

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό Υπόβαθρο

2.1 Εισαγωγή

Η μελέτη των σημάτων και των συστημάτων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια βασίζεται κατά κύριο λόγο σε βασικές γνώσεις Απειροστικού Λογισμού και Μιγαδικών Αριθμών. Εν γένει, η θεωρία σημάτων και συστημάτων έχει πολύ ισχυρά μαθηματικά θεμέλια τα οποία εκτείνονται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε μόνο στα απαραίτητα, τα οποία και αποτελούν το αναγκαίο υπόβαθρο για τον αναγνώστη. Ο λόγος της σύντομης αυτής ανασκόπησης έγκειται στο ότι αφ' ενός το περισσότερο περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου δεν (πρέπει να) είναι καινούριο στον αναγνώστη που έχει ολοκληρώσει την τριτοβάθμια εκπαίδευση ή που έχει στοιχειώδες υπόβαθρο στον Απειροστικό Λογισμό, αφ' ετέρου είναι χρήσιμο να "φρεσκαριστούν" μερικές βασικές μαθηματικές έννοιες οι οποίες "διαπερνούν" ολόκληρο το βιβλίο ως το τέλος του.

2.2 Μιγαδικοί Αριθμοί

Θα ξεκινήσουμε με μια μικρή ανασκόπηση στους **μιγαδικούς αριθμούς**. Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι ένα σπουδαίο μαθηματικό εργαλείο με εφαρμογές σε πολλές επιστήμες μηχανικού. Παρ' όλο που οι μιγαδικοί αριθμοί δεν υπάρχουν πουθενά στη φύση και αποτελούν καθαρά θεωρητικό κατασκεύασμα, έχουν αποδειχθεί πολύτιμοι στην απλοποίηση πραγματικών προβλημάτων.

Ο λόγος πίσω από αυτό είναι ότι ενώ ένα πραγματικό πρόβλημα πρέπει να ξεκινά και να τελειώνει με πραγματικούς αριθμούς, η πορεία προς την επίλυση δεν είναι απαραίτητο να περνά μέσα από το "βασίλειο" των πραγματικών αριθμών. Φυσικά κάθε πραγματικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί αποκλειστικά χρησιμοποιώντας πραγματικούς αριθμούς και σχέσεις. Όμως, η χρήση μιγαδικών αριθμών και σχέσεων μπορεί να απλοποιήσει σημαντικά τη διαδικασία. Άρα, ο μοναδικός πραγματικός λόγος μελέτης των μιγαδικών αριθμών είναι ένας: *γιατί μας διευκολύνουν!*

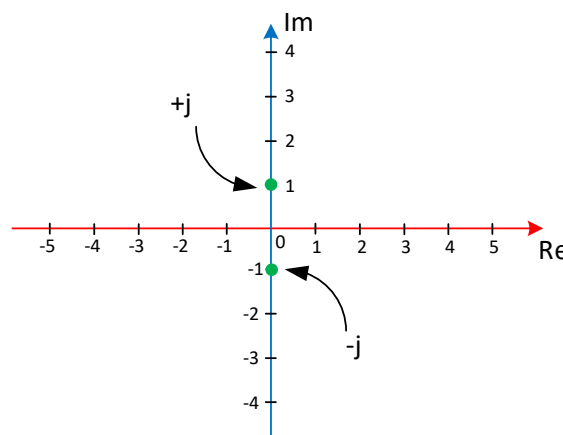
Ας θέσουμε το εξής πρόβλημα ως κίνητρο: έστω ότι σας ζητείται να βρείτε τη λύση της εξίσωσης

$$x^2 + 1 = 0 \quad (2.1)$$

Αβιάστα θα απαντούσε κανείς ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει πραγματική λύση. Πράγματι, αυτή είναι η σωστή απάντηση. Αν όμως "χαλαρώσουμε" λίγο τη μαθηματική μας αυστηρότητα, μπορούμε να αναρωτηθούμε τι τιμή θα έπρεπε να έχει το x^2 ώστε το x να αποτελεί ρίζα της εξίσωσης. Προφανώς θα πρέπει

$$x^2 = -1 \iff x = \pm\sqrt{-1} \quad (2.2)$$

Έστω ότι ορίζουμε αυτήν την περίεργη λύση της παραπάνω εξίσωσης ως $j = \sqrt{-1}$. Αν λοιπόν αποδεσμευθούμε από το χώρο των πραγματικών αριθμών, μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο χώρο, αυτό των *μιγαδικών* αριθμών, ο οποίος συμβολίζεται ως $\mathbb{C}$ και στον οποίο λύσεις των εξισώσεων όπως η παραπάνω είναι απόλυτα αποδεκτές! Στο χώρο αυτό, οι αριθμοί δεν αναπαρίστανται επάνω σε έναν άξονα (όπως στο χώρο των πραγματικών αριθμών) αλλά σε ένα επίπεδο. Δείτε το Σχήμα 2.1. Ο οριζόντιος



Σχήμα 2.1: Μιγαδικό επίπεδο.

άξονας είναι ο άξονας των πραγματικών αριθμών όπως τον γνωρίζετε (και αναμενόμενα ονομάζεται *πραγματικός άξονας*), ενώ ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται *φανταστικός άξονας*, και αποτελείται από πραγματικά πολλαπλάσια της φανταστικής μονάδας j . Προσέξτε όμως ότι η φανταστική μονάδα j δεν αποτελεί μέρος του άξονα, αλλά εμείς πρέπει να καταλαβαίνουμε ότι ο άξονας αυτός αφορά το τμήμα του μιγαδικού αριθμού που σχετίζεται με τη φανταστική μονάδα. Στο ίδιο Σχήμα απεικονίζονται οι μιγαδικοί αριθμοί $\pm j$ που αποτελούν λύσεις της παραπάνω εξίσωσης¹.

Ας γενικεύσουμε το παραπάνω παράδειγμα για ένα πολυώνυμο της μορφής

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (2.3)$$

Οι ρίζες του δίνονται ως

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad (2.4)$$

με

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad (2.5)$$

Γνωρίζετε ότι αν $\Delta > 0$ το πολυώνυμο έχει δυο διακριτές πραγματικές ρίζες, αν $\Delta = 0$ το πολυώνυμο έχει μια διπλή ρίζα, και αν $\Delta < 0$ μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Delta = -\Delta_+ \quad (2.6)$$

με $\Delta_+ = |\Delta|$, και τότε

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad (2.7)$$

$$= \frac{-\beta \pm \sqrt{(-1)\Delta_+}}{2\alpha} \quad (2.8)$$

$$= \frac{-\beta \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{\Delta_+}}{2\alpha} \quad (2.9)$$

$$= \frac{-\beta \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \quad (2.10)$$

$$= \frac{-\beta \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \quad (2.11)$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1:

Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \quad (2.12)$$

Λύση:

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = (-2)^2 - 20 = 4 - 20 = -16 < 0 \quad (2.13)$$

άρα η εξίσωση δεν έχει λύση για πραγματικά x . Όμως, στο χώρο των μιγαδικών αριθμών, έχουμε

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} = \frac{2 \pm j\sqrt{16}}{2} = 1 \pm j2 \quad (2.14)$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $x_{1,2} = 1 \pm j2$. ■

Επιβεβαιώστε κάνοντας πράξεις ότι οι παραπάνω αριθμοί αποτελούν ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι ένα εύπλαστο εργαλείο. Μπορούν να πάρουν πολλές μορφές, έχουν αλγεβρικές

¹ Ακριβέστερα, η αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο ονομάζεται *εικόνα* του μιγαδικού αριθμού.

και γεωμετρικές ιδιότητες και ερμηνείες, γι' αυτό και η χρήση τους στη μηχανική είναι αρκετά διαδεδομένη. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς ως ξεχωριστές "οντότητες", χωρίς να συνδέονται απαραίτητα με τη λύση πολυωνυμικών εξισώσεων. Θα δούμε τις διάφορες μορφές και ιδιότητές τους, τις σχέσεις τους με την τριγωνομετρία, δηλ. με τα γνωστά σας ημίτονα και συνημίτονα, θα γνωρίσουμε τη βασική θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων, και αρκετά άλλα χρήσιμα στοιχεία.

2.2.1 Καρτεσιανή μορφή

Ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + jy$ αναπαρίσταται στο μιγαδικό επίπεδο ως ένα σημείο με συντεταγμένες $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται *καρτεσιανή*. Στο μιγαδικό επίπεδο, ένας μιγαδικός μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα με αρχή το $(0, 0)$ και πέρας τις συντεταγμένες του μιγαδικού αριθμού, όπως στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων του Σχήματος 2.2.

Η τετμημένη x ονομάζεται *πραγματικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού, ενώ η τεταγμένη y ονομάζεται *φανταστικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού. Είναι πολύ σύνηθες να συμβολίζουμε τα παραπάνω ως

$$\Re\{z\} = x \quad (2.15)$$

$$\Im\{z\} = y \quad (2.16)$$

δηλ.

$$z = x + jy = \Re\{z\} + j\Im\{z\} \quad (2.17)$$

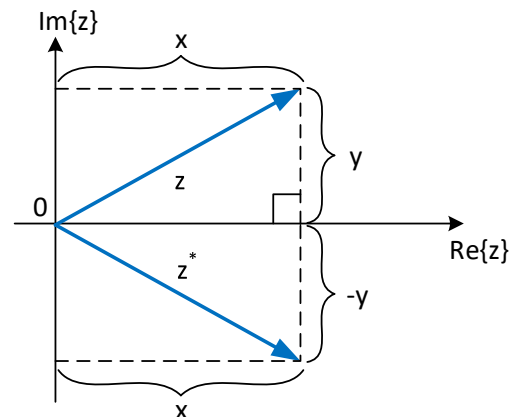
Το μήκος του διανύσματος που αναπαριστά το μιγαδικό z ονομάζεται *μέτρο* του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται ως $|z|$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο του Σχήματος 2.2 και με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος παρατηρούμε ότι

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.18)$$

Ο συζυγής μιγαδικός αριθμός

$$z^* = x - jy \quad (2.19)$$

έχει ίδιο μέτρο, ίδιο πραγματικό μέρος, και αντίθετο φανταστικό μέρος με τον z . Δυο τυχαίοι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί z, z^* αναπαρίστανται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Ζεύγος συζυγών μιγαδικών z, z^* .

Αν επιστρέψουμε στο εισαγωγικό πρόβλημα της λύσης ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ένα τριώνυμο με *πραγματικούς* συντελεστές και αρνητική διακρίνουσα Δ έχει πάντα *συζυγείς* ρίζες. Ακόμα γενικότερα, ένα πολυώνυμο N βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει N μιγαδικές (εν γένει) ρίζες, οι οποίες αποτελούνται από ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών. Για παράδειγμα, το πολυώνυμο $x^{100} + 3x^{50} + 10$ έχει 100 ρίζες, και όσες από αυτές είναι μιγαδικές πρέπει απαραίτητα να έρχονται σε συζυγή ζεύγη. Αντίθετα, το πολυώνυμο $jx^2 + x + 1$ έχει δυο *μη-συζυγείς* μιγαδικές ρίζες - επιβεβαιώστε το υπολογίζοντάς τις!

Παράδειγμα 2.2:

Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο

$$2z^2 + 8z + k^2 = 0 \quad (2.20)$$

έχει δυο μιγαδικές ρίζες μέτρου 5.

Λύση:

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι

$$z_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 8k^2}}{4} = -2 \pm \frac{\sqrt{64 - 8k^2}}{4} \quad (2.21)$$

Εφ' όσον έχει δυο μιγαδικές ρίζες, η διακρίνουσά του θα είναι αρνητική. Έτσι

$$z_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 8k^2}}{4} = \frac{-8 \pm j\sqrt{8k^2 - 64}}{4} = -2 \pm j\frac{\sqrt{8k^2 - 64}}{4} \quad (2.22)$$

Οι ρίζες ικανοποιούν τη σχέση $|z_{1,2}| = 5 \iff |z_{1,2}|^2 = 25$, και από την τελευταία έχουμε

$$|z_{1,2}|^2 = 25 \iff (-2)^2 + \left(\frac{\sqrt{8k^2 - 64}}{4}\right)^2 = 25 \quad (2.23)$$

$$4 + \frac{8k^2 - 64}{4} = 25 \iff 8k^2 - 64 = 336 \quad (2.24)$$

$$8k^2 = 400 \iff k^2 = 50 \quad (2.25)$$

Άρα οι τιμές του k που ικανοποιούν την απαίτηση της εκφώνησης είναι οι $k = \pm\sqrt{50}$. ■

Οι μιγαδικοί αριθμοί διαθέτουν ένα σύνολο από πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, μερικές από τις οποίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1. Η απόδειξή τους είναι καθαρά θέμα πράξεων.

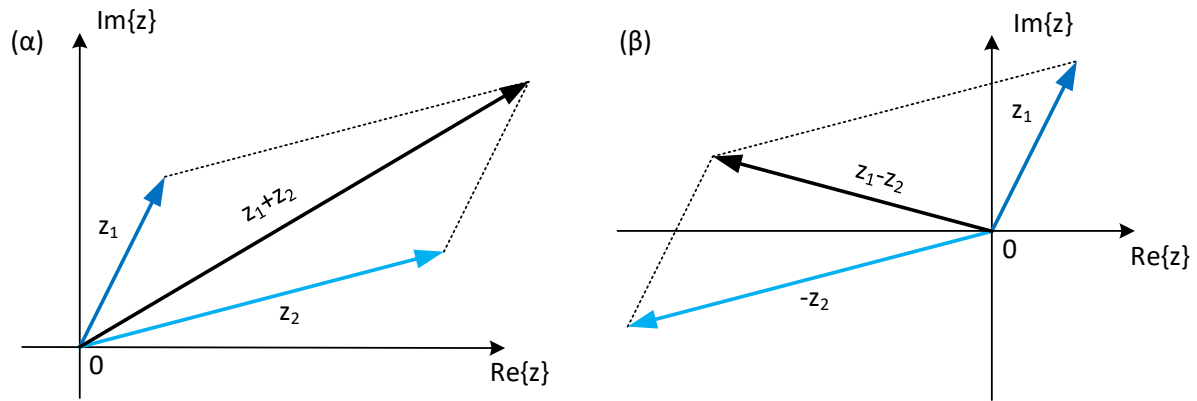
Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή	
Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή
	$z_1 = x + jy$
	$z_2 = u + jv$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \left(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}\right) + j\left(\frac{uy - xv}{u^2 + v^2}\right)$
Συζυγία	$z_1^* = x - jy$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\}$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\}$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = z_1 ^2 = x^2 + y^2$
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j\frac{2xy}{x^2 + y^2}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$ $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\Re\{z_1\} = \Re\{z_2\}$ και $\Im\{z_1\} = \Im\{z_2\}$
$z \in \Re$	$z = z^*$
$z \in \Im$	$z = -z^*$

Πίνακας 2.1: Πίνακας Ιδιοτήτων των Μιγαδικών Αριθμών (καρτεσιανή μορφή)

Μπορείτε να δοκιμάσετε να τις αποδείξετε, για εξάσκηση. Είναι σημαντικό να παρατηρήσετε ότι οι βασικές πράξεις του αθροίσματος και της διαφοράς έχουν διαισθητική ερμηνεία υπό την οπτική της διανυσματικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών z_1 , z_2 , καθώς ισοδυναμούν με πράξεις μεταξύ διανυσμάτων. Δείτε το Σχήμα 2.3, όπου εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για να βρούμε το άθροισμα και τη διαφορά δυο μιγαδικών στο μιγαδικό επίπεδο. Πρέπει να μπορείτε να παρατηρήσετε ότι απλά προσθέτουμε γραφικά τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των μιγαδικών μεταξύ τους. Επίσης, δείτε τις πράξεις και τις ιδιότητες που σχετίζονται με τη συζυγία και προσπαθήστε να τις αποδείξετε. Θα τις χρησιμοποιήσουμε αρκετά στη συνέχεια.

