

Κεφάλαιο 12

Δειγματοληψία

12.1 Εισαγωγή

Οι περισσότερες μετρήσιμες φυσικές διαδικασίες που συμβαίνουν στον κόσμο μας είναι συνεχούς χρόνου, και συνήθως αναλογικές. Από την ηλιακή ακτινοβολία, την ανθρώπινη φωνή, τον ήχο μιας λύρας, τα σεισμικά κύματα, ως μια φωτογραφία, το χτύπο της καρδιάς, και τα εγκεφαλικά κύματα, όλα αυτά είναι σήματα συνεχούς χρόνου.

Ο όρος αυτός έχει την έννοια της συνεχούς συνάρτησης, σε χρόνο και συνήθως και του πλάτους (όχι όμως απαραίτητα), δηλ. ένα τέτοιο σήμα ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή και έχει τιμή με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Οι τιμές αυτές εκφράζουν κάτι διαφορετικό, ανάλογα με την εφαρμογή (π.χ. στη φωτογραφία εκφράζουν το χρώμα του pixel, ενώ στον ήχο την ένταση του ήχου).

Με την έκρηξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών τη δεκαετία του '50, αναζητήθηκε ο τρόπος να μπορούν να αποθηκευτούν τέτοια σήματα σε έναν υπολογιστή, για περαιτέρω επεξεργασία. Φυσικά, ένας υπολογιστής δεν καταλαβαίνει στην ουσία τίποτα άλλο εκτός από 0 και 1, ενώ η χωρητικότητα και η ακρίβειά του είναι πεπερασμένες. Έτσι λοιπόν έπρεπε να βρεθεί ένας τρόπος να καταγραφούν αυτά τα αναλογικά σήματα σε ψηφιακή μορφή, αλλά με την ικανότητα να μπορούν να “δώσουν πίσω” το αναλογικό σήμα από το οποίο προήλθαν. Με άλλα λόγια, από το συνεχές/αναλογικό σήμα, να μπορούμε να πάρουμε κάποια *δεήματά* του, αλλά αυτά τα δείγματα να είναι ικανά να μας δώσουν πίσω ολόκληρο το σήμα συνεχούς χρόνου! Σίγουρα δύσκολη δουλειά! :-). Η διαδικασία μετατροπής, λοιπόν, ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτού χρόνου (κι όχι ψηφιακό) λέγεται **Δειγματοληψία**.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα της όλης διαδικασίας από την καθημερινότητά σας. Όταν ένας τραγουδιστής ερμηνεύει μπροστά σε ένα μικρόφωνο (Σχήμα 12.1), τα ηχητικά κύματα από τη φωνή του ταξιδεύουν στον αέρα και φτάνουν ως το μικρόφωνο. Τα ηχητικά αυτά κύματα χτυπούν ένα διάφραγμα μέσα στο μικρόφωνο, το οποίο πάει μπρος - πίσω (ταλαντώνεται). Ένα πηνίο, που είναι συνδεδεμένο με το διάφραγμα, κινείται κι αυτό μπρος - πίσω. Ένας μαγνήτης που είναι μαζί με το πηνίο, παράγει μαγνητικό πεδίο που το διαπερνά, και λόγω της ταλάντωσης του πηνίου, παράγεται ροή ηλεκτρικού ρεύματος. Το ρεύμα αυτό ρέει προς έναν ενισχυτή ή μια συσκευή καταγραφής¹. Άρα στην περίπτωση μας, το αναλογικό σήμα είναι ηλεκτρικό, αλλά δε μας απασχολεί η φύση του σήματος - είναι ένα σήμα. Αυτό το σήμα θέλουμε να το αποθηκεύσουμε σε έναν υπολογιστή. Πρέπει λοιπόν να το δειγματοληπτήσουμε, δηλ. να διαλέξουμε κάποιες χρονικές στιγμές και να πάρουμε τις τιμές του ηλεκτρικού σήματος σε εκείνες τις στιγμές, να πάρουμε δηλ. *δεήματα* του σήματος. Εδώ ας κάνουμε μια παρένθεση για να ορίσουμε



Σχήμα 12.1: Διαδικασία Δειγματοληψίας.

¹Άλλα μικρόφωνα χρησιμοποιούν διαφορετικό τρόπο αλλά στην ουσία πάλι μετατρέπουν ηχητική ενέργεια σε ηλεκτρική.

λίγο την ορολογία. Ορίζουμε ως **περίοδο δειγματοληψίας** T_s την απόσταση (σε δευτερόλεπτα) μεταξύ των δειγμάτων που παίρνουμε. Συνήθως είναι σταθερή. Επίσης, ορίζουμε ως **συχνότητα δειγματοληψίας** f_s το αντίστροφο της περιόδου δειγματοληψίας ($f_s = \frac{1}{T_s}$), και είναι ένας αριθμός που μας λέει πόσα δείγματα παίρνουμε ανά δευτερόλεπτο. Για παράδειγμα, στα μουσικά CD του εμπορίου, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 44100 Hz. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο πραγματικού ηχητικού κομματιού, έχουμε πάρει 44100 δείγματα, τα οποία απέχουν $\frac{1}{44100}$ δευτερόλεπτα μεταξύ τους! Πολλά δείγματα, πολύ κοντά το ένα με το άλλο! Γι' αυτό και η ποιότητα της μουσικής είναι τόσο καλή. Ας κλείσουμε όμως εδώ την παρένθεση κι ας επιστρέψουμε στη θεωρία. Για να κατανοήσουμε τη διαδικασία της Δειγματοληψίας, πρέπει πρώτα να αναφερθούμε σε ένα ιδιαίτερο σύνολο συστημάτων, που ονομάζονται **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**.

12.2 Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

Κάποια συστήματα εκτελούν συγκεκριμένες λειτουργίες, οι οποίες είναι πολύ συνήθεις και πολύ χρήσιμες στην πράξη. Αυτές οι λειτουργίες περιλαμβάνουν την αποκοπή συγκεκριμένων συχνοτήτων του σήματος εισόδου και τη διέλευση κάποιων άλλων, και/ή την ενίσχυση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που διέρχονται ελεύθερα του συστήματος. Λόγω αυτής της λειτουργίας τους, αυτά τα συστήματα ονομάζονται “φίλτρα”. Ο λόγος, προφανής: όπως το φίλτρο του καφέ π.χ. δεσμεύει τον καφέ σε στέρεα μορφή και επιτρέπει τη διέλευση του υγρού καφέ, έτσι και αυτά τα φίλτρα, επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων ενώ δεσμεύουν (καταστέλλουν, μηδενίζουν το πλάτος) κάποιες άλλες.

Εδώ θα δούμε κάποια συγκεκριμένα φίλτρα, τα οποία ονομάζονται *ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων*, και είναι ΓΧΑ συστήματα με τις εξής δυο ιδιότητες:

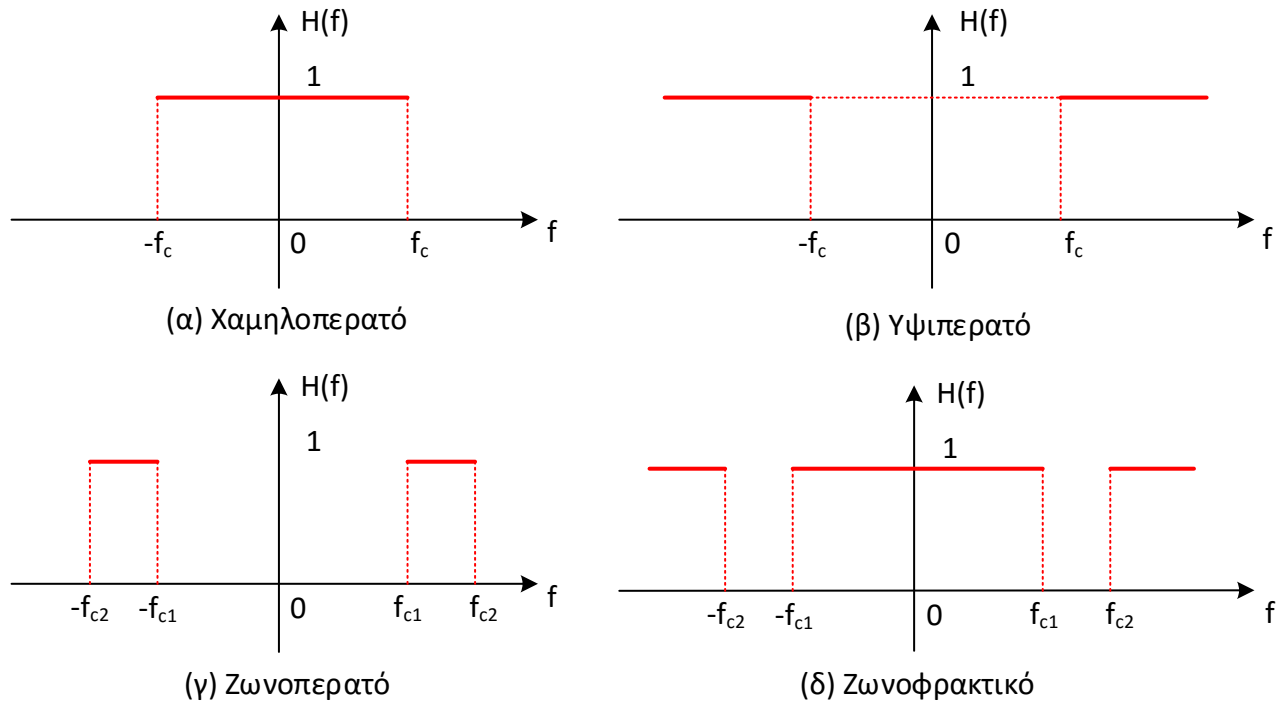
- Είναι ιδανικά, δηλ. *μη πραγματοποιήσιμα*, διότι όπως θα δούμε:
 - είναι μη-αιτιατά
 - η κρουστική τους απόκριση $h(t)$ είναι άπειρης διάρκειας
- Επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων χωρίς διαταραχή στο πλάτος ή στη φάση, ενώ αποκόπτουν εντελώς κάποιες άλλες.

