

Κεφάλαιο 7

Ανάλυση Συστημάτων στο Πεδίο του Χρόνου

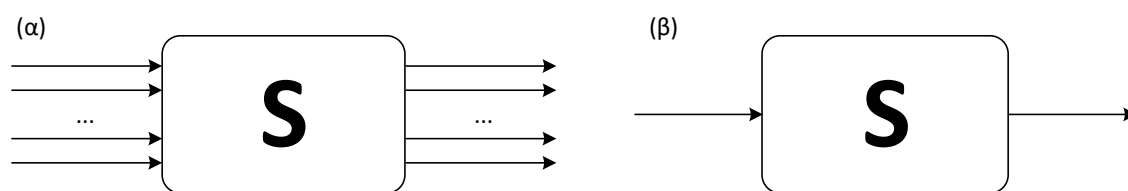
7.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συζητήσουμε για το πως μπορούμε να μελετάμε συστήματα στο πεδίο του χρόνου.

Τι είναι όμως τα συστήματα και γιατί τα χρησιμοποιούμε; Ίσως ήδη φαντάζεστε ότι τα συστήματα χρησιμοποιούνται για να επεξεργαστούν ή να εξάγουν πληροφορία από σήματα.

Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται από τρία στοιχεία: την είσοδό του, την έξοδό του, και τις αρχές από τις οποίες διέπεται η λειτουργία του. Οι αρχές λειτουργίας του δεν είναι τίποτε άλλο από το *μαθηματικό μοντέλο* που μπορεί κανείς να αναπτύξει για να περιγράψει τη σχέση που συνδέει την είσοδο με την έξοδό του. Για παράδειγμα, ένα ηλεκτρικό κύκλωμα διέπεται από τους γνωστούς από τη Φυσική νόμους του Kirchhoff, και από τις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν την τάση και την ένταση του ρεύματος στα άκρα των στοιχείων του (αντιστάσεις, πυκνωτές, κλπ.). Το σύνολο αυτών των εξισώσεων αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο του ηλεκτρικού κυκλώματος.

Παρόλο που τα ηλεκτρικά κυκλώματα είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα συστήματος στις Επιστήμες Μηχανικού Η/Υ, το να συνδέσουμε την έννοια του συστήματος με ένα συγκεκριμένο είδος υλοποίησης θα ήταν αρκετά περιοριστικό. Θα προτιμήσουμε λοιπόν μια πιο αφαιρετική έννοια για τα συστήματα που θα συζητήσουμε. Θα μπορούσε κανείς να τα δει ως “μαύρα κουτιά”, των οποίων οι εσωτερικές λεπτομέρειες υλοποίησης δεν μας ενδιαφέρουν, παρά μόνο η επίδρασή τους στις εισόδους που δέχονται και το αποτέλεσμα (έξοδοι) που παράγουν. Επίσης, τα συστήματα μπορεί να είναι *πολλαπλών εισόδων και πολλαπλών εξόδων* ή *μιας εισόδου και μιας εξόδου*, όπως στο Σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1: (α) Σύστημα MIMO, (β) Σύστημα SISO.

Στο παρόν σύγγραμμα, θα μας απασχολήσουν σχεδόν αποκλειστικά συστήματα μιας εισόδου και μιας εξόδου. Τέτοια συστήματα αποκαλούνται Single Input - Single Output (SISO) συστήματα.

Ένα SISO σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας *τελεστής* $T[\cdot]$ ο οποίος εφαρμόζεται στην είσοδο $x(t)$ του συστήματος, και παράγει μια έξοδο $y(t)$. Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = T[x(t)] \quad (7.1)$$

Τα φυσικά συστήματα περιγράφονται στο πεδίο του χρόνου από μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{l=0}^M \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \quad (7.2)$$

με a_k, b_l σταθερούς συντελεστές. Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως μπορούμε εύκολα να λύνουμε τέτοια συστήματα.

Θα θεωρούμε στα πλαίσια του μαθήματος ότι ένα τέτοιο σύστημα (και εν γένει όσα συστήματα μελετήσουμε) είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ). Θα δούμε συνοπτικά τι σημαίνουν αυτές οι δυο έννοιες, αφού πρώτα παρουσιάσουμε γιατί είναι ενδιαφέρουσες η μελέτη συστημάτων.

7.1.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Πολλά φυσικά συστήματα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, εξ ου και το ενδιαφέρον μας να μπορούμε να λύνουμε τέτοιες. Η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής (7.2) συνίσταται στην εύρεση της εξόδου $y(t)$ δεδομένης μιας εισόδου $x(t)$. Ας δούμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα της Μηχανικής τα οποία (πρέπει να) είναι γνωστά στον αναγνώστη.

Πολλά πραγματικά, μηχανικά συστήματα εμπλέκουν ελατήρια και σώματα. Το πιο σύνηθες τέτοιο παράδειγμα είναι ο Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής, που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σώμα μάζας m συνδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς k . Δείτε το Σχήμα 7.2.

Το σύστημα ελατήριο-σώμα βρίσκεται σε ισορροπία στο Σχήμα 7.2(α). Εκτείνουμε το ελατήριο τραβώντας το σώμα προς τα δεξιά, μέχρι τη μέγιστη έκτασή του από τη θέση ισορροπίας. Έστω ότι η έκταση αυτή βρίσκεται A μέτρα από το σημείο ισορροπίας, όπως στο Σχήμα 7.2(β). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το σώμα, το οποίο εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση. Όλη η κίνηση αυτή περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

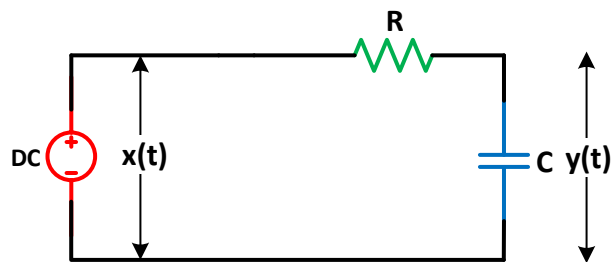
$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega_0^2 x(t) \iff \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (7.3)$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση ονομάζεται *ομογενής*. Πιθανότατα γνωρίζετε ότι η εξίσωση θέσης του σώματος (που είναι και η λύση της διαφορικής εξίσωσης) οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t > 0$ δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad t > 0 \quad (7.4) \quad \text{Σχήμα 7.2: Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής.}$$

με την τιμή ω_0 να εξαρτάται από το υλικό του ελατηρίου, και ϕ την αρχική φάση του ταλαντωτή, που εν γένει μας είναι άγνωστη και εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Παρατηρήστε ότι η διαφορική εξίσωση (7.3) παρουσιάζει μόνο έξοδο $x(t)$, καθώς η είσοδος του είναι μηδενική.

Επίσης, η πλειονότητα των ηλεκτρικών συστημάτων που υπάρχουν γύρω μας περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Ένα πολύ απλό παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι το κύκλωμα πυκνωτή-αντιστάτη, ή αλλιώς το κύκλωμα RC . Δείτε το Σχήμα 7.3. Η αντίσταση του αντιστάτη συμβολίζεται με R ενώ



Σχήμα 7.3: Κύκλωμα RC .

η χωρητικότητα του πυκνωτή συμβολίζεται με C . Είσοδος σε αυτό το σύστημα είναι η τάση της πηγής, ενώ έξοδος είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το

κύκλωμα αυτό δίνεται ως

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \quad (7.5)$$

Αρχικά η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι μηδενική. Αν εφαρμόσουμε στο κύκλωμα μια ιδανική πηγή σταθερής τάσης τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλ. $x(t) = V_0 u(t)$, τότε μπορεί κανείς να δείξει ότι η τάση στα άκρα του πυκνωτή δίνεται ως

$$y(t) = V_0(1 - e^{-t/RC}), \quad t > 0 \quad (7.6)$$

Πώς προκύπτει αυτή η σχέση από τη διαφορική εξίσωση;

Το κεφάλαιο αυτό αναλαμβάνει να απαντήσει στα ερωτήματα των παραπάνω παραδειγμάτων. Η μελέτη μας θα περιοριστεί στα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Ας δούμε συνοπτικά αυτούς τους ορισμούς.

7.2 Γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα

Τα γραμμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ικανοποιούνται δυο συγκεκριμένες ιδιότητες: η ιδιότητα της *προσθετικότητας* και η ιδιότητα της *ομογένειας*.

Η ιδιότητα της προσθετικότητας αναφέρει ότι αν σε ένα σύστημα εφαρμόσουμε δυο διαφορετικές εισόδους $x_i(t)$, με $i = 1, 2$, και πάρουμε δυο διαφορετικές εξόδους $y_i(t)$, με $i = 1, 2$, τότε αν εφαρμόσουμε ως είσοδο το *άθροισμα* όλων των δυο εισόδων

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (7.7)$$

θα λάβουμε ως έξοδο το *άθροισμα* των επιμέρους εξόδων

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (7.8)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί για N εισόδους.

Επιπλέον, η ιδιότητα της *ομογένειας* σχετίζεται με την κλιμάκωση της εισόδου κατά παράγοντα a . Η ιδιότητα της ομογένειας ικανοποιείται αν για το ζεύγος εισόδου-εξόδου

$$x(t) \longrightarrow y(t) \quad (7.9)$$

ισχύει το ζεύγος

$$ax(t) \longrightarrow ay(t) \quad (7.10)$$

για κάθε πραγματικό ή φανταστικό αριθμό a .

Οι δυο παραπάνω ιδιότητες από κοινού μας δίνουν την ιδιότητα της **γραμμικότητας**, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως εξής: αν

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \quad (7.11)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \quad (7.12)$$

είναι ζεύγη εισόδου-εξόδου για ένα σύστημα, τότε για οποιεσδήποτε μιγαδικές ή πραγματικές σταθερές a, b , το

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t) \quad (7.13)$$

είναι ζεύγος εισόδου-εξόδου για το ίδιο σύστημα. Αν θέλαμε να εκφράσουμε τη γραμμικότητα περιγραφικά, γραμμικά είναι τα συστήματα στα οποία αν εφαρμόσουμε ως είσοδο ένα άθροισμα σημάτων, θα πάρουμε ως έξοδο το άθροισμα των εξόδων που θα παίρναμε αν είχαμε δώσει ως είσοδο ένα-ένα τα σήματα, κι όχι όλα μαζί ως άθροισμα. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 2x(t+1) - 3x(t-4) \quad (7.14)$$

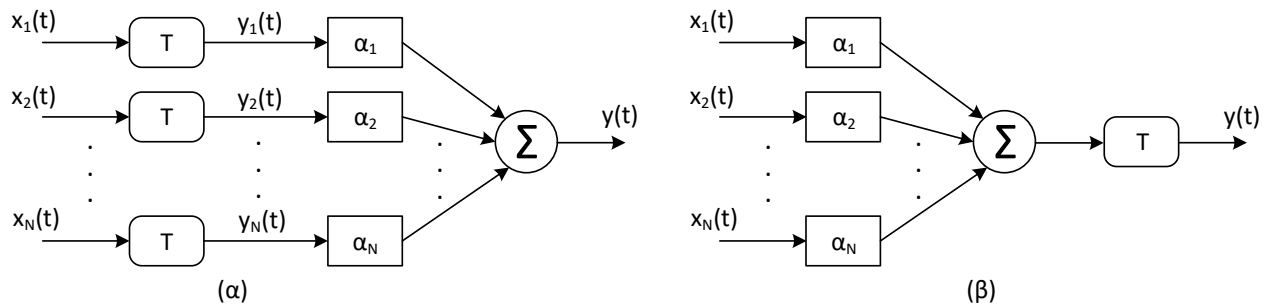
είναι γραμμικό, ενώ το σύστημα

$$y(t) = \sqrt{x(t)} \quad (7.15)$$

δεν είναι γραμμικό, όπως επίσης και το

$$y(t) = x^2(t) \quad (7.16)$$

δεν είναι γραμμικό. Μια καλή σχηματική αναπαράσταση της έννοιας της γραμμικότητας φαίνεται το Σχήμα 7.4. Αν η έξοδος στο Σχήμα 7.4(α) είναι η ίδια με αυτή του Σχήματος 7.4(β), τότε το σύστημα είναι γραμμικό.



Σχήμα 7.4: Η ιδιότητα της γραμμικότητας συστημάτων.

Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική, οπότε ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.1:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{3}x(2-t) + x(t) \quad (7.17)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $ax_1(t)$ η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \frac{1}{3}ax_1(2-t) + ax_1(t) = a\left(\frac{1}{3}x_1(2-t) + x_1(t)\right) \quad (7.18)$$

ενώ για είσοδο $bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y_2(t) = \frac{1}{3}bx_2(2-t) + bx_2(t) = b\left(\frac{1}{3}x_2(2-t) + x_2(t)\right) \quad (7.19)$$

Για είσοδο $ax_1(t) + bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y(t) = \frac{1}{3}(ax_1(2-t) + bx_2(2-t)) + ax_1(t) + bx_2(t) \quad (7.20)$$

$$= \frac{1}{3}ax_1(2-t) + \frac{1}{3}bx_2(2-t) + ax_1(t) + bx_2(t) \quad (7.21)$$

$$= a\left(\frac{1}{3}x_1(2-t) + x_1(t)\right) + b\left(\frac{1}{3}x_2(2-t) + x_2(t)\right) \quad (7.22)$$

$$= y_1(t) + y_2(t) \quad (7.23)$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό. ■

Παράδειγμα 7.2:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{x(t+1)} \quad (7.24)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $ax_1(t)$, η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \frac{1}{ax_1(t+1)} \quad (7.25)$$

ενώ για είσοδο $bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y_2(t) = \frac{1}{bx_2(t+1)} \quad (7.26)$$

Για είσοδο $ax_1(t) + bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y(t) = \frac{1}{ax_1(t+1) + bx_2(t+1)} \neq y_1(t) + y_2(t) \quad (7.27)$$

άρα το σύστημα δεν είναι γραμμικό. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της ομογένειας, απλά παρατηρώντας ότι

$$ax(t) \not\rightarrow ay(t) \quad (7.28)$$

Οπότε θα μπορούσαμε να αποφανθούμε εξ' αρχής ότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό, παρ' όλα αυτά προχωρήσαμε το παράδειγμα ως το τέλος για λόγους πληρότητας. ■

Τα παραπάνω συστήματα ήταν αντιπροσωπευτικά για το πως μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα σύστημα είναι γραμμικό ή όχι. Στην πράξη, τα περισσότερα φυσικά συστήματα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις. Ας δούμε δυο τέτοια παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.3:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) \quad (7.29)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $x_1(t)$, η έξοδος είναι

$$\frac{d}{dt}y_1(t) + 2y_1(t) = x_1(t) \quad (7.30)$$

ενώ για είσοδο $x_2(t)$, η έξοδος είναι

$$\frac{d}{dt}y_2(t) + 2y_2(t) = x_2(t) \quad (7.31)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με a και b αντίστοιχα, έχουμε

$$\frac{d}{dt}ay_1(t) + 2ay_1(t) = ax_1(t) \quad (7.32)$$

$$\frac{d}{dt}by_2(t) + 2by_2(t) = bx_2(t) \quad (7.33)$$

Το άθροισμά τους δίνει

$$\frac{d}{dt}ay_1(t) + 2ay_1(t) + \frac{d}{dt}by_2(t) + 2by_2(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (7.34)$$

Όμως η παραπάνω σχέση δεν είναι άλλη από τη Σχέση (7.29) με

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (7.35)$$

$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t) \quad (7.36)$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό. ■

Εύκολα μπορεί να γενικεύσει κανείς το παραπάνω αποτέλεσμα για μια διαφορική εξίσωση N -οστού βαθμού: η διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} b_k x(t) \quad (7.37)$$

αναπαριστά ένα γραμμικό σύστημα. Οι συντελεστές a_k, b_k της διαφορικής εξίσωσης μπορούν να είναι σταθεροί ή συναρτήσεις του χρόνου. Στη συνέχεια, θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα που περιγράφονται από

διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πάρα πολύ σημαντική καθώς απλοποιεί αρκετά την ανάλυση των συστημάτων. Στην πράξη, σχεδόν όλα τα συστήματα είναι *μη γραμμικά* για μεγάλες τιμές εισόδου. Όμως για μικρές τιμές εισόδου, η λειτουργία τους μπορεί να θεωρηθεί γραμμική. Παρ' όλο που τα μη γραμμικά συστήματα έχουν συγκεκριμένα πλεονεκτήματα, είναι περισσότερο δύσκολα στην ανάλυσή τους και αποτελούν μια κατηγορία από μόνα τους.