Αντίθετα, οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης δεν έχουν ιδιαίτερη διαίσθηση, καθώς το αποτέλεσμα μοιάζει πολύπλοκο να ερμηνευτεί. Σύντομα θα δούμε μια καλύτερη αναπαράσταση και ερμηνεία για αυτές τις δυο πράξεις.

Ας δούμε ένα παράδειγμα των παραπάνω.



Σχήμα 2.3: (α) Πρόσθεση και (β) αφαίρεση μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο.

Παράδειγμα 2.3:

Αν $z_1 = 1 + j$ και $z_2 = 1 - j2$, υπολογίστε τους μιγαδικούς

(α') $z_1^2 z_2$

(β') $\frac{2j}{z_1} + \frac{1-j}{z_2}$

(γ') z_2^4

(δ') $\frac{z \Re\{z^*\} - z^* \Im\{z\}}{z^* \Re\{z\} + z \Im\{z^*\}}$

Λύση:

(α') Έχουμε

$$z_1^2 z_2 = (1 + j)^2 (1 - j2) = (1 + 2j + j^2)(1 - j2) = 2j(1 - j2) = 2j - 4j^2 = 2j + 4 = 4 + j2 \quad (2.26)$$

(β') Θα είναι

$$\frac{2j}{z_1} + \frac{1-j}{z_2} = \frac{2jz_2}{z_1 z_2} + \frac{(1-j)z_1}{z_1 z_2} = \frac{2jz_2 + (1-j)z_1}{z_1 z_2} \quad (2.27)$$

$$= \frac{(2jz_2 + (1-j)z_1)(z_1 z_2)^*}{z_1 z_2 (z_1 z_2)^*} = \frac{(2jz_2 + (1-j)z_1)z_1^* z_2^*}{|z_1 z_2|^2} \quad (2.28)$$

$$= \frac{(2j(1-j2) + (1+j)(1-j))(1-j)(1+j2)}{10} = \frac{(2j - 4j^2 + 1 + j - j - j^2)(3-j)}{10} \quad (2.29)$$

$$= \frac{(2j + 6)(3-j)}{10} = \frac{(2j + 6)(3-j)}{10} \quad (2.30)$$

$$= \frac{6j - 2j^2 + 18 - 6j}{10} = \frac{20}{10} = 2 \quad (2.31)$$

(γ') Είναι

$$z_2^4 = (z_2^2)^2 = ((1-j2)^2)^2 = (1-4j+4j^2)^2 = (-3-4j)^2 = 9+24j+16j^2 = -7+24j \quad (2.32)$$

(δ') Έχουμε

$$\frac{z_1 \Re\{z_1^*\} - z_2^* \Im\{z_2\}}{z_2^* \Re\{z_2\} + z_1 \Im\{z_1^*\}} = \frac{z_1 + z_2^*}{z_2^* - z_1} = \frac{1+j+1+j2}{1-j2-(1+j)} = \frac{2+j3}{-j3} = -1 + j\frac{2}{3} \quad (2.33)$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

$$\pm j = \mp \frac{1}{j} \quad (2.34)$$

την οποία θα χρησιμοποιούμε συχνά.

2.2.2 Πολική μορφή

Μια εναλλακτική - και πιο χρήσιμη - μορφή ενός μιγαδικού αριθμού είναι η περίφημη **πολική μορφή**. Ένας μιγαδικός αριθμός z με συντεταγμένες (x, y) μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα διαφορετικό ζεύγος τιμών, (ρ, ϕ) , που αναπαριστούν την απόσταση ρ του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων - δηλ. το μέτρο του - και τη γωνία ϕ μεταξύ του οριζόντιου άξονα και του διανύσματος που αντιπροσωπεύει το μιγαδικό αριθμό.

Το Σχήμα 2.4 απεικονίζει τις παραμέτρους ρ και ϕ . Σημειώστε ότι η γωνία ϕ ορίζεται κατά την ορθή μαθηματική φορά (αντίθετα της φοράς του ρολογιού).

Από το Σχήμα, είναι εμφανές ότι

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.35)$$

το οποίο έχουμε ήδη ονομάσει **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού z . Μερικές χρήσιμες ιδιότητες για το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού είναι οι ακόλουθες.

$$(\alpha') \quad |z| = |z^*| = |-z|$$

$$(\beta') \quad |z|^2 = zz^* = z^*z$$

$$(\gamma') \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$(\delta') \quad |z^k| = |z|^k$$

$$(\epsilon') \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$(\zeta') \quad \text{Τριγωνική Ανισότητα I: } ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$(\zeta') \quad \text{Τριγωνική Ανισότητα II: } ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Η γωνία ϕ , η οποία αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία ως **φάση**, ορίζεται ως

$$\phi = \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), & x > 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \text{απροσδιόριστη}, & x = y = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Η **πρωτεύουσα τιμή** της φάσης ϕ ορίζεται πάντα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, όπως παραπάνω, και θα προσπαθούμε να εκφράζουμε κάθε τιμή της φάσης στο διάστημα αυτό. Μερικές σπουδαίες ιδιότητες της φάσης είναι οι ακόλουθες.

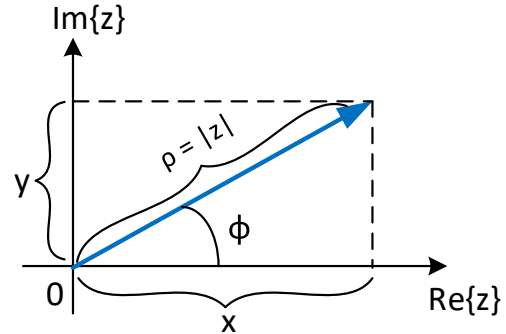
$$(\alpha'') \quad \phi_{z_1 z_2} = \phi_{z_1} + \phi_{z_2}$$

$$(\beta'') \quad \phi_{z_1^k} = k \phi_{z_1}$$

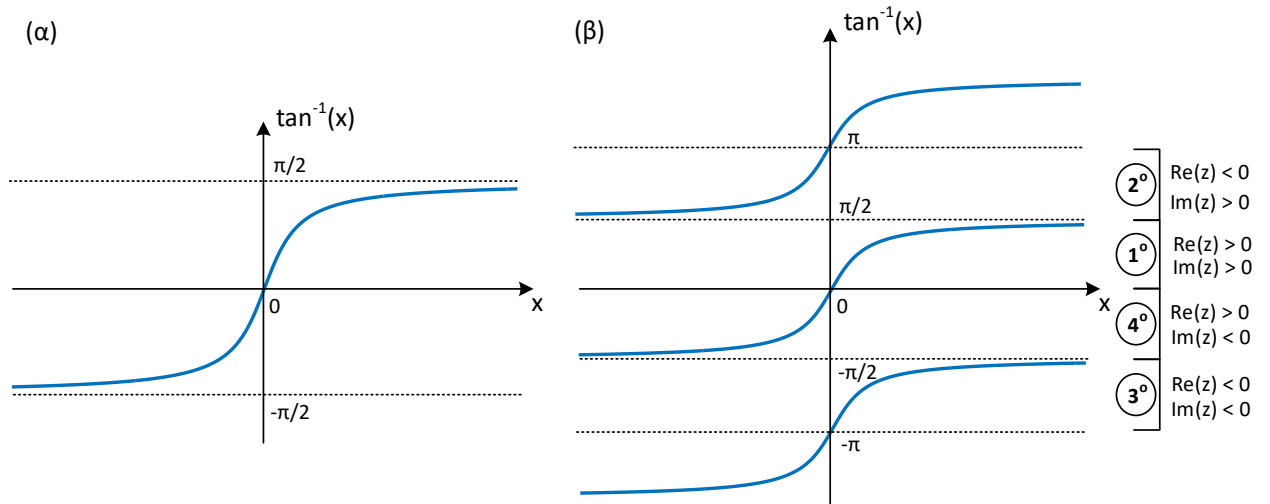
$$(\gamma'') \quad \phi_{z_1/z_2} = \phi_{z_1} - \phi_{z_2}$$

Προτού προχωρήσουμε, θα ήταν ενδιαφέρον να συζητήσουμε λίγο την (φαινόμενη) πολυπλοκότητα της φάσης και να εξηγήσουμε γιατί υπάρχουν τόσες περιπτώσεις στον υπολογισμό της. Η συνάρτηση της αντίστροφης εφαπτομένης έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, όπως στο Σχήμα 2.5(α), δηλ. αφορούν το πρώτο και το τέταρτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου. Σε αυτά, το **πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού είναι θετικό**. Οι τιμές αυτές της φάσης είναι αυτές που ονομάσαμε νωρίτερα ως **πρωτεύουσες**. Κάθε άλλη τιμή της φάσης εκτός του $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ονομάζονται **δευτερεύουσες** τιμές. Είναι φανερό λοιπόν ότι η αντίστροφη εφαπτομένη μπορεί να μας δώσει τιμές φάσης μόνο στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, δηλ. να μας υποδείξει σωστά τους μιγαδικούς που ανήκουν είτε στο πρώτο είτε στο τέταρτο τεταρτημόριο. Για τους υπόλοιπους;;

Για τον υπολογισμό της φάσης μέσω της αντίστροφης εφαπτομένης χρειάζεται να υπολογίσουμε το λόγο $\Im\{z\}/\Re\{z\}$. Ο λόγος αυτός μπορεί φυσικά να είναι θετικός ή αρνητικός. Δείτε για παράδειγμα τους μιγαδικούς $z_1 = 1 - j$ και $z_2 = -1 + j$ του Σχήματος 2.6. Πέραν αμφιβολίας, οι μιγαδικοί αυτοί βρίσκονται στο 4ο και στο 2ο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου, αντίστοιχα, οπότε οι φάσεις τους θα είναι σίγουρα διαφορετικές (εν γένει).



Σχήμα 2.4: Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού z .



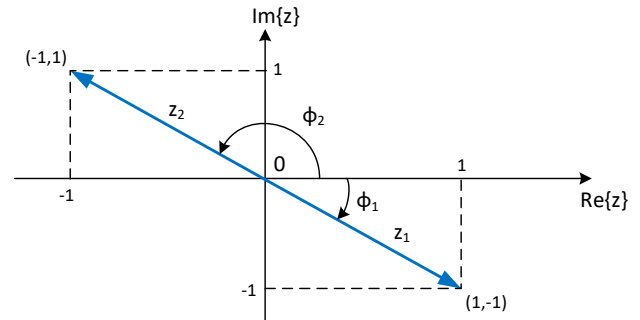
Σχήμα 2.5: (α) Πρωτεύουσα τιμή φάσης και (β) πρωτεύουσα και δευτερεύουσες τιμές φάσης.

Ας υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της αντίστροφης εφαπτομένης για τη φάση τους χωρίς να λάβουμε υπόψη μας τη Σχέση (2.36). Θα είναι

$$\phi_{z_1} = \tan^{-1} \frac{-1}{1} = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad (2.37)$$

$$\phi_{z_2} = \tan^{-1} \frac{1}{-1} = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad (!!!) \quad (2.38)$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση αντίστροφης εφαπτομένης είναι “τυφλή” στο πρόσημο του πραγματικού και του φανταστικού μέρους των μιγαδικών αριθμών! Θεωρεί πως και οι δυο, επιβεβαιωμένα διαφορετικοί, μιγαδικοί αριθμοί σχηματίζουν την ίδια γωνία με την οριζόντιο άξονα, δηλ. 45° κάτω από αυτόν. Ασφαλώς η γωνία του μιγαδικού αριθμού z_1 είναι σωστή: πράγματι ο μιγαδικός αριθμός z_1 σχηματίζει γωνία -45 μοίρες με τον οριζόντιο άξονα. Δε μας κάνει εντύπωση καθώς ο μιγαδικός αριθμός αυτός βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο, όπου η αντίστροφη εφαπτομένη “προβλέπει” σωστά. Πώς θα διορθώσουμε πρόβλημα με τον μιγαδικό z_2 , ο οποίος ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο; Μα φυσικά χρησιμοποιώντας τις δευτερεύουσες τιμές της συνάρτησης φάσης! Αυτές οι τιμές φαίνονται στο Σχήμα 2.5(β) και η διόρθωση “υπαγορεύεται” από τις περιπτώσεις της Σχέσης (2.36).



Σχήμα 2.6: Μιγαδικοί z_1 και z_2 .

2.2.3 Σχέσεις του Euler

Στην προσπάθειά μας να απλοποιήσουμε την πολική μορφή αλλά και να την κάνουμε πιο διαχειρίσιμη, μπορούμε - από τον Απειροστικό Λογισμό και τις Σειρές MacLaurin - να δείξουμε ότι

$$e^{j\phi} = 1 + j\phi + \frac{(j\phi)^2}{2!} + \frac{(j\phi)^3}{3!} + \frac{(j\phi)^4}{4!} + \dots \quad (2.39)$$

$$= 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - j\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \dots \quad (2.40)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(j\phi)^n}{n!} \quad (2.41)$$

και

$$\cos(\phi) = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \frac{\phi^8}{8!} + \dots \quad (2.42)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \phi^{2n} \quad (2.43)$$

$$\sin(\phi) = \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \frac{\phi^9}{9!} + \dots \quad (2.44)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \phi^{2n+1} \quad (2.45)$$

και άρα καταληγουμε ότι

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j \sin(\phi) \quad (2.46)$$

η οποία είναι η περίφημη **Σχέση του Euler**, προς τιμήν του μεγάλου μαθηματικού Leonard Euler που την ανακάλυψε². Από τη σχέση του Euler μπορούμε να ορίσουμε τις **αντίστροφες σχέσεις του Euler** ως

$$\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} \quad (2.47)$$

$$\sin(\phi) = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} \quad (2.48)$$

οι οποίες είναι κι αυτές μεγάλης σημασίας. Φροντίστε να τις συνηθίσετε! ☺

Οπότε, η πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού z , όπως αυτού στο Σχήμα 2.4, μπορεί να γραφεί ως

$$z = x + jy = |z|(\cos(\phi) + j \sin(\phi)) = |z|e^{j\phi} \quad (2.49)$$

με

$$x = |z| \cos(\phi), \quad y = |z| \sin(\phi), \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.50)$$

Ας εξετάσουμε ξανά τον Πίνακα 2.1 αλλά χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την πολική μορφή. Ο Πίνακας 2.2 είναι αυτός που προκύπτει με εφαρμογή της πολικής μορφής.