Παρ' όλα αυτά, όλα τα πραγματικά φίλτρα που κατασκευάζουν οι μηχανικοί προσπαθούν να προσεγγίσουν όσο γίνεται καλύτερα αυτά τα θεωρητικά φίλτρα, δεδομένων παραγόντων όπως η πολυπλοκότητα και το κόστος κατασκευής.

Υπάρχουν τέσσερα βασικά είδη φίλτρων επιλογής συχνοτήτων:

1. Το **βαθυπερατό (lowpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από τη μηδενική συχνότητα ως μια συγκεκριμένη συχνότητα f_c .
2. Το **υψιπερατό (highpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη συχνότητα f_c , ως το $+\infty$.
3. Το **ζωνοπερατό (bandpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.
4. Το **ζωνοφρακτικό (bandstop)** φίλτρο: απαγορεύει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.

Η συχνότητα f_c σε όλα τα παραπάνω φίλτρα ονομάζεται *συχνότητα αποκοπής - cutoff frequency*. Τα φίλτρα αυτά φαίνονται σχηματικά στο Σχήμα 12.2, και όπως παρατηρείτε, είναι πραγματικά και έχουν άρτια συμμετρία, αφού αντιστοιχούν σε πραγματικά σήματα. Ας σημειωθεί ότι τα ιδανικά φίλτρα έχουν σταθερό, μοναδιαίο μέτρο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 12.2, αλλά η φάση τους μπορεί να είναι μηδενική ή γραμμική (στο Σχήμα 12.2 φαίνονται τα ιδανικά φίλτρα μηδενικής φάσης). Ας ασχοληθούμε μόνον με ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων μηδενικής φάσης.



Σχήμα 12.2: Ιδανικά Φίλτρα Μηδενικής Φάσης.

12.2.1 Ιδανικά Φίλτρα Μηδενικής Φάσης

12.2.1.1 Χαμηλοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{LP}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \quad (12.1)$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί με χρήση της γνωστής συνάρτησης rect ως

$$H_{LP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (12.2)$$

Προσέξτε ότι

$$|H_{LP}(f)| = H_{LP}(f) \quad (12.3)$$

και

$$\angle H_{LP}(f) = 0 \quad (12.4)$$

Η χρονική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{LP}(t) = F^{-1}\{H_{LP}(f)\} = 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (12.5)$$

12.2.1.2 Υψιπερατό φίλτρο

Το ιδανικό υψιπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{HP}(f) = \begin{cases} 0, & |f| \leq f_c \\ 1, & |f| > f_c \end{cases} \quad (12.6)$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί ως συνάρτηση του χαμηλοπερατού φίλτρου που είδαμε μόλις, ως

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (12.7)$$

Προσέξτε ότι κι εδώ το μέτρο του φίλτρου είναι ίσο με την απόκριση σε συχνότητα, όπως για το χαμηλοπερατό, και η φάση του είναι επίσης μηδέν.

Η χρονική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{HP}(t) = F^{-1}\{H_{HP}(f)\} = \delta(t) - 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (12.8)$$

12.2.1.3 Ζωνοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BP}(f) = \begin{cases} 1, & f_{c1} \leq |f| \leq f_{c2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.9)$$

κι όπως βλέπετε στο Σχήμα 12.2, αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς γύρω από τη συχνότητα $\pm f_c = \pm \frac{f_{c1} + f_{c2}}{2}$, με διάρκεια $f_{c2} - f_{c1}$ ο καθένας. Άρα το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{BP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{f_{c2} - f_{c1}}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{f_{c2} - f_{c1}}\right) \quad (12.10)$$

Με αυτή τη γραφή, η χρονική απόκριση υπολογίζεται από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier ως

$$h_{BP}(t) = (f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) e^{-j2\pi f_c t} + (f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) e^{j2\pi f_c t} \quad (12.11)$$

η οποία μπορεί να γραφεί μέσω των σχέσεων του Euler ως

$$h_{BP}(t) = 2(f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) \cos(2\pi f_c t) \quad (12.12)$$

με $f_c = \frac{f_{c1} + f_{c2}}{2}$.

12.2.1.4 Ζωνοφρακτικό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BS}(f) = \begin{cases} 0, & f_{c1} \leq |f| \leq f_{c2} \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.13)$$

και μπορεί να γραφεί συναρτήσει του ζωνοπερατού φίλτρου ως

$$H_{BS}(f) = 1 - H_{BP}(f) \quad (12.14)$$

Έτσι, η χρονική του απόκριση μπορεί να βρεθεί εύκολα ως

$$h_{BS}(t) = \delta(t) - h_{BP}(t) = \delta(t) - 2(f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) \cos(2\pi f_c t) \quad (12.15)$$

Παρατηρήστε ότι πράγματι όλα τα ιδανικά φίλτρα έχουν χρονική απόκριση η οποία είναι μη-αιτιατή και άπειρης διάρκειας.

Παρ' όλο που τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων δε διαφέρουν ως προς το χειρισμό τους σε σχέση με οποιαδήποτε άλλα συστήματα, η μαθηματική μορφή τους μας διευκολύνει στην εύρεση της εξόδου τους, όταν αυτά συνιστούν ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο δέχεται εισόδους.

Η Σχεδίαση κι Ανάλυση Φίλτρων είναι ένας ολόκληρος τομέας της Επεξεργασίας Σήματος από μόνος του, οπότε δε θα επεκταθούμε περισσότερο εδώ.

12.2.2 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε όμως μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.1:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8) + \sin(2\pi 20t - \pi/3) \quad (12.16)$$

το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα ιδανικό

(α') χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

(β') υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

Βρείτε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:

Μπορούμε απ' ευθείας να απαντήσουμε ότι αφού τα φίλτρα μας αποκόπτουν τις συχνότητες μεγαλύτερες από 15 Hz (χαμηλοπερατό) και μικρότερες από 15 Hz (υψιπερατό), και η είσοδός μας αποτελείται μόνο από τις συχνότητες 10, 20 Hz, τότε πολύ απλά οι έξοδοι θα είναι

$$(α') \quad y(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8)$$

$$(β') \quad y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3)$$

αντίστοιχα, αφού τα φίλτρα είναι ιδανικά (μοναδιαίου πλάτους) και η φάση τους είναι μηδέν, οπότε δεν υπάρχει καμιά μεταβολή στα πλάτη και τις φάσεις των σημάτων που περνούν στην έξοδο.

Ας επικυρώσουμε αυτό το αποτέλεσμα αναλυτικά. Ο μετασχ. Fourier του σήματος εισόδου είναι

$$X(f) = e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) + e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20) \quad (12.17)$$

(α') Η έξοδος στο χώρο της συχνότητας θα είναι το γινόμενο των μετασχ. Fourier της εισόδου και του συστήματος, δηλ.

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (12.18)$$

$$= (e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) + e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20)) \text{rect}\left(\frac{f}{30}\right) \quad (12.19)$$

$$= e^{j\pi/8} \text{rect}\left(\frac{1}{3}\right) \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \text{rect}\left(\frac{-1}{3}\right) \delta(f + 10) \quad (12.20)$$

$$+ e^{-j5\pi/6} \text{rect}\left(\frac{2}{3}\right) \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \text{rect}\left(\frac{-2}{3}\right) \delta(f + 20) \quad (12.21)$$

λόγω της γνωστής ιδιότητας

$$X(f) \delta(f \pm f_0) = X(\mp f_0) \delta(f \pm f_0) \quad (12.22)$$

Όμως

$$\text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.23)$$

και άρα

$$\text{rect}\left(\frac{\pm 2}{3}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \text{rect}\left(\frac{\pm 1}{3}\right) = 1 \quad (12.24)$$

Οπότε τελικά

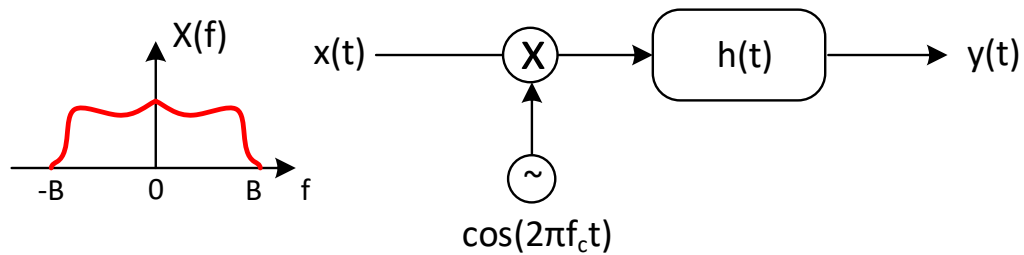
$$Y(f) = e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) \longleftrightarrow y(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8) \quad (12.25)$$

(β') Εντελώς ανάλογα με παραπάνω, δείξτε ότι

$$Y(f) = e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20) \longleftrightarrow y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3) \quad (12.26)$$

Παράδειγμα 8.2:

Έστω το σήμα $x(t)$ το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα σύστημα του Σχήματος 12.3,



Σχήμα 12.3: Σύστημα Παραδείγματος 8.2.

με $f_c = 100$ Hz, και με το σύστημα $h(t)$ να είναι της μορφής

$$h(t) = 400\text{sinc}(200t) \quad (12.27)$$

Σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:

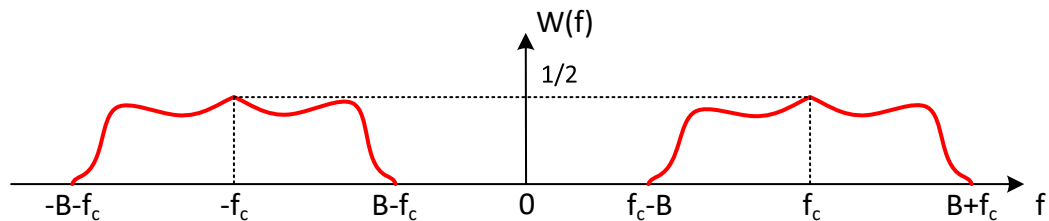
Το σήμα $x(t)$ πολλαπλασιάζεται με ένα συνημίτονο συχνότητας f_c , οπότε αν συμβολίσουμε με $w(t)$ το αποτέλεσμα της πράξης αυτής, θα είναι

$$w(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c) \right) \quad (12.28)$$

και λόγω γνωστής ιδιότητας της συνέλιξης με συνάρτηση Δέλτα, είναι

$$W(f) = \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c) \quad (12.29)$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 12.4.



