα πρέπει $R_y \supseteq R_1 \cap R_2 \cap R_3$ με

$$R_1 = \{\Re\{s\} > -2\} \tag{10.35}$$

$$R_2 = \{\Re\{s\} > -3\} \tag{10.36}$$

$$R_3 = \{\Re\{s\} > -4\} \tag{10.37}$$

Άρα τελικά θα είναι $R_y = \{\sigma > -2\}$ και

$$Y(s) = \frac{13}{2}\frac{1}{s+2} - 3\frac{1}{s+3} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+4}, \quad \Re\{s\} > -2 \tag{10.38}$$

Οπότε πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο, θα είναι

$$y(t) = \frac{13}{2}e^{-2t}u(t) - 3e^{-3t}u(t) - \frac{3}{2}e^{-4t}u(t) \tag{10.39}$$

που είναι και το ζητούμενο.

■

Παράδειγμα 10.2:

Έστω οτι ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα $H(s)$ περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t) \tag{10.40}$$

1. Υπολογίστε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.
2. Βρείτε την έξοδο, $y(t)$, του συστήματος όταν η είσοδος είναι της μορφής

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \tag{10.41}$$

Λύση:

1. Μετασχηματίζοντας τη διαφορική εξίσωση στο χώρο του Laplace, έχουμε

$$s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s) \tag{10.42}$$
$$Y(s)(s^2 - s - 2) = X(s) \tag{10.43}$$
$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} \tag{10.44}$$

Άρα

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

με

$$A = H(s)(s-2)\Big]_{s=2} = \frac{1}{s+1}\Big]_{s=2} = \frac{1}{3} \tag{10.45}$$
$$B = H(s)(s+1)\Big]_{s=-1} = \frac{1}{s-2}\Big]_{s=-1} = -\frac{1}{3} \tag{10.46}$$

και το πεδίο σύγκλισης θα είναι το $\{\Re\{s\} > 2\} = \{\Re\{s\} > 2\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$. Άρα

$$H(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > 2 \tag{10.47}$$

και τότε

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) \tag{10.48}$$

2. Η έξοδος θα ειναι της μορφης

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}\frac{1}{(s+2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \tag{10.49}$$

με

$$A = Y(s)(s-2)\Big]_{s=2} = \frac{1}{(s+1(s+2))}\Big]_{s=2} = \frac{1}{12} \tag{10.50}$$
$$B = Y(s)(s+1)\Big]_{s=-1} = \frac{1}{(s-2)(s+2)}\Big]_{s=-1} = -\frac{1}{3} \tag{10.51}$$
$$C = Y(s)(s+2)\Big]_{s=-2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}\Big]_{s=-2} = \frac{1}{4} \tag{10.52}$$

και άρα

$$Y(s) = \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} \tag{10.53}$$

Επειδή το σύστημα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_H = \{\Re\{s\} > 2\} \tag{10.54}$$

και η είσοδος

$$R_X = \{\Re\{s\} > -2\} \tag{10.55}$$

η έξοδος θα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_Y = \{\Re\{s\} > 2\} \cap \{\Re\{s\} > -2\} = \{\Re\{s\} > 2\} \tag{10.56}$$

Άρα

$$Y(s) = \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} \tag{10.57}$$

και στο πεδίο του χρόνου, λαμβάνοντας υπόψη ότι το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο

$$y(t) = \frac{1}{12}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) \tag{10.58}$$

■

Παρ΄ όλου που οι διαφορικές εξισώσεις δημιουργήθηκαν για να αναπαραστήσουν φυσικά συστήματα (και άρα αιτιατά), από μαθηματικής πλευράς μια διαφορική εξίσωση μπορεί να έχει και αντι-αιτιατή κρουστική απόκριση! Για παράδειγμα, η συνάρτηση μεταφοράς

$$H_1(s) = \frac{1}{s}, \ \ \Re\{s\} > 0 \tag{10.59}$$

περιγράφει τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) \tag{10.60}$$

αφού

$$H_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s} \Longleftrightarrow sY(s) = X(s) \tag{10.61}$$

και στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) \tag{10.62}$$

Το ίδιο όμως και η συνάρτηση μεταφοράς

$$H_2(s) = \frac{1}{s}, \ \ \Re\{s\} < 0 \quad (!!!) \tag{10.63}$$

αφού ξανά ισχύουν τα παραπάνω! Οι αντίστοιχες κρουστικές αποκρίσεις των δυο αυτών συστημάτων δίνονται - όπως ξέρετε - ως

$$h_1(t) = u(t) \tag{10.64}$$
$$h_2(t) = -u(-t) \tag{10.65}$$

και είναι αιτιατό και αντι-αιτιατό σήμα, αντίστοιχα.

Όπως ήδη γνωρίζετε, για την αιτιατότητα ενός συστήματος απαιτείται επιπλέον πληροφορία (αυτή της *αρχικής ηρεμίας* του συστήματος). Σε κάθε περίπτωση, όταν αναφερόμαστε σε διαφορικές εξισώσεις (στην κρουστική τους απόκριση, ή στην έξοδό τους) θα υποθέτουμε πάντα ότι όλα αυτά είναι αιτιατά.

Εν γένει όμως, ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να έχει αιτιατή, μη-αιτιατή, ή αντι-αιτιατή κρουστική απόκριση, καθώς η αιτιατότητα δεν είναι απαραίτητη για την υλοποίηση του συστήματος off-line, όπως π.χ. σε λογισμικό ενός υπολογιστή, όπου όλες οι τιμές ενός σήματος έχουν αποθηκευτεί εκ των προτέρων. Ας δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα συστήματος.

Παράδειγμα 10.3:

Έστω το *μη-αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+s-2} \tag{10.66}$$

Βρείτε την έξοδό του $y(t)$ όταν στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα $x(t) = -e^{2t}u(-t)$.

Λύση:
Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} \tag{10.67}$$

δηλ. έχει δυο πόλους στις θέσεις $s = -2$ και $s = 1$. Ως μη-αιτιατό, θα είναι αμφίπλευρο σήμα. Τα αμφίπλευρα σήματα έχουν πεδίο σύγκλισης που αναπαρίσταται ως μια "λωρίδα" στο μιγαδικό επίπεδο. Άρα το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς θα είναι το $R_H : \{-2 < \Re\{s\} < 1\}$, το οποίο μπορεί να γραφεί και ως

$$R_H = \big\{\{-2 < \Re\{s\}\} \cap \{\Re\{s\} < 1\}\big\} \tag{10.68}$$

Η είσοδος έχει μετασχ. Laplace

$$x(t) = -e^{2t}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2}, \ \Re\{s\} < 2 \tag{10.69}$$

Οπότε η έξοδος θα δίνεται ως

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-2)(s-1)} \tag{10.70}$$

$$= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1} \tag{10.71}$$

με A, B, C να δίνονται από το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα ως

$$Y(s) = -\frac{1}{12}\frac{1}{s+2} + \frac{3}{4}\frac{1}{s-2} - \frac{2}{3}\frac{1}{s-1} \tag{10.72}$$

Οι πόλοι του $Y(s)$ βρίσκονται στις θέσεις $s = -2$, $s = 2$, και $s = 1$, άρα το πεδίο σύγκλισης της εξόδου θα είναι

$$R_Y \supseteq R_H \cap R_X = \{-2 < \Re\{s\} < 1\} \cap \{\Re\{s\} < 2\} = \{-2 < \Re\{s\} < 1\} \tag{10.73}$$

Αν γράψουμε το πεδίο σύγκλισης ως τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης που αντιστοιχούν στους πόλους της εξόδου, θα είναι $R_Y = \{-2 < \Re\{s\} < 1\} = \{\Re\{s\} < 2\} \cap \{\Re\{s\} < 1\} \cap \{\Re\{s\} > -2\}$, και έτσι το σήμα εξόδου στο χρόνο θα είναι αμφίπλευρο σήμα. Πράγματι,

$$y(t) = -\frac{1}{12}e^{-2t}u(t) - \frac{3}{2}e^{2t}u(-t) + \frac{2}{3}e^{t}u(-t) \tag{10.74}$$

με χρήση των ζευγών του Πίνακα 9.2.

10.4 ΓΧΑ Συστήματα στο χώρο του Laplace

Ας επικεντρώσουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στα ΓΧΑ συστήματα, αυτή τη φορά από τη σκοπιά του μετασχηματισμού Laplace, όπως κάναμε και για τον μετασχ. Fourier. Τα ΓΧΑ συστήματα, όπως έχουμε δει, περιγράφονται με τρεις τρόπους:

1. με μια διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d}{dt} a_k y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d}{dt} b_l x(t) \tag{10.75}$$

   με μηδενικές αρχικές συνθήκες

2. με την κρουστική απόκρισή τους, $h(t)$
3. με την απόκριση σε συχνότητά τους, $H(f)$
4. πλέον, και με τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$

Εδώ, θα δούμε τα συστήματα από τη σκοπιά του Laplace και θα δούμε πόσο πιο απλά γίνονται τα πράγματα μερικές φορές στο χώρο αυτό. Στην ανάλυση που ακολουθεί, θα διαπιστώσετε μεγάλη ομοιότητα με τη αντίστοιχη που κάναμε για το μετασχ. Fourier, γι΄ αυτό και θα ακολουθήσουμε το ίδιο μοτίβο.