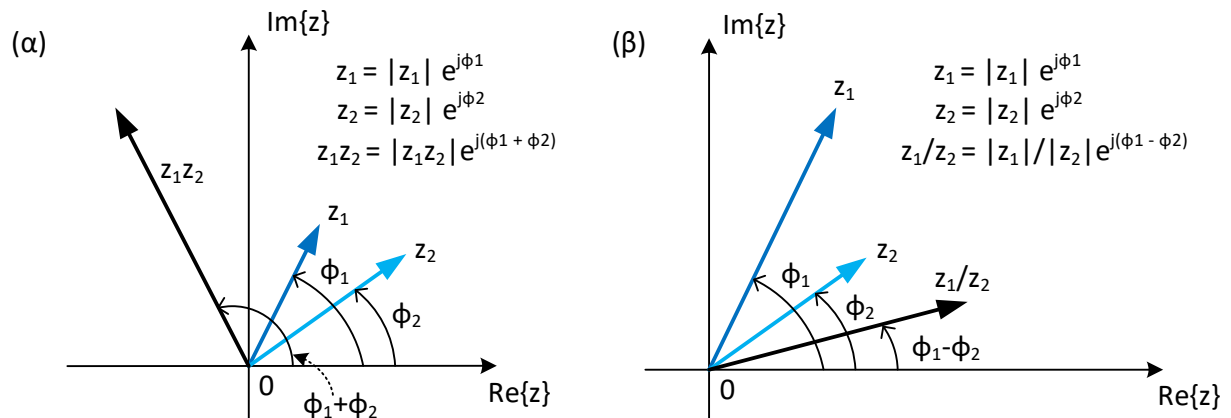
Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Πολική Μορφή	
Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή
	$z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1}, \rho_1 > 0$
	$z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2}, \rho_2 > 0$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} + \rho_2 e^{j\phi_2}$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} - \rho_2 e^{j\phi_2}$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \rho_2 e^{j\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$
Συζυγία	$z_1^* = \rho_1 e^{-j\phi_1}$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} = 2\rho \cos(\phi_1)$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\} = 2j\rho \sin(\phi_1)$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \rho_1 \rho_1 e^{j\phi_1} e^{-j\phi_1} = \rho_1^2 = z_1 ^2$
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_1 e^{-j\phi_1}} = e^{j2\phi_1}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} + \rho_2 e^{-j\phi_2}$
	$(z_1 - z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} - \rho_2 e^{-j\phi_2}$
	$(z_1 z_2)^* = \rho_1 \rho_2 e^{-j(\phi_1 + \phi_2)}$
	$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-j(\phi_1 - \phi_2)}$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{j\phi_1}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-j\phi_1}$
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $ \rho_1 = \rho_2 $ και $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Πίνακας 2.2: Πίνακας Ιδιοτήτων των Μιγαδικών Αριθμών (πολική μορφή)

Συγκρίνοντας τους Πίνακες 2.1 και 2.2, παρατηρούμε ότι το άθροισμα και η διαφορά μιγαδικών αριθμών απλοποιείται όταν χρησιμοποιούμε καρτεσιανές συντεταγμένες, ενώ αντίθετα ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση

²Μια πιο κομψή μορφή της, η $e^{j\pi} + 1 = 0$ θεωρείται ως η ομορφότερη εξίσωση όλων των εποχών: συνδέει τους θεμελιώδεις αριθμούς $e, j, \pi, 1, 0$ και τις πράξεις της πρόσθεσης και της ύψωσης σε δύναμη.

μιγαδικών αριθμών είναι προτιμότερο να γίνεται στην πολική μορφή τους. Δείτε στο Σχήμα 2.7 τη διαισθητική ερμηνεία του γινομένου και του πηλίκου δυο μιγαδικών αριθμών όταν τους κοιτάζει κανείς σε πολική μορφή. Μπο-



Σχήμα 2.7: (α) Πολλαπλασιασμός και (β) διαίρεση μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο.

ρείτε να βρείτε που βρίσκεται ο μιγαδικός z^2 για ένα δοθέντα μιγαδικό $z = |z|e^{j\phi}$; ☺

Είναι χρήσιμο να βρούμε ξεχωριστά την πολική μορφή για κάποιους συγκεκριμένους μιγαδικούς αριθμούς, όπως οι $\pm 1, \pm j$, καθώς η χρήση τους απλοποιεί σημαντικά τις σχέσεις που θα συναντήσουμε στη συνέχεια. Ο Πίνακας 2.3 συνοψίζει τις πολικές μορφές μιγαδικών αριθμών που συναντώνται συχνά στην πράξη.

Συνήθεις πολικές μορφές	
Φάση ϕ	Πολική μορφή
0	$e^{j0} = 1$
$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
$\pm k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$
$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
$\pm 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm j2k\pi} = 1$
$\pm \frac{\pi}{2}$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$
$\pm k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi/2} = (\pm j)^k = \begin{cases} \pm j, & k = 1, 5, 9, 13, \dots \\ \mp j, & k = 3, 7, 11, 15, \dots \\ -1, & k \text{ άρτιος} \end{cases}$

Πίνακας 2.3: Πολική μορφή συχνά χρησιμοποιούμενων μιγαδικών αριθμών

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.4:

Εκφράστε καθέναν από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε καρτεσιανή μορφή ($x + jy$):

- (α') $\frac{1}{2}e^{j\pi}$ (γ') $e^{j\pi/2}$ (ε') $e^{j5\pi/2}$ (ζ') $\sqrt{2}e^{j9\pi/4}$
 (β') $\frac{1}{2}e^{-j\pi}$ (δ') $e^{-j\pi/2}$ (Ϝ') $\sqrt{2}e^{j\pi/4}$ (η') $\sqrt{2}e^{-j9\pi/4}$

Λύση:

Θα είναι

$$(\alpha') \quad \frac{1}{2}e^{j\pi} = \frac{1}{2}\cos(\pi) + \frac{1}{2}j\sin(\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$(\beta') \quad \frac{1}{2}e^{-j\pi} = \frac{1}{2}\cos(-\pi) + \frac{1}{2}j\sin(-\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$(Υ') \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$$

$$(Δ') \quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j$$

$$(Ε') \quad e^{j\frac{5\pi}{2}} = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{4\pi + \pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{4\pi + \pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$$

$$(Ζ') \quad \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}j\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + j$$

$$(Ζ') \quad \sqrt{2}e^{j\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{j\frac{8\pi + \pi}{4}} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = 1 + j$$

$$(Η') \quad \sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{-j\frac{8\pi + \pi}{4}} = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}j\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - j$$

Παράδειγμα 2.5:

Εκφράστε καθέναν από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε πολική μορφή $re^{j\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$:

(α') 5	(Υ') $-3j$	(Ε') $(1-j)^2$	(Ζ') $\frac{1+j}{1-j}$
(β') -2	(Δ') $\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$	(Ζ') $j(1-j)$	(Η') $\frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{3}}$

Λύση:
Θα είναι

$$(α') \quad 5 = 5e^{j0}$$

$$(β') \quad -2 = 2e^{j\pi}$$

$$(Υ') \quad -3j = 3e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$(Δ') \quad \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ με } |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \text{ με } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \text{ άρα } e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$(Ε') \quad (1-j)^2 = 1 - 2j + j^2 = 1 - 2j - 1 = -2j = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$(Ζ') \quad j(1-j) = j - j^2 = j + 1 = 1 + j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$(Ζ') \quad \frac{1+j}{1-j} = \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}} = e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{4}} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$(Η') \quad \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1+j)}{2(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{e^{j\frac{\pi}{3}}} = e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{3}} = e^{-j\frac{\pi}{12}}$$

2.2.4 Η Σχέση του De Moivre

Όταν υπολογίζουμε δυνάμεις μιγαδικών αριθμών, των οποίων ο εκθέτης είναι ακέραιος αριθμός, είναι πολύ χρήσιμη η γνωστή σχέση του De Moivre:

$$z^n = (x + jy)^n = (\rho \cos(\phi) + j\rho \sin(\phi))^n = (\rho e^{j\phi})^n = \rho^n (\cos(n\phi) + j \sin(n\phi)) \quad (2.51)$$

Βλέπετε πόσο πιο απλή είναι η εύρεση μιας δύναμης ενός μιγαδικού αριθμού όταν χρησιμοποιούμε την πολική μορφή. Με την ίδια ευκολία μπορούμε να βρούμε οποιαδήποτε ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού:

$$z^{1/n} = (x + jy)^{1/n} = (\rho \cos(\phi) + j\rho \sin(\phi))^{1/n} = (\rho e^{j\phi})^{1/n} = \rho^{1/n} (\cos(\phi/n) + j \sin(\phi/n)) \quad (2.52)$$

Παράδειγμα 2.6:

Βρείτε όλες τις ρίζες της εξίσωσης

$$z^3 - 8 = 0 \quad (2.53)$$

Λύση:

Περιμένουμε ότι θα υπάρχουν 3 λύσεις για αυτήν την εξίσωση. Έχουμε τότε

$$z^3 - 8 = 0 \quad (2.54)$$

$$z^3 = 8e^{j2\pi k}, \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.55)$$

$$z^3 = 8(\cos(2\pi k) + j \sin(2\pi k)) \quad (2.56)$$

$$z = \sqrt[3]{8}(\cos(2\pi k) + j \sin(2\pi k))^{\frac{1}{3}} \quad (2.57)$$

$$z = \sqrt[3]{8} \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) \right), \quad k = 0, 1, 2. \quad (2.58)$$

Θέτοντας τιμές του k έχουμε

$$z_1 = 2 \quad (2.59)$$

$$z_2 = -1 + j\sqrt{3} \quad (2.60)$$

$$z_3 = -1 - j\sqrt{3} \quad (2.61)$$

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι τιμές του k διαφορετικές από αυτές τις τρεις που διαλέξαμε δίνουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις. ■

Το τελευταίο Παράδειγμα μας δίνει ένα γενικό τρόπο λύσης εξισώσεων της μορφής

$$z^N - a = 0, \quad N \in \mathbb{N}, \quad a = |a|e^{j\phi} \in \mathbb{C} \quad (2.62)$$

και μπορείτε να δείξετε (Άσκηση XXXX) ότι η γενική λύση είναι η ακόλουθη

$$\left\{ \begin{array}{l} |z| = |a|^{1/N} \\ \theta = \frac{\phi + 2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{array} \right. \quad (2.63)$$

2.2.5 Γεωμετρικός τόπος

Ο γεωμετρικός τόπος μιγαδικών αριθμών δεν είναι τίποτε άλλο από ένα γεωμετρικό σχήμα του οποίου τα σημεία (οι μιγαδικοί αριθμοί δηλαδή) ικανοποιούν μια κοινή γεωμετρική ιδιότητα. Συνήθεις γεωμετρικοί τόποι είναι κύκλοι, κυκλικοί δίσκοι, ευθείες και άλλα γεωμετρικά σχήματα.

Παράδειγμα 2.7:

Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών $z = x + jy$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$(\alpha') \quad |z| = 4$$

$$(\gamma') \quad |z - 1| = |z - j|$$

$$(\epsilon') \quad \Re\{z\} > -2$$

$$(\beta') \quad |z - 2| = 2$$

$$(\delta') \quad |z - 1| < 2$$

$$(\zeta') \quad \frac{|z + 16|}{|z + 4|} > 2$$

Λύση:

(α') Η σχέση αυτή ουσιαστικά περιγράφει τους μιγαδικούς z που έχουν μέτρο ίσο με 4, δηλ. η απόστασή τους από την αρχή των αξόνων ισούται με 4. Μπορείτε ίσως να φανταστείτε μερικούς: οι μιγαδικοί $z = \pm 4$, $z = \pm 4j$ σίγουρα ικανοποιούν την απαίτηση. Ποιοί άλλοι την ικανοποιούν; Θα έχουμε

$$|z| = 4 \iff |x + jy| = 4 \iff |x + jy|^2 = 16 \iff x^2 + y^2 = 16 \quad (2.64)$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αυτών αποτελεί κύκλο με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 4$.

(β') Θα έχουμε

$$|z - 2| = 2 \iff |x - 2 + jy| = 2 \iff (x - 2)^2 + y^2 = 4 \quad (2.65)$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αυτών αποτελεί κύκλο με κέντρο το $(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Εν γένει, ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που ικανοποιούν τη σχέση

$$|z - z_0| = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (2.66)$$

αποτελεί κύκλο με κέντρο το $z = z_0$ και ακτίνα c .

(γ') Θα έχουμε

$$|z - 1| = |z - j| \iff |z - 1|^2 = |z - j|^2 \iff (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2 \quad (2.67)$$

$$\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 - 2x = -2y \iff x = y \quad (2.68)$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αυτών αποτελεί η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $(1, 0)$ και $(0, 1)$. Με άλλα λόγια, οι μιγαδικοί αυτοί ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

Εν γένει, ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που ικανοποιούν τη σχέση

$$|z - z_1| = |z - z_2| \quad (2.69)$$

αποτελεί τα σημεία της μεσοκάθετου του ευθυγράμμου τμήματος μεταξύ των σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2) , με $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$.

(δ') Εφόσον η σχέση

$$|z - 1| = 2 \quad (2.70)$$

δηλώνει το σύνολο των μιγαδικών που ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το $(1, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$, τότε η σχέση

$$|z - 1| < 2 \quad (2.71)$$

δηλώνει τους μιγαδικούς που βρίσκονται εντός του παραπάνω κύκλου.