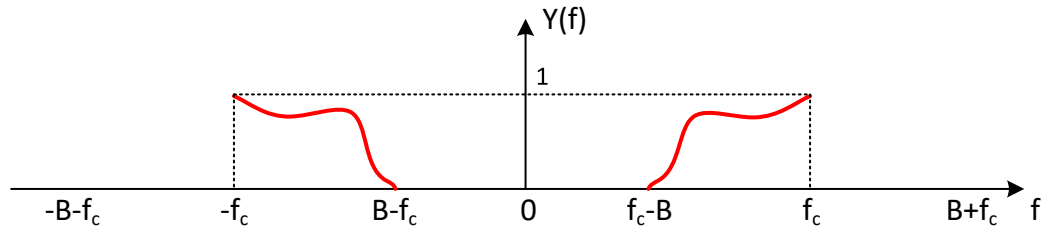
Σχήμα 12.4: Είσοδος συστήματος Παραδείγματος 8.2.

Το σύστημα $h(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$h(t) = 400\text{sinc}(200t) = 2 \times 200\text{sinc}(200t) \longleftrightarrow H(f) = 2\text{rect}\left(\frac{f}{200}\right) \quad (12.30)$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 100$ Hz με πλάτος 2. Άρα το φίλτρο αυτό θα κρατήσει τις συχνότητες της εισόδου που βρίσκονται στο διάστημα $[-100, 100]$ Hz, θα διπλασιάσει το πλάτος τους, ενώ θα αποκόψει τελείως τις συχνότητες εκτός του παραπάνω διαστήματος.

Η έξοδος του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 12.5.

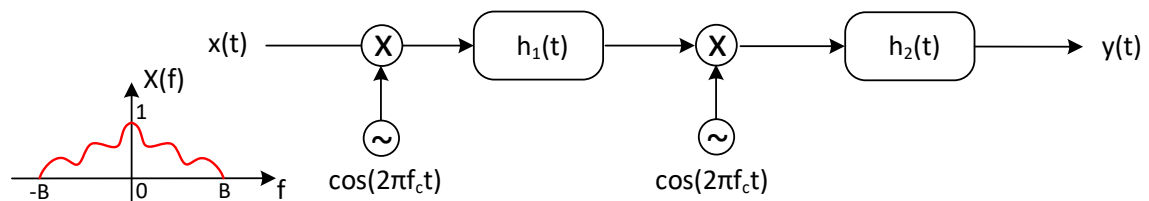


Σχήμα 12.5: Έξοδος συστήματος Παραδείγματος 8.2.

Ας μελετήσουμε τώρα ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.3:

Έστω η διάταξη του Σχήματος 12.6,



Σχήμα 12.6: Διάταξη Παραδείγματος 8.3.

με το σήμα εισόδου $x(t)$ να έχει μετασχ. Fourier όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα συστήματα $h_i(t)$ δίνονται ως:

$$h_1(t) = 4f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (12.31)$$

$$h_2(t) = 8B \text{sinc}(2Bt) \quad (12.32)$$

και η συχνότητα f_c είναι $f_c \gg B$.

- (α') Σχεδιάστε το σήμα $W(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_1(t)$ συναρτήσει του $X(f)$.
- (β') Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier του συστήματος $h_1(t)$.
- (γ') Σχεδιάστε το σήμα $Z(f)$ που προκύπτει ως έξοδος από το σύστημα $h_1(t)$.
- (δ') Σχεδιάστε το σήμα $V(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_2(t)$.
- (ε') Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier, $H_2(f)$, του δεύτερου συστήματος, $h_2(t)$.
- (ς') Σχεδιάστε την τελική έξοδο της όλης διάταξης στο χώρο της συχνότητας, $Y(f)$, και γράψτε τη μαθηματική μορφή του $y(t)$ συναρτήσει του $x(t)$.

Λύση:

(α') Είναι

$$w(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c) \right) \quad (12.33)$$

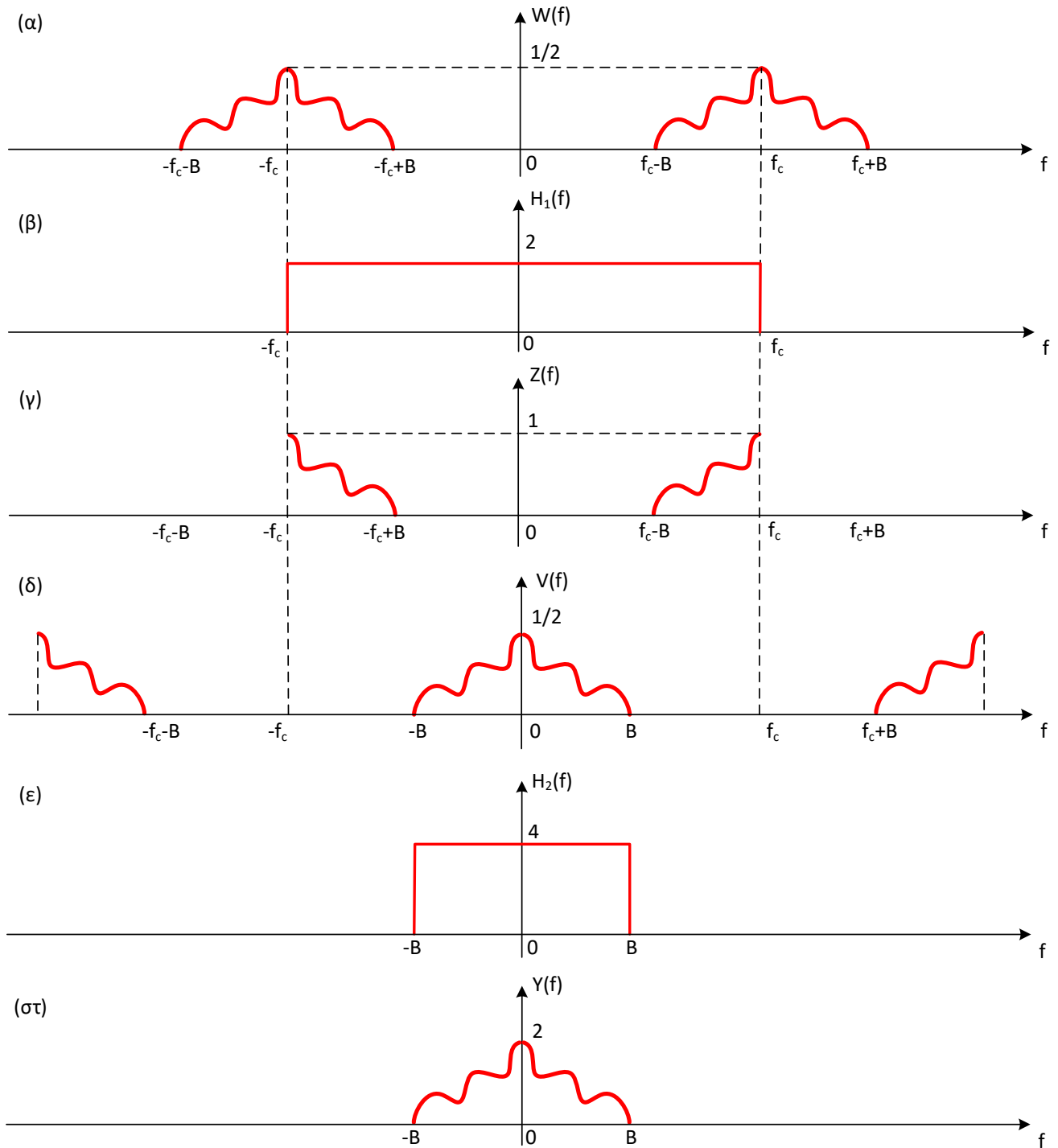
$$= \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c) \quad (12.34)$$

Το φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 12.7(α).

(β') Είναι

$$h_1(t) = 4f_c \text{sinc}(2f_c t) \longleftrightarrow H_1(f) = 2 \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (12.35)$$

το οποίο φαίνεται στο 12.7(β).



Σχήμα 12.7: Φάσματα Παραδείγματος 8.3.

(γ') Είναι

$$Z(f) = W(f)H_1(f) = \frac{1}{2}X(f - f_c)H_1(f) + \frac{1}{2}X(f + f_c)H_1(f) \quad (12.36)$$

που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα κομμάτι του αρχικού φάσματος $W(f)$ όπως στο 12.7(γ), αφού το $H_1(f)$ είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο.

(δ') Το $V(f)$ θα είναι το φάσμα του $Z(f)$ μετατοπισμένο στις συχνότητες $\pm f_c$, δηλ.

$$v(t) = z(f) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow V(f) = \frac{1}{2}Z(f - f_c) + \frac{1}{2}Z(f + f_c) \quad (12.37)$$

όπως στο Σχήμα 12.7(δ).

(ε') Είναι

$$h_2(t) = 8B \text{sinc}(2Bt) \longleftrightarrow H_2(f) = 4 \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (12.38)$$

το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 12.7(ε).

(ζ') Η έξοδος $Y(f)$ θα είναι της μορφής

$$Y(f) = V(f)H_2(f) = \frac{1}{2}Z(f - f_c)H_2(f) + \frac{1}{2}Z(f + f_c)H_2(f) \quad (12.39)$$

όπως στο Σχήμα 12.7(στ), αφού το $H_2(f)$ είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο, δηλ. είναι ίδιο με το αρχικό σήμα εισόδου $x(t)$, πολλαπλασιασμένο επί 2, δηλ.

$$y(t) = 2x(t) \quad (12.40)$$

12.3 Δειγματοληψία

Επιστρέφοντας στη διαδικασία της Δειγματοληψίας, τα ερωτήματα που μπορεί κανείς να σκεφτεί και να θέσει άμεσα είναι: “ποιά δείγματα να πάρω; Όποια θέλω; Και κάθε πότε να τα παίρνω; Όποτε θέλω; Ή πρέπει να υπάρχει ένα σταθερό χρονικό διάστημα στο οποίο θα πρέπει να παίρνω δείγματα; Κι αν τα πάρω αυτά τα δείγματα, μετά θα μπορώ να ανακατασκευάσω και να ακούσω το τραγούδι του ηχογραφήθηκε από ένα ηχείο ή θα ακούσω bits;” Όλα αυτά τα ερωτήματα τα απάντησε ο Nyquist και ο Shannon, το 1928 ο πρώτος, και το 1949 ο δεύτερος, με κάποιες διαφορές στις εργασίες τους. Το θεώρημα που απαντάει σε αυτά τα ερωτήματα ονομάστηκε Θεώρημα των Shannon-Nyquist.