Ας συζητήσουμε για λίγο τη χρησιμότητα αναπαράστασης συστημάτων στο χώρο του Laplace. Ο κυριότερος λόγος μιας τέτοιας προσέγγισης είναι η *ευελιξία σχεδίασης ΓΧΑ συστημάτων*. Θυμίζουμε ότι τα συστήματα έχουν ως σκοπό την επεξεργασία (με οποιονδήποτε τρόπο) των σημάτων που παρουσιάζονται στην είσοδό τους. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα που θα εκτελεί μια συγκεκριμένη τροποποίηση στο σήμα εισόδου του. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να το κατασκευάσουμε με βάση τα επιθυμητά για εμάς χαρακτηριστικά της απόκρισης σε συχνότητα του, $H(f)$ - προφανώς θα επεξεργαστούμε πραγματικό σήμα εισόδου, το οποίο θα αναλύεται σε πραγματικές συχνότητες μέσω του μετασχ. Fourier. Είδαμε νωρίτερα, και μέσω παραδειγμάτων, ότι η θέση των πόλων και των μηδενικών καθορίζει σχεδόν απόλυτα τη συμπεριφορά ενός σήματος στο χώρο του Laplace, και κατά συνέπεια τη μορφή του μετασχ. Fourier του μέσω της μορφής του μετασχηματισμού Laplace επάνω από το φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου. Αν λοιπόν τοποθετήσουμε κατάλληλα τους πόλους ή/και τα μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο, μπορούμε να κατασκευάσουμε συστήματα με επιθυμητές αποκρίσεις σε συχνότητα. Αυτές οι αποκρίσεις μπορούν να υπολογιστούν από το μετασχ. Laplace θέτοντας $s = j\omega = j2\pi f$, και με τις τεχνικές υπολογισμού αντιστρόφου μετασχηματισμού που γνωρίζουμε, να βρούμε την κρουστική απόκρισή τους. Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι παρ'ολο που τέτοιες τεχνικές σχεδιάστηκαν με σκοπό την επεξεργασία σημάτων συνεχούς χρόνου, μπορεί κανείς με απλές σχετικά μεθόδους να μεταφέρει την τεχνογνωσία σχεδίασης τέτοιων συστημάτων γρήγορα και απλά στον ''ψηφιακό'' κόσμο, καθιστώντας τες δυνατές να επεξεργαστούν και σήματα διακριτού χρόνου!

Παρ΄ όλο που ως τώρα συζητάμε την επιρροή του μετασχ. Laplace στο φάσμα πλάτους ενός σήματος, στην πραγματικότητα με όμοιο τρόπο επηρεάζεται και το φάσμα φάσης από την παρουσία των πόλων και των μηδενικών. Γνωρίζουμε ότι η φάση συνδέεται με τη θέση των επιμέρους συνιστωσών, ή αλλιώς τη *χρονική δομή* του σήματος ή του συστήματος στο χρόνο. Σύντομα, θα αναπτύξουμε έννοιες και εργαλεία για τον κατάλληλο έλεγχο της φάσης μέσω της θέσης των πόλων και των μηδενικών.

Ένας άλλος λόγος είναι ότι μέσω του μετασχ. Laplace μπορούμε να αναλύσουμε σήματα και συστήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier. Με άλλα λόγια, μπορούμε να αναλύσουμε συστήματα που είναι *ασταθή*. Σίγουρα θα σκεφτήκατε ότι ασταθή συστήματα δεν έχουν κάποια πρακτική χρησιμότητα. Κι όμως, ασταθή συστήματα παρουσιάζονται πολύ συχνά στη μηχανική, και για να μπορούμε να χειριστούμε την αστάθειά τους, πρέπει να μπορούμε να τα μελετήσουμε. Περισσότερα για αυτό θα δούμε σύντομα.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα για το πως δουλεύουμε στο χώρο του μετασχ. Laplace.

Παράδειγμα 10.4:

Έστω το αιτιατό σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) \tag{10.76}$$

του οποίου ζητούμε:

(α΄) τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

(β΄) την κρουστική απόκριση $h(t)$

(γ΄) την έξοδό του για είσοδο $x(t) = -e^{2t}u(-t)$

Λύση:

(α΄) Κάνουμε μετασχ. Laplace στη διαφορική εξίσωση, έχουμε

$$sY(s) + 2Y(s) = X(s) \tag{10.77}$$

$$Y(s)(s+2) = X(s) \tag{10.78}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+2} \tag{10.79}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+2} \tag{10.80}$$

με πεδίο σύγκλισης $\Re\{s\} > -2$, λόγω αιτιατότητας, αφού η ρίζα του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι η $s = -2$. Έτσι, η συχνότητα $\omega = f = 0$ έχει μέγιστο, λόγω της παρουσίας του πραγματικού πόλου στη θέση $s = -2$. Παρατηρήστε επίσης ότι $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$.

(β′) Θα είναι

$$H(s) = \frac{1}{s+2} \longleftrightarrow h(t) = e^{-2t}u(t) \tag{10.81}$$

αφού το σύστημά μας είναι αιτιατό από εκφώνηση.

(γ′) Η είσοδος έχει μετασχ. Laplace

$$x(t) = -e^{2t}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \Re\{s\} < 2 \tag{10.82}$$

οπότε

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s+2}\frac{1}{s-2} = \frac{1}{(s+2)(s-2)} = \frac{1}{s^2-4}, \quad -2 < \Re\{s\} < 2 \tag{10.83}$$

το οποίο, με βάση τον Πίνακα 9.1, έχει αντίστροφο μετασχ. Laplace

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{-2|t|} \tag{10.84}$$

■

Παράδειγμα 10.5:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2-3s+2} \tag{10.85}$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης.

Λύση:
Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, έχουμε

$$H(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} \tag{10.86}$$

με

$$A = H(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{s+1}{s-1}\Big|_{s=2} = 3 \tag{10.87}$$

$$B = H(s)(s-1)\Big|_{s=1} = \frac{s+1}{s-2}\Big|_{s=1} = -1 \tag{10.88}$$

οπότε

$$H(s) = \frac{3}{s-2} - \frac{1}{s-1} \tag{10.89}$$

Από τους πίνακές μας, έχουμε κατ΄ ευθείαν ότι αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε

$$h(t) = 3e^{2t}u(t) - e^{t}u(t) \tag{10.90}$$

με $\Re\{s\} > 2$, ενώ αν το σύστημα είναι αντι-αιτιατό, τότε

$$h(t) = -3e^{2t}u(-t) + e^{t}u(-t) \tag{10.91}$$

με $\Re\{s\} < 1$. Τέλος, αν το σύστημα είναι μη αιτιατό, τότε

$$h(t) = -3e^{2t}u(-t) - e^{t}u(t) \tag{10.92}$$

με $1 < \Re\{s\} < 2$.

■

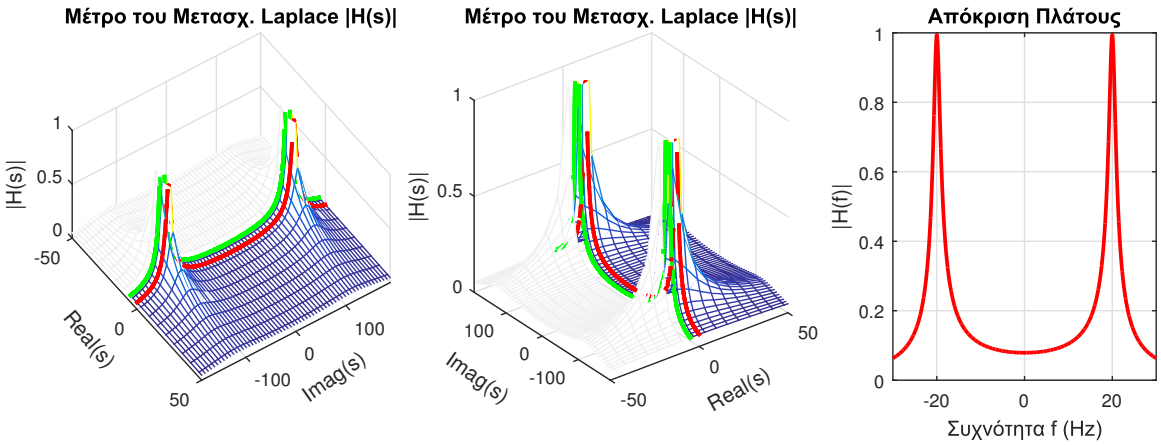
Παράδειγμα 10.6:

Έστω το αιτιατό συστημα $H(s)$ που δίνεται ως

$$H(s) = \frac{1250}{(s-(\sigma_0+j2\pi 20))(s-(\sigma_0-j2\pi 20))} \tag{10.93}$$