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι γεωμετρικοί τόποι των μιγαδικών που ικανοποιούν τις σχέσεις

- $|z - z_0| < c$
- $|z - z_0| > c$
- $c_1 < |z - z_0| < c_2$

με $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αποτελούν

- σημεία εντός κύκλου με κέντρο το z_0 και ακτίνα $\rho = c$
- σημεία εκτός κύκλου με κέντρο το z_0 και ακτίνα $\rho = c$
- σημεία εντός δακτυλίου που σχηματίζεται από τους ομόκεντρους με κέντρο το z_0 κύκλους και ακτίνες $\rho_1 = c_1, \rho_2 = c_2$.

(ε') Θα έχουμε

$$\Re\{z\} > -2 \quad (2.72)$$

που προφανώς ορίζει τους μιγαδικούς αριθμούς που ανήκουν στο ημιεπίπεδο δεξιά της ευθείας $x = -2$, χωρίς να την περιλαμβάνει.

(ς') Θα έχουμε

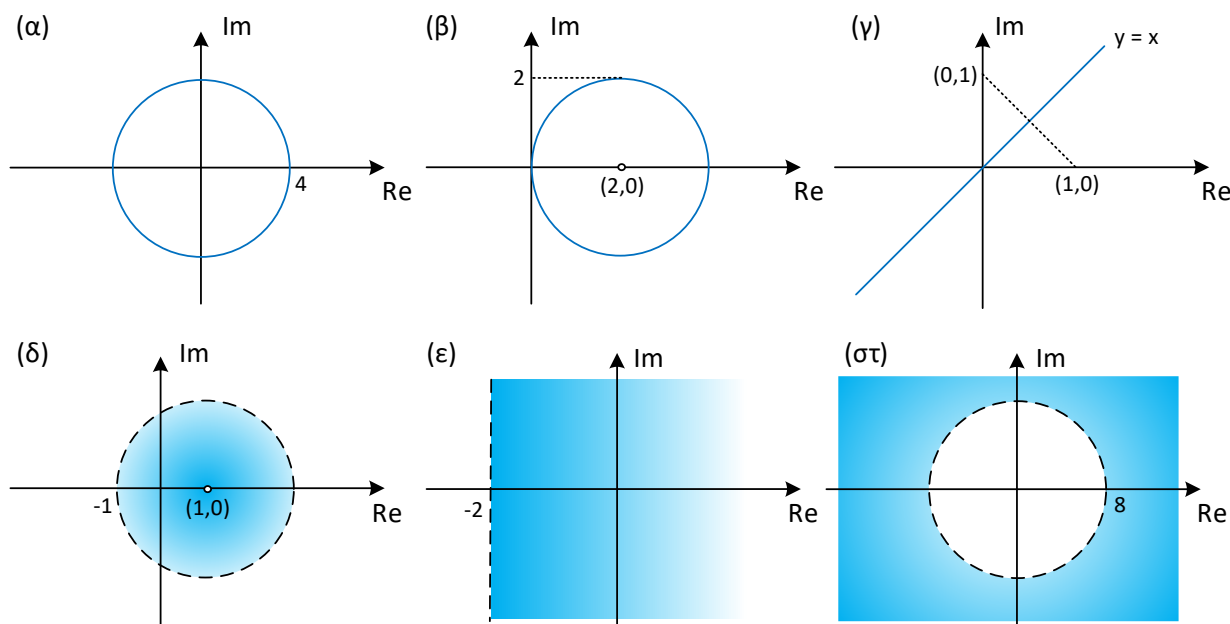
$$\frac{|z + 16|}{|z + 4|} > 2 \iff |z + 16| > 2|z + 4| \iff |z + 16|^2 > 4|z + 4|^2 \iff (x + 16)^2 + y^2 > 4((x + 4)^2 + y^2) \quad (2.73)$$

$$\iff x^2 + 32x + 256 + y^2 > 4(x^2 + 8x + 16 + y^2) \iff 3x^2 + 3y^2 > 192 \quad (2.74)$$

$$\iff x^2 + y^2 > 64 = 8^2 \quad (2.75)$$

άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος αποτελεί το εξωτερικό ενός κύκλου με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 8$. ■

Μια απεικόνιση των γεωμετρικών τόπων του Παραδείγματος 2.7 φαίνονται στο Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8: Γεωμετρικοί τόποι Παραδείγματος 2.7.

2.3 Μιγαδικές Συναρτήσεις

Ως αποτέλεσμα της συνεχούς χρήσης μιγαδικών αριθμών, η βασική θεωρία σημάτων και συστημάτων περιλαμβάνει ουκ ολίγες μιγαδικές συναρτήσεις, οι οποίες όμως είναι σχετικά απλές.

Μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ ορίζεται σε ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, το οποίο λέγεται πεδίο ορισμού, και αντιστοιχίζει κάθε σημείο του συνόλου A σε ένα μιγαδικό αριθμό. Είναι λοιπόν προφανές ότι μια μιγαδική συνάρτηση ορίζεται σε τέσσερις διαστάσεις: δυο διαστάσεις για το πεδίο ορισμού της, και δυο διαστάσεις για κάθε τιμή της συνάρτησης. Αυτό δυσκολεύει τα πράγματα γιατί δεν μπορούμε, εν γένει, να σχεδιάσουμε στο χαρτί μια μιγαδική συνάρτηση. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι

- είτε να σχεδιάσουμε ξεχωριστά το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος, δηλ. να αναλύσουμε τη μιγαδική συνάρτηση στη μορφή

$$f(z) = \Re\{f(z)\} + j\Im\{f(z)\} \quad (2.76)$$

- είτε να σχεδιάσουμε ξεχωριστά το μέτρο και τη φάση της, δηλ. να τη γράψουμε στη μορφή

$$f(z) = |f(z)|e^{j\phi(z)} \quad (2.77)$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.8:

Έστω το σύνολο $A = \mathbb{C} - \{\pm j\}$ στο οποίο ορίζεται η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad (2.78)$$

Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος, καθώς και την αναπαράσταση μέτρου και φάσης.

Λύση:

Το πραγματικό της μέρος ισούται με

$$\Re\{f(z)\} = \Re\left\{\frac{1}{(x+jy)^2 + 1}\right\} = \Re\left\{\frac{1}{x^2 - y^2 + 1 + j2xy}\right\} \quad (2.79)$$

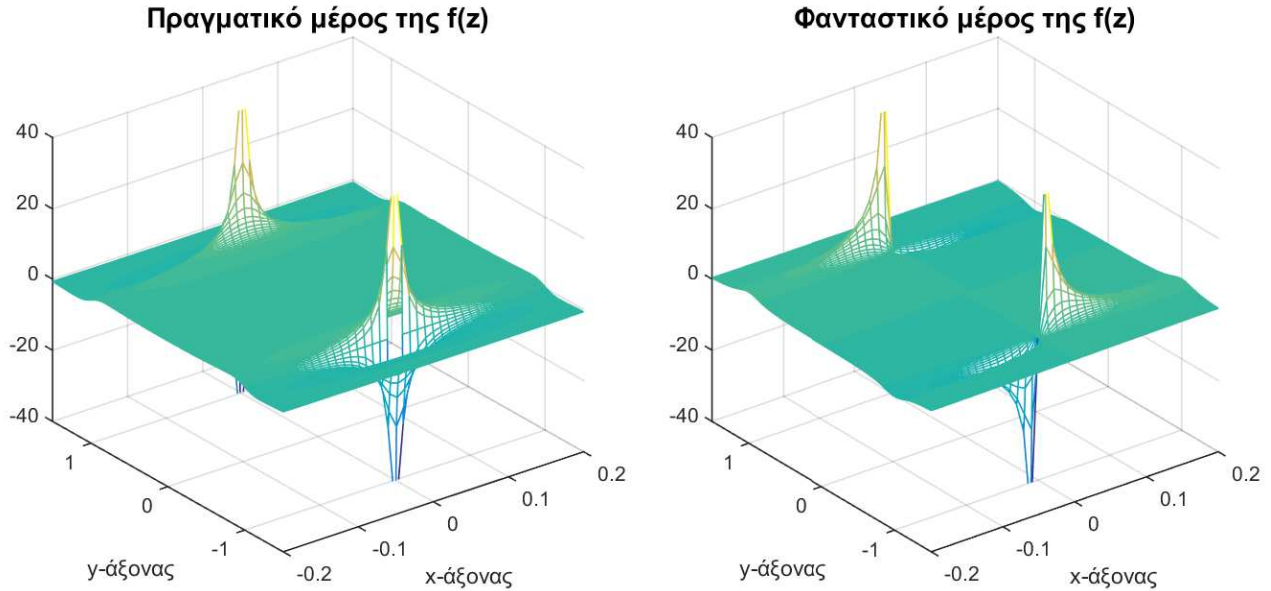
$$= \Re\left\{\frac{x^2 - y^2 + 1 - j2xy}{(x^2 - y^2 + 1 + j2xy)(x^2 - y^2 + 1 - j2xy)}\right\} = \Re\left\{\frac{x^2 - y^2 + 1 - j2xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + (2xy)^2}\right\} \quad (2.80)$$

$$= \Re\left\{\frac{x^2 - y^2 + 1}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + (2xy)^2} - j\frac{2xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + (2xy)^2}\right\} = \frac{x^2 - y^2 + 1}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} \quad (2.81)$$

ενώ το φανταστικό της μέρος - από την τελευταία σχέση παραπάνω - ισούται με

$$\Im\{f(z)\} = \Im\left\{\frac{1}{(x + jy)^2 + 1}\right\} = \Im\left\{\frac{1}{x^2 - y^2 + 1 + j2xy}\right\} = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} \quad (2.82)$$

Οι γραφικές παραστάσεις τους απεικονίζονται στο Σχήμα 2.9. Ας βρούμε τώρα τη γραφική παράσταση του μέτρου



Σχήμα 2.9: Πραγματικό και Φανταστικό μέρος της συνάρτησης του Παραδείγματος 2.8.

και της φάσης της συνάρτησης $f(z)$. Θα είναι

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2 + 1|} = \frac{1}{|(x + jy)^2 + 1|} = \frac{1}{|x^2 + 2jxy - y^2 + 1|} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}} \quad (2.83)$$

για το μέτρο, ενώ για τη φάση θα είναι

$$\phi_f(z) = \tan^{-1} \frac{\Im\{f(z)\}}{\Re\{f(z)\}} = -\tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2 + 1} \quad (2.84)$$

Οι γραφικές παραστάσεις τους απεικονίζονται στο Σχήμα 2.10. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσετε ότι στα σημεία $z = \pm j$, η συνάρτηση $|f(z)|$ απειρίζεται. Δείτε πως αυτό εκφράζεται στη γραφική της παράσταση. Επίσης, παρατηρήστε ότι η φάση της συνάρτησης παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, καθώς ο τρόπος υπολογισμού της γίνεται με τη γνωστή σας συνάρτηση αντίστροφης εφαπτομένης.

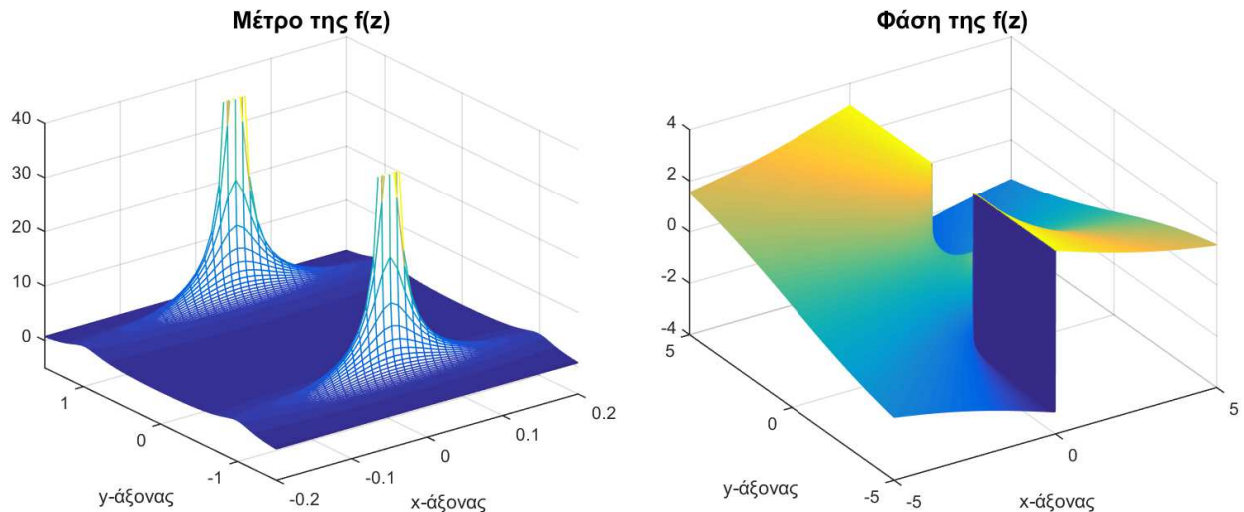
2.3.1 Όριο

Είναι σημαντικό να συζητηθούν οι έννοιες της συνέχειας και της παραγωγής μιγαδικών συναρτήσεων.

Η έννοια του μέτρου μας βοηθά κατ'αρχάς να ορίσουμε την απόσταση και το όριο στο χώρο των μιγαδικών αριθμών. Η απόσταση μεταξύ δυο μιγαδικών αριθμών z και z_0 αποτελεί το μέτρο της διαφοράς τους, δηλ. $|z - z_0|$. Ένας μιγαδικός αριθμός z τείνει στο μιγαδικό αριθμό z_0 αν

$$|z - z_0| \rightarrow 0 \quad (2.85)$$

με $|z - z_0|$ την Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των δυο μιγαδικών αριθμών.



Σχήμα 2.10: Μέτρο και Φάση της συνάρτησης Παραδείγματος 2.8.

2.3.2 Συνέχεια

Μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ η οποία ορίζεται στο ανοικτό³ σύνολο $A \in \mathbb{C}$ είναι *συνεχής* στο σημείο $z_0 \in A$ αν και μόνον αν ισχύει ότι

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (2.86)$$

Εάν η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $z_0 \in A$ τότε η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ ονομάζεται *συνεχής* σε κάθε σημείο του A .

2.3.3 Παραγωγισιμότητα

Αντίστοιχα, μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ είναι *παραγωγίσιμη* σε ένα σημείο $z_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.87)$$

και το οποίο συμβολίζεται με $f'(z_0)$. Εάν η μιγαδική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του ανοικτού συνόλου A , τότε ονομάζεται *αναλυτική*.