7.3 Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβλητά συστήματα

Τα συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα είναι αυτά για τα οποία οι παράμετροί τους δεν αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου, δηλ. η έξοδός τους δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο t ως παράγοντα. Σε τέτοια συστήματα, αν το

$$x(t) \longrightarrow y(t) \quad (7.38)$$

είναι ένα ζεύγος εισόδου-εξόδου, τότε

$$x(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0) \quad (7.39)$$

δηλ. αν η είσοδος καθυστερήσει κατά t_0 , τότε η έξοδος θα είναι ίδια με πριν, μόνο που θα είναι κι αυτή καθυστερημένη κατά t_0 .

Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 3x(t + 2) - 2 \cos(x(t - 2)) \quad (7.40)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ το σύστημα

$$y(t) = tx(t) \quad (7.41)$$

είναι χρονικά μεταβλητό. Ας το αποδείξουμε.

Παράδειγμα 7.4:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = 3x(t + 2) - 2 \cos(x(t - 2)) \quad (7.42)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:

Για είσοδο $x(t - t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = 3x(t - t_0 + 2) - 2 \cos(x(t - t_0 - 2)) \quad (7.43)$$

Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$y(t - t_0) = 3x(t - t_0 + 2) - 2 \cos(x(t - t_0 - 2)) \quad (7.44)$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι ίδιες, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. ■

Παράδειγμα 7.5:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = tx(t) \quad (7.45)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:

Για είσοδο $x(t - t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = tx(t - t_0) \quad (7.46)$$

Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$y(t - t_0) = (t - t_0)x(t - t_0) \quad (7.47)$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις δεν είναι ίδιες, άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό. ■

Παράδειγμα 7.6:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = 4x(t) \quad (7.48)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:

Για είσοδο $x(t - t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = 4x(t - t_0) \quad (7.49)$$

με $z(t)$ την έξοδο όταν η είσοδος είναι $x(t - t_0)$. Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t - t_0) = 4x(t - t_0) = \frac{d^2}{dt^2}z(t) \quad (7.50)$$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά αμεταβλητό. ■

7.4 Η χρουστική απόκριση $h(t)$

Θα θέλαμε να γνωρίζουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος όταν παρουσιάζουμε ως είσοδο ένα σήμα “ακαριαίας” μορφής, ένα σήμα που υπάρχει σε απειροστά μικρό χρονικό διάστημα¹. Η είσοδος αυτή θα διεγείρει το σύστημα, και θα το αναγκάσει να παράξει κάποια έξοδο. Η έξοδος αυτή πρέπει να “μοιάζει” με την απόκριση μηδενικής εισόδου, αφού η ύπαρξή της οφείλεται σε μια είσοδο που υπάρχει μόνο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, και μετά χάνεται. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η διέγερση αυτή δημιουργεί νέες αρχικές συνθήκες στο σύστημα, και η λύση της ομογενούς εξίσωσης για αυτές τις αρχικές συνθήκες θα μας δώσει μια έξοδο, μια απόκριση σε ένα “χρουστικό” σήμα - δε θα ήταν λοιπόν παράλογο να ονομάσουμε αυτήν την έξοδο ως **χρουστική απόκριση**²! Με βάση τα παραπάνω, ένα τέτοιο σήμα “ακαριαίας” εισόδου μπορεί να μοντελοποιηθεί εξαιρετικά από τη γνωστή μας συνάρτηση Δέλτα! Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που “υπάρχει” μόνο για $t = 0$ και είναι μηδέν για $t \neq 0$.

Ας ορίσουμε λοιπόν την **χρουστική απόκριση - impulse response** $h(t)$ ενός συστήματος ως την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος όταν στην είσοδο του παρουσιάζεται η συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$. Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του τελεστή $T[\cdot]$ για το ΓΧΑ σύστημα, θα είναι

$$h(t) = T[\delta(t)] \quad (7.51)$$

ή εναλλακτικά

$$\delta(t) \longrightarrow h(t) \quad (7.52)$$

Η γνώση της χρουστικής απόκρισης ενός συστήματος μπορεί να μας δώσει την έξοδο $y(t)$ για οποιαδήποτε είσοδο $x(t)$! Η έξοδος $y(t)$ αναπαρίσταται ως η **συνέλιξη - convolution** της εισόδου $x(t)$ με την χρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$! Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (7.53)$$

με το $*$ να συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης, που θα δούμε ευθύς αμέσως!

¹Σκεφτείτε ότι χτυπάτε ένα καμπανάκι (σύστημα) με ένα σφυρί (είσοδος) πολύ γρήγορα, όσο “ακαριαία” γίνεται. Θα μπορούσατε να ισχυριστείτε ότι ο ήχος που θα παραχθεί, δηλ. η έξοδος του συστήματος, χαρακτηρίζει το καμπανάκι (το υλικό του, το πάχος του, την επιφάνειά του, κλπ).

²Σκεφτείτε το: η απόκριση (έξοδος) σε μια χρούση (ακαριαία διέγερση).

7.5 Συνέλιξη

Η πράξη της συνέλιξης είναι θεμελιώδους σημασίας, λόγω του ότι εμφανίζεται συχνά στις φυσικές επιστήμες, στη μηχανική, και στα μαθηματικά, οπότε της αξίζει ξεχωριστή και εκτενής αναφορά. Αμέσως παρακάτω, θα την εξετάσουμε ως γενικότερη πράξη, χωρίς να τη συνδέουμε απαραίτητα με την είσοδο και την έξοδο ενός συστήματος.

Προτού μελετήσουμε αναλυτικά το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, ας δούμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες με βάση τον ορισμό της.

7.5.1 Ιδιότητες Συνέλιξης

Η πράξη της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από ιδιότητες, όπως αυτές στον Πίνακα 7.1.

Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)), a \in \mathbb{R}$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

Πίνακας 7.1: Ιδιότητες συνέλιξης

Ακολουθούν οι αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων, με αποκλειστική χρήση του ορισμού.

7.5.1.1 Ομογένεια

Έχουμε

$$(ax(t)) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ax(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)ay(t-\tau)d\tau = x(t) * (ay(t)) \quad (7.54)$$

και

$$x(t) * (ay(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)ay(t-\tau)d\tau = a \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = a(x(t) * y(t)) \quad (7.55)$$

7.5.1.2 Αντιμεταθετικότητα

Θέτοντας $u = t - \tau$ στον ορισμό της συνέλιξης, έχουμε

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = - \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)y(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)y(u)du = y(t) * x(t) \quad (7.56)$$

7.5.1.3 Προσεταιριστικότητα

Είναι

$$(x(t) * y(t)) * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(\tau) * y(\tau))z(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(\tau-u)du \right) z(t-\tau)d\tau \quad (7.57)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau-u)z(t-\tau)d\tau \right) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(m)z(t-m-u)dm \right) du \quad (7.58)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)(y(t-u) * z(t-u))du \quad (7.59)$$

$$= x(t) * (y(t) * z(t)) \quad (7.60)$$

όπου στη Σχέση (7.58) θέσαμε $m = \tau - u$.

7.5.1.4 Επιμεριστικότητα

Είναι

$$x(t) * (y(t) + z(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)(y(t-\tau) + z(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(\tau)y(t-\tau) + x(\tau)z(t-\tau))d\tau \quad (7.61)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau \quad (7.62)$$

$$= x(t) * y(t) + x(t) * z(t) \quad (7.63)$$

7.5.1.5 Γραμμικότητα

Είναι

$$z(t) = x(t) * y(t) = (ax_1(t) + bx_2(t)) * y(t) \quad (7.64)$$

$$= ax_1(t) * y(t) + bx_2(t) * y(t) \quad (7.65)$$

$$= a(x_1(t) * y(t)) + b(x_2(t) * y(t)) \quad (7.66)$$

$$= az_1(t) + bz_2(t) \quad (7.67)$$

με

$$z_1(t) = x_1(t) * y(t) \quad (7.68)$$

$$z_2(t) = x_2(t) * y(t) \quad (7.69)$$

λόγω των ιδιοτήτων της ομογένειας και της επιμεριστικότητας.

7.5.1.6 Εύρος

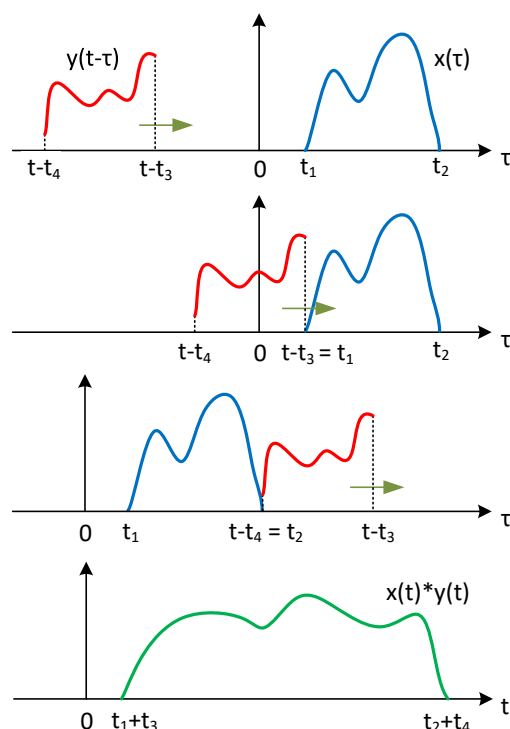
Η απόδειξη της ιδιότητας του εύρους φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 7.5. Στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης, το σήμα $y(t)$ χρησιμοποιείται ως $y(t-\tau)$, με μεταβλητή το τ . Άρα υπόκειται σε πράξεις αντιστροφής χρόνου και μετατόπισης. Ως εκ τούτου, το σήμα θα είναι μη μηδενικό στο $[t-t_4, t-t_3]$. Στη διαδικασία της συνέλιξης, το γινόμενο $x(\tau)y(t-\tau)$ είναι μη μηδενικό για $t-t_3 \geq t_1$ και $t-t_4 \leq t_2$, δηλ. στο διάστημα $[t_1+t_3, t_2+t_4]$.

7.5.1.7 Ουδέτερο στοιχείο

Είναι

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(\tau)\Big|_{\tau=t} = x(t) \quad (7.70)$$

από ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα.



Σχήμα 7.5: Γραφική απόδειξη της ιδιότητας του εύρους.

Η συνέλιξη φημίζεται ως μια πράξη αρκετά περίπλοκη και δύσκολη, και σε πρώτη επαφή αποθαρρύνει τον αναγνώστη. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη της ολοκλήρωσης εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί ανάκλαση και μετατόπιση.

7.5.2 Η συνέλιξη αναλυτικά

Ας αναλύσουμε διεξοδικά τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (7.71)$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το τ και όχι το t . Το t το θεωρούμε σταθερό μέσα στο ολοκλήρωμα. Έπειτα, το ολοκλήρωμα αυτό εμπλέκει δυο σήματα: το $x(\tau)$ και το $y(t-\tau)$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα $x(t)$, δεν έχει υποστεί κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη πράξεων στην ανεξάρτητη μεταβλητή: *ανάκλαση και μετατόπιση*. Μια ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

$$y(t) \rightarrow y(\tau) \rightarrow y(-\tau) \rightarrow y(-\tau+t) = y(t-\tau) \quad (7.72)$$

Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση κατά t* . Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x(\tau)$ και ολοκληρώνεται ως προς τ . Το αποτέλεσμα της συνέλιξης μπορεί να βρεθεί με δυο τρόπους: *αλγεβρικά και γραφικά*. Συνήθως προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 7.6.