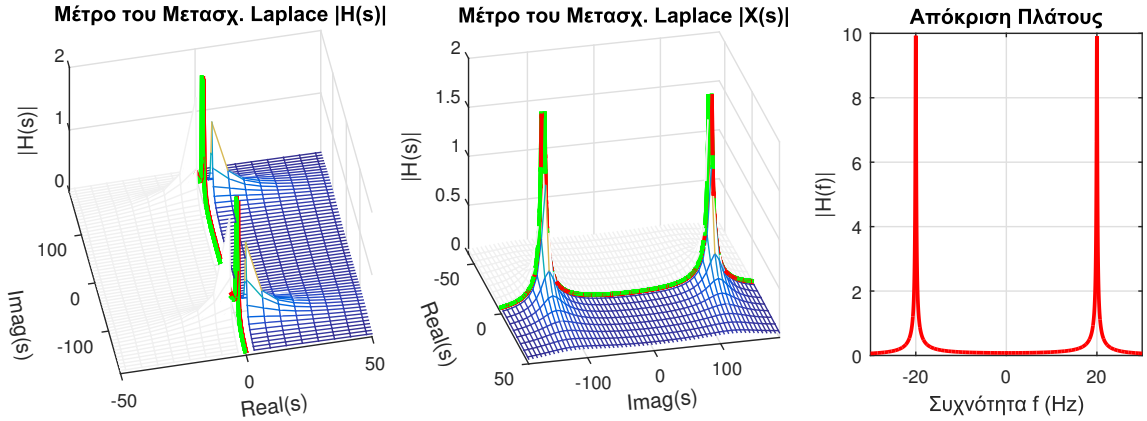
Μελετήστε ποιοτικά τη συμπεριφορά της απόκρισης πλάτους του συστήματος για $\sigma_0 = -5$ και $\sigma_0 = -\frac{1}{2}$ και βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$.

Λύση:
Δείτε το Σχήμα 10.3, που παρουσιάζει το σύστημα για την τιμή $\sigma_0 = -5$. και εμφανώς έχει δυο πόλους στις θέσεις



Σχήμα 10.3: *Μέτρο μετασχ. Laplace συστήματος Παραδείγματος 6και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για* $\sigma_0 = -5$.

$s = -5 + \pm j2\pi 20$. Η παρουσία πόλων για $\omega = \pm 2\pi 20$ θα αυξήσει τις τιμές της απόκρισης πλάτους γύρω από αυτές τις συχνότητες. Στην περίπτωση που $\sigma_0 = -5$, η αύξηση θα είναι μικρή και πιο ομαλή, αφού οι πόλοι βρίσκονται "μακριά" από το φανταστικό άξονα, ενώ για $\sigma_0 = -1/2$, η αύξηση θα είναι μεγαλύτερη και πιο απότομη, αφού οι πόλοι βρίσκονται κοντά στο φανταστικό άξονα. Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνονται από τα Σχήματα 10.3 και 10.4. Η κρουστική απόκριση δίνεται αναπτύσσοντας σε μερικα κλάσματα τη ρητή συνάρτηση μεταφοράς. Είναι



Σχήμα 10.4: *Μέτρο μετασχ. Laplace συστήματος Παραδείγματος 6και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για* $\sigma = -1/2$.

$$H(s) = \frac{A}{s-(\sigma_0+j2\pi 20)} + \frac{B}{s-(\sigma_0-j2\pi 20)} \tag{10.94}$$

με

$$A = H(s)(s - (\sigma_0 + j2\pi 20))\Big|_{s=\sigma_0+j2\pi 20} = \frac{1250}{2\pi 40}e^{-j\pi/2} \tag{10.95}$$

$$B = H(s)(s - (\sigma_0 - j2\pi 20))\Big|_{s=\sigma_0-j2\pi 20} = \frac{1250}{2\pi 40}e^{j\pi/2} \tag{10.96}$$

Άρα μέσω αντιστρόφου μετασχ. Laplace θα έχουμε

$$H(s) = \frac{1250}{2\pi 40}e^{-j\pi/2}\frac{1}{s-(\sigma_0+j2\pi 20)} + \frac{1250}{2\pi 40}e^{j\pi/2}\frac{1}{s-(\sigma_0-j2\pi 20)} \tag{10.97}$$

το οποίο, λόγω αιτιατότητας, δίνει την κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{125}{8\pi}e^{-j\pi/2}e^{(\sigma_0+j2\pi 20)t}u(t) + \frac{125}{8\pi}e^{j\pi/2}e^{(\sigma_0-j2\pi 20)t}u(t) \tag{10.98}$$

$$= \Big[\frac{125}{8\pi}e^{\sigma_0 t}e^{j(2\pi 20t-\pi/2)} + \frac{125}{8\pi}e^{\sigma_0 t}e^{-j(2\pi 20t-\pi/2)}\Big]u(t) \tag{10.99}$$

$$= \frac{250}{8\pi}e^{\sigma_0 t}\cos\Big(2\pi 20t - \frac{\pi}{2}\Big)u(t) \tag{10.100}$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε εν γένει ότι

Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος στο Χώρο του Μετασχ. Laplace - I

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος

$$h(t) \longleftrightarrow H(s)$$

ειναι της μορφής

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{a_k t}u(t) - \sum_{l=1}^{M} B_l e^{b_l t}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \sum_{k=1}^{N} A_k \frac{1}{s-a_k} + \sum_{l=1}^{M} B_l \frac{1}{s-b_l}$$

με $\mathrm{ROC}_k : \Re\{s\} > \Re\{a_k\}$ και $\mathrm{ROC}_l : \Re\{s\} < \Re\{b_l\}$ και $max_k\{\Re\{a_k\}\} < \Re\{s\} < min_l\{\Re\{b_l\}\}$ τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

και εφαρμόζοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $y(t)$.

και

Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος στο Χώρο του Μετασχ. Laplace - II

Αν ένα σύστημα περιγράφεται με διαφορικές εξισώσεις ως

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k}y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_l \frac{d^l}{dt^l}x(t) \longleftrightarrow H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

τότε χρησιμοποιούμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για να αναλύσουμε τη Συνάρτηση Μεταφοράς $H(s)$ σε απλά κλάσματα και να βρούμε με χρήση Πινάκων την κρουστική απόκριση $h(t)$.

10.4.1 Διατάξεις Συστημάτων

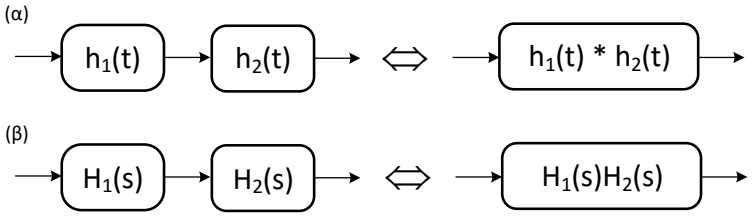
Ας δούμε μερικές γνωστές διατάξεις συστημάτων και πως αυτές αναπαρίστανται στο χώρο του Laplace.

10.4.1.1 Συστήματα σε Σειρά

Πολλές φορές, μας βολεύει να βάζουμε πολλά συστήματα *σε σειρά* μεταξύ τους, δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο σύστημα που εκτελεί επεξεργασία στην είσοδό του. Όταν έχουμε τέτοια συστήματα σε σειρά, όπως στο Σχήμα 10.5(α), η έξοδος του $h_1(t)$ περνάει ως είσοδος στο $h_2(t)$. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα

αυτά αποτελούν ένα μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί τη *συνέλιξη* των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του χρόνου.

Όμως ξέρουμε πολύ καλά ότι η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στη συχνότητα (δηλ. στο χώρο s, των

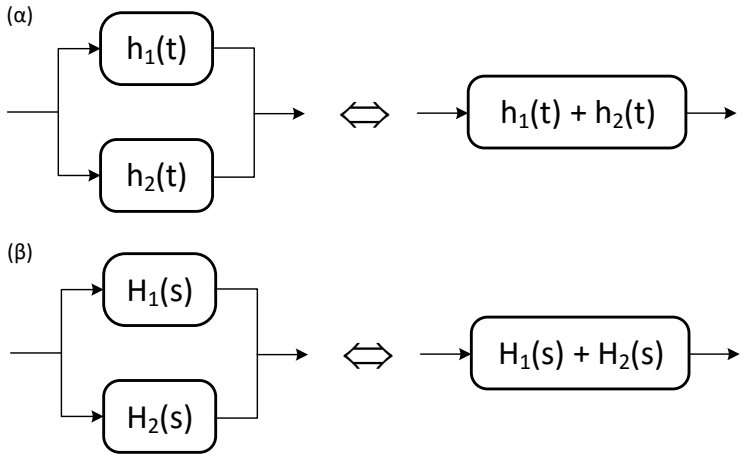


Σχήμα 10.5: *Συστήματα σε Σειρά: (α) δυο συστήματα σε σειρά στο χώρο του χρόνου και το ισοδύναμο σύστημα, (β) δυο συστήματα σε σειρά στο χώρο του Laplace και το ισοδύναμο σύστημα.*

μιγαδικών συχνοτήτων, του Μετασχ. Laplace). Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο συστήματα σε σειρά στο χρόνο ισούνται με ένα σύστημα στη συχνότητα, όπου περιγράφεται από το γινόμενο των μετασχηματισμών τους, όπως στο Σχήμα 10.5(β).