Οποιοδήποτε πολυώνυμο του z αποτελεί αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$. Επίσης, οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο που αποτελείται από όλα τα z , εκτός από αυτά που ο παρονομαστής μηδενίζεται. Στη συνέχεια του βιβλίου θα ασχοληθούμε σχεδόν αποκλειστικά με συναρτήσεις που είναι αναλυτικές σε κάποιο απλό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Όλοι οι συνήθεις κανόνες του γινομένου, του πηλίκου, ο κανόνας της αλυσίδας, κλπ. ισχύουν κατά τα γνωστά από το λογισμό μιας μεταβλητής. Μια πολύ σημαντική μιγαδική συνάρτηση είναι η *εκθετική*, η οποία είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, με

$$e^z = \frac{d}{dz} e^z \quad (2.88)$$

όπως επίσης και η

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} \quad (2.89)$$

για κάθε ακέραιο n .

³Ανοικτό λέγεται ένα σύνολο A όταν δεν συμπεριλαμβάνεται σε αυτό το “σύνολό” του. Για παράδειγμα, τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν τη σχέση

$$x^2 + y^2 < r^2$$

αποτελούν ένα ανοικτό σύνολο A . Το “σύνολο” B του ανοικτού συνόλου A είναι το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τη σχέση

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Η ένωση των δυο αυτών συνόλων αποτελεί ένα *κλειστό* σύνολο.

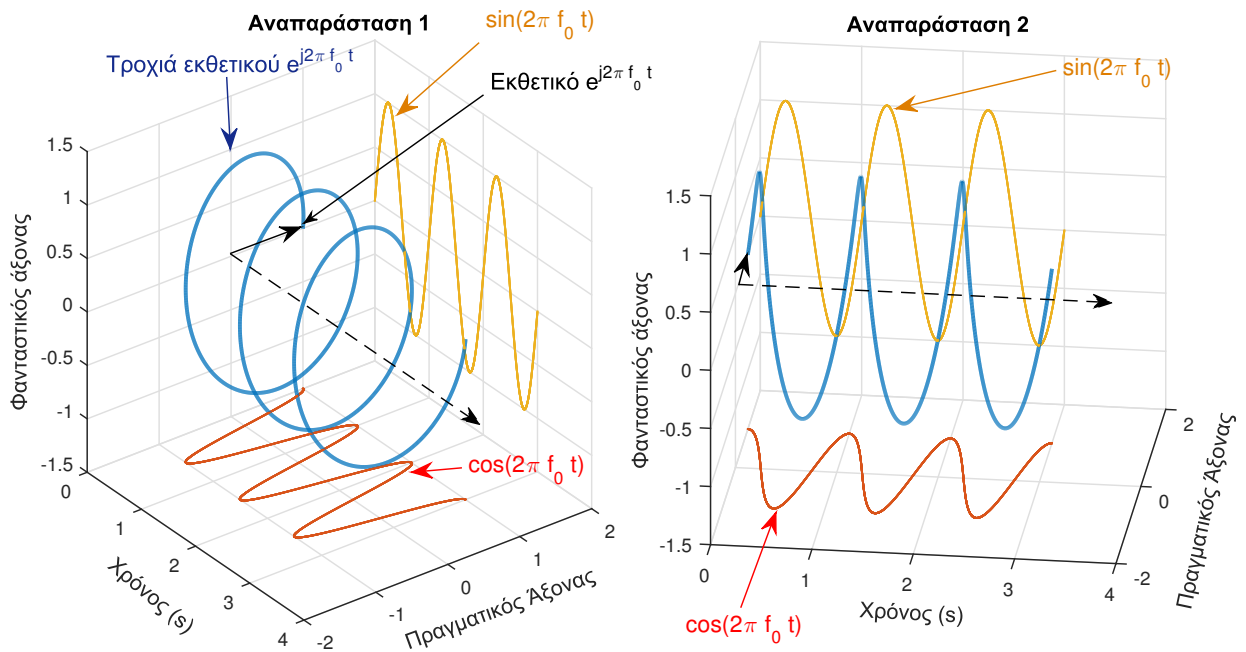
2.3.4 Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση $e^{j2\pi f_0 t}$

Μια πολύ σημαντική μιγαδική συνάρτηση είναι η εκθετική της μορφής $f(z) = e^{j\theta(t)}$. Νωρίτερα, εισάγαμε την περίφημη σχέση του Euler, η οποία επαναλαμβάνεται χάριν ευκολίας παρακάτω στη γενικότερη μορφή της:

$$Ae^{j\theta} = \Re\{Ae^{j\theta}\} + j\Im\{Ae^{j\theta}\} = A \cos(\theta) + jA \sin(\theta) \quad (2.90)$$

με $A > 0$ το μέτρο (ή πλάτος) της εκθετικής μιγαδικής συνάρτησης και θ τη φάση της. Αν το όρισμα θ είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου t , δηλ. της μορφής $\theta(t) = \omega_0 t + \phi = 2\pi f_0 t + \phi$, τότε στο διδιάστατο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών, η σχέση περιγράφει ένα διάνυσμα σταθερού μήκους A στο μιγαδικό επίπεδο το οποίο περιστρέφεται συνεχώς σε έναν κύκλο ακτίνας A , με γωνιακή (ή κυκλική) συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$ rad/s. Αν ορίσουμε έναν τρίτο άξονα, αυτόν του χρόνου t , τότε ο χώρος γίνεται τριδιάστατος και το περιστρεφόμενο διάνυσμα ορίζει μια σπειροειδή τροχιά στο χώρο αυτό. Η περιστροφή αυτή γίνεται φυσικά με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$ rad/s, ή εναλλακτικά με συχνότητα f_0 Hz. Αυτό σημαίνει ότι το περιστρεφόμενο διάνυσμα εκτελεί f_0 πλήρεις “σπειροειδείς κύκλους” ανά δευτερόλεπτο.

Διάφορες όψεις - για καλύτερη κατανόηση και μόνο - αυτής της κίνησης του περιστρεφόμενου διανύσματος (μοναδιαίου μήκους A και μηδενικής φάσης ϕ εδώ, για ευκολία) φαίνονται στο Σχήμα 2.11, μαζί με το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του. Με χρήση της συζυγίας, οι σχέσεις του Euler δίνουν επίσης τις παρακάτω σχέσεις



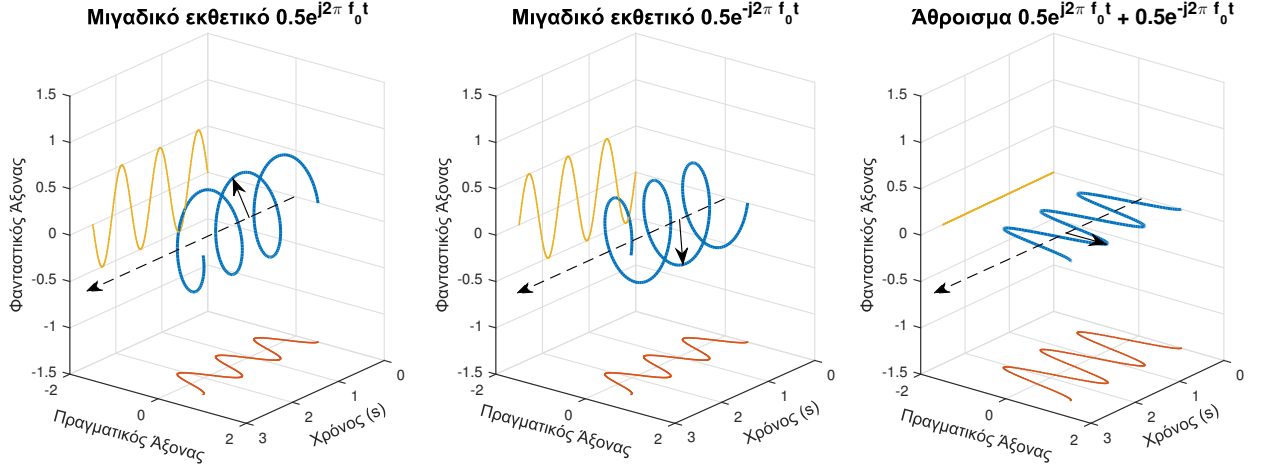
Σχήμα 2.11: Μιγαδική εκθετική συνάρτηση $e^{j2\pi f_0 t}$, μαζί με το πραγματικό και φανταστικό μέρος της, από δυο όψεις στον τριδιάστατο μιγαδικό χώρο.

για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού:

$$\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (2.91)$$

$$\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (2.92)$$

Ας πάρουμε τη Σχέση (2.91), η οποία περιγράφει ένα ημίτονο ως άθροισμα ενός συζυγούς ζεύγους μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων με πλάτη $\frac{A}{2}$. Ας απεικονίσουμε την κίνηση των περιστρεφόμενων διανυσμάτων που αντιστοιχούν στο ζεύγος αυτό. Βλέπουμε στο Σχήμα 2.12 (για $A = 1$) ότι η τροχιά τους είναι αντίθετες: η μιγαδική εκθετική συνάρτηση $\frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t}$ περιστρέφεται με την ορθή μαθηματική φορά, ενώ η αντίστοιχη $\frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$ περιστρέφεται με την αντίθετη μαθηματική φορά. Σε κάθε χρονική στιγμή t , τα φανταστικά μέρη τους έχουν το ίδιο μέτρο, $|\frac{A}{2} \sin(2\pi f_0 t)|$, αλλά αντίθετα πρόσημα, ενώ τα πραγματικά τους μέρη είναι ακριβώς ίδια. Το άθροισμα των διανυσμάτων αυτών για κάθε t ισούται με το διπλάσιο πραγματικό μέρος της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης. Σε περίπτωση που το πλάτος A είναι μιγαδικό, δηλ. είναι της μορφής



Σχήμα 2.12: Συζυγείς μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις και το πραγματικό άθροισμά τους. Το περιστρεφόμενο μιγαδικό εκθετικό διάνυσμα (με μαύρο χρώμα) βρίσκεται σε τυχαία θέση του άξονα του χρόνου (διακεκομμένη μαύρη γραμμή).

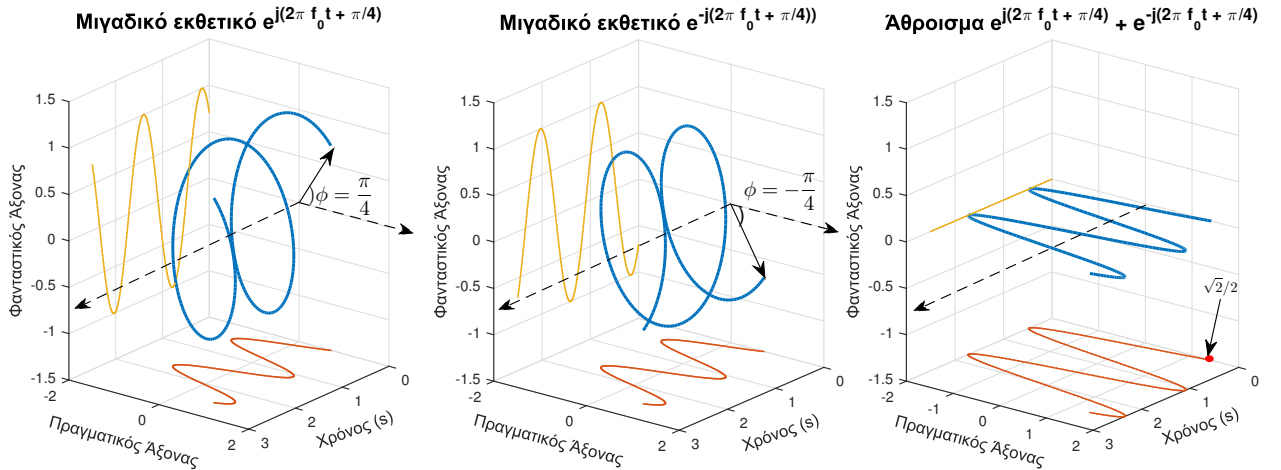
$$A = |A|e^{j\phi} \quad (2.93)$$

τότε η γωνία ϕ συμβολίζει την αρχική φάση της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης, και οι αντίστοιχες σχέσεις γίνονται

$$\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = |A| \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{|A|}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + \frac{|A|}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} \quad (2.94)$$

$$\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = |A| \sin(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{|A|}{2j} e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} - \frac{|A|}{2j} e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} \quad (2.95)$$

δηλ. το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης έχει μια αρχική φάση ϕ για $t = 0$ με τιμή $\cos(\phi)$ και $\sin(\phi)$ αντίστοιχα. Στο Σχήμα 2.13 μπορείτε να δείτε τη συμπεριφορά του ζεύγους συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων για $A = 1$ και $\phi = \frac{\pi}{4}$, καθώς και του αθροίσματός τους. Από τα παραπάνω είναι



Σχήμα 2.13: Συζυγείς μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις με αρχική φάση $\phi = \pi/4$ και το πραγματικό άθροισμά τους. Το περιστρεφόμενο μιγαδικό εκθετικό διάνυσμα (με μαύρο χρώμα) βρίσκεται σε τυχαία θέση του άξονα του χρόνου (διακεκομμένη μαύρη γραμμή)

εμφανής η σχέση ημιτόνων και συνημιτόνων με το συζυγές ζεύγος μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων $e^{\pm j(2\pi f_0 t + \phi)}$, σύμφωνα με τις Σχέσεις (2.94, 2.95):

- Ένα συνημίτονο πλάτους A , συχνότητας f_0 , και φάσης ϕ μπορεί να ειπωθεί ως το πραγματικό μέρος ενός περιστρεφόμενου μιγαδικού εκθετικού διανύσματος $Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$.

- Ένα ημίτονο πλάτους A , συχνότητας f_0 , και φάσης ϕ μπορεί να ειπωθεί ως το φανταστικό μέρος ενός περιστρεφόμενου μιγαδικού εκθετικού διανύσματος $Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$.
- Ένα συνημίτονο πλάτους A , συχνότητας f_0 , και φάσης ϕ μπορεί να ειπωθεί ως το άθροισμα δυο συζυγών περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών διανυσμάτων $\frac{A}{2}e^{\pm j(2\pi f_0 t + \phi)}$.
- Ένα ημίτονο πλάτους A , συχνότητας f_0 , και φάσης ϕ μπορεί να ειπωθεί ως τη διαφορά δυο συζυγών περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών διανυσμάτων $\frac{A}{2}e^{\pm j(2\pi f_0 t + \phi)}$.