Θεώρημα Δειγματοληψίας

Ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα (μη-μηδενικού πλάτους) B Hz, μπορεί να ανακτηθεί ακριβώς από τα δείγματά του, αν δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας

$$f_s > 2B, \quad (12.41)$$

δηλ. με περίοδο δειγματοληψίας

$$T_s < \frac{1}{2B} \quad (12.42)$$

Η συνθήκη:

$$f_s > 2B \quad \left(\text{ή } T_s < \frac{1}{2B} \right) \quad (12.43)$$

λέγεται *συνθήκη του Shannon*. Η μέγιστη συχνότητα B του σήματος συνήθως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως $f_{\max}$ και λέγεται *συχνότητα Nyquist*^a, ενώ η ελάχιστη συχνότητα $2B$ πάνω από την οποία πληρείται η συνθήκη του Shannon αναφέρεται ως *ρυθμός Nyquist*.

^a Αν και υπάρχει μια κάποιια σύγχυση στη βιβλιογραφία σχετικά με την ονομασία αυτή...

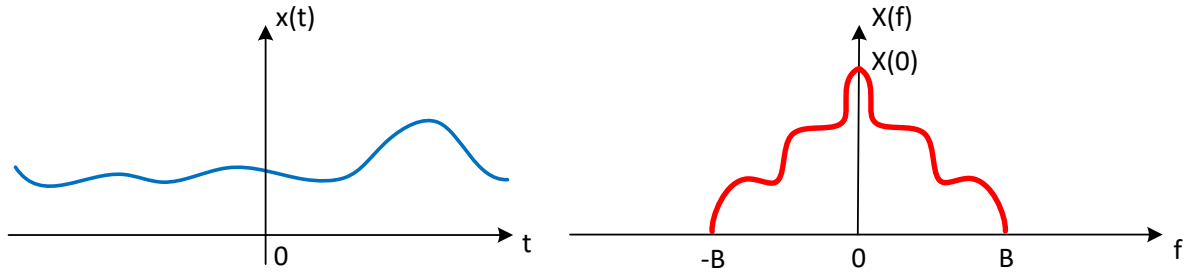
Όπως πρέπει να σας έχει γίνει ήδη αντιληπτό, το θεώρημα της δειγματοληψίας εμπλέκει μέσα το πεδίο της συχνότητας, εκτός από αυτό του χρόνου. Το πεδίο της συχνότητας, όπως πρέπει ήδη να ξέρετε πολύ καλά, δεν είναι τίποτα άλλο από την αναπαράσταση του ίδιου σήματος ως προς τη συχνότητα f .

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ που θέλουμε να δειγματοληπτήσουμε, και αυτό το σήμα έχει φάσμα (μετασχηματισμός Fourier δηλαδή) $X(f)$, όπως στο Σχήμα 12.8. Έστω ότι ο μετασχηματισμός είναι πραγματικός και θετικός, για ευκολία στη σχεδίαση. Παρατηρείτε ότι το φάσμα του σήματος έχει μέγιστη συχνότητα B . Μετά τη συχνότητα αυτή, δεν υπάρχουν πλάτη για τις υπόλοιπες συχνότητες. Το ίδιο και για το αρνητικό μέρος των συχνοτήτων, πριν τη συχνότητα $-B$.

12.3.1 Ιδανική Δειγματοληψία

Ας κάνουμε τώρα δειγματοληψία στο σήμα μας στο χρόνο, με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = \frac{1}{f_s}$. Πώς όμως θα αναπαράστησουμε μαθηματικά τη δειγματοληψία; Θυμηθείτε ότι

$$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t \pm t_0) \quad (12.44)$$

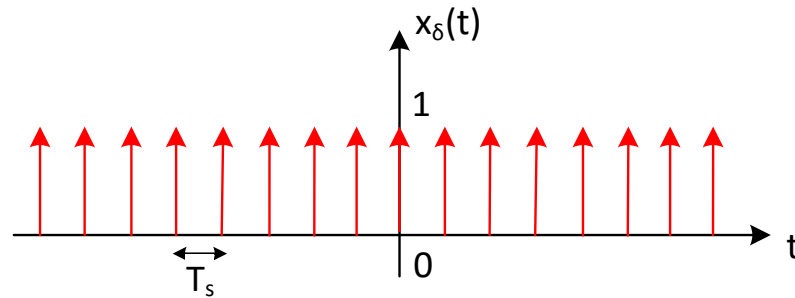


Σχήμα 12.8: Σήμα συνεχούς χρόνου και Μετασχηματισμός Fourier του.

Άρα η συνάρτηση δειγματοληψίας δεν είναι τίποτα άλλο από μια (άπειρη, εν γένει) σειρά από τις γνωστές μας Συναρτήσεις Δέλτα:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (12.45)$$

Η συνάρτηση δειγματοληψίας φαίνεται στο Σχήμα 12.9.



Σχήμα 12.9: Συνάρτηση Δειγματοληψίας

Όπως φαίνεται, αυτές οι συναρτήσεις Δέλτα απέχουν μεταξύ τους χρόνο T_s .

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δειγματοληψίας είναι:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \longleftrightarrow \Delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s) \quad (12.46)$$

δηλ.² βλέπουμε ότι και ο μετασχ. Fourier της άπειρης σειράς από Συναρτήσεις Δέλτα στο χρόνο που απέχουν

²Για μια σύντομη απόδειξη... αφού η συνάρτηση $x_\delta(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T_s , μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier. Οι συντελεστές Fourier δίνονται ως

$$X_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} x(t) e^{-jk2\pi f_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jk2\pi f_s t} dt = \frac{1}{T_s} e^{-j2\pi f_s t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_s}$$

λόγω της ιδιότητας της συνάρτησης Δέλτα

$$\int x(t) \delta(t) dt = x(0)$$

Άρα

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_s t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} e^{j2\pi k f_s t} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f_s t}$$

Όμως από το τυπολόγιο του Μετασχ. Fourier, ξέρουμε ότι

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - kf_0)$$

Άρα τελικά

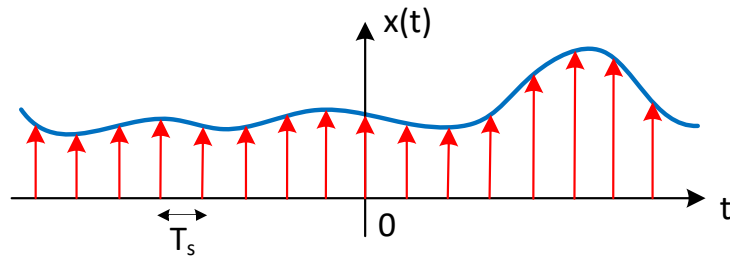
$$X_\Delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s)$$

απόσταση T_s είναι μια άπειρη σειρά από συναρτήσεις Δέλτα ΚΑΙ στη συχνότητα, οι οποίες μάλιστα απέχουν μεταξύ τους $f_s = 1/T_s$ Hz.

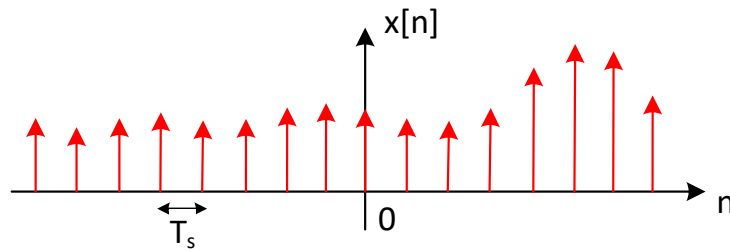
Η δειγματοληψία μπορεί να αναπαρασταθεί λοιπόν μαθηματικά από τον πολλαπλασιασμό στο χρόνο του σήματος πληροφορίας $x(t)$ με τη σειρά από συναρτήσεις Δέλτα, $x_\delta(t)$. Άρα θα έχουμε:

$$x_s(t) = x(t)x_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (12.47)$$

Οπότε αυτό που θα πάρουμε θα είναι οι κόκκινες τιμές στις κορυφές των συναρτήσεων Δέλτα. Οι υπόλοιπες τιμές χάνονται. Αυτό που μένει λοιπόν είναι το σήμα μας, $x[n]$, με n τον αριθμό του δείγματος. Αυτό το $x[n]$ δεν είναι τίποτα άλλο από τις τιμές $x(nT_s)$ που πήραμε παραπάνω. Όλα αυτά μας τα δείχνουν γραφικά τα Σχήματα 12.10 και 12.11.



Σχήμα 12.10: Δειγματοληψία.



Σχήμα 12.11: Δειγματοληπτημένο σήμα.