10.4.1.2 Συστήματα σε Παραλληλία

Άλλες φορές, μας βολεύει να βάζουμε πολλά συστήματα *παράλληλα* μεταξύ τους, δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο σύστημα που εκτελεί επεξεργασία στην είσοδό του. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως στο Σχήμα 10.6(α), η αρχική είσοδος περνάει και στο $h_1(t)$ και στο $h_2(t)$. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα αυτά αποτελούν ένα μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί το *άθροισμα* των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του χρόνου. Περνώντας στο χώρο της συχνότητας, ξέρουμε πολύ καλά ότι οι μετασχηματισμοί που έχουμε ορίσει είναι



Σχήμα 10.6: *Συστήματα σε Παραλληλία: (α) δυο συστήματα σε παραλληλία στο χώρο του χρόνου και το ισοδύναμο σύστημα, (β) δυο συστήματα σε παραλληλία στο χώρο του Laplace και το ισοδύναμο σύστημα.*

γραμμικοί. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο συστήματα παράλληλα στο χρόνο ισούνται με ένα σύστημα στη συχνότητα, όπου περιγράφεται επίσης από το άθροισμα των μετασχηματισμών τους, όπως στο Σχήμα ;;(β). Φυσικά υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί συστημάτων σε σειρά και παράλληλα, αλλά η βασική αρχή ανάλυσης ακολουθεί την παραπάνω διαδικασία.

10.4.2 Πόλοι και Μηδενικά στο s-επίπεδο

Έχουμε ήδη ορίσει ένα όνομα για το μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος: συμφωνήσαμε να τον λέμε **Συνάρτηση Μεταφοράς**. Για να λάβουμε περισσότερη πληροφορία για τη συνάρτηση μεταφοράς, θα ηταν πολύ βολικό να τη γράψουμε σε μορφή παραγόντων, ως

$$H(s) = A\frac{\prod_{k=1}^{M}(s-c_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} \tag{10.101}$$

με A μια σταθερά. Οι αριθμοί c_k, d_k λέγονται **μηδενικά** και **πόλοι**, αντίστοιχα. Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή αντίστοιχα. Εν γένει, ονομάζουμε **πολους** τα σημεία του s-επιπέδου που απειρίζουν το $H(s)$. Αντίστοιχα, ονομάζουμε **μηδενικά** τα σημεία του s-επιπέδου που μηδενίζουν το $H(s)$. Σίγουρα τέτοια σημεία είναι οι ρίζες του παρονομαστή και οι ρίζες του αριθμητή αντίστοιχα, δηλ. τα σημεία c_k, d_k. Όμως, σε περιπτώσεις που η τάξη του αριθμητή είναι διαφορετική από του παρονομαστή, μπορεί να υπάρχουν κι άλλα μηδενικά ή πόλοι. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 10.7:

Θεωρήστε τις απλές αιτιατές συναρτήσεις μεταφοράς

$$H_1(s) = \frac{s-2}{s-3},\ \Re\{s\} > 3 \tag{10.102}$$

$$H_2(s) = \frac{s-2}{s^2},\ \Re\{s\} > 0 \tag{10.103}$$

$$H_3(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+1)},\ \Re\{s\} > 3 \tag{10.104}$$

$$H_4(s) = \frac{1}{s},\ \Re\{s\} > 0 \tag{10.105}$$

Βρείτε και σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά τους.

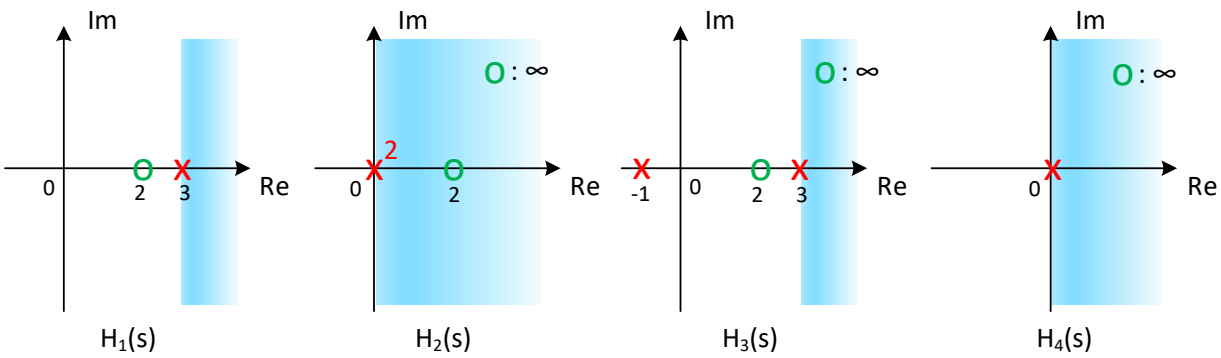
Λύση:
Το $H_1(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = 3$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$.

Το $H_2(s)$ έχει έναν πόλο τάξης 2 στο $s = 0$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$. Όμως, $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει ακόμα ένα μηδενικό στο άπειρο.

Το $H_3(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = 3$, έναν πόλο στο $s = -1$, και ένα μηδενικό στο $s = 2$. Όμως, $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει κι ένα ακόμη μηδενικό στο άπειρο.

Το $H_4(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = 0$. Όμως, $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει ένα μηδενικό στο άπειρο. Το Σχήμα 10.7 δείχνει τη θέση των πόλων και των μηδενικών για κάθε σύστημα, καθώς και το πεδίο σύγκλισης.

■



Σχήμα 10.7: *Πόλοι, μηδενικά, και πεδία σύγκλισης των συστημάτων του Παραδείγματος 10.7.*

Τα παραπάνω παραδείγματα μας προδίδουν ένα γενικό κανόνα: **σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, υπάρχουν τόσοι πόλοι, οσα και μηδενικά**. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ως εξής:

Έστω μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ως

$$H(s) = A\frac{\prod_{k=1}^{M}(s-c_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} \tag{10.106}$$

Τότε

$$H(s) = A\frac{s^M\prod_{k=1}^{M}(1-\frac{c_k}{s})}{s^N\prod_{k=1}^{N}(1-\frac{d_k}{s})} = As^{M-N}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-\frac{c_k}{s})}{\prod_{k=1}^{N}(1-\frac{d_k}{s})} \tag{10.107}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Έστω ότι $M > N$, άρα συνεπάγεται ότι έχουμε θετική δύναμη του s στον όρο μπροστά από το κλάσμα, άρα θα έχουμε $M - N$ πόλους στο άπειρο.
- Αν $M < N$, τότε ο όρος s^{M-N} γράφεται ως $1/s^{M-N}$, με $M - N > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, το σύστημα θα έχει $M - N$ μηδενικά στο άπειρο.
- Στην τετριμμένη περίπτωση όπου $M = N$, δεν υπάρχουν πόλοι ή μηδενικά στο άπειρο, και οι πόλοι και τα μηδενικά δίνονται μόνο από τις ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή και του αριθμητή αντίστοιχα.

Είναι ενδιαφέρον και σημαντικό να παρατηρήσει κανείς το εξής: αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι *ρητή* συνάρτηση του s, τότε εγγυημένα το σύστημα μπορεί να είναι

(α′) αιτιατό, αν το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο,

(β′) αντι-αιτιατό, αν το πεδίο σύγκλισης είναι αριστερόπλευρο,

(γ′) μη-αιτιατό, αν το πεδίο σύγκλισης είναι αμφίπλευρο.

Γνωρίζετε ότι εν γένει η πλευρικότητα ενός πεδίου σύγκλισης δεν καθορίζει την αιτιατότητά του (όμως το αντίστροφο ισχύει). Θυμηθείτε, για παράδειγμα, ότι ένα δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης αντιστοιχεί σε ένα δεξιόπλευρο σήμα, αλλά όχι απαραίτητα σε ένα αιτιατό σήμα. Όμως μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς εγγυάται ότι το πεδίο σύγκλισης καθορίζει και την αιτιατότητα (ή μη) του συστήματος. Διαισθητικά, μπορείτε να το καταλάβετε ως εξής: για παράδειγμα, αν ένα σύστημα είναι δεξιόπλευρο αλλά όχι αιτιατό, τότε μπορεί κάποιες τιμές της κρουστικής απόκρισής του $h(t)$ να βρίσκονται αριστερά του μηδενός στον άξονα του χρόνου, όπως π.χ. το

$$h(t) = e^{-(t+2)}u(t+2) \longleftrightarrow H(s) = \frac{1}{s+1}e^{2s}, \ \Re\{s\} > -1 \tag{10.108}$$

Ξεκάθαρα, το σύστημα αυτό είναι δεξιόπλευρο αλλά όχι αιτιατό. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του δεν είναι ρητή συνάρτηση του s, αλλά ο αριθμητής εμπεριέχει και μια εκθετική συνάρτηση με θετικό παράγοντα του s (τον αριθμό 2). Φυσικά, η ύπαρξη εκθετικής συνάρτησης του s δε σημαίνει πάντα ότι το σύστημα δεν είναι αιτιατό, αφού π.χ. το σύστημα

$$h(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) \longleftrightarrow H(s) = \frac{1}{s+1}e^{-2s}, \ \Re\{s\} > -1 \tag{10.109}$$

είναι αιτιατό, παρ' όλο που έχει στον αριθμητή μια εκθετική συνάρτηση - η οποία όμως έχει *αρνητικό* παράγοντα του s στον εκθέτη (τον αριθμό -2).