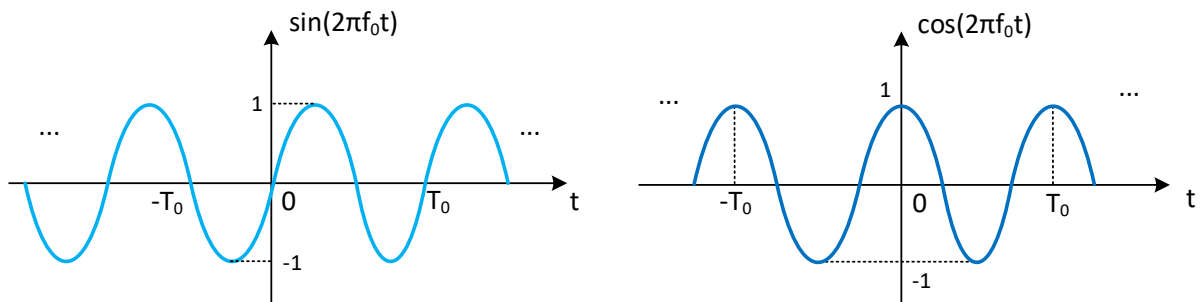
Η παράγραφος αυτή είναι σημαντική για την κατανόηση των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, τη σχέση τους με τη συχνότητα ω_0 ή f_0 , και την αξιοποίησή τους σε πραγματικά προβλήματα μέσω των σχέσεων της συζυγίας και του πραγματικού/φανταστικού μέρους τους. Μάλιστα, στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πόσο χρήσιμες είναι αυτές οι σχέσεις! ☺

2.4 Ημίτονα

Αφήνοντας για λίγο τις μιγαδικές συναρτήσεις και επιστρέφοντας στις καθαρά πραγματικές, μια πολύ σημαντική κατηγορία συναρτήσεων είναι τα ημιτονοειδή. Γι' αυτό αξίζει τον κόπο να τα εξετάσουμε διεξοδικά. Ας δούμε τον γενικό τύπο των συναρτήσεων αυτών:

$$x(t) = A \cos(\underbrace{\omega_0 t + \phi}_{\text{radians}}) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (2.96)$$

όπου A το πλάτος του ημιτονοειδούς, $\omega_0 = 2\pi f_0$ η λεγόμενη *κυκλική συχνότητα* σε rad/s, με f_0 να είναι η *συχνότητα* σε Hz, και ϕ η φάση μετατόπισης του ημιτονοειδούς. Για αποφυγή παρεξηγήσεων, χρησιμοποιούμε το συνημίτονο $\cos(\cdot)$ αντί για το ημίτονο $\sin(\cdot)$ ως τη γενική μορφή ενός ημιτονοειδούς σήματος, ανεξάρτητα αν οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται *ημιτονο-ειδείς*. Άλλωστε το ημίτονο και το συνημίτονο είναι οι ίδιες συναρτήσεις ακριβώς, μόνο που διαφέρουν κατά μια μετατόπιση, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.14.



Σχήμα 2.14: Ημίτονο (αριστερά) και Συνημίτονο (δεξιά).

Ας μελετήσουμε ένα συγκεκριμένο ημιτονοειδές, το

$$x(t) = 20 \cos(2\pi 10t - 0.4\pi) \quad (2.97)$$

Η συχνότητά του είναι $f_0 = 10$ Hz, και η περίοδός του είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.1$ s. Η περίοδος μας δίνει τις χρονικές στιγμές όπου η συνάρτηση επαναλαμβάνεται. Εδώ λοιπόν θα έχουμε μέγιστο τις χρονικές στιγμές $t = \dots, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, \dots$

Επομένως

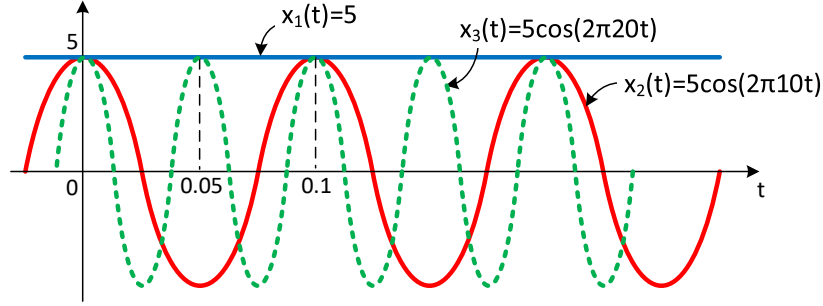
$$x(t + T_0) = x(t) \quad (2.98)$$

$$\cos(2\pi f_0(t + T_0) + \phi) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (2.99)$$

$$\cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 T_0 + \phi) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \cos(2\pi f_0 t + 2k\pi + \phi), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.100)$$

Παρατηρούμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$2\pi f_0 T_0 = 2k\pi \Rightarrow T_0 = k \frac{1}{f_0} \quad (2.101)$$

Σχήμα 2.15: Ημιτονοειδή για διάφορες συχνότητες f_0 .

Ονομάζουμε βασική περίοδο ή απλά περίοδο του σήματος την τιμή του T_0 για $k = 1$. Έτσι η περίοδος ενός ημιτονοειδούς θα δίδεται από τη σχέση:

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \quad (2.102)$$

και επίσης

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \iff T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2.103)$$

$$\text{Επομένως } T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Στο Σχήμα 2.15 βλέπουμε μερικά ημιτονοειδή για διάφορες συχνότητες f_0 : για $f_0 = 0$ Hz, το $x_1(t) = 5 \cos(2\pi 0 t) = 5$, για $f_0 = 10$ Hz, το $x_2(t) = 5 \cos(2\pi 10 t)$, και για $f_0 = 20$ Hz, το $x_3(t) = 5 \cos(2\pi 20 t)$. Το ημιτονοειδές $x_1(t)$ λέγεται και *DC (Direct Current) συνιστώσα*. Αυτή η ονομασία προέρχεται - και χρησιμοποιείται ακόμα - από την ηλεκτρονική.

2.4.1 Μετατόπιση Φάσης

Η συχνότητα f_0 καθορίζει το κάθε πότε επαναλαμβάνονται τα μέγιστα και τα ελάχιστα ενός ημιτονοειδούς, ενώ η φάση ϕ καθορίζει το πού ακριβώς αυτά βρίσκονται. Αν $\phi = 0$ τότε το πρώτο μέγιστο βρίσκεται στο $t = 0$ και έχει τιμή $A \cos(0) = A$, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση όπου $\phi \in (-\pi, \pi] - \{0\}$, το πρώτο μέγιστο έχει μετατοπιστεί στο χρόνο και έχει τιμή $A \cos(\phi) \neq A$. Όμοια ισχύουν και για τα ελάχιστα.

Ας συμβολίσουμε με $x_0(t)$ το ημιτονοειδές με $\phi = 0$:

$$x_0(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \Big|_{\phi=0} = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (2.104)$$

Εστω λοιπόν ότι καθυστερούμε το ημιτονοειδές $x_0(t)$ κατά $t = t_0 > 0$. Τότε:

$$x_0(t - t_0) = A \cos(2\pi f_0 (t - t_0)) = A \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (2.105)$$

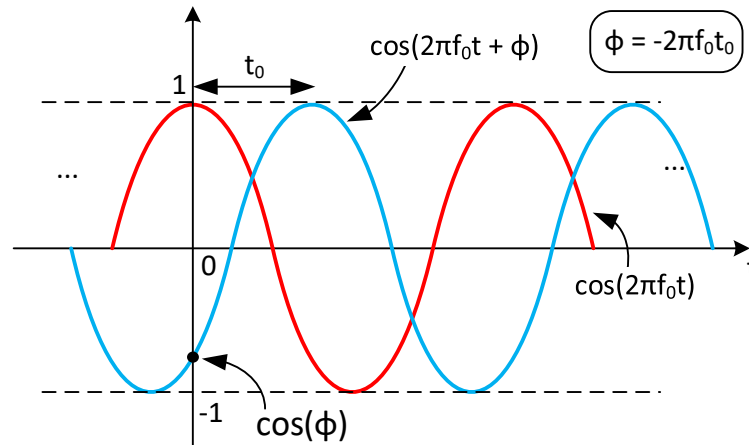
όπου θέσαμε $\phi = -2\pi f_0 t_0$.

Ομως, $T_0 = \frac{1}{f_0}$, επομένως έχουμε

$$\phi = -2\pi f_0 t_0 = -2\pi \frac{t_0}{T_0}, \quad (2.106)$$

Αυτή η σχέση μας υποδεικνύει την τιμή που πρέπει να έχει η φάση ϕ για να έχουμε καθυστέρηση του ημιτονοειδούς κατά $t = t_0$. Όμοια συζήτηση μπορεί να γίνει και για προήγησή του κατά $t = t_0 < 0$. Ένα παράδειγμα όπου απεικονίζονται όλα τα παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα 2.16.

Εδώ θα πρέπει να διευκρινήσουμε την ορολογία. Φάση ονομάζεται η ποσότητα που υπάρχει στο όρισμα του $\cos(\cdot)$, δηλαδή η ποσότητα: $2\pi f_0 t + \phi$. Φάση μετατόπισης ονομάζεται η ποσότητα ϕ . Ένα μικρό μπέρδεμα που προκύπτει πολύ συχνά στην βιβλιογραφία είναι ότι για λόγους απλότητας η φάση μετατόπισης αναφέρεται απλά ως “φάση”. Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε συχνά στην φάση μετατόπισης απλά ως φάση ενώ θα διαχωρίζουμε τις δύο φάσεις όταν αυτό είναι αναγκαίο.



Σχήμα 2.16: Φάση ϕ , μετατόπιση t_0 , και η μεταξύ τους σχέση.

Γενικά, εάν ένα ημιτονοειδές έχει περίοδο T_0 , η μετατόπιση του είναι φραγμένη:

$$|t_0| \leq \frac{T_0}{2} \quad (2.107)$$

Φυσικά και μπορούμε να μετακινήσουμε περισσότερο τη συνάρτηση του ημιτόνου, το αποτέλεσμα όμως που θα λάβουμε είναι το ίδιο, αφού το ημιτονοειδές είναι περιοδικό με περίοδο T_0 . Επομένως από τις Σχέσεις (2.106) και (2.107) έχουμε

$$-\pi < \phi \leq \pi \quad (2.108)$$

2.4.2 Παραγωγή ημιτόνου

Ένα ημιτονοειδές δεν έχει μόνο στενή μαθηματική ερμηνεία: συναντάται πάρα πολλές φορές στην πράξη, περισσότερες απ' όσες νομίζετε. Ίσως το πιο οικείο σας παράδειγμα να είναι η παραγωγή ηχητικών κυμάτων - τα οποία γνωρίζουμε ότι μεταβάλλονται ημιτονοειδώς - μέσω ενός διαπασών, όπως αυτό του Σχήματος 2.17.

Μάλιστα οι μουσικοί το χρησιμοποιούν πολύ συχνά για να “κουρδίσουν” τα όργανά τους. Ένα ιδανικό διαπασών εκπέμπει ένα ημίτονο μιας συγκεκριμένης συχνότητας όταν το χτυπήσουμε σε μια επιφάνεια. Αυτό σημαίνει ότι το άκρο του διαπασών δονείται μετά το χτύπημα εκτελώντας (ιδανικά) απλή αρμονική ταλάντωση. Η ταλάντωση του άκρου του προκαλεί όμοια κίνηση στα μόρια του αέρα γύρω του, αυτά ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα, διαδίδοντας το αρμονικό κύμα στα γειτονικά μόρια, και στο τέλος αυτή η κυματική διάδοση φτάνει και διεγείρει ακουστικά το αυτί μας, οπότε και αντιλαμβανόμαστε τον ήχο. Οι μεταβολές της πίεσης και της θέσης των μορίων του αέρα κατά την κυματική διάδοση έχουν ημιτονοειδή χαρακτηριστικά.

Η παραγωγή του ημιτονοειδούς προέρχεται από απλές εφαρμογές γνωστών νόμων της Φυσικής. Αν θεωρήσουμε ότι το άκρο του διαπασών ταλαντώνεται όπως ένα ελατήριο, τότε η δύναμη του κυβερνά την ταλάντωση μπορεί να μοντελοποιηθεί από το νόμο του Hooke⁴, δηλ.

$$F = -kx \quad (2.109)$$

με k μια σταθερά που σχετίζεται με την ελαστικότητα του διαπασών και x τη μετατόπιση του άκρου του από τη θέση ισορροπίας. Όμως, η δύναμη αυτή προκαλεί επιτάχυνση στο άκρο του διαπασών, οπότε μπορεί να περιγραφεί με όρους Μηχανικής ως

$$F = ma \quad (2.110)$$

με m τη μάζα και a την επιτάχυνση του ταλαντούμενου άκρου. Η σύνθεση των δυο εξισώσεων δίνει

$$-kx = ma \iff -kx(t) = m \frac{d^2}{dt^2} x(t) \quad (2.111)$$

⁴Ίσως σας είναι γνωστός από τις δυνάμεις ελατηρίων.



Σχήμα 2.17: Διαπασών.

εφ' όσον η ταλάντωση είναι μια κίνηση που μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου και η επιτάχυνση αποτελεί το δεύτερη παράγωγο ως προς το χρόνο της συνάρτησης θέσης του άκρου του διαπασών. Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται διαφορική (καθώς εμπλέκει παραγώγους μιας συνάρτησης) και η ακριβής επίλυσή της θα μετατεθεί σε επόμενο κεφάλαιο. ☺Όμως μπορούμε να σας πούμε ότι αν θέσετε

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \quad (2.112)$$

στην παραπάνω εξίσωση, θα δείτε ότι επαληθεύεται! Μάλιστα η συχνότητα ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.113)$$

Τι πρέπει να προσέξουμε ώστε ένα διαπασών να παράγει μια συγκεκριμένη νότα (π.χ. τη νότα ΛΑ, η οποία είναι μια ταλάντωση στα 440 Hz); Προφανώς θα πρέπει να ρυθμίσουμε τη μάζα και το είδος του υλικού κατασκευής του διαπασών (σταθερά k). Παρατηρήστε ότι η συχνότητα δεν εξαρτάται από την ένταση με την οποία θα χτυπήσουμε το διαπασών.

Τέλος, οι παράμετροι A και ϕ εξαρτώνται από τις λεγόμενες αρχικές συνθήκες του προβλήματος, που ουσιαστικά μοντελοποιούν τι συμβαίνει στο βραχίονα του διαπασών όταν $t = 0$. Περισσότερα για αυτά θα πούμε σύντομα.