Ας δούμε τι συμβαίνει στο πεδίο της συχνότητας. Το γινόμενο των δυο παραπάνω σημάτων, $x_s(t) = x(t)x_\delta(t)$, γίνεται συνέλιξη στη συχνότητα:

$$X_s(f) = X(f) * \Delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s) \quad (12.48)$$

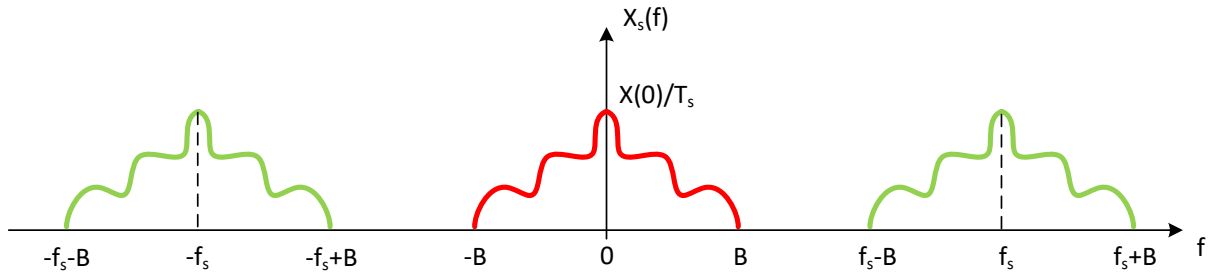
$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (X(f) * \delta(f - nf_s)) \quad (12.49)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_s) \quad (12.50)$$

αφού ξέρουμε ότι η συνέλιξη σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα δίνει το ίδιο το σήμα μετατοπισμένο στη θέση της συνάρτησης Δέλτα, δηλ.

$$X(f) * \delta(f \pm f_0) = X(f \pm f_0) \quad (12.51)$$

Άρα λοιπόν, αυτό που παίρνουμε στο πεδίο της συχνότητας σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, είναι επαναλήψεις του φάσματος $X(f)$ γύρω από τις συχνότητες $\pm nf_s$. Αν η συχνότητα δειγματοληψίας f_s είναι “αρκετά μεγάλη” (θα δούμε παρακάτω τι σημαίνει αυτό), τότε αυτό που θα συμβεί στο πεδίο της συχνότητας φαίνεται στο Σχήμα 12.12.

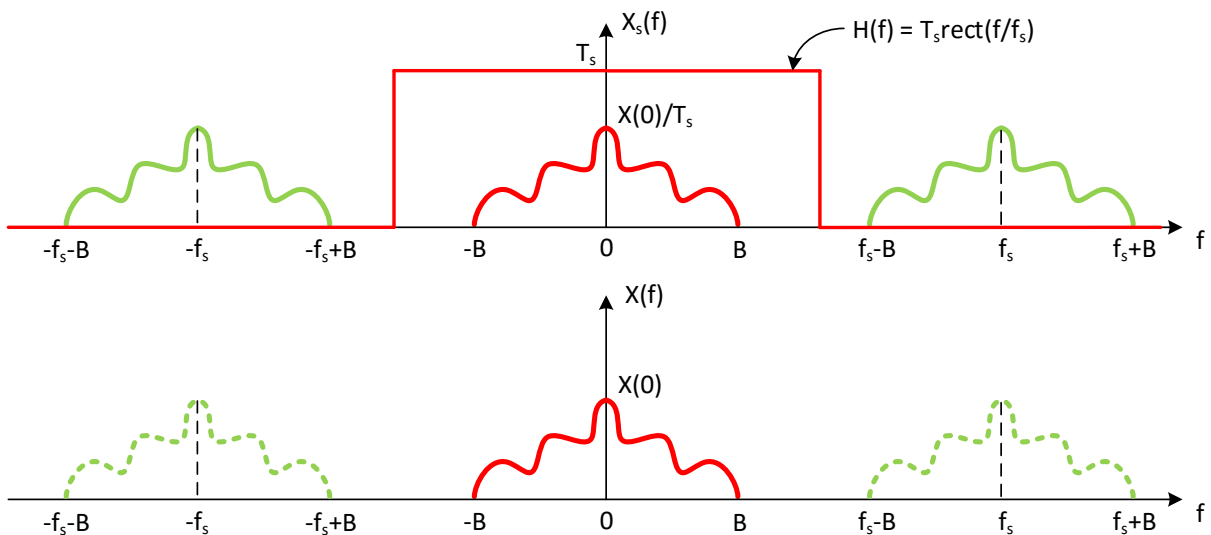


Σχήμα 12.12: Μη επικαλυπτόμενο φάσμα δειγματοληπτημένου σήματος.

Τι παρατηρούμε και στο Σχήμα 12.12; Παρατηρούμε ότι, λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας, εμφανίστηκαν “από το πουθενά” περιοδικές “επανάληψεις” του αρχικού φάσματος γύρω από τις συχνότητες $\pm n f_s$. Αυτό είναι το φάσμα του δειγματοληπτημένου (δηλ. του διακριτού χρόνου) σήματος. Στο Σχήμα 12.12 φαίνονται μόνο οι “επανάληψεις” του φάσματος γύρω από τις συχνότητες $\pm f_s$, αλλά αυτή η επανάληψη συνεχίζεται σε όλα τα πολλαπλάσια της f_s , από το $-\infty$ ως το $+\infty$. Απλά για λόγους ευκολίας, εδώ δείχνουμε μόνο τις επανάληψεις γύρω από την συχνότητα $-f_s$ και την f_s .

12.3.2 Ανακατασκευή

Υπενθυμίζεται ότι μετά την αποθήκευση ή επεξεργασία του διακριτού σήματος στον υπολογιστή, σκοπός μας είναι να μπορούμε να πάρουμε πίσω το αρχικό σήμα, δηλ. το φάσμα $X(f)$ που θα μας δώσει το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$. Αυτό γίνεται με την εφαρμογή ενός χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου γύρω από το κεντρικό φάσμα, κόβοντας τα “περισσευούμενα” φάσματα και κρατώντας μόνο αυτό στο διάστημα $[-f_s/2, f_s/2]$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.13. Θυμίζεται ότι το κεντρικό (κόκκινου χρώματος) φάσμα είναι το φάσμα του αρχικού σήματος συνεχούς χρόνου, ενώ τα φάσματα πράσινου χρώματος “ξεφύτρωσαν” λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας. Οπότε αν θέλουμε να ανακτήσουμε το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου, θα πρέπει να κρατήσουμε μόνο το κεντρικό φάσμα γύρω από τη μηδενική συχνότητα, γιατί ΜΟΝΟ αυτό αντιστοιχεί στο αρχικό σήμα, όπως δείχνει το Σχήμα 12.13. Το φίλτρο αυτό, που προφανώς το ορίζουμε στη συχνότητα, πρέπει να σας θυμίζει κάτι. :-) Ναι,



Σχήμα 12.13: Φίλτρο ανακατασκευής.

είναι ένας τετραγωνικός παλμός (!!) που δίνεται από την εξίσωση:

$$H(f) = \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = T_s \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) \quad (12.52)$$

Αυτό σημαίνει ότι το παράθυρο ορίζεται στο διάστημα $[-f_s/2, f_s/2]$. Ο αντίστροφος μετασχη. Fourier του σήματος αυτού ξέρουμε ότι είναι:

$$h(t) = T_s f_s \text{sinc}(t f_s) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad (12.53)$$

λόγω της ιδιότητας της Δυσικότητας³. Πολλαπλασιάζοντας το σήμα $H(f)$ με το φάσμα του διακριτού σήματος

$$\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_s)$$

θα έχουμε:

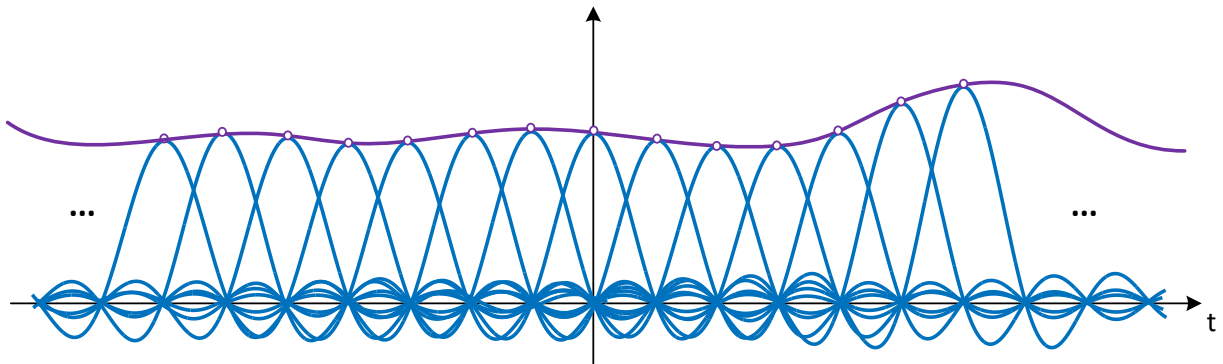
$$\frac{1}{T_s} H(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_s) = \frac{1}{T_s} T_s X(f) = X(f) \quad (12.56)$$

αφού το $H(f)$ είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[-f_s/2, f_s/2]$.

Τέλος, το γινόμενο στη συχνότητα γίνεται συνέλιξη στο χρόνο:

$$h(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n T_s) \delta(t - n T_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n T_s) h(t - n T_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n T_s) \text{sinc}\left(\frac{t - n T_s}{T_s}\right) \quad (12.57)$$

Η παραπάνω σχέση είναι πολύ σημαντική. Μας λέει ότι, ιδανικά, ένα αναλογικό σήμα (το οποίο ορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή - άρα σε άπειρες χρονικές στιγμές) δειγματοληπτημένο με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s > 2f_{max}$ μπορεί να ανακατασκευαστεί **πλήρως και ακριβώς** από τα δείγματα του $x(n T_s)$ (δηλ. από κάποιες διακριτές μόνο χρονικές στιγμές του σήματος) όταν αυτά συνδυαστούν γραμμικά με συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$, όταν κάθε μιά έχει τον κεντρικό λοβό της γύρω από τις χρονικές στιγμές $n T_s$, $n \in \mathbb{Z}$!!! Δείτε το Σχήμα 12.14 και παρατηρήστε πώς οι συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$ με κατάλληλη μετατόπιση (μπλε καμπύλες) και άθροιση κατασκευάζουν ένα σήμα στο συνεχή χρόνο (μώβ καμπύλη) από τα δείγματά του (κουκκίδες).



Σχήμα 12.14: Ανακατασκευή από Συναρτήσεις sinc.

Ας επανέλθουμε λίγο στο φάσμα του διακριτού σήματος, που το παραθέτουμε ξανά για ευκολία, στο Σχήμα 12.15(α). Παρατηρήστε λίγο το δεξί άκρο του κεντρικού φάσματος (κόκκινη καμπύλη) και το αριστερό άκρο του φάσματος γύρω από τη συχνότητα f_s (πράσινη καμπύλη). Βλέπετε ότι το ένα έχει συχνότητα B και το άλλο έχει συχνότητα $f_s - B$. Αν αυτά τα δυο άκρα ήταν πιο κοντά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.15(β), τότε θα “έμπαινε” το ένα φάσμα μέσα στο άλλο, θα είχαμε δηλ. επικάλυψη στα φάσματα, και σε εκείνο το διάστημα τα φάσματα θα προστίθενται, αλλοιώνοντας έτσι το αρχικό μας σήμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.15(γ).