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x(t)$ και το $y(t)$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y(t)$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε σύμφωνα με τον ορισμό.
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του τ και όχι του t , όπως ακριβώς επιτάσσει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, και το $y(\tau)$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά t . Θυμίζουμε ότι αυτό το t το χειριζόμαστε ως σταθερά στο ολοκλήρωμα. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y(\tau)$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.
- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y(t-\tau)$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το “ολισθαίνουμε” πάνω στον ίδιο άξονα με το $x(\tau)$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι το $y(\tau)$ “συναντά” κάποια στιγμή το $x(\tau)$. Όταν συμβεί αυτό, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα έχουμε μια μη μηδενική τιμή για το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Αυτές οι χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξιό “άκρο” του $y(t-\tau)$ συναντά το αριστερό “άκρο” του $x(\tau)$ και πέρα, και όταν το αριστερό “άκρο” του $y(t-\tau)$ δεν έχει περάσει το $t=0$, δηλ. όταν

$$t-1 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1 \text{ και } t-4 \leq 0 \Rightarrow t \leq 4 \quad (7.73)$$

οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $t-1$, εκεί δηλαδή που το γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων είναι μη μηδενικό, ως

$$c_{xy}(t) = \int_0^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (7.74)$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Στην πέμπτη γραμμή, το $y(t-\tau)$ έχει μπει ολόκληρο μέσα στο $x(\tau)$, πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη είναι μη μηδενική όταν το αριστερό “άκρο” της $y(t-\tau)$ περάσει το $t=0$, δηλ. όταν

$$t-4 > 0 \Rightarrow t > 4 \quad (7.75)$$

και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (7.76)$$

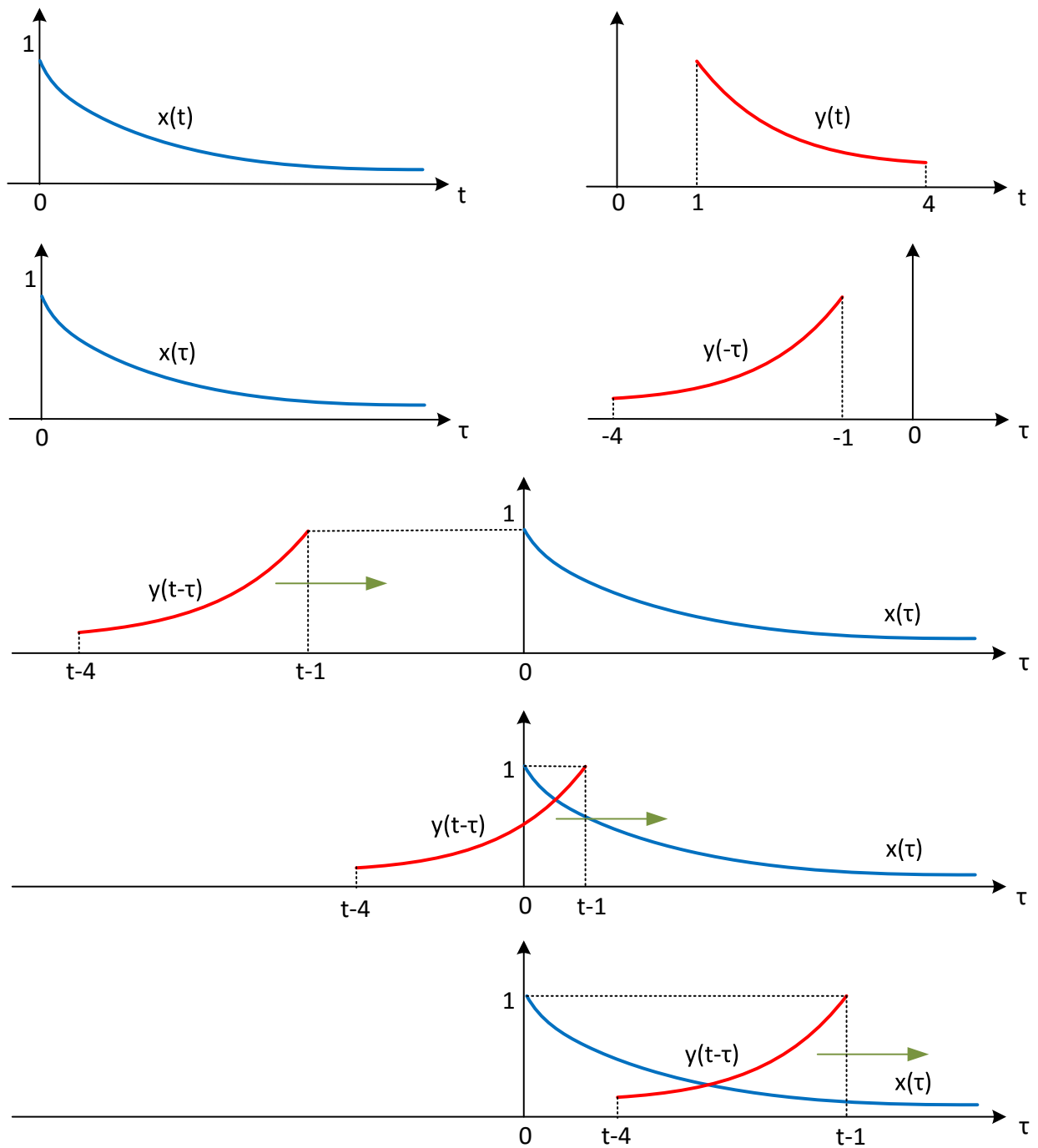
όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο t εκτός από τα παραπάνω, το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι μηδέν, άρα

$$c_{xy}(t) = 0, \quad t < 1 \quad (7.77)$$

Τώρα που η διαδικασία είναι περισσότερο ξεκάθαρη, ας θεωρήσουμε ότι τα παραπάνω σήματα είναι τα

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad (7.78)$$



Σχήμα 7.6: Γραφική απεικόνιση της συνέλιξης.

$$y(t) = e^{-bt}, \quad t \in [1, 4] \quad (7.79)$$

Οπότε θα έχουμε

- Όταν $t - 1 \leq 0 \iff t \leq 1$, τότε $c_{xy}(t) = 0$.
- Όταν $t - 1 > 0$ και $t - 4 \leq 0$, δηλ. όταν $0 < t \leq 4$, τότε

$$c_{xy}(t) = \int_0^{t-1} e^{-a\tau} e^{-b(t-\tau)} d\tau \quad (7.80)$$

$$= e^{-bt} \int_0^{t-1} e^{(b-a)\tau} d\tau \quad (7.81)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} e^{(b-a)\tau} \Big|_0^{t-1} \quad (7.82)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)} - 1) \quad (7.83)$$

$$= \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)-bt} - e^{-bt}) \quad (7.84)$$

- Τέλος, όταν $t - 4 > 0$, δηλ. $t > 4$, τότε

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^{t-1} e^{-a\tau} e^{-b(t-\tau)} d\tau \quad (7.85)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} e^{(b-a)\tau} \Big|_{t-4}^{t-1} \quad (7.86)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-4)} - e^{(b-a)(t-1)}) \quad (7.87)$$

$$= \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-4)-bt} - e^{(b-a)(t-1)-bt}) \quad (7.88)$$

Μπορούμε λοιπόν να συνοψίσουμε την παραπάνω γραφική λύση της συνέλιξης ως ακολούθως:

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων $x(t)$ και $y(t)$

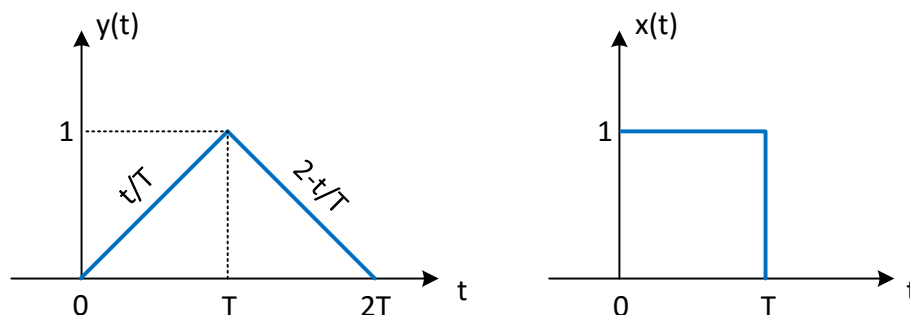
1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x(t)$, το οποίο και μετατρέπουμε σε $x(\tau)$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x(t - \tau)$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς τ , και “σύρουμε” το $x(t - \tau)$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα “συνυπάρχουν”, δηλ. όπου το γινόμενο $x(t - \tau)y(\tau)$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

7.5.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Πολύ χρήσιμα είναι τα ακόλουθα παραδείγματα, τα οποία θα σας βοηθήσουμε να κατανοήσετε ακόμα περισσότερο την πράξη της συνέλιξης.

Παράδειγμα 7.7:

Έστω τα σήματα του Σχήματος 7.7.

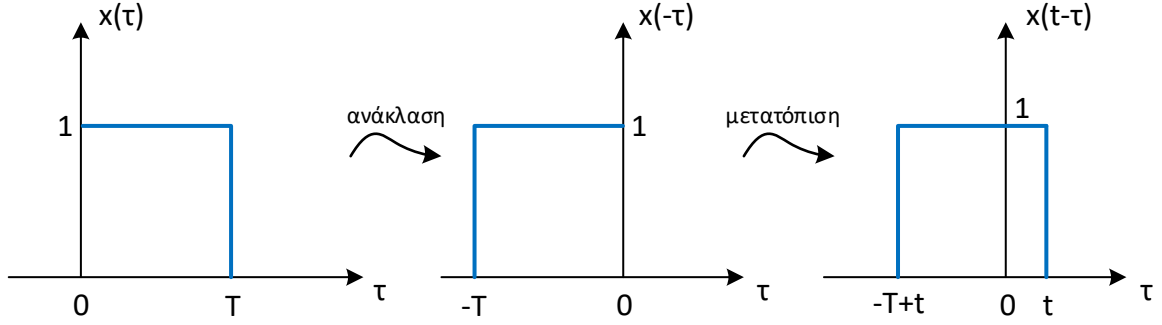


Σχήμα 7.7: Σήματα Παραδείγματος 7.7.

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * y(t)$.

Λύση:

Επιλέγουμε να κάνουμε πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του $x(t)$, καθ' ότι ευκολότερο. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο Σχήμα 7.8. και άρα θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις, όπως αυτές



Σχήμα 7.8: Μετατόπιση και ανάκλαση σήματος $x(t)$.

απεικονίζονται στο Σχήμα 7.9.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι $y(t) = 0, t \leq 0$.
- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$y(t) = \int_0^t \frac{\tau}{T} d\tau = \left. \frac{\tau^2}{2T} \right|_0^t = \frac{t^2}{2T} \quad (7.89)$$

για $t > 0$ και $t - T \leq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq T$.

- Για την τρίτη περίπτωση είναι

$$y(t) = \int_{t-T}^t \frac{\tau}{T} d\tau + \int_T^t \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2} \quad (7.90)$$

για $t - T \leq T$ και $t > T \Leftrightarrow T < t \leq 2T$.

- Για την τέταρτη περίπτωση είναι

$$y(t) = \int_{t-T}^{2T} \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = \left(2\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right) \Big|_{t-T}^{2T} = \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2} \quad (7.91)$$

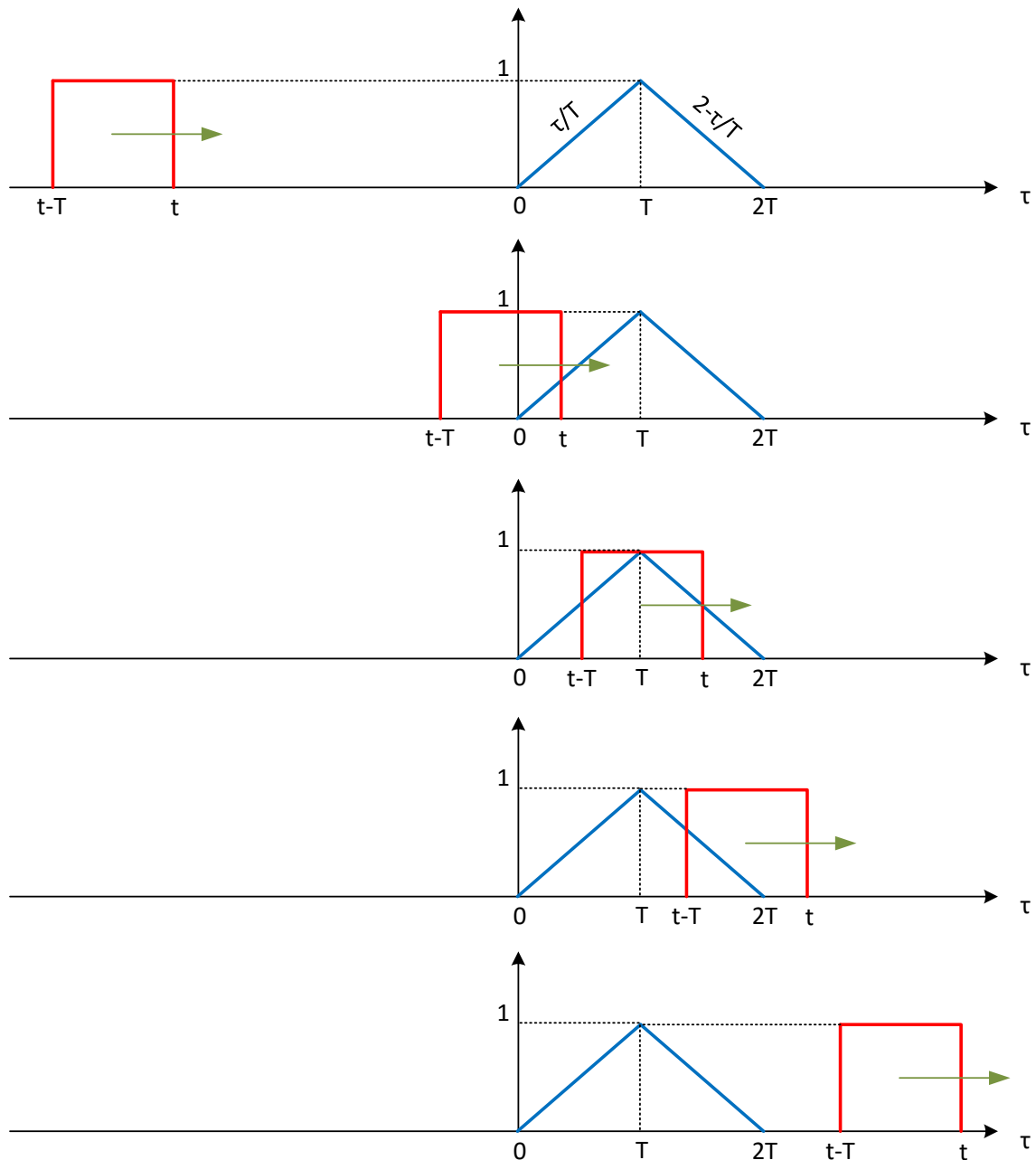
για $t \leq 3T$ και $t > 2T \Leftrightarrow 2T < t \leq 3T$.

- Για την πέμπτη περίπτωση είναι $y(t) = 0, t > 3T$.

Άρα τελικά θα είναι:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \text{ και } t > 3T \\ \frac{t^2}{2T}, & 0 < t \leq T \\ -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}, & T < t \leq 2T \\ \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}, & 2T < t \leq 3T \end{cases} \quad (7.92)$$

■



Σχήμα 7.9: Περιπτώσεις Συνέλιξης Παραδείγματος 7.7.