Καταλαβαίνετε λοιπόν ότι μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ δεν είναι αναγκαία συνθήκη για την μονοσήμαντη αντιστοίχιση της πλευρικότητας του πεδίου σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς με την αιτιατότητα του συστήματος, αλλά είναι σίγουρα ικανή συνθήκη. Τέλος, παρατηρήστε ότι όταν η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή και το σύστημα αιτιατό, η κρουστική απόκριση έχει πάντα μη μηδενικές τιμές στον χρονικό άξονα $(0^+, +\infty)$. Αντίστοιχα, για αντι-αιτιατά συστήματα, η κρουστική απόκριση θα πάρει μη μηδενικές τιμές στο χρονικό άξονα $(-\infty, 0^-)$.

10.5 Ευστάθεια Συστήματος

Ένα νέο στοιχείο που θα εισάγουμε τώρα είναι η έννοια της *ευστάθειας*, με όρους μετασχ. Laplace. Θυμίζουμε ότι ένα σύστημα λέγεται ευσταθές όταν παράγει φραγμένη έξοδο για μια οποιαδήποτε φραγμένη είσοδο. Δηλ.

$$\text{Αν } |x(t)| < M_x \Rightarrow |y(t)| < M_y \tag{10.110}$$

όπου M_x, M_y πραγματικοί αριθμοί. Ας θυμηθούμε πως "μετραφράζεται" η ευστάθεια με όρους κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος. Είναι

$$|y(t)| = \Big| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Big| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau < M_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau \tag{10.111}$$

Αυτό σημαίνει ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος $y(t)$, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau < M_h < \infty \tag{10.112}$$

με $M_h \in \Re$, που σημαίνει ότι το $h(t)$ πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Όμως αυτό το ολοκλήρωμα μας θυμίζει ακριβώς τη συνθήκη ύπαρξης του Μετασχ. Fourier του $h(t)$ μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματός του!! Άρα μπορούμε να πούμε γενικότερα ότι

Ευστάθεια Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Κριτήριο ευστάθειας (και άρα ύπαρξης του μετασχ. Fourier μέσω του ολοκληρώματός του) για οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα είναι η συμπερίληψη του φανταστικού άξονα $j2\pi f$ ($\Re\{s\} = \sigma = 0$) μέσα στο πεδίο σύγκλισης της συναρτησης μεταφοράς $H(s)$ που το περιγράφει.

Ας δούμε λίγο περισσότερο τι συμβαίνει σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις.

Έστω ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ για ένα αιτιατό σύστημα (χωρίς βλάβη της γενικότητας) εκφράζεται με χρήση του αντιστρόφου μετασχ. Laplace ως

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(t), \quad \Re\{s\} > \max\{\Re\{s_k\}\} \tag{10.113}$$

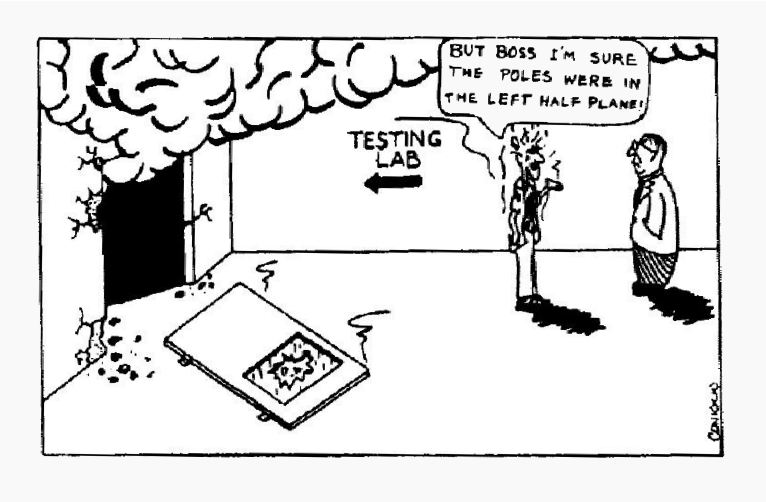
όπου s_k οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, οι οποίοι είναι απλοί (χωρίς πολλαπλότητα), χάριν απλούστευσης. Τότε θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} |A_k||e^{s_k t} u(t)| dt = \sum_{k=1}^{N} |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}||e^{j2\pi f t}| dt = \sum_{k=1}^{N} |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}| dt \tag{10.114}$$

Καταλήξαμε πλέον ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος, και άρα το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει να ισχύει ότι η συνάρτηση $e^{-\sigma_k t}$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Αυτό προφανώς συμβαίνει *μόνον* όταν $\Re\{s_k\} = \sigma_k < 0$! Πότε ισχύει όμως αυτό; Φυσικά όταν **όλοι** οι πόλοι s_k του $H(s)$ βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο! Άρα

Ευστάθεια Αιτιατού Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα ορίζεται ο μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.



Σχήμα 10.8: *Προσοχή στην ευστάθεια των συστημάτων!!*

Με αντίστοιχη ανάλυση προκύπτει ότι

Ευστάθεια Αντι-αιτιατού Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Ένα αντι-αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα ορίζεται ο μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Φυσικά οι δυο τελευταίες συνθήκες ευστάθειας είναι υποπεριπτώσεις - εύκολα μπορείτε να συμπεράνετε ότι και για τις δυο αυτές υποπεριπώσεις, ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισής τους.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 10.8:

Ένα *ευσταθές* ΓΧΑ σύστημα έχει τις παρακάτω εισόδους και εξόδους, $x(t)$ και $y(t)$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιήστε το μετασχ.Laplace για να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος.

(α′) $x(t) = e^{-t}u(t)$, $y(t) = e^{-2t}\cos(t)u(t)$

(β′) $x(t) = e^{-2t}u(t)$, $y(t) = -2e^{-t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$

(γ′) $x(t) = e^{2t}u(-t)$, $y(t) = e^{-t}u(t)$

Λύση:

Είναι

(α′) Προφανώς

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{10.115}$$

άρα αρκεί να βρούμε τα $X(s), Y(s)$. Έχουμε

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1},\ \Re\{s\} > -1 \tag{10.116}$$

αφού το σήμα ειναι δεξιόπλευρο. Επίσης

$$y(t) = e^{-2t}\cos(t)u(t) \longleftrightarrow Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1},\ \Re\{s\} > -2 \tag{10.117}$$

και άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}}{\frac{1}{s+1}} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)^2+1} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5} \tag{10.118}$$

Η τάξη του αριθμητή είναι ίδια με του παρονομαστή, άρα πρέπει πρίν κάνουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να κάνουμε διαίρεση των πολυωνύμων. Κάνοντας διαιρεση πολυωνύμων, θα έχουμε

$$H(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5} = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2+1} \tag{10.119}$$

Εδώ μπορούμε να ακολουθησουμε μια διαφορετική προσέγγιση αντι της Ανάπτυξης σε Μερικά Κλάσματα. Βλέπουμε οτι ο παρονομαστής μας θυμίζει δυο πολύ γνωστά ζεύγη μετ. Laplace, τα

$$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t) \longleftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2},\ \Re\{s\} > -\Re\{a\} \tag{10.120}$$

$$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t) \longleftrightarrow \frac{2\pi f_0}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2},\ \Re\{s\} > -\Re\{a\} \tag{10.121}$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε τον αριθμητή με τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιήσουμε τους παραπάνω τύπους. Δηλ.

$$H(s) = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2+1} = 1 - \frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{(s+2)^2+1} \tag{10.122}$$

Επίσης, το πεδίο σύγκλισης για αυτά τα δυο σήματα είναι το $\Re\{s\} > -2$, το οποίο συμφωνεί με το χαρακτη-

ριστικό της ευστάθειας του συστήματος που μας λέει η εκφώνηση, άρα

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}\cos(t)u(t) - e^{-2t}\sin(t)u(t) \tag{10.123}$$

(β′) Όμοια, εχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s+2},\ \Re\{s\} > -2\ \ ,\ \ Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+3},\ \Re\{s\} > -1 \tag{10.124}$$

άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \tag{10.125}$$

με

$$A = H(s)(s+1)\Big]_{s=-1} = \frac{-4(s+2)}{(s+3)}\Big]_{s=-1} = -2 \tag{10.126}$$

και

$$B = H(s)(s+3)\Big]_{s=-3} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)}\Big]_{s=-3} = -2 \tag{10.127}$$

Το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς θα είναι τέτοιο ώστε

$$\{\Re\{s\} > -1\} \supseteq R_H \cap \{\Re\{s\} > -2\} \tag{10.128}$$

και δεδονέμου ότι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στις θέσεις $s = -1$, $s = -3$, το μόνο πιθανό πεδίο σύγκλισης είναι το

$$R_H = \{\Re\{s\} > -1\} \tag{10.129}$$

Οπότε

$$H(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{-2}{s+3} \longleftrightarrow h(t) = -2e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) \tag{10.130}$$

που είναι και το ζητούμενο.