Για να μη συμβαίνει αυτό, καταλαβαίνετε ότι πρέπει να έχουμε μια κατάσταση όπως στο Σχήμα 12.15(α), δηλ. να ισχύει

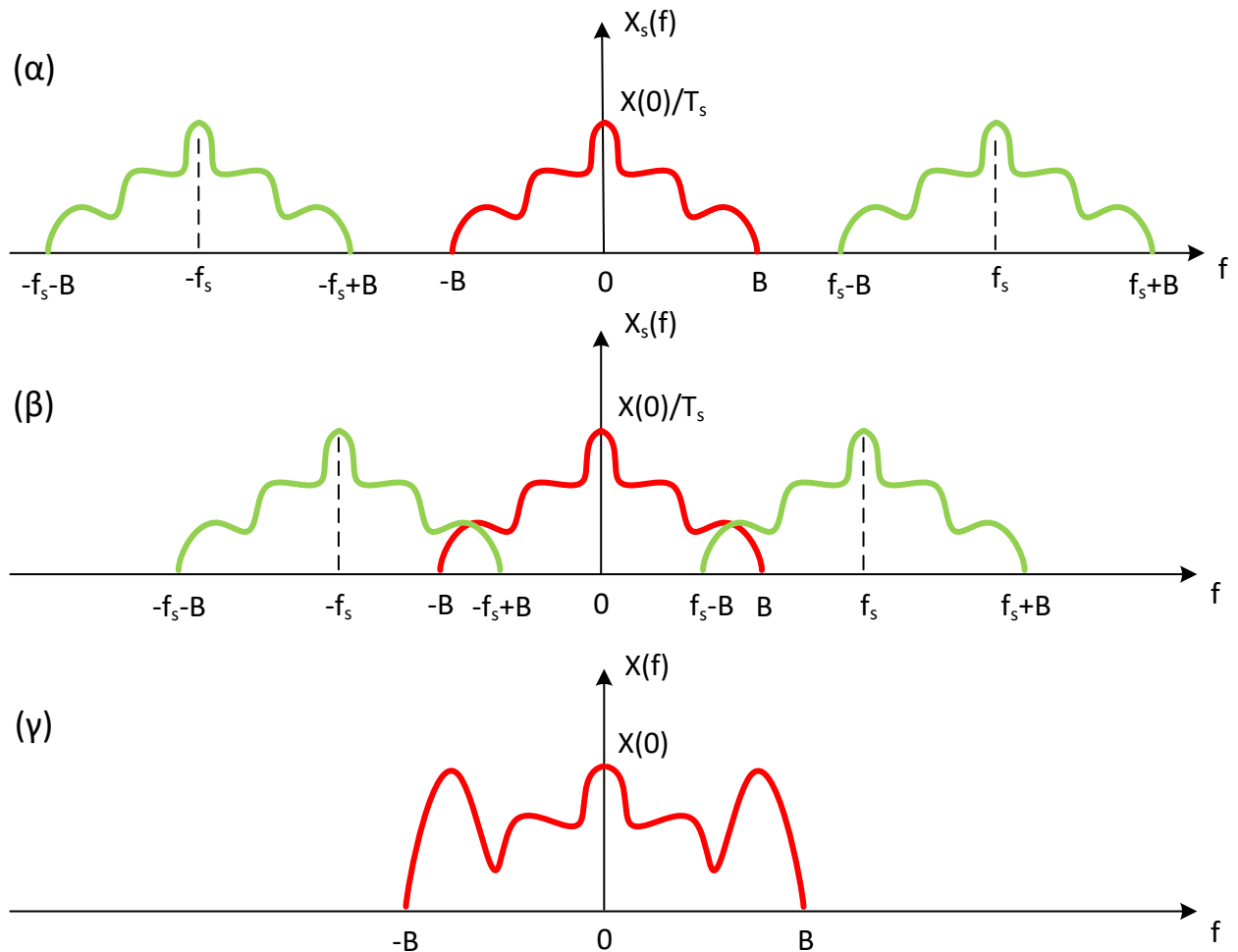
$$B < f_s - B \iff f_s > 2B \quad (12.58)$$

³Υπενθυμίζεται:

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \implies X(t) \longleftrightarrow x(-f) \quad (12.54)$$

και για το γνωστό μας ζεύγος είναι

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow \text{ATsinc}(fT) \implies \text{ATsinc}(tT) \longleftrightarrow \text{Arect}\left(-\frac{f}{T}\right) = \text{Arect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (12.55)$$



Σχήμα 12.15: Υποδειγματοληψία: Φάσμα με ξένες συχνότητες

που είναι το κριτήριο του Shannon. Αυτή ουσιαστικά είναι η απόδειξη του θεωρήματος της δειγματοληψίας (χωρίς μαθηματικά :-)). Προέρχεται απλά από την παρατήρηση αυτού του σχήματος. Δείτε στο Σχήμα 12.15(γ), τι συμβαίνει αν το κριτήριο του Shannon παραβιάζεται, δηλ. η συχνότητα δειγματοληψίας f_s είναι μικρότερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα B του σήματος. Βλέπετε ότι πλέον το κεντρικό φάσμα (κόκκινη καμπύλη) δεν είναι η ίδια με πριν. Στα άκρα της έχουν προστεθεί συχνότητες “ξένες”, και έχουν αλλοιώσει το κεντρικό φάσμα. Καταλαβαίνετε τι γίνεται αν η f_s είναι ακόμα πιο κοντά στο μηδέν...

Το φαινόμενο αυτό της επικάλυψης των φασμάτων ονομάζεται **aliasing** στα Αγγλικά⁴.

Συνοπτικά, η διαδικασία της δειγματοληψίας φαίνεται στο Σχήμα 12.16.

12.3.3 Παρατηρήσεις

1. Προσέξτε ότι στην παραπάνω ανάλυσή μας, θεωρήσαμε ότι το $x(t)$ είναι ένα σήμα πεπερασμένης ζώνης συχνοτήτων, δηλ. το φάσμα του, $X(f)$, είναι μη μηδενικό σε ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων (στο $[-B, B]$). Αυτό μπορεί να μην ισχύει πάντα, και για την ακρίβεια πράγματι δεν ισχύει για όλα τα σήματα που μπορούμε να κατασκευάσουμε ή καταγράψουμε στην πράξη, μια και όλα τα φυσικά σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, άρα άπειρης διάρκειας στη συχνότητα! Τότε πρέπει να εφαρμόσουμε εκ των προτέρων στο φάσμα του σήματος ένα φίλτρο $H_{aa}(f)$, που είναι ίδιας μορφής με το $H(f)$ που είδαμε, και ονομάζεται *anti-aliasing filter*, ώστε να περιορίσουμε το εύρος ζώνης του, και έτσι να ισχύει η ανάλυση που κάναμε παραπάνω. Το φίλτρο αυτό πρέπει να είναι κατ'άλληλο ώστε να μην “κόβει” μεγάλο κομμάτι απ' την πληροφορία του σήματος.
2. Δείτε το φίλτρο $H(f)$ που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυσή μας (Σχήμα 12.13). Αυτό το φίλτρο είναι ιδανικό, αλλάζει τιμές στα άκρα του με αχαριαίο τρόπο, είναι ασυνεχές και άρα μη υλοποιήσιμο στην πράξη, όμως

⁴Μια προσπάθεια μετάφρασης θα ήταν “ψευδώνυμες συχνότητες”...

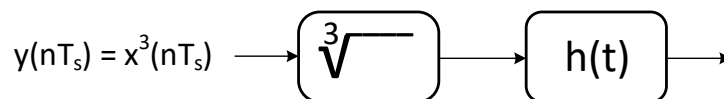
υπάρχουν αρκετά παρόμοια που το προσεγγίζουν. Αυτή η “παραχώρηση” που κάνουμε εισάγει παραμόρφωση στο σήμα μας, αλλά δεν μπορεί να γίνει αλλιώς. Θα πούμε περισσότερα για αυτό το ιδεατό φίλτρο στις επόμενες σελίδες.

3. Η συνάρτηση δειγματοληψίας $x_\delta(t)$ επίσης δεν μπορεί να υλοποιηθεί στην πράξη. Προσεγγίζεται αρκετά καλά όμως από τετραγωνικούς παλμούς (αντί για συναρτήσεις Δέλτα) με πολύ μικρό εύρος, όπως ο παλμός που είδαμε στο Κεφάλαιο για το μετασχ. Fourier

$$\delta(t) \approx \frac{1}{\epsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad (12.59)$$

όπου όσο το $\epsilon \rightarrow 0$, τόσο η προσέγγιση πλησιάζει πιο κοντά στη θεωρητική συνάρτηση Δέλτα. Αυτού του τύπου η δειγματοληψία ονομάζεται *πρακτική δειγματοληψία* ή *δειγματοληψία με παρακράτηση*, και θα τη συζητήσουμε πολύ σύντομα.

4. Η συνθήκη του Shannon δεν είναι αναγκαία για τη σωστή ανάκτηση του σήματος. Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:
Έστω $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, με $X(f)$ μη μηδενικό στο διάστημα $[-B, B]$. Έστω $y(t) = x^3(t)$, άρα θα είναι $Y(f) \neq 0$ στο $[-3B, 3B]$. Για ανάκτηση του σήματος σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει, πρέπει $f_s > 6B$. Έστω ότι το δειγματοληπτούμε με $f_s = 2B$. Τι συμβαίνει; Προφανώς υπάρχουν επικαλύψεις στο φάσμα του διακριτού σήματος $y(nT_s)$. Όμως για δείτε την διάταξη στο Σχήμα 12.17. Γίνεται ή όχι σωστή ανάκτηση του σήματος;



Σχήμα 12.17: Διάταξη ανάκτησης σήματος.