Παράδειγμα 7.8:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = u(t) \quad (7.93)$$

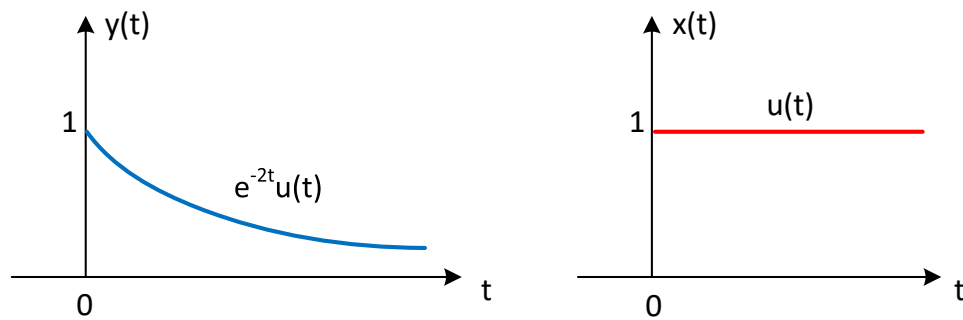
$$y(t) = e^{-2t}u(t) \quad (7.94)$$

Λύση:

Τα δύο σήματα φαίνονται στο Σχήμα 7.10. Το $x(t)$ είναι πιο κατάλληλο για να υποστεί τις μεταβολές που είναι απαραίτητες στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 7.11.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι $c_{xy}(t) = 0$ για $t \leq 0$.

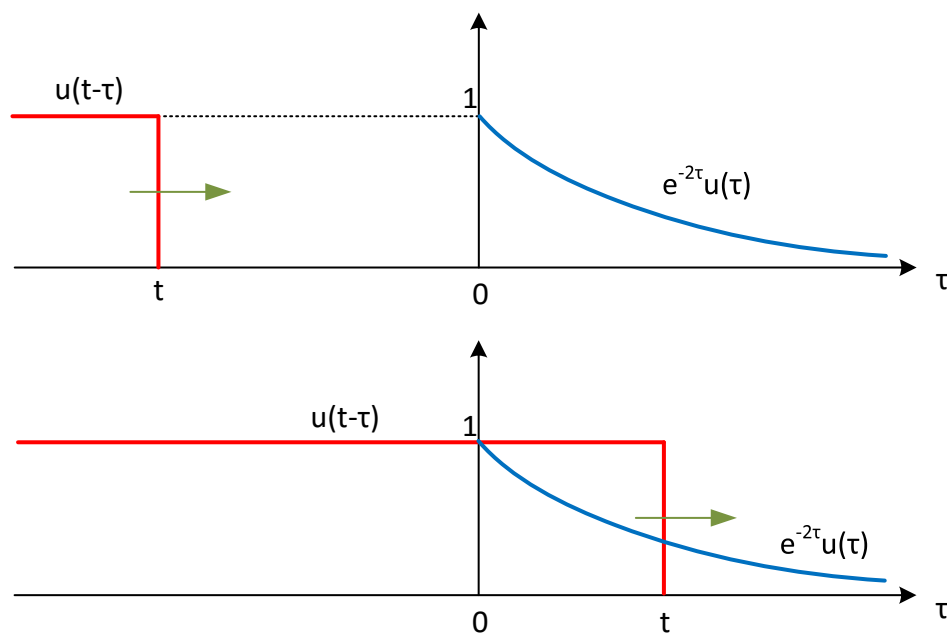


Σχήμα 7.10: Σήματα Παραδείγματος 7.8.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \frac{1-e^{-2t}}{2} \quad (7.95)$$

για $t > 0$.



Σχήμα 7.11: Περιπτώσεις Παραδείγματος 7.8.

Άρα τελικά θα είναι

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-2t}}{2}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (7.96)$$

Το παράδειγμα αυτό είναι εξαιρετικό για να δείξουμε την αλγεβρική μέθοδο υπολογισμού της συνέλιξης. Θα είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (7.97)$$

Ο όρος

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.98)$$

αφού

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.99)$$

και

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.100)$$

Η Σχέση (7.97) γράφεται ως

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2} e^{-2\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}), \quad \text{για } t > 0 \quad (7.101)$$

Οπότε

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) u(t) \quad (7.102)$$

■

Παράδειγμα 7.9:

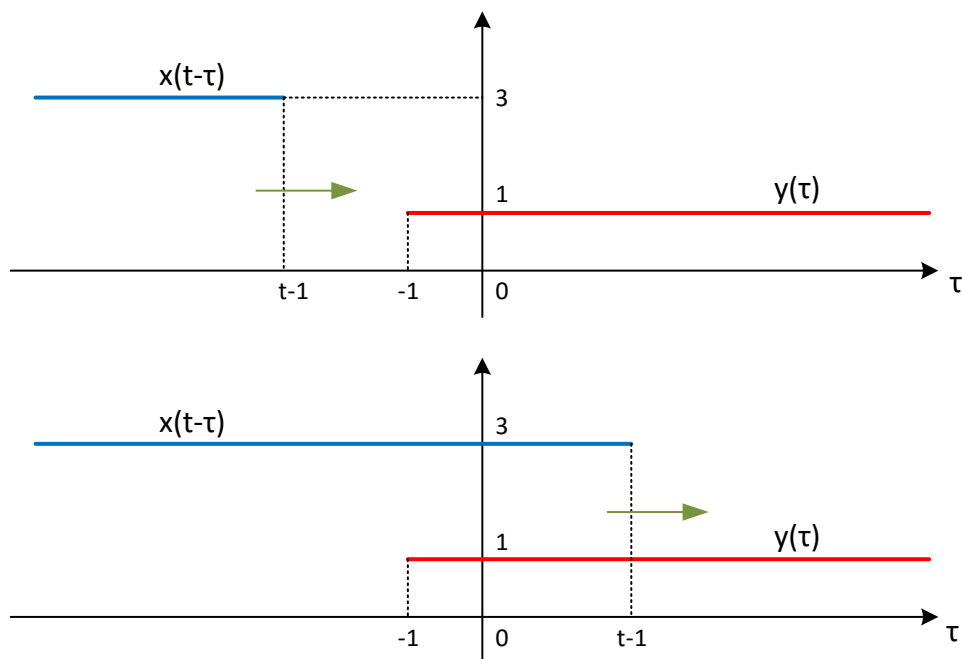
Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = 3u(t - 1) \quad (7.103)$$

$$y(t) = u(t + 1) \quad (7.104)$$

Λύση:

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 7.12. Θα είναι



Σχήμα 7.12: Περιπτώσεις Παραδείγματος 7.9.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = 0 \quad (7.105)$$

$$\text{για } t - 1 \leq -1 \iff t \leq 0.$$

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 3u(t-\tau-1)u(t+1)d\tau \quad (7.106)$$

$$= \int_{-1}^{t-1} 3d\tau = 3t \Big]_{-1}^{t-1} = 3(t-1) + 3 = 3t \quad (7.107)$$

για $t-1 > -1 \iff t > 0$, αφού

$$3u(t-\tau-1)u(t+1) = \begin{cases} 1, & -1 < \tau < t-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.108)$$

Άρα συνολικά

$$c_{xy} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 3t, & t > 0 \end{cases} \quad (7.109)$$

■

Παράδειγμα 7.10:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = 2e^{-3t}u(t-1) \quad (7.110)$$

$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t+2}{2}\right) \quad (7.111)$$

Λύση:

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 7.13. Θα είναι

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = 0 \quad (7.112)$$

για $t+3 \leq 1 \iff t \leq -2$.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_1^{t+3} 2e^{-3\tau}d\tau \quad (7.113)$$

$$= -\frac{2}{3}e^{-3\tau} \Big]_1^{t+3} = -\frac{2}{3}(e^{-3(t+3)} - e^{-3}) \quad (7.114)$$

$$= -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3} \quad (7.115)$$

για $t+1 \leq 1$ και $t+3 > 1$, άρα $-2 < t \leq 0$.

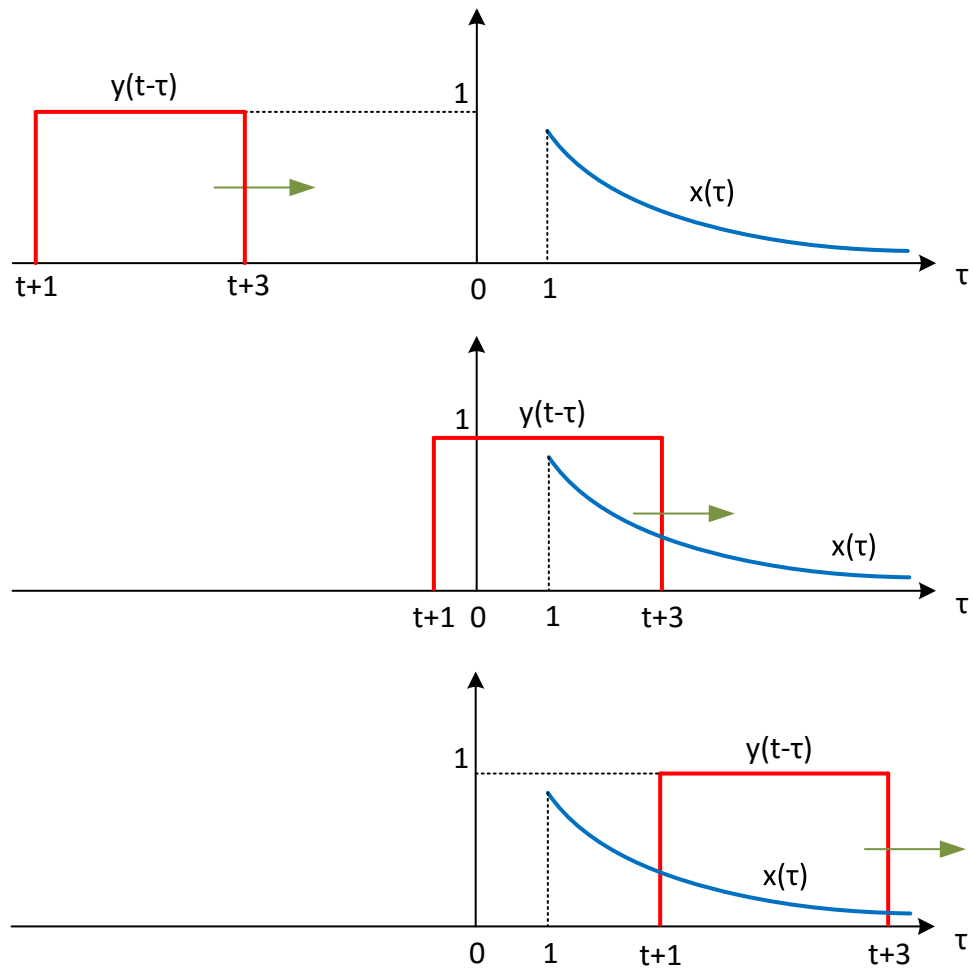
- Για την τρίτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{t+1}^{t+3} 2e^{-3\tau}d\tau \quad (7.116)$$

$$= -\frac{2}{3}e^{-3\tau} \Big]_{t+1}^{t+3} = -\frac{2}{3}(e^{-3(t+3)} - e^{-3(t+1)}) \quad (7.117)$$

$$= -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3(t+1)} \quad (7.118)$$

για $t+1 > 1 \iff t > 0$.



Σχήμα 7.13: Περιπτώσεις Παραδείγματος 7.10.

Άρα συνολικά

$$c_{xy} = \begin{cases} 0, & t \leq -2 \\ -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3}, & -2 < t \leq 0 \\ -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3(t+1)}, & t > 0 \end{cases} \quad (7.119)$$

■

Παράδειγμα 7.11:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = e^{-2|t|} \quad (7.120)$$

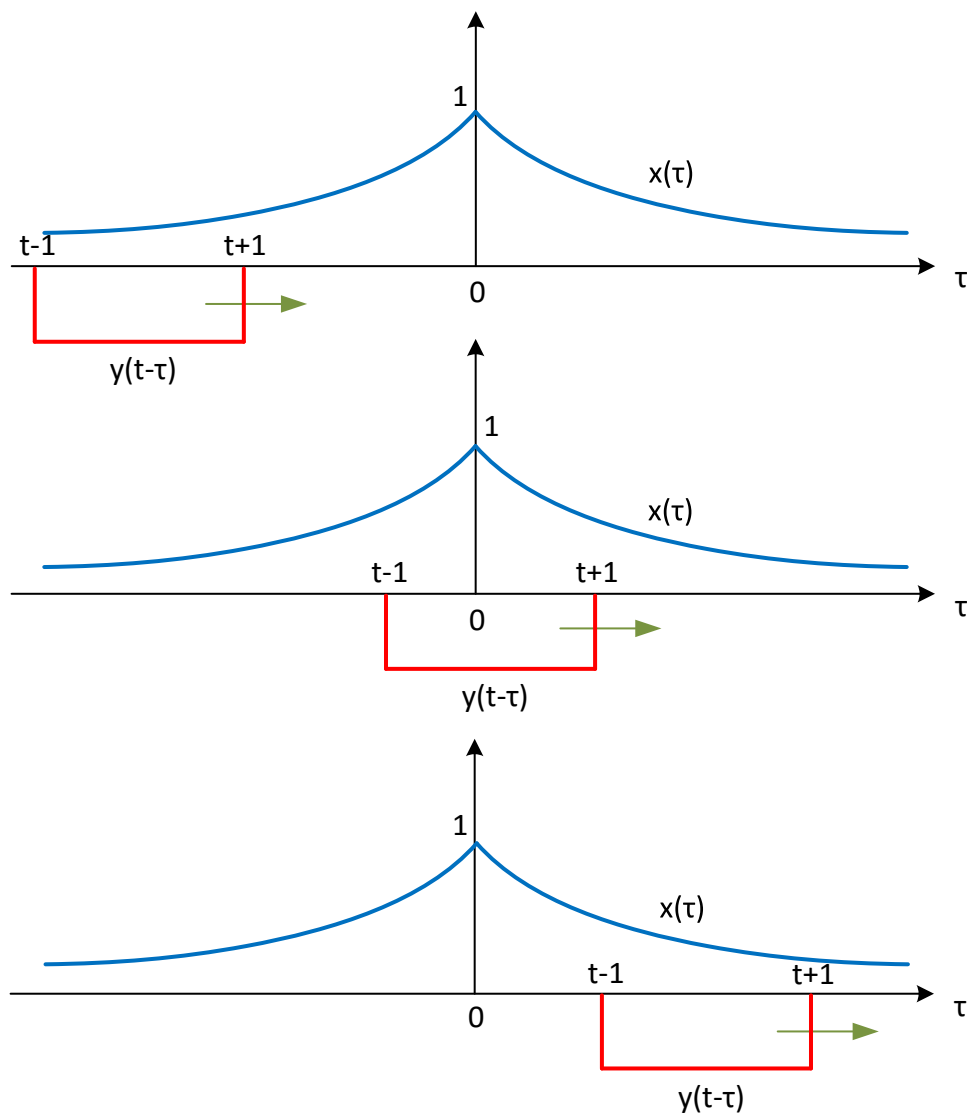
$$y(t) = -\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \quad (7.121)$$

Λύση:

Αρχικά, θα ήταν βολικό να γράψουμε το σήμα $x(t) = e^{-2|t|}$ ως

$$x(t) = \begin{cases} e^{2t}, & t < 0 \\ e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (7.122)$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 7.14. Θα είναι



Σχήμα 7.14: Περιπτώσεις Παραδείγματος 7.11.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = - \int_{t-1}^{t+1} e^{2\tau} d\tau \quad (7.123)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{2\tau} \Big|_{t-1}^{t+1} = \frac{1}{2}(e^{2(t-1)} - e^{2(t+1)}) \quad (7.124)$$

για $t+1 \leq 0 \iff t \leq -1$.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = - \int_{t-1}^{t+1} e^{-2|\tau|} d\tau \quad (7.125)$$

$$= - \int_{t-1}^0 e^{2\tau} d\tau - \int_0^{t+1} e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2}e^{2\tau} \Big|_{t-1}^0 + \frac{1}{2}e^{-2\tau} \Big|_0^{t+1} \quad (7.126)$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - e^{2(t-1)}) + \frac{1}{2}(e^{-2(t+1)} - 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t+1)} - \frac{1}{2} \quad (7.127)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t+1)} - 1 \quad (7.128)$$

για $t - 1 < 0$ και $t + 1 > 0$, δηλ. $-1 < t < 1$.