(γ′) Έχουμε

$$X(s) = -\frac{1}{s-2},\ \Re\{s\} < 2 \tag{10.131}$$

και

$$Y(s) = \frac{1}{s+1},\ \Re\{s\} > -1 \tag{10.132}$$

Άρα

$$H(s) = -\frac{s-2}{s+1} \tag{10.133}$$

Εδώ ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή ισούται με τον αντίστοιχο του παρονομαστή, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα αν πρώτα δεν κάνουμε διαίρεση των πολυωνύμων. Παρ′ όλο που η διαίρεση είναι απλή, ας δούμε έναν διαφορετικό τρόπο. Έχουμε

$$H(s) = -\frac{s-2}{s+1} = -s\frac{1}{s+1} + 2\frac{1}{s+1} \tag{10.134}$$

Ο μοναδικός πόλος του συστήματος βρίσκεται στη θέση $s = -1$, άρα η μόνη επιλογή πεδίου σύγκλισης για να είναι το σύστημα ευσταθές είναι το $R_H = \{\Re\{s\} > -1\}$. Οπότε, σύμφωνα με τους πίνακες ιδιοτήτων και ζευγών μετασχ. Laplace, θα έχουμε

$$h(t) = -\frac{d}{dt}e^{-t}u(t) + 2e^{-t}u(t) = -(-e^{-t}u(t) + e^{-t}\delta(t)) + 2e^{-t}u(t) = 3e^{-t}u(t) - \delta(t) \tag{10.135}$$

Επιβεβαιώστε την παραπάνω απάντηση κάνοντας διαίρεση των πολυωνύμων και ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα.

■

Παράδειγμα 10.9:

Ένα ΓΧΑ σύστημα με απολύτως ολοκληρώσιμη κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει έναν πόλο στη θέση $s = 3$. Απαντήστε αναλυτικά τις παρακάτω ερωτήσεις:

(α′) Μπορεί η $h(t)$ να είναι πεπερασμένης διάρκειας;

(β′) Μπορεί η $h(t)$ να είναι αριστερόπλευρη;

(γ′) Μπορεί η $h(t)$ να είναι αμφίπλευρη;

(δ′) Μπορεί η $h(t)$ να είναι δεξιόπλευρη;

Λύση:
Ένα απολύτως ολοκληρώσιμο σήμα σημαίνει ότι έχει μετασχ. Fourier ο οποίος μπορεί να υπολογιστεί μέσω του ορισμού του. Αν αυτό το σήμα αποτελεί την κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος, συνεπάγεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές.

(α′) Όχι, γιατί ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας έχει πεδίο σύγκλισης όλο το μιγαδικό επίπεδο, και άρα δεν μπορεί να έχει πόλους.

(β′) Ναι, μπορεί να είναι αριστερόπλευρη αν ο πόλος είναι μοναδικός και το πεδίο σύγκλισης είναι το $\Re\{s\} < 3$, που περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Αν υπάρχουν περισσότεροι πόλοι, πρέπει όλοι να βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

(γ′) Ναι, μπορεί να είναι αμφίπλευρη, αρκεί να υπάρχει ένας τουλάχιστον πόλος στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, έτσι ώστε το πεδίο σύγκλισης να αποτελεί μια λωρίδα που περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Αν ο πόλος είναι μοναδικός, τότε προφανώς όχι.

(δ′) Όχι, δεν μπορεί να είναι δεξιόπλευρη γιατί ένα δεξιόπλευρο σήμα έχει δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης, το οποίο στην περίπτωσή μας είναι $R \subseteq \{\Re\{s\} > 3\}$. Ένα τέτοιο πεδίο δεν μπορεί να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

10.6 Αντίστροφα Συστήματα

Ας θεωρήσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα, με κρουστική απόκριση $h(t)$. Η κρουστική απόκριση του **αντίστροφου συστήματος**, $h^{inv}(t)$, ικανοποιεί τη συνθήκη

$$h^{inv}(t) * h(t) = \delta(t) \tag{10.136}$$

Αν εφαρμόσουμε μετασχ. Laplace και στα δυο μέλη, έχουμε οτι

$$H^{inv}(s)H(s) = 1 \Leftrightarrow H^{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} \tag{10.137}$$

Άρα βλέπουμε οτι η Συνάρτηση Μεταφοράς $H^{inv}(s)$ του αντίστροφου συστήματος δεν είναι άλλη από την αντίστροφη της Συνάρτησης Μεταφοράς, $1/H(s)$, του αρχικού συστήματος. Με όρους πόλων-μηδενικών, αυτή η σχέση γράφεται

$$H^{inv}(s) = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)}{\prod_{k=1}^{M}(s-c_k)} \tag{10.138}$$

όπου c_k, d_k τα μηδενικά και οι πόλοι του αρχικού συστήματος, που εδω βλέπετε οτι έχουν γινει πόλοι (c_k) και μηδενικά (d_k), για το αντίστροφο σύστημα. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε οτι κάθε σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς έχει αντίστροφο σύστημα.

Παράδειγμα 10.10:

Θεωρήστε το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t) \tag{10.139}$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του αντιστρόφου συστήματος. Είναι αυτό ευσταθές και αιτιατό;

Λύση:
Πρώτα, ας βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς του ίδιου του συστήματος. Θα είναι, με εφαρμογή της ιδιότητας της παραγώγισης

$$sY(s) + 3Y(s) = s^2X(s) + sX(s) - 2X(s) \Leftrightarrow Y(s)(s+3) = X(s)(s^2+s-2) \tag{10.140}$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+s-2}{s+3} \tag{10.141}$$

και το αντίστροφο σύστημα θα είναι το

$$H^{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{s+3}{s^2+s-2} = \frac{s+3}{(s-1)(s+2)} \tag{10.142}$$

Το αντίστροφο σύστημα έχει πόλους στις θέσεις $s = 1, s = -2$. Ο πόλος στη θέση $s = 1$ είναι στο δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου. Έτσι, το αντίστροφο σύστημα δεν μπορεί να ειναι και αιτιατό και ευσταθές.

10.6.1 Πεδίο Σύγκλισης Αντιστρόφου Συστήματος

Ένα ερώτημα που μπορει να θέσει κάποιος είναι τι συμβαίνει με το πεδίο σύγκλισης του αντίστροφου συστήματος. Αν $ROC_{H(s)} = R_H$, τότε ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του αντίστροφου συστήματος, R_H^{inv}; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα μας τη δίνει το θεώρημα της συνέλιξης, το οποίο, όπως ξέρετε ήδη, μας λέει ότι τα $H(s)$ και $G(s) = H^{inv}(s)$ πρέπει να έχουν επικαλυπτόμενα πεδία σύγκλισης, δηλ.

$$R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset \tag{10.143}$$

Παράδειγμα 10.11:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s-\frac{1}{2}}{s-\frac{4}{5}}, \quad ROC = \Re\{s\} > \frac{4}{5} \tag{10.144}$$

Βρείτε το αντίστροφο σύστημα, αν υπάρχει.

Λύση:
Το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$H^{inv}(s) = \frac{s-\frac{4}{5}}{s-\frac{1}{2}} \tag{10.145}$$

Όμως για το πεδίο σύγκλισης έχουμε δυο επιλογές: i) $\Re\{s\} > \frac{1}{2}$, ii) $\Re\{s\} < \frac{1}{2}$. Από αυτά τα δυο πεδία, αυτό που επικαλύπτεται με το πεδίο σύγκλισης του $H(s)$ είναι το $\Re\{s\} > \frac{1}{2}$. Άρα μόνο το σύστημα με αυτό το πεδίο σύγκλισης είναι έγκυρο αντίστροφο σύστημα! Έτσι, μπορούμε να βρούμε και την κρουστική απόκριση του αντιστρόφου συστήματος, $h^{inv}(t)$, η οποία είναι

$$h^{inv}(t) = L^{-1}\left\{\frac{s}{s-\frac{1}{2}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{5}}{s-\frac{1}{2}}\right\} = L^{-1}\left\{s\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{5}}{s-\frac{1}{2}}\right\} \tag{10.146}$$

$$= \frac{d}{dt}e^{t/2}u(t) - \frac{4}{5}e^{t/2}u(t) \tag{10.147}$$

$$= \delta(t) + \frac{1}{2}e^{t/2}u(t) - \frac{4}{5}e^{t/2}u(t) \tag{10.148}$$

$$= \delta(t) - \frac{3}{10}e^{t/2}u(t) \tag{10.149}$$

Παράδειγμα 10.12:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s-\frac{1}{2}}{s-\frac{3}{10}}, \;\; ROC = \Re\{s\} > \frac{3}{10} \tag{10.150}$$

Βρείτε το αντίστροφο σύστημα, αν υπάρχει.