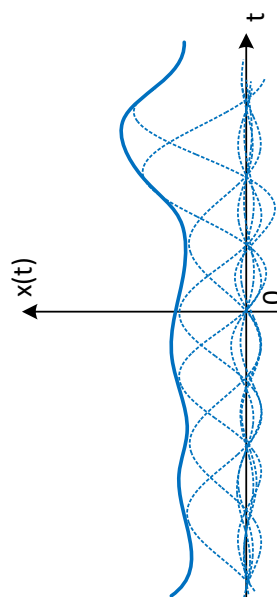
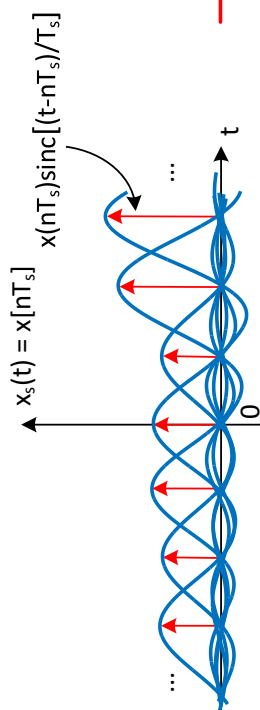
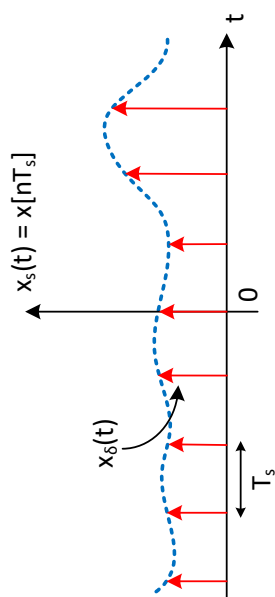
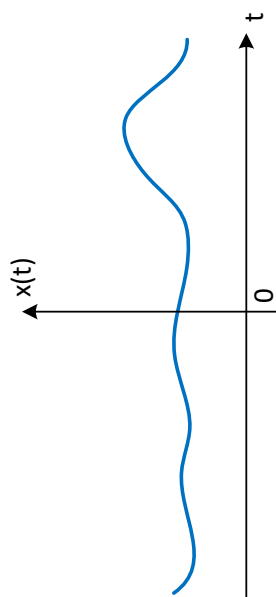
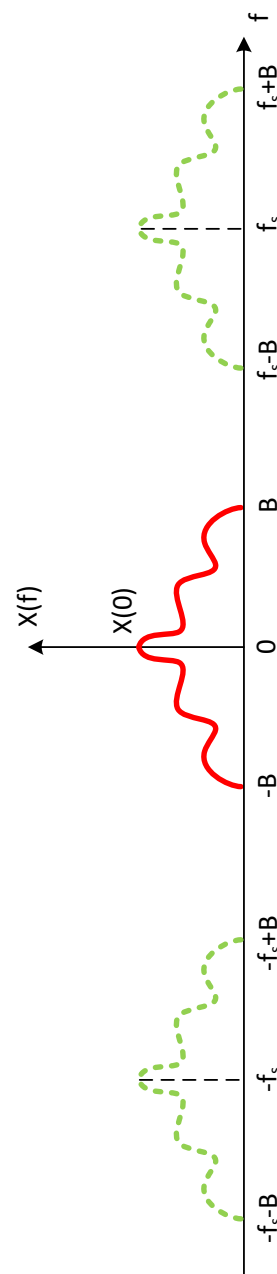
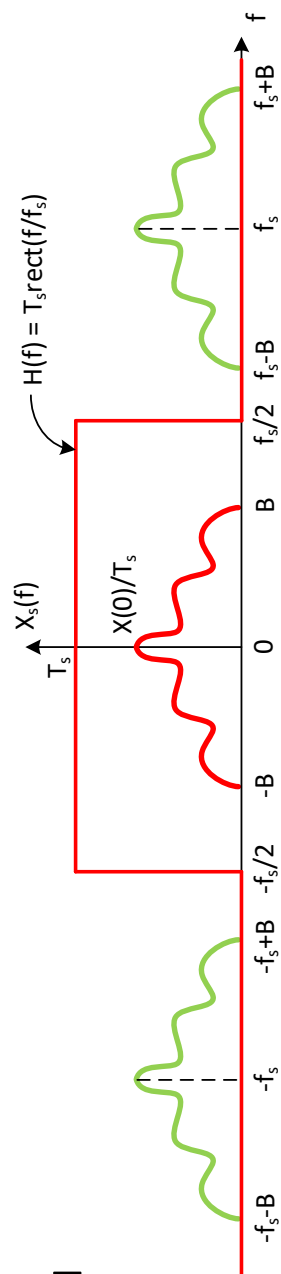
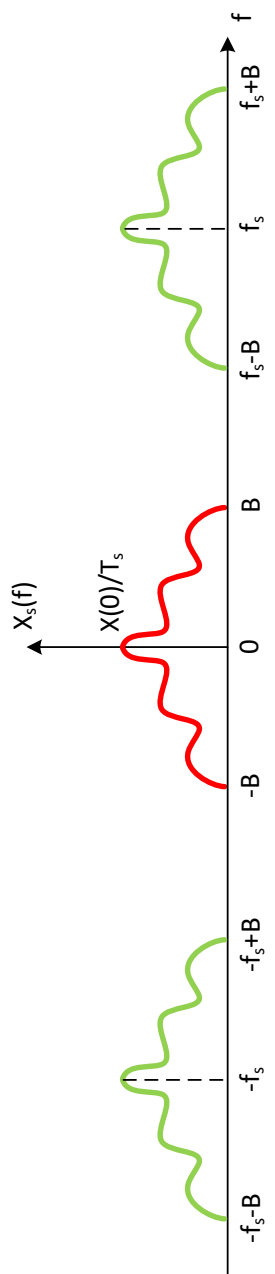
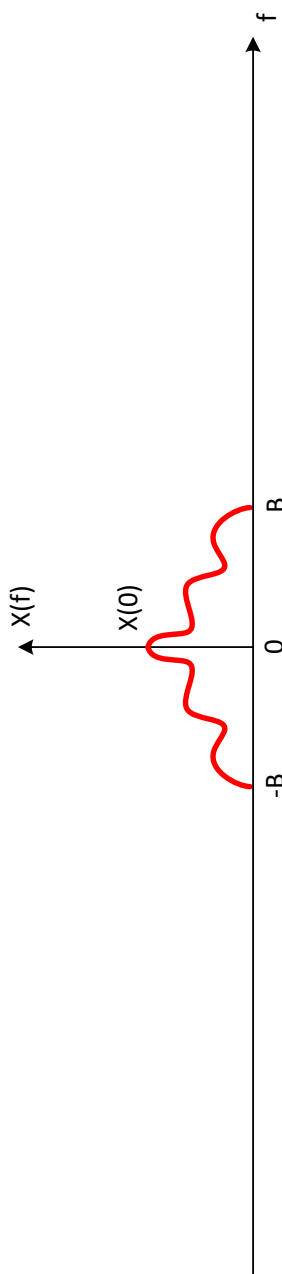
5. Θα μπορούσε κάποιος να θέσει το ερώτημα “γιατί δεν σχεδιάζουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο στο συχνοτικό διάστημα $[-B, B]$ αλλά στο $[-f_s/2, f_s/2]$.” Η απάντηση είναι ότι δε γνωρίζουμε πάντα ποιά είναι η μέγιστη συχνότητα του σήματος απαραίτητα, γνωρίζουμε όμως ότι - αν όλα τα έχουμε κάνει σωστά - το σήμα μπορεί να ανακτηθεί πλήρως ορίσουμε ως τη μέγιστη συχνότητά του την $f_s/2$, άσχετα αν πράγματι υπάρχει συχνοτικό περιεχόμενο λίγο πριν αυτή. Είναι μια δικλείδα ασφαλείας, δεδομένου ότι ο δειγματολήπτης έκανε σωστά τη δουλειά του. :-)
6. Ίσως επίσης αναρωτηθήκατε “γιατί δεν παίρνουμε μια αρκετά μεγάλη συχνότητα δειγματοληψίας ώστε να μην αναγκάζομαστε να εξετάζουμε κάθε φορά το θεώρημα του Shannon;”. Η απάντηση σε αυτό είναι - όπως ίσως μαντέψατε - το κόστος. Για παράδειγμα, σε ηχογραφήσεις φωνής, μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από 20 kHz ίσως είναι πλεονασματική, γιατί οι σημαντικές συχνοτικές συνιστώσες της ανθρώπινης φωνής σπάνια ξεπερνούν τα 10 kHz. Οπότε μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από $2 \cdot 10 = 20$ kHz αποθηκεύει πληροφορία με λίγη σημασία για την καταληπτότητα και την καθαρότητα της φωνής.

Αντίθετα, μερικά μουσικά όργανα μπορούν να παράξουν συχνότητες ως και τα 20 – 25 kHz, οπότε θα πρέπει να δειγματοληπτήσουμε τέτοιες ηχογραφήσεις με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s > 2 \cdot \{20 - 25\} = 40 - 50$ kHz. Όμως το ανθρώπινο αυτί μπορεί να ακούσει συχνότητες από 20 Hz ως περίπου 20 kHz. Άρα μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από $2 \cdot 20 = 40$ kHz πρακτικά δεν έχει πολύ νόημα.

Παρ’ όλα αυτά, τα CD του εμπορίου καθιέρωσαν (με πρωτεργάτρια τη Sony τη δεκαετία του ’70) τη συχνότητα δειγματοληψίας των 44.1 kHz, τόσο για το ότι είναι κοντά στο όριο των 20 kHz του ανθρώπινου αυτιού, όσο και για πρακτικούς λόγους υλοποίησης του τετραγωνικού παραθύρου που ανακατασκευάζει το φάσμα του σήματος συνεχούς χρόνου από το περιοδικό φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος.

12.3.4 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε πως εφαρμόζεται η δειγματοληψία σε μερικά παραδείγματα.

ΧΡΟΝΟΣΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Σχήμα 12.16: Η διαδικασία της δειγματοληψίας στο χώρο του χρόνου και της συχνότητας.