- Για την τρίτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = - \int_{t-1}^{t+1} e^{-2|\tau|}d\tau \quad (7.129)$$

$$= - \int_{t-1}^{t+1} e^{-2\tau}d\tau = \frac{1}{2}e^{-2\tau} \Big|_{t-1}^{t+1} \quad (7.130)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-2(t+1)} - e^{-2(t-1)}) \quad (7.131)$$

για $t - 1 \geq 0$, δηλ. $t \geq 1$.

Άρα συνολικά

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{2(-1)} - e^{2(t+1)}), & t \leq -1 \\ \frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t+1)} - 1, & -1 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}(e^{-2(t+1)} - e^{-2(t-1)}), & t \geq 1 \end{cases} \quad (7.132)$$

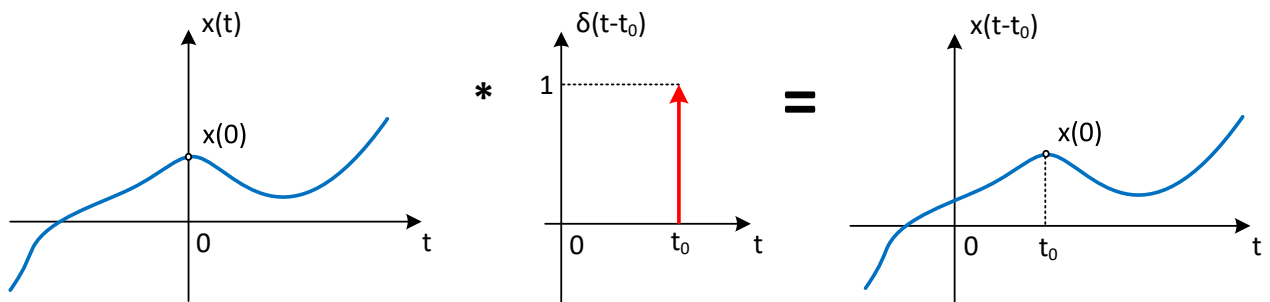
■

7.5.4 Συνέλιξη και Συναρτήσεις Δέλτα

Η ιδιότητα

$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = x(t \pm t_0) \quad (7.133)$$

όπου $*$ δηλώνει την πράξη της συνέλιξης είναι πολύ χρήσιμη στη μελέτη συστημάτων. Η Σχέση (7.133) δηλώνει ότι όταν κάνουμε συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται στη χρονική στιγμή $t = \pm t_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x(t)$ μετατοπισμένο στη θέση $t = \pm t_0$! Θα δούμε πιο κάτω ότι αυτή η ιδιότητα μας διευκολύνει πάρα πολύ, όταν έχουμε να κάνουμε με συστήματα. Σχηματικά, δείτε το Σχήμα (7.15). Μπορούμε προς το παρόν να δούμε ένα παράδειγμα που θα μας βοηθήσει να δούμε πως δουλεύει αυτή η πράξη και



Σχήμα 7.15: Συνέλιξη σήματος με συνάρτησης Δέλτα.

πως διαφέρει η συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα με τον πολλαπλασιασμό του με την ίδια συνάρτηση.

Παράδειγμα 7.12:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} -1, & t = -4 \\ 1, & t = 0 \\ -1, & t = 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.134)$$

(α') Σχεδιάστε το σήμα στο χρόνο.

(β') Γράψτε το σήμα ως άθροισμα Συναρτήσεων Δέλτα $\delta(t)$.

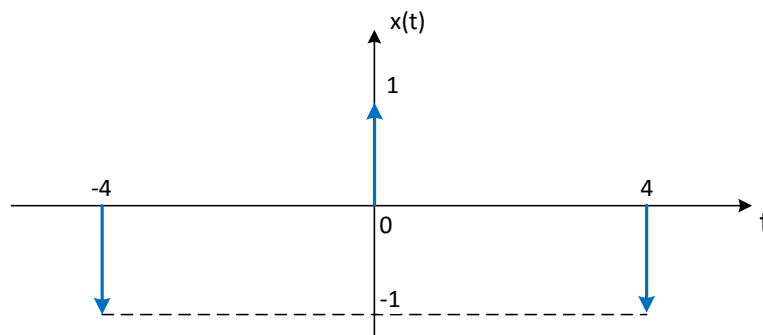
(γ') Πολλαπλασιάζουμε το $x(t)$ με το σήμα $y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$. Σχεδιάστε το αποτέλεσμα.

(δ') Κάνουμε συνέλιξη το $x(t)$ με το σήμα $y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$. Σχεδιάστε πρώτα τα σήματα που προκύπτουν και μετά γράψτε μια βολική μαθηματική σχέση που περιγράφει το αποτέλεσμα.

(ε') Ποιός είναι ο γενικός κανόνας που προκύπτει από τα δυο παραπάνω ερωτήματα; Δηλ. τι συμβαίνει σε ένα σήμα όταν πολλαπλασιάζεται με μια συνάρτηση Δέλτα, και τι συμβαίνει όταν γίνεται συνέλιξη με μια Συνάρτηση Δέλτα;

Λύση:

(α') Το σήμα στο χρόνο φαίνεται στο Σχήμα 7.16.



Σχήμα 7.16: Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: σήμα στο χρόνο.

(β') Είναι

$$x(t) = -\delta(t+4) + \delta(t) - \delta(t-4) \quad (7.135)$$

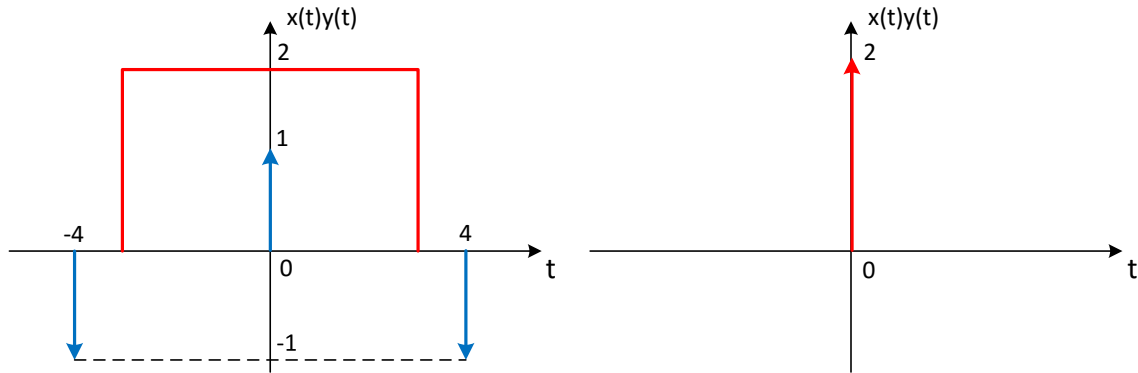
(γ') Το γινόμενο των δυο σημάτων είναι

$$x(t) \cdot y(t) = x(t) \cdot 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) \cdot \left(-\delta(t+4) + \delta(t) - \delta(t-4)\right) = 2\delta(t) = \begin{cases} 2, & t = 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.136)$$

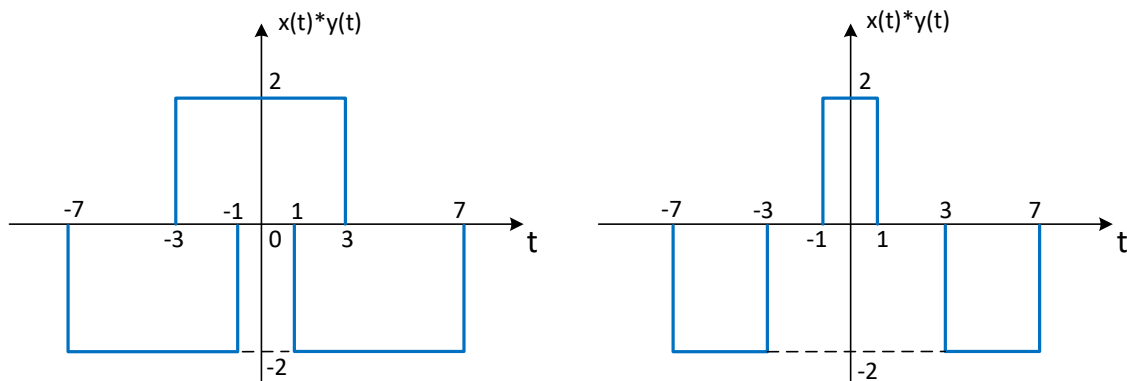
και φαίνεται στο Σχήμα 7.17.

(δ') Η συνέλιξη των σημάτων είναι

$$x(t) * y(t) = x(t) * 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) = -2\text{rect}\left(\frac{t+4}{6}\right) + 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-4}{6}\right) \quad (7.137)$$



Σχήμα 7.17: Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: γινόμενο σημάτων.



Σχήμα 7.18: Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: συνέλιξη σημάτων.

και φαίνεται στο Σχήμα 7.18 αριστερά. Παρατηρώντας το, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$x(t) * y(t) = -2\text{rect}\left(\frac{t+5}{4}\right) + 2\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-5}{4}\right) \quad (7.138)$$

και φαίνεται στο Σχήμα 7.18 δεξιά.

- (ε') Ο γενικός κανόνας είναι ότι το γινόμενο σήματος με Συνάρτηση Δέλτα δίνει μια Συνάρτηση Δέλτα με πλάτος το πλάτος του σήματος στη θέση της Συνάρτησης Δέλτα. Η συνέλιξη σήματος με Συνάρτηση Δέλτα μετατοπίζει τη θέση αναφοράς του σήματος από το μηδέν στη θέση t_0 , αν $\delta(t - t_0)$ είναι η Συνάρτηση Δέλτα η οποία εμπλέκεται στη συνέλιξη. ■

7.5.5 Πίνακας Συνέλιξης

Η διαδικασία της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από έτοιμους πίνακες συνέλιξης, όπως ο Πίνακας 7.2. Αυτός ο πίνακας, που αναφέρει διάφορα ζεύγη σημάτων και το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους, μπορεί να σας βοηθήσει στον έλεγχο των αποτελεσμάτων σας.

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις με βάση όσα έχουμε συζητήσει ως τώρα.

Παρατηρήσεις

(α') Όπως βλέπετε, είναι πολύ σημαντικό να μπορείτε να υπολογίσετε σωστά το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του ολοκληρώματος. Οι πράξεις στο ολοκλήρωμα είναι συνήθως αρκετά απλές.

(β') Όπως είδαμε, η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει δηλ. ότι

$$c_{fg}(t) = f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = c_{gf}(t) \quad (7.139)$$

Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης		
$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{x(t) * y(t)}$
$x(t)$	$\delta(t - T)$	$x(t - T)$
$e^{at}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1 - e^{at}}{-a}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}u(t), a \neq b$
$e^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$te^{at}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}u(t)$
$t^n u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{n!e^{at}}{a^{n+1}}u(t) - \sum_{j=0}^n \frac{n!t^{n-j}}{a^{j+1}(n-j)!}u(t)$
$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{bt} - e^{at} + (a-b)te^{at}}{(a-b)^2}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{at}u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{at}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{bt}u(t)$	$\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j m!(n+j)!t^{m-j}e^{at}}{j!(m-j)!(a-b)^{n+j+1}}u(t)$
		$+ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!(m+k)!t^{n-k}e^{bt}}{k!(n-k)!(b-a)^{m+k+1}}u(t), a \neq b$
$e^{at} \cos(bt + \theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta - \phi)e^{\lambda t} - e^{-at} \cos(bt + \theta - \phi)}{\sqrt{(a+\lambda)^2 + b^2}}u(t),$ $\phi = \tan^{-1} \frac{-b}{a+\lambda}$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}u(t) + e^{bt}u(-t)}{b-a}, \Re\{b\} > \Re\{a\}$
$e^{at}u(-t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{b-a}u(-t)$

Πίνακας 7.2: Πίνακας ζευγών συνελιξέων

Αυτό σημαίνει ότι αν κάναμε πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του $f(t)$ αντί για του $g(t)$, θα είχαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

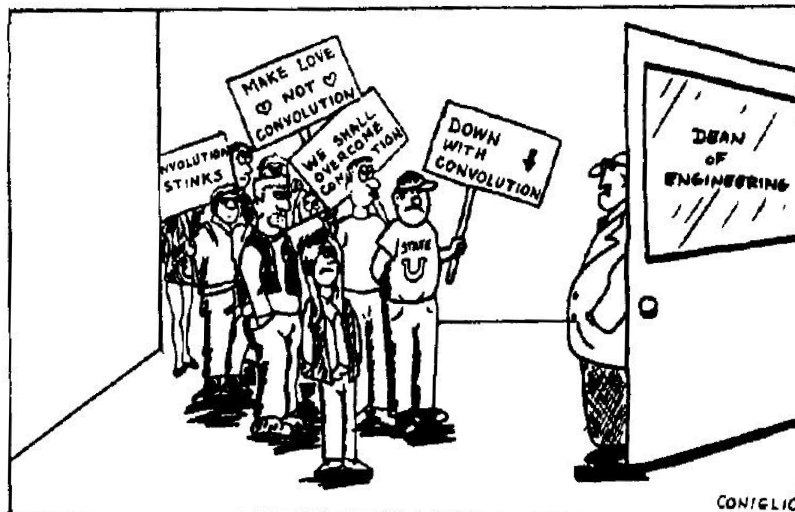
- (γ') Προτιμούμε να ανακλάσουμε και μετατοπίσουμε το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδικασία υπολογισμού της συνέλιξης. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.
- (δ') Χρήσιμη ιδιότητα, η οποία αναφέρεται στον Πίνακα 7.1, για πεπερασμένης διάρκειας σήματα είναι η εξής: αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[a, b]$ και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[c, d]$, τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα $[a+c, b+d]$. Γνωρίζοντας αυτό, μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας. Για παράδειγμα, αν στο Σχήμα 7.6, είχαμε συνέλιξη της $y(t)$ με τον εαυτό της, δηλ. $c_{yy}(t) = y(t) * y(t)$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μη μηδενικό στο διάστημα $[2, 8]$.
- (ε') Στη βιβλιογραφία, θα βρείτε τον ορισμό της συνέλιξης με διαφορετικές μεταβλητές. Π.χ.