Λύση:
Το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$H^{inv}(s) = \frac{s-\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}} \tag{10.151}$$

Όμως για το πεδίο σύγκλισης έχουμε δυο επιλογές: i) $\Re\{s\} > \frac{1}{2}$, ii) $\Re\{s\} < \frac{1}{2}$. Παρατηρήστε ότι *και τα δυο* πεδία σύγκλισης επικαλύπτονται με το πεδίο σύγκλισης του $H(s)$. Άρα και τα δυο συστήματα είναι έγκυρα αντίστροφα σύστημα! Έτσι, μπορούμε να βρούμε και την κρουστική απόκριση του αντιστρόφου συστήματος, $h_1^{inv}(t)$, η οποία είναι

$$h_1^{inv}(t) = L^{-1}\Big\{\frac{s}{s-\frac{1}{2}}\Big\} - L^{-1}\Big\{\frac{\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}}\Big\} = L^{-1}\Big\{s\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\Big\} - L^{-1}\Big\{\frac{\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}}\Big\} \tag{10.152}$$

$$= \frac{d}{dt}e^{t/2}u(t) - \frac{3}{10}e^{t/2}u(t) \tag{10.153}$$

$$= \delta(t) + \frac{1}{2}e^{t/2}u(t) - \frac{3}{10}e^{t/2}u(t) \tag{10.154}$$

$$= \delta(t) + \frac{1}{5}e^{t/2}u(t) \tag{10.155}$$

και

$$h_2^{inv}(t) = L^{-1}\Big\{\frac{s}{s-\frac{1}{2}}\Big\} - L^{-1}\Big\{\frac{\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}}\Big\} = L^{-1}\Big\{s\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\Big\} - L^{-1}\Big\{\frac{\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}}\Big\}$$

$$= -\frac{d}{dt}e^{t/2}u(-t) + \frac{3}{10}e^{t/2}u(-t) \tag{10.156}$$

$$= -\delta(t) - \frac{1}{2}e^{t/2}u(-t) + \frac{3}{10}e^{t/2}u(-t) \tag{10.157}$$

$$= -\delta(t) - \frac{1}{5}e^{t/2}u(-t) \tag{10.158}$$

Παρατηρήστε ότι το $h_1^{inv}(t)$ είναι αιτιατό αλλά ασταθες, ενώ το $h_2^{inv}(t)$ είναι αντι-αιτιατό αλλά ευσταθές.

10.7 Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

Συχνά στην πράξη, μας ενδιαφέρουν συστήματα που εχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα. Θυμηθείτε το παράδειγμα στην εισαγωγή του κεφαλαίου: στην κινητή τηλεφωνία, θέλουμε να ακυρώσουμε την επίδραση του καναλιού μετάδοσης επάνω στο σήμα που μεταδίδεται. Έστω $H(s)$ το σύστημα που μοντελοποιεί το κανάλι επικοινωνίας, έστω $X(s)$ η είσοδος, και $Y(s)$ η έξοδος, δηλ. το σήμα στο σταθμό βάσης. Για να ακυρώσουμε την επίδραση του καναλιού $H(s)$ στο σήμα εισόδου $X(s)$, θα πρέπει να υπολογίσουμε το αντίστροφο σύστημα $1/H(s)$, ώστε ο παραλήπτης να λάβει το

$$Y(s) = H(s)\Big(\frac{1}{H(s)}\Big)X(s) = X(s) \tag{10.159}$$

δηλ. το σήμα που θέλουμε να στείλουμε. Επιθυμούμε αυτό το αντίστροφο σύστημα να είναι ευσταθές, για προφανείς λόγους, και αιτιατό, ώστε να είναι πραγματοποιήσιμο.

Προφανώς για να είναι ένα συστημα ευσταθές και αιτιατό, πρέπει να έχει ολους τους πόλους του στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικό επιπέδου. Γιατί; Γιατι τότε θα έχει δεξιόπλευρο πεδίο συγκλισης (ως αιτιατο, είναι και δεξιόπλευρο σήμα, και τα δεξιόπλευρα σήματα ξέρουμε οτι έχουν δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης), και αυτό θα είναι

της μορφης $\Re\{s\} > \max_{k=1,\cdots,N}\{\Re\{d_k\}\}$, όπου d_k οι πόλοι του συστήματος. Αφού λοιπόν το πεδίο σύγκλισης είναι έτσι, ο μεγαλύτερος πόλος θα είναι κι αυτός στο αριστερο ημιεπίπεδο, και έτσι το πεδίο σύγκλισης σίγουρα θα περιλαμβάνει τον κατακόρυφο άξονα $j\omega$, αρα θα είναι και ευσταθές.

Για ένα τέτοιο σύστημα $H(s)$, το αντίστροφό του, $H^{inv}(s)$, θα έχει για πόλους τα μηδενικά του $H(s)$ και για μηδενικά τους πόλους του $H(s)$. Ένα ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα υπάρχει μόνον όταν όλα τα μηδενικά <u>και</u> όλοι οι πόλοι του $H(s)$ είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο του $s-$επιπέδου. Ένα σύστημα που έχει όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά στο αριστερό του ημιεπίπεδο λέγεται **Σύστημα Ελάχιστης Φάσης**. Μόνο συστήματα ελάχιστης φάσης μπορούν να δώσουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα! :-)

Μια σημαντική ιδιότητα των συστημάτων ελαχίστης φάσης είναι η μοναδική σχέση μεταξύ του φάσματος πλάτους και του φάσματος φάσης. Δηλαδή, η απόκριση φάσης ενός συστήματος ελαχίστης φάσης μπορεί να ευρεθεί μοναδικά[1] από την απόκριση πλάτους, και αντίστροφα.

Ο όρος *ελάχιστης φάσης* είναι περισσότερο ιστορικός, και ένας πιο κατάλληλος όρος θα ήταν *ελάχιστης καθυστέρησης φάσης*, για λόγους που δε θα συζητήσουμε.

Οπότε θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να γνωρίσουμε μια ακόμα κατηγορία συστημάτων, τα οποία λέγονται all-pass[2] συστήματα.

10.8 All-pass Συστήματα

Ένα all-pass σύστημα είναι ένα ευσταθές σύστημα του οποίου η απόκριση πλάτους είναι σταθερή και ανεξάρτητη της συχνότητας, δηλ. η απόκριση σε συχνότητα γράφεται ως

$$H_{ap}(f) = e^{j\phi_{ap}(f)} \tag{10.160}$$

και άρα η απόκριση πλάτους είναι

$$|H_{ap}(f)| = 1 \tag{10.161}$$

Αντίστοιχα, αν η σχετική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι ρητή, θα είναι της μορφής

$$H_{ap}(s) = \prod_{k=1}^{M} \frac{s + a_k^*}{s - a_k} \tag{10.162}$$

Παρατηρήστε ότι αν το a_k είναι πραγματικό, τότε ο πόλος και το μηδενικό κάθε όρου στην παραπάνω σχέση θα βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις επάνω στον πραγματικό άξονα. Αν το a_k είναι μιγαδικό, τότε ο πόλος και το μηδενικό κάθε όρου στην παραπάνω σχέση θα βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν του άξονα των φανταστικών.

Παρατηρήστε ότι

$$|H_{ap}(s)|\Big|_{s=j2\pi f} = |H_{ap}(f)| = \left|\prod_{k=1}^{M} \frac{j2\pi f + a_k^*}{j2\pi f - a_k}\right| = \prod_{k=1}^{M} \frac{|j2\pi f + a_k^*|}{|j2\pi f - a_k|} = 1 \tag{10.163}$$

10.9 Παραγοντοποίηση συστήματος σε All-pass και Ελάχιστης Φάσης

Επιστρέφοντας τώρα στα συστήματα ελάχιστης φάσης, μπορεί να δειχθεί ότι οποιοδήποτε αιτιατό και ευσταθές σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, η οποία δ εν έχει μηδενικά στον φανταστικό άξονα, μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης και ενός συστήματος all-pass:

$$H(s) = H_{min}(s)H_{ap}(s) \tag{10.164}$$

με $H_{min}(s)$ και $H_{ap}(s)$ τα συστήματα ελάχιστης φάσης και all-pass αντίστοιχα. Με βάση αυτή τη σχέση, δείτε ότι

$$|H(s)|\Big|_{s=j2\pi f} = |H(f)| = |H_{min}(f)||H_{ap}(f)| = |H_{min}(f)| \tag{10.165}$$

[1] Με την εξαίρεση μιας πραγματικής σταθεράς που πολλαπλασιάζεται με την απόκριση πλάτους.

[2] ή *ολοδιαβατά*, αλλά θα κρατήσουμε την αγγλική ορολογία για αυτήν την κατηγορία.