2.4.3 Άθροισμα δυο ημιτόνων

Αν έχουμε δυο ημίτονα ίδιας συχνότητας αλλά με διαφορετικές φάσεις, μπορούμε να τα αθροίσουμε σε ένα ημίτονο ίδιας συχνότητας. Η τριγωνομετρία μας βοηθά σε αυτό, δίνοντάς μας τη γνωστή σχέση

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = A \cos(2\pi f_0 t) \cos(\phi) - A \sin(2\pi f_0 t) \sin(\phi) \quad (2.114)$$

Αν τώρα θέσουμε

$$X = A \cos(\phi) \quad (2.115)$$

$$Y = -A \sin(\phi) \quad (2.116)$$

τότε η Σχέση (2.114) γράφεται

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = X \cos(2\pi f_0 t) + Y \sin(2\pi f_0 t) \quad (2.117)$$

Οι ποσότητες X, Y αντιστοιχούν στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται από το μιγαδικό αριθμό $z = X - jY$ στο μιγαδικό επίπεδο (βλέπε Σχήμα 2.18). Πώς το καταλαβαίνουμε αυτό; Θυμηθείτε τις σχέσεις του Euler και τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση που γνωρίσαμε πριν λίγες σελίδες. Είναι

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (2.118)$$

και

$$X \cos(2\pi f_0 t) + Y \sin(2\pi f_0 t) = \Re\{X e^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Y e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (2.119)$$

αφού $\sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi/2)$. Άρα

$$\Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{X e^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Y e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (2.120)$$

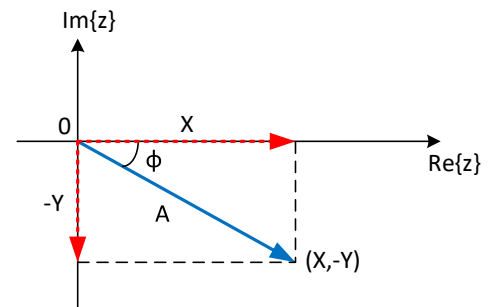
$$\Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{X e^{j2\pi f_0 t} + Y e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (2.121)$$

$$\Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{(X + Y e^{-j\frac{\pi}{2}}) e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (2.122)$$

$$\Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{(X - jY) e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (2.123)$$

αφού $e^{-j\pi/2} = -j$. Άρα πράγματι ο μιγαδικός αυτός μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή ως

$$z = X - jY = Ae^{j\phi} = \sqrt{X^2 + Y^2} e^{j \tan^{-1}\left(\frac{-Y}{X}\right)} \quad (2.124)$$



Σχήμα 2.18: Μιγαδικός αριθμός $z = X - jY$ στην πρόσθεση δυο ημιτόνων ίδιας συχνότητας.

δηλ. τελικά

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (2.125)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{-Y}{X} \right) \quad (2.126)$$

Άρα για να βρούμε τις τιμές των A και ϕ , η πολική μορφή είναι πολύ βολική και μας δίνει κατευθείαν το αποτέλεσμα, αρκεί να δεχθούμε να περάσουμε μέσα από το μονοπάτι των μιγαδικών συναρτήσεων. Υπενθυμίζεται ότι η φάση ϕ πρέπει πάντα να εκφράζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Η παραπάνω απλή περίπτωση γίνεται πιο σύνθετη αν θέλουμε να γράψουμε το άθροισμα

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi_1) + B \cos(2\pi f_0 t + \phi_2) \quad (2.127)$$

ως έναν ημιτονοειδή όρο, δηλ. ως $\mathcal{A} \cos(2\pi f_0 t + \psi)$. Εδώ η πολική μορφή αποτελεί σχεδόν μονόδρομο για μια εύκολη λύση.

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_1) + B \cos(2\pi f_0 t + \phi_2) \quad (2.128)$$

$$= \Re\{Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi_1)}\} + \Re\{Be^{j(2\pi f_0 t + \phi_2)}\} \quad (2.129)$$

$$= \Re\{Ae^{j\phi_1} e^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Be^{j\phi_2} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (2.130)$$

$$= \Re\{Ae^{j\phi_1} e^{j2\pi f_0 t} + Be^{j\phi_2} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (2.131)$$

$$= \Re\{(Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2})e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (2.132)$$

$$= \Re\{Ae^{j\psi} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (2.133)$$

$$= \mathcal{A} \cos(2\pi f_0 t + \psi) \quad (2.134)$$

με

$$\mathcal{A} = \sqrt{\Re\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}^2 + \Im\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}^2} \quad (2.135)$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\Im\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}}{\Re\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}} \quad (2.136)$$

Τώρα μπορούμε να κάνουμε μια πολύ σημαντική παρατήρηση. Δείτε τις Σχέσεις (2.130-2.133). Οι μιγαδικοί συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων $e^{j2\pi f_0 t}$ ονομάζονται **φάσορες - phasors** - δεν είναι άλλοι από τους μιγαδικούς αριθμούς

$$Ae^{j\phi_1} \quad \text{και} \quad Be^{j\phi_2} \quad (2.137)$$

Οι φάσορες χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν ημίτονα (και τις μεταξύ τους πράξεις) με πιο εύκολο τρόπο. Παρατηρήστε ότι η τριγωνομετρική εξίσωση

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi_1) + B \cos(2\pi f_0 t + \phi_2) = \mathcal{A} \cos(2\pi f_0 t + \psi) \quad (2.138)$$

είναι ισοδύναμη με την εξίσωση μιγαδικών αριθμών

$$Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2} = \mathcal{A}e^{j\psi} \quad (2.139)$$

και η λύση της, δηλ. η εύρεση των $\mathcal{A}$, ψ , δίνεται από τις Σχέσεις (2.135-2.136).

2.4.4 Άθροισμα N ημιτόνων

Ακόμα γενικότερα, έστω ότι έχουμε ένα πιο σύνθετο άθροισμα, το οποίο αποτελείται από πολλά ημιτονοειδή ίδιας συχνότητας, το οποίο περιγράφεται ως

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) \quad (2.140)$$

Η έκφραση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά, αλλά αυτό είναι δύσκολο να γίνει με τους γνωστούς τύπους της τριγωνομετρίας που δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Αν χρησιμοποιήσουμε όμως πολικές μορφές υπάρχει

αρκετή απλοποίηση:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) = \sum_{k=1}^N \Re\{A_k e^{j(2\pi f_0 t + \phi_k)}\} \quad (2.141)$$

$$(2.142)$$

$$= \Re\left\{\sum_{k=1}^N A_k e^{j(2\pi f_0 t + \phi_k)}\right\} = \Re\left\{\left[\sum_{k=1}^N A_k e^{j\phi_k}\right] e^{j(2\pi f_0 t)}\right\} = \Re\{\mathcal{A} e^{j\phi} e^{j(2\pi f_0 t)}\} \quad (2.143)$$

$$(2.144)$$

$$= \Re\{\mathcal{A} \cos(2\pi f_0 t + \phi) + j\mathcal{A} \sin(2\pi f_0 t + \phi)\} = \mathcal{A} \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (2.145)$$

όπου

$$\mathcal{A} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^N \Re\{A_k e^{j\phi_k}\}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^N \Im\{A_k e^{j\phi_k}\}\right)^2} \quad (2.146)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sum_{k=1}^N \Im\{A_k e^{j\phi_k}\}}{\sum_{k=1}^N \Re\{A_k e^{j\phi_k}\}} \quad (2.147)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.9:

Λύστε την ακόλουθη εξίσωση ως προς θ :

$$\Re\{(1+j)e^{j\theta}\} = -1 \quad (2.148)$$

Λύση:

Έχουμε διαδοχικά

$$\Re\{(1+j)e^{j\theta}\} = -1 \iff \Re\left\{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\theta}\right\} = -1 \iff \Re\left\{\sqrt{2}e^{j(\theta+\frac{\pi}{4})}\right\} = -1 \quad (2.149)$$

$$\Re\left\{e^{j(\theta+\frac{\pi}{4})}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad (2.150)$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad (2.151)$$

Άρα

$$\theta + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \iff \begin{cases} \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \\ \theta = 2k\pi - \pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.152)$$

■

Παράδειγμα 2.10:

Έστω η τριγωνομετρική εξίσωση

$$A \cos(2\pi f_0 t) - B \cos(2\pi f_0 t + \psi) = M \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.153)$$

ως προς ψ, M . Δείξτε ότι η εύρεση των ψ, M μπορεί να αναχθεί στη λύση του συστήματος

$$A = B \cos(\psi) + \frac{\sqrt{2}}{2}M \quad (2.154)$$

$$0 = B \sin(\psi) + \frac{\sqrt{2}}{2} M \quad (2.155)$$

Λύση:
Είναι

$$A \cos(2\pi f_0 t) - B \cos(2\pi f_0 t + \psi) = M \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}) \quad (2.156)$$

$$\Re \{ A e^{j2\pi f_0 t} \} - \Re \{ B e^{j2\pi f_0 t} e^{j\psi} \} = \Re \{ M e^{j2\pi f_0 t} e^{j\frac{\pi}{4}} \} \quad (2.157)$$

$$\Re \{ (A - B e^{j\psi}) e^{j2\pi f_0 t} \} = \Re \{ M e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j2\pi f_0 t} \} \quad (2.158)$$

$$A - B e^{j\psi} = M e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (2.159)$$

Από την παραπάνω ισότητα,

$$\begin{cases} A - B \cos \psi = M \cos \frac{\pi}{4} & = \frac{\sqrt{2}}{2} M \\ -B j \sin \psi = M j \sin \frac{\pi}{4} & = j \frac{\sqrt{2}}{2} M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B \cos \psi & = \frac{\sqrt{2}}{2} M \\ -B \sin \psi & = \frac{\sqrt{2}}{2} M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = B \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} M \\ 0 & = B \sin \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} M \end{cases}$$

■

Μπορείτε να λύσετε το παραπάνω σύστημα; ☺

Παράδειγμα 2.11:

Έστω η ημιτονοειδής συνάρτηση

$$x(t) = \sqrt{3} \cos(2\pi f_0 t + \pi/3) + \sin(2\pi f_0 t + \pi/2) \quad (2.160)$$

Βρείτε μια μιγαδική συνάρτηση $z(t)$ για την οποία να ισχύει $x(t) = \Re\{z(t)\}$.

Λύση:
Είναι

$$x(t) = \sqrt{3} \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}) + \sin(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{3} \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}) + \cos(2\pi f_0 t) = \Re \left\{ (\sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{3}} + 1) e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (2.161)$$

όπου

$$z = 1 + \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{3}} = 1 + \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{3}) + j\sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3} \frac{1}{2} + j\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{3}{2} \quad (2.162)$$

Οπότε

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} \simeq 2.394 \quad (2.163)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \tan^{-1} \frac{3}{2+\sqrt{3}} = 0.677 \text{ rad} \quad (2.164)$$

Άρα

$$x(t) = 2.394 e^{j(2\pi f_0 t + 0.677)} \quad (2.165)$$

■

2.4.5 Περιοδικότητα N ημιτόνων

Γνωρίζουμε ότι ένα ημίτονο $A \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ είναι πάντα περιοδικό με περίοδο $T_0 = 1/f_0$ s. Τι συμβαίνει όμως όταν έχουμε αθροίσματα ημιτόνων; Είναι το άθροισμα N ημιτόνων περιοδικό; Κι αν ναι, υπό ποιές συνθήκες;

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό άθροισμα δυο ημιτόνων ως

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) \quad (2.166)$$

Καθένα από τα επιμέρους ημίτονα έχει περίοδο $T_1 = 1/f_1$ και $T_2 = 1/f_2$, αντίστοιχα. Έστω ότι υπάρχει αριθμός T ο οποίος αποτελεί την περίοδο του σήματος $x(t)$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$x(t) = x(t + T) \quad (2.167)$$

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1(t + T) + \phi_1) + \cos(2\pi f_2(t + T) + \phi_2) \quad (2.168)$$

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 t + 2\pi f_1 T + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + 2\pi f_2 T + \phi_2) \quad (2.169)$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα, πρέπει

$$\begin{cases} 2\pi f_1 T = 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi f_2 T = 2\pi l, & l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 T = k, & k \in \mathbb{Z} \\ f_2 T = l, & l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.170)$$

και άρα

$$T = \frac{k}{f_1} = \frac{l}{f_2} = kT_1 = lT_2, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (2.171)$$

Αναδιατάσσοντας, έχουμε

$$\frac{k}{l} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{T_2}{T_1}, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (2.172)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι για να είναι περιοδική η συνάρτηση $x(t)$ πρέπει ο λόγος των περιόδων ή των συχνοτήτων των επιμέρους ημιτόνων να είναι λόγος ακεραίων. Αν ο λόγος των περιόδων ή των συχνοτήτων δεν είναι λόγος ακεραίων, τότε η συνάρτηση δεν είναι περιοδική.

Όμως η παραπάνω μελέτη μας πληροφορεί αν η συνάρτηση είναι περιοδική ή όχι. Δε μας πληροφορεί για το ποιά είναι η περίοδος της, σε περίπτωση που αυτή είναι περιοδική. Όμως από τη σχέση

$$T = kT_1 = lT_2, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (2.173)$$

καταλαβαίνουμε ότι η περίοδος T αποτελεί το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο - Ε.Κ.Π των περιόδων T_1, T_2 . Αντίστοιχα, αν η παραπάνω σχέση γραφεί ως

$$T = \frac{k}{l} = \frac{f_1}{f_2}, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (2.174)$$

καταλαβαίνουμε ότι η θεμελιώδης συχνότητα f_0 της συνάρτησης αποτελεί το μέγιστο κοινό διαιρέτη - Μ.Κ.Δ των συχνοτήτων f_1, f_2 .

Παράδειγμα 2.12:

Ας ελέγξουμε αν η συνάρτηση

$$x(t) = \cos(2\pi 200t + \pi/3) - \sin(2\pi 400t) + 3 \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (2.175)$$

είναι περιοδική.

Λύση:

Αν υπάρχει περίοδος T , τότε για αυτή θα πρέπει να ισχύει

$$T = \frac{k}{200} = \frac{l}{400} = \frac{m}{500}, \quad k, l, m \in \mathbb{Z} \quad (2.176)$$

Προφανώς ο λόγος όλων των περιόδων ή συχνοτήτων ανά δυο είναι λόγος ακεραίων, άρα η συνάρτηση είναι περιοδική. Η θεμελιώδης του συχνότητα δίνεται ως

$$f_0 = \text{M.K.}\Delta\{200, 400, 500\} = 100 \text{ Hz} \quad (2.177)$$

Άρα η περίοδος της είναι $T_0 = 1/f_0 = 0.01 \text{ s}$.

■

Παράδειγμα 2.13:

Ας ελέγξουμε αν η συνάρτηση

$$x(t) = \cos(2\pi 200t - \pi/5) + \frac{1}{2} \sin(400t) + 2 \sin(2\pi 500t + \pi/9) \quad (2.178)$$

είναι περιοδική.