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (7.140)$$

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau-t)dt \quad (7.141)$$

Και οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι σωστές. Απλά αλλάξαμε τις μεταβλητές t, τ μεταξύ τους. Διαλέξτε όποια σας βολεύει, αρκεί να είστε συνεπείς και προσεκτικοί. Στα παραδείγματα αλλά και γενικότερα, προτιμούμε την πρώτη σχέση.

- (ε') Η γραφική επίλυση που συζητήσαμε εδώ φαίνεται εκ πρώτης όψης περίπλοκη. Πράγματι, κάποιои ισχυρίζονται ότι η συνέλιξη έχει οδηγήσει πολλούς προπτυχιακούς σε τμήματα Μηχανικών Η/Υ να ενστερνιστούν τη Θεολογία, είτε για σωτηρία ψυχής είτε ως εναλλακτική καριέρα!! (δείτε το περιοδικό IEEE Spectrum, Μάρτιος 1991, σελ. 60).



Σχήμα 7.19: Πολύς κόσμος έχει ταλαιπωρηθεί από τη συνέλιξη...

7.6 Ευστάθεια Συστήματος

Ας αναφερθούμε τώρα αναλυτικότερα σε μια έννοια η οποία είναι πολύ σημαντική, αυτή της *ευστάθειας* ενός συστήματος. Ένα σύστημα λέγεται *ευσταθές* αν

$$|x(t)| < M_x \implies |y(t)| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathbb{R} \quad (7.142)$$

και ονομάζουμε αυτού του είδους την ευστάθεια ως Bounded-Input-Bounded-Output (BIBO)-ευστάθεια.

Αν η είσοδος είναι μη μηδενική και απολύτως φραγμένη

$$|x(t)| < M_x < +\infty \quad (7.143)$$

η ευστάθεια συνεπάγεται αν

$$|y(t)| = |x(t) * h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| \quad (7.144)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)h(t-\tau)|d\tau \quad (7.145)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau \quad (7.146)$$

$$\leq M_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau \not\rightarrow +\infty \quad (7.147)$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau < +\infty \quad (7.148)$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < +\infty \quad (7.149)$$

Άρα, ένα σύστημα που περιγράφεται από την χρονική απόκριση $h(t)$ είναι ευσταθές αν η τελευταία είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το σύστημα είναι ασταθές.

Εν κατακλείδει:

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

Η ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος δεδομένης μιας οποιασδήποτε απολύτως φραγμένης εισόδου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την χρονική του απόκριση $h(t)$, η οποία πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

Ας συζητήσουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις επάνω στο ζήτημα της ευσταθείας.

Παρατηρήσεις

- (α') Σε ένα ευσταθές σύστημα, μια απολύτως φραγμένη είσοδος παράγει πάντα μια απολύτως φραγμένη έξοδο. Όμως, μπορεί κανείς να δείξει ότι σε ένα ασταθές ή οριακά ευσταθές σύστημα, η έξοδος του μπορεί να είναι μη απολύτως φραγμένη, ακόμα κι αν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη! Σκεφτείτε για παράδειγμα το ΓΧΑ σύστημα με χρονική απόκριση $h(t) = u(t)$. Για είσοδο $x(t) = u(t)$, η οποία είναι απολύτως φραγμένη από τη μονάδα, έχουμε έξοδο $y(t) = tu(t)$, η οποία δεν είναι απολύτως φραγμένη.
- (β') Όπως μπορείτε να καταλάβετε, ένα ασταθές σύστημα δεν έχει και τόσο χρησιμότητα στην πράξη - κάθε σύστημα που υλοποιούμε σε υλικό ή λογισμικό πρέπει να είναι ευσταθές. Σκεφτείτε για παράδειγμα ένα απλό, "κακοφτιαγμένο" ηχείο, το οποίο δέχεται είσοδο από ένα μικρόφωνο. Αν το σύστημα ήταν ασταθές, τότε οποιαδήποτε και όσοδήποτε μικρή είσοδος από το μικρόφωνο, θα παρήγαγε σύντομα μια έξοδο (ήχο) υπερβολικά μεγάλης τιμής με πολύ δυσάρεστα - το λιγότερο! - αποτελέσματα.
- (γ') Τα παραπάνω όμως δε σημαίνουν ότι δεν μπορούν να προκύψουν ασταθή συστήματα στην πράξη. Για παράδειγμα, η θεωρία του Αυτομάτου Ελέγχου προσπαθεί να ελέγξει τη συμπεριφορά πραγματικών συστημάτων "διορθώνοντας" τυχούσες αστάθειες που φυσιολογικά προκύπτουν κατά τη λειτουργία τους. Για παράδειγμα, αν θέλουμε ένα αεροσκάφος να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη πορεία, με συγκεκριμένο υψόμετρο και ταχύτητα, ανεξάρτητα από τις πιθανές ροές ανέμων του περιβάλλοντος που προκαλούν αστάθειες στη συμπεριφορά του, θα πρέπει να έχουμε ένα μηχανισμό ελέγχου της ευσταθείας του συστήματος.

7.7 Αιτιατότητα Συστήματος

Τα **αιτιατά** συστήματα είναι αυτά για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου **δεν** απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 2x(t-1) + \sin(x(t)) \quad (7.150)$$

είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα

$$y(t) = x(t-2)^2 + 4x(t+4) \quad (7.151)$$

είναι μη αιτιατό, επειδή για τον υπολογισμό του $y(t)$ απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου, η $x(t+4)$.

Πιο περιγραφικά, ένα **αιτιατό** σύστημα είναι ένα σύστημα το οποίο δεν παράγει κάποια έξοδο προτού εφαρμοστεί σε αυτό μια είσοδος. Αν το σύστημα παράγει έξοδο πριν την είσοδο, σημαίνει ότι το σύστημα γνωρίζει τη μελλοντική είσοδο και παράγει έξοδο βάσει αυτής της γνώσης, και άρα είναι μη αιτιατό.

Προφανώς, κάθε σύστημα υλοποιήσιμο σε πραγματικό χρόνο πρέπει να είναι αιτιατό. Οπότε κάποιος θα μπορούσε να θέσει το ερώτημα “γιατί να μελετήσει κανείς τότε ένα μη αιτιατό σύστημα;” Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έχει - τουλάχιστον - τρεις συνιστώσες:

1. Ένα μη αιτιατό σύστημα απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να παράξει έξοδο. Αν όμως η είσοδος είναι διαθέσιμη σε κάποιον αποθηκευτικό χώρο (μνήμη), τότε το σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί, αφού οι μελλοντικές τιμές της εισόδου είναι διαθέσιμες. Αυτό σημαίνει ότι τα μη αιτιατά συστήματα είναι μεν πραγματοποιήσιμα, αλλά όχι σε πραγματικό χρόνο. Παρ’ όλα αυτά, η χρησιμότητά τους είναι μεγάλη, καθώς υπάρχουν πολλές εφαρμογές (επεξεργασία φωνής, ήχου, εικόνas, γεωφυσική, μετεωρολογία, ανάλυση βιοσημάτων) όπου η είσοδος υπάρχει ολόκληρη διαθέσιμη σε μια π.χ. βάση δεδομένων.
2. Ένα μη αιτιατό σύστημα μπορεί να κάνει πράγματα που ένα αιτιατό σύστημα δεν μπορεί. Για παράδειγμα, στα πρότυπα συμπίεσης εικόνας και ήχου (MP3, JPEG, MPEG κλπ), η υψηλή συμπίεση επιτυγχάνεται επειδή ο αλγόριθμος συμπίεσης (ο οποίος αποτελεί το σύστημα) γνωρίζει μελλοντική πληροφορία της εισόδου (ήχος, εικόνα, βίντεο), την οποία χρησιμοποιεί για να αυξήσει την επίδοσή του (συμπιεσμένη έξοδος).
3. Τα μη αιτιατά συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως το άνω όριο των επιδόσεων αιτιατών συστημάτων. Όπως θα δούμε αρκετά αργότερα, ένα αιτιατό *φίλτρο* (δηλ. ένα σύστημα που επιλέγει την “ποσότητα” του σήματος εισόδου που θα περάσει στην έξοδο) εισάγει πάντα *παραμόρφωση* στο σήμα εισόδου του, μεταβάλλοντάς το με ανεπιθύμητο (αλλά ελεγχόμενο) τρόπο. Όμως, ένα μη αιτιατό *φίλτρο* μπορεί να σχεδιαστεί έτσι ώστε να εισάγει μηδενική ανεπιθύμητη παραμόρφωση στο σήμα εξόδου του.

Η αιτιατότητα είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα ενός συστήματος, ειδικά αν το σύστημα προορίζεται να υλοποιηθεί σε πραγματικό χρόνο. Ασφαλώς, όλα τα φυσικά συστήματα είναι αιτιατά εξ’ ορισμού, διότι αποκρίνονται μόνον αν “διεγερθούν”: οι ζωντανοί οργανισμοί, ο καιρός, τα μουσικά όργανα, κλπ³. Ένα αιτιατό σύστημα λοιπόν δεν πρέπει να αποκρίνεται αν δε διεγείρεται, ή με άλλα λόγια, δεν πρέπει να παράγει έξοδο αν δεν του παρασχεθεί μια είσοδος.

Καθαρά μαθηματικά, αν ένα σύστημα για δυο εισόδους $x_1(t)$ και $x_2(t)$ παράγει δυο εξόδους $y_1(t)$ και $y_2(t)$, τότε αυτό είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t < t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t < t_0 \quad (7.152)$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τις συνθήκες αιτιατότητας για ένα σύστημα ως εξής:

Αιτιατότητα Συστήματος

Ένα σύστημα είναι αιτιατό αν βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**, δηλ.

$$\begin{aligned} \text{αν } x(t) &= 0, \quad t < t_0 \\ \text{τότε } y(t) &= 0, \quad t < t_0 \end{aligned} \quad (7.153)$$

που μπορεί να ειπωθεί χαρακτηριστικά ως “no input, no output”. ©

Όμως μπορούμε άραγε για ένα ΓΧΑ σύστημα να βρούμε μια σχέση αιτιατότητας και χρονιστικής απόκρισης, όπως κάναμε για την ευστάθεια; Η απάντηση είναι ναι! Σκεφτείτε ότι αν ένα σύστημα είναι ΓΧΑ και εμφανιστεί

³Φανταστείτε να είχατε ένα σύστημα που η έξοδός του ήταν οι τιμές των μετοχών της αυριανής μέρας! Προφανώς θα ήταν μη αιτιατό....

στην είσοδό του η συνάρτηση Δέλτα, τότε γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα είναι η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος. Η είσοδος όμως εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, και δεν υπήρξε πιο πριν. Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν $h(t) = 0, t < 0$.

Οπότε:

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος και Κρουστική Απόκριση

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \quad (7.154)$$

Κεφάλαιο 8

Ανάλυση Συστημάτων στο Πεδίο της Συχνότητας

8.1 Εισαγωγή

Ως τώρα συζητήσαμε για σήματα στο χώρο της συχνότητας. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γνωρίσουμε την οπτική των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας. Θα δούμε τι παραπάνω μπορεί να μας προσφέρει αυτή η οπτική σε σχέση με όσα γνωρίζουμε από το χώρο του χρόνου και πώς μπορούμε να την εκμεταλλευτούμε σε πραγματικά προβλήματα, ενώ θα συστηθούμε με πραγματικές (ή κοντά στις πραγματικές ☺) και πολύ γνωστές σας εφαρμογές που καταδεικνύουν τη χρησιμότητα του πεδίου της συχνότητας.

8.2 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Ας υποθέσουμε ότι δυο ανταγωνιστικοί ραδιοφωνικοί σταθμοί θέλουν να εκπέμψουν το πρόγραμμά τους. Γνωρίζουμε ότι το ανθρώπινο αυτί μπορεί να ακούσει συχνότητες από 20 ως 20.000 Hz. Παρ' ότι η ανθρώπινη φωνή παράγει σημαντικές συχνότητες από 70 ως περίπου 14.000 Hz, κάποια μουσικά όργανα παράγουν αρμονικές συχνότητες εκτός αυτού του διαστήματος, οπότε ας υποθέσουμε ότι το φάσμα του σήματος πληροφορίας (δηλ. της εκπομπής που μεταδίδεται) είναι μη μηδενικό στο διάστημα [20, 20.000] Hz, το οποίο και αποτελεί το ακουστικό φάσμα του ανθρώπινου αυτιού.