αφού το $|H_{ap}(f)| = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει το ίδιο μέτρο με το αρχικό σύστημα. Τι διαφορετικό έχει; Προφανώς διαφορετική φάση!

$$\angle H(s)\Big|_{s=j2\pi f} = \angle H(f) = \angle H_{min}(f) + \angle H_{ap}(f) \tag{10.166}$$

Τι χρησιμότητα μπορεί να έχει το σύστημα ελάχιστης φάσης; Ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα της εκτίμησης του καναλιού $H(s)$ στο παράδειγμα της κινητής τηλεφωνίας. Αν το $H(s)$ είναι ευσταθές και αιτιατό αλλά έχει ένα μηδενικό στο δεξιό ημιεπίπεδο, τότε το αντίστροφο σύστημα θα έχει έναν πόλο στο δεξιό ημιεπίπεδο, οπότε δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό! Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί μερικώς βρίσκοντας το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο $H(s)$. Έτσι θα έχουμε

$$Y(f) = H(f)\frac{1}{H_{min}(f)}X(f) \tag{10.167}$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$|Y(f)| = |H(f)|\frac{1}{|H_{min}(f)|}|X(f)| = |X(f)| \tag{10.168}$$

δηλ. μπορούμε να ακυρώσουμε πλήρως την επίδραση του καναλιού στο φάσμα πλάτους, αλλά φυσικά δε θα συμβαίνει το ίδιο και για τη φάση, αφού

$$\angle Y(f) = \angle H(f) - \angle H_{min}(f) + \angle X(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle X(f) \tag{10.169}$$

και $\angle H_{ap}(f)$ είναι πάντα διάφορη του μηδενός. Άρα δείξαμε ότι το λαμβανόμενο σήμα έχει φάση η οποία είναι το άθροισμα της φάσης της εισόδου και της φάσης του all-pass συστήματος.

Ας δούμε πως γίνεται αυτή η παραγοντοποίηση στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 10.13:

Έστω το αιτιατό και ευσταθές σύστημα $H(s)$ με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \tag{10.170}$$

Παραγοντοποιήστε το σε δυο συστήματα, ένα ελάχιστης φάσης και ένα all-pass.

Λύση:
Βλέπουμε πως υπάρχει ένα μηδενικό στο $s = 1$ και δυο πόλοι στο $s = -2$ και $s = -3$. Το σύστημα ελάχιστης φάσης πρέπει να έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά του στο αριστερό ημιεπίπεδο. Από το παραπάνω σύστημα, στο αριστερό ημιεπίπεδο βρίσκονται μόνο οι πόλοι. Άρα το μηδενικό $s = 1$ δε θα πρέπει να ανήκει στο σύστημα ελάχιστης φάσης, αλλά στο all-pass σύστημα. Όμως ένα all-pass σύστημα έχει τους πόλους και τα μηδενικά του σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν του άξονα των φανταστικών. Άρα θα υπάρχει κι ένας πόλος στη θέση $s = -1$.

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1} \tag{10.171}$$

Οι δυο πόλοι του αρχικού συστήματος θα ανήκουν στο σύστημα ελάχιστης φάσης, όμως θα πρέπει να ακυρώσουμε και τον πόλο που εισάγαμε στο all-pass σύστημα, ειδάλλως η παραγοντοποίηση δε θα είναι σωστή! Άρα το σύστημα ελάχιστης φάσης θα είναι

$$H_{min}(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \tag{10.172}$$

Δείξτε ότι το $H_{min}(s)$ και το $H(s)$ έχουν την ίδια απόκριση πλάτους.

■

Παράδειγμα 10.14:

Θεωρήστε το αιταιτό και ευσταθές σύστημα

$$H(s) = \frac{(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \tag{10.173}$$

(α′) Έχει το παραπάνω σύστημα ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα;

(β′) Εκφράστε το $H(s)$ ως το γινόμενο δυο συστημάτων: ενός συστήματος Ελάχιστης Φάσης, $H_{min}(s)$, και ενός συστήματος All-pass, $H_{ap}(s)$, το οποίο θα πρέπει να έχει έναν πόλο και ένα μηδενικό.

(γ′) Θεωρηστε το αντίστροφο σύστημα του συστήματος Ελάχιστης Φάσης που βρήκατε παραπάνω, $H_{min}^{inv}(s)$. Μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό;

(δ′) Σχεδιάστε την απόκριση πλάτους του νέου συστήματος, $G(s) = H(s)H_{min}^{inv}(s)$.

Λύση:

(α′) Τα μηδενικά του $H(s)$ βρίσκονται στις θέσεις $s = -2, 1$. Αφού ένα μηδενικό από αυτά είναι στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το αντίστροφο σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό.

(β′) Τα συστήματα Ελάχιστης Φάσης έχουμε δει ότι έχουν όλους τους πόλους και τα μηδενικά στο αριστερό ημιεπίπεδο. Τα συστήματα All-pass έχουν τους πόλους και τα μηδενικά σε συμμετρία γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $j\omega$, δηλ. αν ένας πόλος βρίσκεται στη θέση $s = \sigma_p + j\omega_p$, τότε πρέπει να υπάρχει κι ένα μηδενικό στη θέση $s = -\sigma_p + j\omega_p$. Οπότε, στη δική μας παραγοντοποίηση, το σύστημα Ελάχιστης Φάσης θα πάρει όλους τους πόλους και τα μηδενικά του $H(s)$ που βρίσκονται στο αριστερο ημιεπίπεδο. Το σύστημα All-pass θα πρέπει έπειτα να είναι τέτοιο ώστε να έχει όλα τα υπόλοιπα μηδενικά του $H(s)$, αλλά επειδή θα πρέπει να έχει αναγκαστικά και πόλους στις συμμετρικές θέσεις ως προς $j\omega$, που προφανώς το αρχικό $H(s)$ δεν έχει, θα πρέπει αυτά να τα "ακυρώσουμε", βάζοντας κατάλληλα μηδενικά στο συστημα Ελάχιστης Φάσης, προσέχοντας βέβαια να μην πέφτουν στο δεξιό ημιεπίπεδο. Δηλαδή:

Οι πόλοι και τα μηδενικά του $H(s)$ που είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο είναι οι $p = -3, -4, -5$ (όλοι δλδ) και $z = -2$ (το ένα από τα δυο μηδενικά), αντίστοιχα. Άρα το σύστημα Ελάχιστης Φάσης θα ειναι το

$$H_{min}(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)(s+5)}$$

Το σύστημα All-pass θα πάρει το εναπομείναν μηδενικό, $z = 1$, αλλά επειδή είπαμε οτι στα All-pass συστήματα, οι πόλοι και τα μηδενικά έρχονται σε συμμετρια γύρω από τον $j\omega$, θα πρέπει το σύστημα να έχει και έναν πόλο στη θέση $p = -1$. Άρα

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

Όμως έτσι όπως είναι τώρα κατασκευασμένα τα συστήματα, το γινόμενο $H_{min}(s)H_{ap}(s)$ δεν είναι το ίδιο με το $H(s)$, γιατι υπάρχει ο πόλος στη θέση $p = -1$ που εισήχθη στο All-pass σύστημα. Δείτε:

$$\begin{aligned} H_{dec}(s) &= H_{min}(s)H_{ap}(s) \\ &= \frac{s+2}{(s+3)(s+4)(s+5)}\frac{s-1}{s+1} && (10.174) \\ &= \frac{(s+2)(s-1)}{(s+1)(s+3)(s+4)(s+5)} && (10.175) \\ &\neq \frac{(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+4)(s+5)} = H(s) && (10.176) \end{aligned}$$

Το πρόβλημα, οπως είπαμε και βλέπετε και παραπάνω, είναι ο πόλος στο $p = -1$, που μπήκε υποχρεωτικά στο All-pass σύστημα. Όμως, ο πόλος αυτός βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο, άρα μπορούμε να τον "ακυρώσουμε", βάζοντας στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης ένα μηδενικό εκει, έτσι ώστε στο γινόμενο των δυο, να απαλειφθούν. Μια τέτοια ενέργεια διατηρεί το σύστημα Ελάχιστης Φάσης ως τέτοιο, ενώ πλέον το γινόμενό μας είναι σωστό. Βέβαια, το σύστημα Ελάχιστης Φάσης έχει τώρα ένα μηδενικό που δεν υπήρχε στο αρχικό σύστημα $H(s)$. Αυτό δεν έχει σημασία, άλλωστε και το All-pass σύστημα έχει έναν πόλο που δεν υπήρχε στο αρχικό σύστημα $H(s)$. Εμάς μας ενδιαφέρει το γινόμενο των δυο συστημάτων $H_{min}(s)H_{ap}(s)$

να δίνει το αρχικό σύστημα $H(s)$, και κάθε ένα σύστημα να έχει τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει. Αρα

$$H_{min}(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \tag{10.177}$$

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1} \tag{10.178}$$

Βλέπετε οτι το γινόμενο των παραπάνω είναι ίσο με το $H(s)$. Άρα αυτά είναι τα συστήματα που ζητούνται.

(γ′) Το αντίστροφο σύστημα του $H_{min}(s)$ είναι το $H_{min}^{inv}(s)$ και ειναι

$$H_{min}^{inv}(s) = \frac{(s+3)(s+4)(s+5)}{(s+2)(s+1)} \tag{10.179}$$

Οι πόλοι είναι στις θέσεις $s = -1, -2$, και βρίσκονται στο αριστερο ημιεπίπεδο, και έτσι το σύστημα μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό, επιλέγοντας $\Re\{s\} > -1$.

(δ′) Είναι

$$G(s) = H(s)H_{min}^{inv}(s) = \frac{s-1}{s+1} = H_{ap}(s) \tag{10.180}$$

άρα η απόκριση πλάτους είναι σταθερή και ίση με τη μονάδα.