Παράδειγμα 12.4:

Ένα συνεχές σήμα της μορφής

$$x(t) = 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(4400\pi t) \quad (12.60)$$

δειγματοληπτείται με $f_s = 4000$ Hz παράγοντας την ακολουθία $x[n]$. Ελέγξτε αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι ικανή να μας δώσει πίσω το αρχικό σήμα από τα δείγματά του, και βρείτε τη μαθηματική έκφραση του $x[n]$.

Λύση:

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος $x(t)$ είναι προφανώς η μέγιστη συχνότητα που υπάρχει στα ημίτονά του, κι αυτή δεν είναι άλλη από την $f_{max} = 2200$ Hz. Όμως

$$2f_{max} = 2 \cdot 2200 = 4400 > f_s \quad (12.61)$$

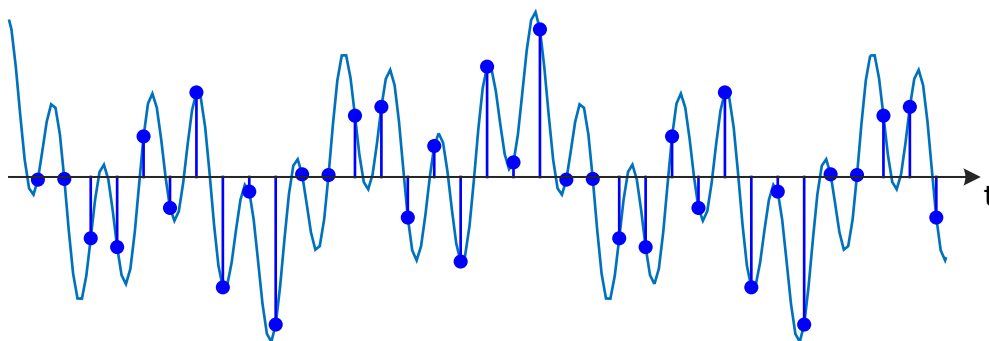
άρα το κριτήριο του Shannon δεν ικανοποιείται, οπότε ΔΕΝ μπορούμε να πάρουμε πίσω το αναλογικό σήμα από τα δείγματά του. Παρ' όλα αυτά, δε μας απαγορεύει κανείς να δειγματοληπτήσουμε με αυτή τη συχνότητα και να πάρουμε ένα διακριτό σήμα. :-)

Προφανώς $t = nT_s = n \frac{1}{4000}$ s. Αντικαθιστούμε όπου t με nT_s . Άρα θα είναι:

$$x[n] = 3 \cos(400\pi nT_s) + 5 \sin(1200\pi nT_s) + 6 \cos(4400\pi nT_s) \quad (12.62)$$

$$= 3 \cos\left(\frac{n\pi}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{3n\pi}{10}\right) + 6 \cos\left(\frac{11n\pi}{10}\right) \quad (12.63)$$

Το σήμα συνεχούς χρόνου καθώς και τα δείγματά του φαίνονται στο Σχήμα 12.18.



Σχήμα 12.18: Σήμα συνεχούς χρόνου και δείγματα αυτού για $f_s < 2f_{max}$.

Παράδειγμα 12.5:

Δείξτε ότι το φίλτρο

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi f_s t} \quad (12.64)$$

με $f_M < f_c < f_s - f_M$ και $f_s = \frac{1}{T_s}$ παίρνει την τιμή $h[nT_s] = \delta[n]$ για κάθε n , αν ισχύει ότι $f_c = \frac{f_s}{2}$. Δίνεται ότι η διακριτή συνάρτηση Δέλτα (ή αλλιώς Dirac Δέλτα) ορίζεται ως:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.65)$$

Λύση:

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_s t)}{\pi f_s t} = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi(f_s t)} = \text{sinc}(f_s t) \quad (12.66)$$

Δειγματοληπτούμε με $f_s = \frac{1}{T_s}$, αντικαθιστώντας όπου t με nT_s , κι έχουμε

$$h[nT_s] = \text{sinc}(f_s nT_s) = \text{sinc}\left(\frac{1}{T_s} nT_s\right) \iff h[n] = \text{sinc}(n) \quad (12.67)$$

Προφανώς, επειδή το συγκεκριμένο $\text{sinc}(n) = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n}$ μηδενίζεται όταν μηδενίζεται ο αριθμητής, δηλαδή

$$\sin(\pi n) = 0 \iff \sin(\pi n) = \sin(k\pi) \quad (12.68)$$

άρα στις θέσεις

$$\pi n = k\pi \iff n = k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (12.69)$$

και οι τιμές του n , ως ακέραιες, είναι ακριβώς πάνω σε αυτά τα σημεία μηδενισμού, ισχύει ότι

$$h[n] = \begin{cases} \text{sinc}(0) = 1, & n = 0, \\ \text{sinc}(n) = 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

που ουσιαστικά είναι ο ορισμός της διακριτής συνάρτησης Δέλτα, άρα

$$h[n] = \delta[n] \quad (12.70)$$

Παράδειγμα 12.6:

Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, ο οποίος έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $[-B, B]$. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τη δειγματοληψία των παρακάτω σημάτων:

(α') $x(t)$

(β') $x(t - t_0)$

(γ') $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$

(δ') $x(t - t_0) + x(t + t_0)$

(ε') $\frac{dx(t)}{dt}$

(ς') $x(t)x(t)$

(ζ') $x(t) * x(t)$

Λύση:

Προφανώς η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (ρυθμός Nyquist) καθορίζεται ΜΟΝΟ από το φάσμα του σήματος. Άρα:

(α') Η μέγιστη συχνότητα είναι B , άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 2B$.

(β') Ισχύει ότι

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0} \quad (12.71)$$

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος παραμένει B , άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 2B$.

(γ') Ισχύει ότι

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0) \quad (12.72)$$

Το σήμα έχει μετατοπιστεί γύρω από τη συχνότητα f_0 , άρα η μέγιστη συχνότητά του είναι πλέον $f_0 + B$. Έτσι, ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 2(f_0 + B)$.

(δ') Ισχύει ότι

$$x(t - t_0) + x(t + t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0} + X(f)e^{j2\pi ft_0} = 2X(f)\cos(2\pi ft_0) \quad (12.73)$$

Η μέγιστη συχνότητα του φάσματος παραμένει B , αφού το γινόμενο ενός πεπερασμένης ζώνης φάσματος με ένα άπειρης ζώνης δίνει αποτέλεσμα στο φάσμα πεπερασμένης ζώνης, άρα $f_s = 2B$.

(ε') Ισχύει ότι

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f) \quad (12.74)$$

Κι εδώ, η μέγιστη συχνότητα του φάσματος παραμένει B , για τον ίδιο λόγο με το προηγούμενο ερώτημα. Άρα $f_s = 2B$.

(ς') Ισχύει ότι

$$x(t)x(t) \longleftrightarrow X(f) * X(f) \quad (12.75)$$

Η συνέλιξη, όπως έχουμε δει, δυο σημάτων που είναι μη μηδενικά σε πεπερασμένα διαστήματα είναι μη μηδενική στο διάστημα που ορίζεται ως το άθροισμα των άκρων των διαστημάτων. Άρα το φάσμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[-B - B, B + B] = [-2B, 2B]$. Οπότε ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 4B$.

(ζ') Ισχύει ότι

$$x(t) * x(t) \longleftrightarrow X(f)X(f) = X^2(f) \quad (12.76)$$

Προφανώς ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 2B$, καθώς η ύψωση στο τετράγωνο δεν αλλάζει το εύρος συχνοτήτων που το φάσμα είναι μη μηδενικό.

Παράδειγμα 12.7:

Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα σήματα

(α') $\text{sinc}^2(100t)$

(β') $\frac{1}{100}\text{sinc}^2(100t)$

(γ') $\text{sinc}(100t) + 3\text{sinc}^2(60t)$

(δ') $\text{sinc}(50t) * \text{sinc}(100t)$

Λύση:

Ο ρυθμός Nyquist είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που ικανοποιεί το θεώρημα του Shannon, δηλ. η $2f_{max}$ του σήματος.

Επίσης, εδώ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της Δυσικότητας του Μετασχ. Fourier, που θυμίζεται ότι είναι

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \implies X(t) \longleftrightarrow x(-f) \quad (12.77)$$

Επειδή εδώ έχουμε σήματα $\text{sinc}(\cdot)$ στο χρόνο, από τα γνωστά μας ζεύγη (θέτοντας $A = 1$), και με την ιδιότητα της Δυσικότητας που μας λέει ότι αν

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T\text{sinc}(fT) \quad (12.78)$$

τότε

$$T\text{sinc}(tT) \longleftrightarrow \text{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (12.79)$$

και αν

$$\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T\text{sinc}^2(fT) \quad (12.80)$$

τότε

$$T\text{sinc}^2(tT) \longleftrightarrow \text{tri}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{tri}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (12.81)$$

όπου το $-f$ γίνεται f επειδή οι συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$, $\text{rect}(\cdot)$ είναι άρτιες. Άρα θα είναι

(α')

$$\text{sinc}^2(100t) \longleftrightarrow \frac{1}{100}\text{tri}\left(\frac{f}{100}\right) \quad (12.82)$$

Το σήμα $\text{tri}(\cdot)$ είναι ένας τριγωνικός παλμός με διάρκεια στο $[-100, 100]$ Hz. Άρα η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100 Hz, άρα ο ρυθμός Nyquist θα είναι $f_s = 200$ Hz.

(β') Η αλλαγή στο πλάτος δεν επηρεάζει το φάσμα, άρα κι εδώ $f_s = 200$ Hz.

(γ') Είναι

$$\text{sinc}(100t) + 3\text{sinc}^2(60t) \longleftrightarrow \frac{1}{100}\text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + 3\frac{1}{60}\text{tri}\left(\frac{f}{60}\right) \quad (12.83)$$

άρα η μέγιστη συχνότητα είναι 60 Hz, οπότε ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 120$ Hz.

(δ') Είναι

$$\text{sinc}(50t) * \text{sinc}(100t) \longleftrightarrow \frac{1}{50}\text{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \frac{1}{100}\text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) \quad (12.84)$$

άρα η μέγιστη συχνότητα είναι 25 Hz, οπότε ο ρυθμός Nyquist θα είναι $f_s = 50$ Hz.