Ένα πρώτο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι σταθμοί είναι η πρακτική υλοποίηση της κεραίας εκπομπής. Η Θεωρία Κεραίων μας πληροφορεί ότι το μήκος μιας κεραίας εκπομπής πρέπει να είναι ανάλογο του μήκους κύματος της πληροφορίας λ που μεταδίδεται. Γνωρίζουμε ότι

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (8.1)$$

με c την ταχύτητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος (σταθερή και ίση με 3×10^8 m/s) και f τη συχνότητα του σήματος πληροφορίας. Στην περίπτωση της μετάδοσης ραδιοφωνικού προγράμματος, η συχνότητα f δεν είναι ούτε μοναδική ούτε σταθερή με την πάροδο του χρόνου. Ας πάρουμε όμως τις δυο ακραίες συχνότητες που μεταδίδουν οι σταθμοί, δηλ. $f_{min} = 20$ Hz και $f_{max} = 20.000$ Hz. Το μήκος κύματός τους είναι

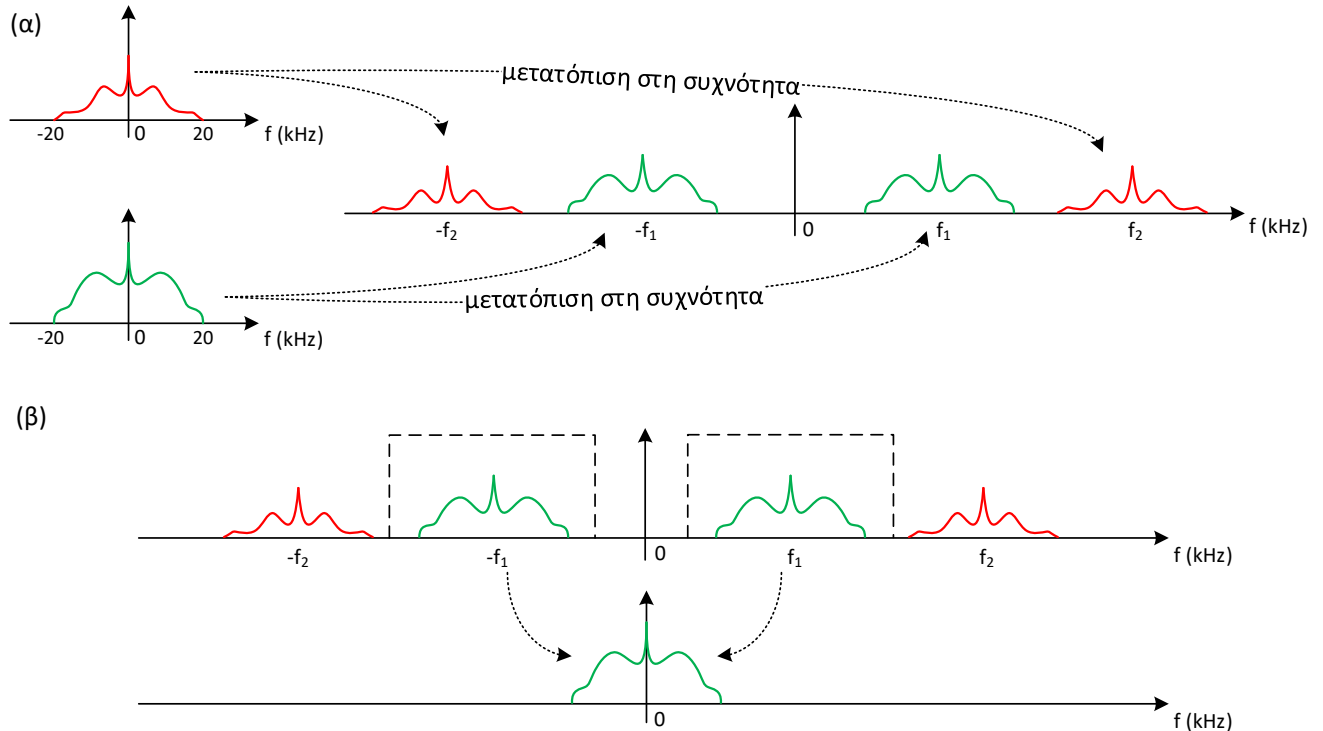
$$\lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}} = \frac{3 \times 10^8}{20 \times 10^3} = 1.5 \times 10^4 \text{ m} \quad (8.2)$$

$$\lambda_{max} = \frac{c}{f_{min}} = \frac{3 \times 10^8}{20} = 1.5 \times 10^7 \text{ m} \quad (8.3)$$

Παρατηρήστε πόσο μη πρακτικά είναι αυτά τα μεγέθη! Αν υποθέσουμε ότι το μέγεθος της κεραίας πρέπει να είναι περίπου το 1/10 του μήκους κύματος που εκπέμπεται, τότε η κεραία πρέπει να έχει μέγεθος ίσο με 1.5×10^6 m, δηλ. 1500 χιλιόμετρα, για να μεταδώσει ένα απλό ημίτονο στα 20 Hz!

Ακόμα κι αν αυτό το πρόβλημα δεν ήταν - που είναι! - σημαντικό, υπάρχει ένα δεύτερο πρόβλημα! - οι σταθμοί εκπέμψουν στην ίδια περιοχή συχνοτήτων, αφού αμφότεροι εκπέμψουν φωνή και μουσική και άρα καταλαμβάνουν και οι δυο το εύρος φάσματος μεταξύ 20 Hz και 20.000 Hz. Μπορούμε να λύσουμε και τα δυο αυτά προβλήματα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα του μετασχ. Fourier, “στέλνοντας” το σήμα πληροφορίας σε συχνότητες αρκετά μεγάλες ώστε η κατασκευή της κεραίας να καθίσταται πρακτική, αλλά και το

φασματικό περιεχόμενο των δυο εκπομπών να μην καταλαμβάνει το ίδιο εύρος συχνοτήτων. Μια τέτοια διαδικασία ονομάζεται **Διαμόρφωση - Modulation**. Ασφαλώς όμως θα θέλαμε κάποια συστήματα τα οποία να μπορούν να απομονώνουν το επιθυμητό σήμα πληροφορίας και να το μεταφέρουν στη “φυσική” του ζώνη συχνοτήτων ώστε αυτό να είναι αντιληπτό από τον ακροατή. Η αντίστροφη αυτή διαδικασία ονομάζεται **Αποδιαμόρφωση - Demodulation**. Μια απλουστευμένη απεικόνιση των δυο αυτών διαδικασιών φαίνεται στο Σχήμα 8.1. Τέτοια



Σχήμα 8.1: (α) Διαμόρφωση και (β) Αποδιαμόρφωση σήματος.

συστήματα - κι ακόμη περισσότερα - θα συζητήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

8.3 Συστήματα στο χώρο της συχνότητας

Ως τώρα περιγράφαμε τα συστήματα είτε ως μια σχέση εισόδου-εξόδου $y(t) = T\{x(t)\}$, είτε μέσω της κρουστικής τους απόκρισης $h(t)$, η οποία είχε θεμελιώδη ρόλο. Πλέον έχουμε ένα ισχυρό εργαλείο ανάλυσης σημάτων στο χώρο της συχνότητας, τον μετασχ. Fourier, ο οποίος είδαμε ότι αναλύει ένα σήμα σε ένα άπειρο άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων της μορφής $e^{j2\pi ft}$. Ας δούμε τι συμβαίνει στα συστήματα, όταν αυτά εξετάζονται από την οπτική της συχνότητας. Θα εξετάσουμε γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα (ΓΧΑ) αποκλειστικά.

8.3.1 Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ Συστήματος

Αν υποθέσουμε ότι στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$, εφαρμόζουμε ένα εκθετικό μιγαδικό σήμα $e^{j2\pi f_0 t}$, τότε η έξοδος του συστήματος δίδεται από την πράξη της συνέλιξης, και είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi f_0(t-\tau)} d\tau = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau = H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} \quad (8.4)$$

με το $H(f_0)$ να είναι η τιμή του μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ για $f = f_0$. Πώς ερμηνεύεται αυτή η σχέση; Παρατηρήστε ότι όταν φέρουμε ως είσοδο ένα οποιοδήποτε μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας f_0 σε ένα ΓΧΑ σύστημα, το αποτέλεσμα που θα πάρουμε στην έξοδό μας θα είναι το ίδιο σήμα της εισόδου, πολλαπλασιασμένο με το μετασχ. Fourier του συστήματος, στη συχνότητα f_0 .

Σε μαθηματική ορολογία, η μιγαδική εκθετική συνάρτηση συχνότητας f_0 αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** του ΓΧΑ συστήματος. Υπενθυμίζεται ότι η μαθηματική περιγραφή $h(t)$ του συστήματος λέγεται **κρουστική απόκριση**, και αποτελεί την έξοδο του συστήματος, όταν στην είσοδό του εμφανίζεται μια συνάρτηση Δέλτα.

8.3.2 Απόκριση σε Συχνότητα

Ο μετασχ. Fourier της, $H(f)$, όντας τόσο σημαντικός στην ανάλυση των συστημάτων, δε θα μπορούσε να μην έχει δικό του όνομα: λέγεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνοτική απόκριση**, ενώ η ανάλυσή της σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H(f)} \quad (8.5)$$

μας ονομάζει το φάσμα πλάτους της, $|H(f)|$, ως **απόκριση πλάτους** και το φάσμα φάσης της, $\phi_H(f)$, ως **απόκριση φάσης**.

Όμως ένα από τα σημαντικότερα πορίσματα της Ανάλυσης Fourier είναι ότι η *συνέλιξη στο χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα*, και το αντίστροφο (Πίνακας 6.1). Άρα η σχέση της συνέλιξης που περιγράφει την έξοδο ενός συστήματος στο πεδίο του χρόνου

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (8.6)$$

μπορεί να γραφεί στο πεδίο της συχνότητας ως:

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (8.7)$$

Τι σημαίνει η σχέση αυτή για το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης της εισόδου $X(f)$; Αν χρησιμοποιήσουμε την πολική μορφή, θα έχουμε

$$|Y(f)|e^{j\phi_Y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_X(f)}|H(f)|e^{j\phi_H(f)} \quad (8.8)$$

που οδηγεί στις σχέσεις

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)| \quad (8.9)$$

$$\phi_Y(f) = \phi_X(f) + \phi_H(f) \quad (8.10)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι *πολύ σημαντικές* διότι μας πληροφορούν ότι

- Το φάσμα πλάτους της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεν είναι άλλο από το *γινόμενο* των επιμέρους φασμάτων πλάτους, της εισόδου και του συστήματος. Άρα, η απόκριση πλάτους του συστήματος δρα *πολλαπλασιαστικά* στο φάσμα πλάτους της εισόδου.
- Το φάσμα φάσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεν είναι άλλο από το *άθροισμα* των επιμέρους φασμάτων φάσης, της εισόδου και του συστήματος. Άρα, η απόκριση φάσης του συστήματος δρα *αθροιστικά* στο φάσμα φάσης της εισόδου.

Τα παραπάνω δυο σημεία ισχύουν ανεξαρτήτως της φύσης του σήματος εισόδου (περιοδικό ή μη, ενέργειας ή ισχύος).

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα της απόκρισης σε συχνότητα των ΓΧΑ συστημάτων είναι ότι αν το $h(t)$ είναι πραγματικό, η απόκριση σε συχνότητα είναι *συζυγής συμμετρική* συνάρτηση της συχνότητας:

$$H(f) = H^*(-f) \quad (8.11)$$

που συνεπάγεται ότι το πραγματικό της μέρος είναι άρτια συνάρτηση του f , και το φανταστικό είναι περιττή συνάρτηση του f , δηλ.

$$H_R(f) = H_R(-f) \quad (8.12)$$

$$H_I(f) = -H_I(-f) \quad (8.13)$$

Όμοια, το πλάτος της απόκρισης σε συχνότητα είναι άρτια συνάρτηση του f και η φάση είναι περιττή συνάρτηση του f , δηλ.

$$|H(f)| = |H(-f)| \quad (8.14)$$

$$\phi(f) = -\phi(-f) \quad (8.15)$$

Τα παραπάνω δεν πρέπει να σας εκπλήσσουν καθώς είναι γνωστές ιδιότητες πραγματικών σημάτων στο χώρο της συχνότητας.

8.3.3 ΓΧΑ Συστήματα με Είσοδο Περιοδικά Σήματα

Ας αρχίσουμε τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων με περιοδική είσοδο. Το αποτέλεσμα της Σχέσης (8.4) είναι σημαντικό, γιατί αν φέρουμε ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$, με ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (8.16)$$

η έξοδος $y(t)$ του συστήματος είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (8.17)$$

Βλέπετε ότι το μόνο που αλλάζει είναι οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier: από X_k γίνονται $H(kf_0)X_k$, όπου, επαναλαμβάνουμε, το $H(kf_0)$ είναι η τιμή της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$ του συστήματος για $f = kf_0$. Αυτομάτως, η παραπάνω σχέση μας λέει ότι ένα άθροισμα ημιτόνων που θα εμφανιστεί στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος, θα παραμείνει άθροισμα ημιτόνων στην έξοδο, ίδιων συχνοτήτων αλλά με διαφορετικά πλάτη και φάσεις!

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.1:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με χρονική απόκριση

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) \quad (8.18)$$

και στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 4 \cos(t + \pi/2) \quad (8.19)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$. Τι παρατηρείτε;

Λύση:

Θα είναι, από τον Πίνακα 6.2

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) \longleftrightarrow H(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} \quad (8.20)$$

Το σύστημα γράφεται ως

$$H(f) = |H(f)|e^{j \tan^{-1} \frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}}} \quad (8.21)$$

Άρα το πλάτος θα είναι

$$|H(f)| = \frac{2}{|1 + j2\pi f|} = \frac{2}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2}} \quad (8.22)$$

ενώ για τη φάση θα έχουμε

$$H(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} = \frac{2(1 - j2\pi f)}{(1 + j2\pi f)(1 - j2\pi f)} = \frac{2(1 - j2\pi f)}{|1 + j2\pi f|^2} = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2} - j \frac{4\pi f}{1 + (2\pi f)^2} \quad (8.23)$$

$$= \Re\{H(f)\} + j\Im\{H(f)\} \quad (8.24)$$

δηλαδή

$$\phi(f) = \tan^{-1} \frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}} = \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{4\pi f}{1 + (2\pi f)^2}}{\frac{2}{1 + (2\pi f)^2}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{2\pi f}{1} \right) = -\tan^{-1}(2\pi f) \quad (8.25)$$

λόγω του ότι η αντίστροφη εφαπτομένη είναι περιττή συνάρτηση. Όμως η είσοδος είναι της μορφής

$$x(t) = 4 \cos(t + \pi/2) = 2e^{jt}e^{j\pi/2} + 2e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (8.26)$$

δηλ. έχει συχνότητες $\pm 1/2\pi$. Γνωρίζουμε ότι οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του ΓΧΑ συστήματος, και έτσι, δεδομένου ότι το σύστημα είναι πραγματικό (περιγράφεται από μια χρονική απόκριση

που αποτελεί πραγματικό σήμα), η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = 2H\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H\left(-\frac{1}{2\pi}\right)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (8.27)$$

$$= 2H\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H^*\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (8.28)$$

$$= \left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{j\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}e^{jt}e^{j\pi/2} + \left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{-j\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (8.29)$$

$$= 2\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{j\left(t+\pi/2+\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right)} + 2\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{-j\left(t+\pi/2+\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right)} \quad (8.30)$$

$$= 4\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|\cos\left(t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (8.31)$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (8.32)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος είναι πάλι ημιτονοειδής μορφή, όπως η είσοδος, και έχει επηρεαστεί από το σύστημα τόσο στο πλάτος της (πλάτος εισόδου 4, πλάτος εξόδου $4\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|$), όσο και στη φάση της (φάση εισόδου $\pi/2$, φάση εξόδου $\pi/2 + \phi\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$).

Γενικότερα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

Εύρεση εξόδου σε ΓΧΑ σύστημα με περιοδική είσοδο

1. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}e^{j(2\pi\mathbf{f}_0 t + \theta)}$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{H}(\mathbf{f}_0)e^{j(2\pi\mathbf{f}_0 t + \theta)}$, όπου $\mathbf{H}(\mathbf{f}) = |\mathbf{H}(\mathbf{f})|e^{j\phi(\mathbf{f})}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.
2. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\cos(2\pi\mathbf{f}_0 t + \theta)$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}|\mathbf{H}(\mathbf{f}_0)|\cos(2\pi\mathbf{f}_0 t + \theta + \phi(\mathbf{f}_0))$, όπου $\mathbf{H}(\mathbf{f}) = |\mathbf{H}(\mathbf{f})|e^{j\phi(\mathbf{f})}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

Προφανώς το παραπάνω μπορεί να γενικευτεί για αθροισμα ημιτόνων ή μιγαδικών εκθετικών ως:

3. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k e^{j(2\pi\mathbf{f}_k t + \theta_k)}$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k \mathbf{H}(\mathbf{f}_k) e^{j(2\pi\mathbf{f}_k t + \theta_k)}$, όπου $\mathbf{H}(\mathbf{f}) = |\mathbf{H}(\mathbf{f})|e^{j\phi(\mathbf{f})}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

4. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k \cos(2\pi\mathbf{f}_k t + \theta_k)$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k |\mathbf{H}(\mathbf{f}_k)| \cos(2\pi\mathbf{f}_k t + \theta_k + \phi(\mathbf{f}_k))$, όπου $\mathbf{H}(\mathbf{f}) = |\mathbf{H}(\mathbf{f})|e^{j\phi(\mathbf{f})}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

8.3.4 ΓΧΑ Συστήματα με Είσοδο Μη Περιοδικά Σήματα

Πιο γενικά όμως, και για οποιαδήποτε σήματα (όχι απαραίτητα περιοδικά), η σχέση που συνδέει την είσοδο $x(t)$ με την έξοδο $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος $h(t)$ εκφράζεται μέσω της πράξης της συνέλιξης:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (8.33)$$

η οποία μετατρέπεται στο χώρο της συχνότητας ως

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (8.34)$$

Μπορούμε λοιπόν πολύ εύκολα να βρούμε την έξοδο ενός συστήματος στο χώρο της συχνότητας, και να επιστρέψουμε στο χώρο του χρόνου με χρήση του αντίστροφου μετασχ. Fourier.

Επιπλέον, η παραπάνω σχέση επιτρέπει σε ένα σύστημα $h(t)$ με απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ να υπολογιστεί στο χώρο των συχνοτήτων, και μάλιστα πολύ πιο εύκολα απ' ό,τι στο χώρο του χρόνου! Πώς; Προφανώς από τη σχέση

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (8.35)$$

που έχουμε ήδη δει. Βλέπετε ότι, εν γένει, η απόκριση σε συχνότητα είναι μια ρητή συνάρτηση της συχνότητας f . Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{N(f)}{D(f)} \quad (8.36)$$

όπου $N(f), D(f)$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$, με όποιες απλοποιήσεις μπορεί να γίνουν στο κλάσμα. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μικρότερα κλάσματα μέσα από μια απλή διαδικασία που λέγεται “Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα”¹. Εν συντομία, το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μια τέτοια ρητή συνάρτηση, εν γένει, μπορεί να γραφεί ως

$$H(f) = \frac{N(f)}{D(f)} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} \quad (8.37)$$

στην απλή περίπτωση που οι ρίζες του παρονομαστή $D(f)$ είναι απλές. Έχοντας την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα και σύμφωνα με τον Πίνακα 6.2 των ζευγών μετασχ. Fourier, μπορούμε να βρούμε την χρονική απόκριση $h(t)$, ως

$$H(f) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^M A_k e^{-\alpha_k t} u(t) \quad (8.38)$$

Φυσικά η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί και η είσοδος $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, αφού και το $X(f)$ εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση:

$$X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} \quad (8.39)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα πάνω σε αυτά, που είναι πολύ σημαντικά.

Παράδειγμα 8.2:

Έστω το σύστημα

$$h(t) = e^{-3t} u(t) \quad (8.40)$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{-t} u(t) + e^{-2t} u(t) \quad (8.41)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος $y(t)$.

Λύση:

Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον γνωστό τρόπο του ολοκληρώματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, συμβουλευόμενοι τον Πίνακα 6.2, έχουμε ότι

$$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(f) = X(f)H(f) = \left(\frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} \right) \frac{1}{3+j2\pi f} \quad (8.42)$$

$$= \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)} + \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)} \quad (8.43)$$

$$= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{3+j2\pi f} + \frac{C}{2+j2\pi f} + \frac{D}{3+j2\pi f} \quad (8.44)$$

και στο πεδίο του χρόνου θα είναι

$$y(t) = Ae^{-t} u(t) + (B+D)e^{-3t} u(t) + Ce^{-2t} u(t) \quad (8.45)$$

¹Η οποία περιγράφεται στην Παράγραφο 2.5 του Κεφαλαίου Υποβάθρου.

με

$$A = \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(1+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{2}{(3+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-1} = 1 \quad (8.46)$$

$$B = \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(3+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-3} = \frac{2}{(1+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-3} = -1 \quad (8.47)$$

$$C = \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(2+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-2} = \frac{1}{(3+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-2} = 1 \quad (8.48)$$

$$D = \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(3+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-3} = \frac{1}{(2+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-3} = -1 \quad (8.49)$$

και άρα

$$y(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (8.50)$$

Ας υπολογίσουμε το ίδιο με εφαρμογή του ορισμού της συνέλιξης. Έτσι, θα έχουμε:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (8.51)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (2e^{-\tau}u(\tau) + e^{-2\tau}u(\tau))e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \quad (8.52)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \quad (8.53)$$

Ισχύει ότι

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (8.54)$$

Άρα

$$y(t) = \int_0^t 2e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau = \int_0^t 2e^{-\tau-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau-3(t-\tau)}d\tau \quad (8.55)$$

$$= \int_0^t 2e^{2\tau-3t}d\tau + \int_0^t e^{\tau-3t}d\tau = 2e^{-3t} \int_0^t e^{2\tau}d\tau + e^{-3t} \int_0^t e^{\tau}d\tau \quad (8.56)$$

$$= e^{-3t}e^{2\tau} \Big|_0^t + e^{-3t}e^{\tau} \Big|_0^t = e^{-3t}(e^{2t}-1) + e^{-3t}(e^t-1) \quad (8.57)$$

$$= e^{-t} - e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-3t} = e^{-t} - 2e^{-3t} + e^{-2t}, \quad 0 < t \quad (8.58)$$

$$= e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (8.59)$$

που είναι η ίδια ακριβώς σχέση με τη Σχέση (8.49)! Διαλέξτε τι προτιμάτε. ☺

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την είσοδο $x(t)$, αν μας δίνεται το σύστημα και η έξοδος του. Δείτε:

Παράδειγμα 8.3:

Έστω ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f} \quad (8.60)$$

Στην είσοδό του, βρίσκεται ένα σήμα $x(t)$, το οποίο δίνει έξοδο

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \quad (8.61)$$

Βρείτε την είσοδο, $x(t)$.

Λύση:

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$y(t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f} \quad (8.62)$$

Προφανώς ισχύει

$$Y(f) = H(f)X(f) \iff X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} = \frac{\frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}}{\frac{1}{3+j2\pi f}} = \frac{\frac{1}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}}{\frac{1}{3+j2\pi f}} \quad (8.63)$$

$$= \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)} = \frac{A}{2+j2\pi f} + \frac{B}{1+j2\pi f} \quad (8.64)$$

και το οποίο δίνει το σήμα στο χρόνο

$$x(t) = Ae^{-2t}u(t) + Be^{-t}u(t) \quad (8.65)$$

με

$$A = \left. \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}(2+j2\pi f) \right|_{j2\pi f=-2} = \left. \frac{3+j2\pi f}{(1+j2\pi f)} \right|_{j2\pi f=-2} = -1 \quad (8.66)$$

$$B = \left. \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}(1+j2\pi f) \right|_{j2\pi f=-1} = \left. \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)} \right|_{j2\pi f=-1} = 2 \quad (8.67)$$

και άρα τελικά η είσοδος θα είναι

$$x(t) = -e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) \quad (8.68)$$

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος για μη περιοδική είσοδο

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $\mathbf{h}(t) \longleftrightarrow \mathbf{H}(f)$ είναι της μορφής

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k e^{-\mathbf{a}_k t} u(t) \longleftrightarrow \mathbf{X}(f) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k \frac{1}{\mathbf{a}_k + j2\pi f}$$

τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως $\mathbf{Y}(f) = \mathbf{H}(f)\mathbf{X}(f)$, και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί η έξοδος $\mathbf{y}(t)$.

8.3.5 ΓΧΑ Συστήματα με Συναρτήσεις Δέλτα

Πολλά συστήματα (ή και σήματα) εκφράζονται ως ένα απλό άθροισμα Συναρτήσεων Δέλτα. Αυτή η περίπτωση είναι η πιο εύκολη, καθώς μπορούμε να δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, αντί αυτού της συχνότητας, εκμεταλλευόμενοι την παρακάτω ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα:

$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = x(t \pm t_0) \quad (8.69)$$

Επαναλαμβάνουμε, ερμηνεύοντας την παραπάνω σχέση, ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = \pm t_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x(t)$ μετατοπισμένο στη θέση $t = \pm t_0$!

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.4:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με χρονική απόκριση

$$h(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1) \quad (8.70)$$

Στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{2t}u(-t) \quad (8.71)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Λύση:

Ας δούμε και τις δυο λύσεις (χρόνος και συχνότητα).

- Θα έχουμε

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) = 2e^{2t}u(-t) * (2\delta(t) - \delta(t-1)) \quad (8.72)$$

$$= 2e^{2t}u(-t) * 2\delta(t) - 2e^{2t}u(-t) * \delta(t-1) \quad (8.73)$$

$$= 4e^{2t}u(-t) - 2e^{2(t-1)}u(-(t-1)) \quad (8.74)$$

$$= 4e^{2t}u(-t) - 2e^{2(t-1)}u(-t+1) \quad (8.75)$$

- Στο χώρο της συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο, και μέσω μετασχ. Fourier και ιδιοτήτων, θα είναι

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{2}{2-j2\pi f}(2 - e^{-j2\pi f}) \quad (8.76)$$

$$= \frac{4}{2-j2\pi f} - \frac{2}{2-j2\pi f}e^{-j2\pi f} \quad (8.77)$$

και από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier, η έξοδος στο χρόνο θα είναι

$$y(t) = 4e^{2t}u(-t) - 2e^{2(t-1)}u(-(t-1)) \quad (8.78)$$

$$= 4e^{2t}u(-t) - 2e^{2(t-1)}u(-t+1) \quad (8.79)$$

Παράδειγμα 8.5:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1) \quad (8.80)$$

Στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) \quad (8.81)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Λύση:

- Από τους Πίνακες, έχουμε

$$H(f) = e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f} \quad (8.82)$$

και

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f} \quad (8.83)$$

Είναι

$$Y(f) = H(f)X(f) = 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}(e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}) \quad (8.84)$$

$$= 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}e^{j2\pi f} - 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}e^{-j2\pi f} \quad (8.85)$$

$$= 2T\text{sinc}(fT)e^{-j2\pi f} - 2T\text{sinc}(fT)e^{-j6\pi f} \quad (8.86)$$

και

$$y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-1}{T}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-3}{T}\right) \quad (8.87)$$

- Είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * (\delta(t+1) - \delta(t-1)) \quad (8.88)$$

$$= 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * \delta(t+1) - 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * \delta(t-1) \quad (8.89)$$

$$= 2\text{rect}\left(\frac{t-2+1}{T}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-2-1}{T}\right) \quad (8.90)$$

$$= 2\text{rect}\left(\frac{t-1}{T}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-3}{T}\right) \quad (8.91)$$

από την ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (8.92)$$

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα δε θα άλλαζε τίποτα αν οι συναρτήσεις Δέλτα αποτελούσαν την είσοδο του συστήματος (αντί το ίδιο το σύστημα), και οι είσοδοι $x(t)$ αποτελούσαν τις χρονιστικές αποκρίσεις των συστημάτων.

Παρατηρήσεις

1. Για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, αν σας βολεύει. Το πώς θα καταλαβαίνετε ποιός τρόπος είναι πιο εύκολος ή σύντομος, απαιτεί εμπειρία. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι αρχικά εμφανές κάτι τέτοιο, και αναγκαστικά δουλεύετε όπως νομίζετε εσείς, μέχρι να επιβεβαιωθείτε ή να διαψευστείτε.
2. Υπενθυμίζεται ότι το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα εφαρμόζεται *μόνον* όταν η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερη από αυτή του παρονομαστή. Στα παραπάνω παραδείγματα, αυτό ήταν αληθές. Σε περίπτωση που δεν είναι, πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων.
3. Στην ανάλυση των παραπάνω συστημάτων, υποθέσαμε ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει, αφού χρησιμοποιήσαμε τα σύμβολα και τις ιδιότητές του. Αυτό είναι αρκετά περιοριστικό, διότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να μην υπάρχει για κάποια σήματα ή συστήματα που εμφανίζονται στην πράξη. Θέλουμε λοιπόν έναν ακόμα πιο γενικό μετασχηματισμό που θα μπορεί να περιγράψει συχνοτικά και μη ευσταθή σήματα! Θα δούμε σύντομα έναν τέτοιο μετασχηματισμό που άρει αυτές τις δυσκολίες.