Λύση:

Αν υπάρχει περίοδος T , τότε για αυτή θα πρέπει να ισχύει

$$T = \frac{k}{200} = \frac{l}{\frac{400}{2\pi}} = \frac{m}{500}, \quad k, l, m \in \mathbb{Z} \quad (2.179)$$

Παρατηρήστε ότι ο λόγος των δυο πρώτων συχνοτήτων δεν είναι λόγος ακεραίων, αφού

$$\frac{200}{\frac{400}{2\pi}} = \frac{400\pi}{400} = \pi \neq \frac{k}{l}, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (2.180)$$

μια και ο αριθμός π είναι άρρητος αριθμός. Άρα η συνάρτηση $x(t)$ δεν είναι περιοδική, παρ' όλο που τα επιμέρους ημίτονα είναι περιοδικά! ■

Κλείνοντας, ο Πίνακας 2.4 αναφέρει μερικές χρήσιμες τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Τριγωνομετρικές Σχέσεις			
A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$\cos(x \pm \pi/2) = \mp \sin(x)$	2	$\sin(x \pm \pi/2) = \pm \cos(x)$
3	$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$	4	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
5	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$	6	$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
7	$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$	8	$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$
9	$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$	10	$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}$
11	$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$	12	$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$
13	$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$		

Πίνακας 2.4: Πίνακας Χρήσιμων Τριγωνομετρικών Σχέσεων

2.5 Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα

Σε αυτήν την Παράγραφο, θα περιγράψουμε την μέθοδο του Αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα (Partial Fraction Expansion - PFE), που θα μας είναι χρήσιμη στη μελέτη σημάτων και συστημάτων γενικότερα. Όπως λέει και το όνομά της, η μέθοδος PFE διασπά μια ρητή συνάρτηση $F(x)$, με συνήθως υψηλής τάξης πολυώνυμο στον αριθμητή και στον παρονομαστή, σε απλά κλάσματα, με σταθερά ή πρωτοβάθμια πολυώνυμα στον αριθμητή και πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια πολυώνυμα στον παρονομαστή. Ουσιαστικά πρόκειται για την αντίστροφη διαδικασία της πρόσθεσης κλασμάτων σε κοινό παρονομαστή. Η χρησιμότητα του αναπτύγ

Η μέθοδος που ακολουθούμε για την PFE είναι πολύ απλή, και απλά χρειάζεται τριβή για να τη συνηθίσει κανείς. Υπάρχουν δυο συνήθειες περιπτώσεις PFE, οι οποίες εξαρτώνται από την τάξη των ριζών του παρονομαστή.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η PFE εφαρμόζεται *μόνον* όταν ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου του παρονομαστή. Αν δεν ισχύει αυτό, τότε πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή, ώστε να καταλήξουμε σε περίπτωση που μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο PFE.

Δεδομένου ότι ισχύει η παραπάνω σχέση μεταξύ των βαθμών των πολυωνύμων, διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

1. Ο παρονομαστής έχει απλές ρίζες
2. Ο παρονομαστής έχει μια ή περισσότερες ρίζες πολλαπλότητας r

2.5.1 Απλές ρίζες

Θεωρούμε πρώτα την πιο απλή περίπτωση, όπου η συνάρτησή μας

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (2.181)$$

έχει απλές ρίζες στον παρονομαστή της, $Q(x)$. Θεωρήστε το ακόλουθο παράδειγμα:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}, \quad m < n \\ &= \frac{P(x)}{(x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_n)} \end{aligned} \quad (2.182)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$F(x) = \frac{k_1}{x - \rho_1} + \frac{k_2}{x - \rho_2} + \dots + \frac{k_n}{x - \rho_n} \quad (2.183)$$

Για να βρούμε τον συντελεστή k_i , πολλαπλασιάζουμε και τις δυο πλευρές της παραπάνω σχέσης με $(x - \rho_1)$, και έπειτα θέτουμε $x = \rho_1$. Άρα

$$(x - \rho_1)F(x) \Big|_{x=\rho_1} = \left[k_1 + \frac{k_2(x - \rho_1)}{x - \rho_2} + \frac{k_3(x - \rho_1)}{x - \rho_3} + \dots + \frac{k_n(x - \rho_1)}{x - \rho_n} \right] \Big|_{x=\rho_1} \quad (2.184)$$

Όλοι οι όροι στη δεξιά πλευρά απαλείφονται, εκτός του k_1 . Άρα καταλήγουμε στο

$$k_1 = (x - \rho_1)F(x) \Big|_{x=\rho_1} \quad (2.185)$$

Παρόμοια, καταλήγουμε ότι

$$k_i = (x - \rho_i)F(x) \Big|_{x=\rho_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.186)$$

Η παραπάνω διαδικασία δουλεύει ανεξάρτητα από το αν οι ρίζες είναι πραγματικές ή μιγαδικές.

2.5.2 Ρίζες πολλαπλότητας r

Αν η συνάρτηση $F(x)$ έχει πολλαπλή ρίζα, με πολλαπλότητα r , στον παρονομαστή, τότε θα είναι της μορφής

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x - \lambda)^r (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3) \dots (x - \rho_j)} \quad (2.187)$$

Το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για αυτή τη συνάρτηση δίνεται ως

$$F(x) = \frac{d_0}{(x - \lambda)^r} + \frac{d_1}{(x - \lambda)^{r-1}} + \dots + \frac{d_{r-1}}{(x - \lambda)} \quad (2.188)$$

$$+ \frac{k_1}{x - \rho_1} + \frac{k_2}{x - \rho_2} + \dots + \frac{k_n}{x - \rho_n} \quad (2.189)$$

Οι συντελεστές k_i αντιστοιχούν στις ρίζες χωρίς πολλαπλότητα και υπολογίζονται όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Για να βρούμε τους συντελεστές $d_0, \dots, d_{r-1}$, πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με $(x - \lambda)^r$:

$$\begin{aligned} (x - \lambda)^r F(x) &= d_0 + d_1(x - \lambda) + d_2(x - \lambda)^2 + \dots + d_{r-1}(x - \lambda)^{r-1} + \\ &+ k_1 \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_1} + k_2 \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_2} + \dots + k_n \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_n} \end{aligned} \quad (2.190)$$

Θέτοντας $x = \lambda$ και στα δυο μέλη, έχουμε

$$(x - \lambda)^r F(x) \Big|_{x=\lambda} = d_0 \quad (2.191)$$

Άρα το d_0 υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο $(x - \lambda)^r$ στην $F(x)$, και θέτοντας $x = \lambda$ στη σχέση που απομένει. Αν παραγωγίσουμε τη Σχέση (2.190) ως προς x , το δεξιό μέλος καταλήγει στο $d_1 +$ όροι που περιέχουν το $(x - \lambda)$ στους αριθμητές. Θέτοντας $x = \lambda$ και στα δυο μέλη, έχουμε

$$\frac{d}{dx} [(x - \lambda)^r F(x)] \Big|_{x=\lambda} = d_1 \quad (2.192)$$

Άρα, το d_1 υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο $(x - \lambda)^r$ από τον όρο $F(x)$, παραγωγίζοντας την υπόλοιπη έκφραση ως προς x και μετά θέτοντας $x = \lambda$. Συνεχίζοντας κατ’ αυτόν τον τρόπο, έχουμε ότι

$$d_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dx^i} [(x - \lambda)^r F(x)] \Big|_{x=\lambda} \quad (2.193)$$

Άρα ο συντελεστής d_i υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο $(x - \lambda)^r$ στο $F(x)$, υπολογίζοντας μετά την i -οστή παράγωγο την έκφραση που απομένει, διαιρώντας με $i!$, και τέλος θέτοντας $x = \lambda$.

Υπάρχουν αρκετές συντομεύσεις και παραλλαγές που μπορούν να γίνουν για να διευκολυνθεί η επίτευξη της PFE, αλλά οι παραπάνω δυο περιπτώσεις είναι οι πιο γενικές και αυτές θα ακολουθήσουμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα 2.14:

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x + 11}{x^2 - x - 6} \quad (2.194)$$

Λύση:

Η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερη του παρονομαστή, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας το ανάπτυγμα. Θα είναι

$$f(x) = \frac{3x + 11}{x^2 - x - 6} = \frac{3x + 11}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} \quad (2.195)$$

με

$$A = \frac{3x + 11}{(x - 3)(x + 2)} (x + 2) \Big|_{x=-2} = \frac{3x + 11}{x - 3} \Big|_{x=-2} = \frac{-6 + 11}{-5} = -1 \quad (2.196)$$

$$B = \frac{3x + 11}{(x + 2)(x - 3)} (x - 3) \Big|_{x=3} = \frac{3x + 11}{x + 2} \Big|_{x=3} = \frac{9 + 11}{5} = 4 \quad (2.197)$$

Οπότε

$$f(x) = \frac{4}{x - 3} - \frac{1}{x + 2} \quad (2.198)$$

■

Παράδειγμα 2.15:

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} \quad (2.199)$$

Λύση:

Εδώ η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μεγαλύτερη του παρονομαστή, οπότε πριν το ανάπτυγμα θα χρειαστεί διαίρεση των πολυωνύμων. Η διαίρεση θα σταματήσει όταν το πολυώνυμο του υπολοίπου έχει μικρότερη

τάξη από αυτή του διαιρέτη. Η διαίρεση φαίνεται στο Σχήμα 2.19. Άρα θα είναι

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} = x - 2 - \frac{18}{x^3 - 3x^2} \quad (2.200)$$

$$= x - 2 + \frac{-18}{x^2(x-3)} = x - 2 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} \quad (2.201)$$

Οι συντελεστές A, B, C δίνονται ως (δείτε τις Σχέσεις (2.186, 2.193))

$$A = \frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{-18}{x^2(x-3)} \right] \Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} \frac{-18}{x-3} \Big|_{x=0} = \frac{18}{(x-3)^2} \Big|_{x=0} = 2 \quad (2.202)$$

$$B = \frac{-18}{x^2(x-3)} x^2 \Big|_{x=0} = \frac{-18}{x-3} \Big|_{x=0} = 6 \quad (2.203)$$

$$C = \frac{-18}{(x-3)x^2} (x-3) \Big|_{x=3} = \frac{-18}{x^2} \Big|_{x=3} = -2 \quad (2.204)$$

$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18$	$x^3 - 3x^2$
$x^4 - 3x^3$	$x-2$
$-2x^3 + 6x^2 - 18$	
$-2x^3 + 6x^2$	
18	

Σχήμα 2.19: Διαίρεση πολυωνύμων.

Άρα τελικά

$$f(x) = x - 2 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{2}{x-3} \quad (2.205)$$

Παράδειγμα 2.16:

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4 + jx}{2 + 3jx - x^2} \quad (2.206)$$

Λύση:

Η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερη του παρονομαστή οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν το ανάπτυγμα. Εδώ μας βολεύει να θεωρήσουμε $jx = \gamma$. Θα είναι

$$f(\gamma) = \frac{4 + \gamma}{2 + 3\gamma + \gamma^2} = \frac{4 + \gamma}{(1 + \gamma)(2 + \gamma)} = \frac{A}{1 + \gamma} + \frac{B}{2 + \gamma} \quad (2.207)$$

με

$$A = \frac{4 + \gamma}{(2 + \gamma)(1 + \gamma)} (1 + \gamma) \Big|_{\gamma=-1} = \frac{4 + \gamma}{2 + \gamma} \Big|_{\gamma=-1} = 3 \quad (2.208)$$

$$B = \frac{4 + \gamma}{(1 + \gamma)(2 + \gamma)} (2 + \gamma) \Big|_{\gamma=-2} = \frac{4 + \gamma}{1 + \gamma} \Big|_{\gamma=-2} = -2 \quad (2.209)$$

Άρα

$$f(x) = \frac{3}{1 + jx} - \frac{2}{2 + jx} \quad (2.210)$$

Ας δούμε κι ένα παράδειγμα με πολλαπλή ρίζα.

Παράδειγμα 2.17:

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4 + jx}{2 + 5jx - 4x^2 - jx^3} \quad (2.211)$$

Λύση:

Το πολυώνυμο γράφεται ως

$$f(x) = \frac{4 + jx}{2 + 5jx + 4(jx)^2 + (jx)^3} = \frac{4 + \gamma}{2 + 5\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3} \quad (2.212)$$

και μετά από παραγοντοποίηση, έχουμε

$$f(\gamma) = \frac{4 + \gamma}{(2 + \gamma)(1 + \gamma)(1 + \gamma)} = \frac{4 + \gamma}{(2 + \gamma)(1 + \gamma)^2} \quad (2.213)$$

Η παραπάνω σχέση αναλύεται σε μερικά κλάσματα ως

$$f(\gamma) = \frac{A}{2 + \gamma} + \frac{B_0}{1 + \gamma} + \frac{B_1}{1 + \gamma^2} \quad (2.214)$$

με τους συντελεστές να δίνονται ως

$$A = \frac{4 + \gamma}{(1 + \gamma)^2} \Big|_{\gamma=-2} = 2 \quad (2.215)$$

$$B_1 = \frac{4 + \gamma}{2 + \gamma} \Big|_{\gamma=-1} = 3 \quad (2.216)$$

$$B_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{d\gamma^0} [(1 + \gamma)^2 f(\gamma)] \Big|_{\gamma=-1} = \frac{d}{d\gamma} \frac{4 + \gamma}{2 + \gamma} \Big|_{\gamma=-1} = \frac{2 + \gamma - 4 - \gamma}{(2 + \gamma)^2} \Big|_{\gamma=-1} = \frac{-2}{(2 + \gamma)} \Big|_{\gamma=-1} = -2 \quad (2.217)$$

Οπότε είναι

$$f(x) = \frac{2}{2 + jx} - \frac{2}{1 + jx} + \frac{3}{1 - x^2} \quad (2.218)$$

■

Σε πολλές περιπτώσεις, ο λόγος πολυωνύμων γράφεται ως

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + 1}, \quad m < n \\ &= \frac{P(x)}{(1 - \rho_1 x)(1 - \rho_2 x) \dots (1 - \rho_n x)} \end{aligned} \quad (2.219)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$F(x) = \frac{k_1}{1 - \rho_1 x} + \frac{k_2}{1 - \rho_2 x} + \dots + \frac{k_n}{1 - \rho_n x} \quad (2.220)$$

με ρ_k^{-1} τις ρίζες των παρονομαστών. Με όμοιο σκεπτικό με προηγουμένως, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$k_1 = (1 - \rho_1 x) F(x) \Big|_{x=\rho_1^{-1}} \quad (2.221)$$

Παρόμοια, καταλήγουμε ότι

$$k_i = (1 - \rho_i x) F(x) \Big|_{x=\rho_i^{-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.222)$$

ενώ για την περίπτωση της πολλαπλής ρίζας, ισχύει

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{d_0}{(1 - \lambda x)^r} + \frac{d_1}{(1 - \lambda x)^{r-1}} + \dots + \frac{d_{r-1}}{(1 - \lambda x)} \\ &+ \frac{k_1}{1 - \rho_1 x} + \frac{k_2}{1 - \rho_2 x} + \dots + \frac{k_n}{1 - \rho_n x} \end{aligned} \quad (2.223)$$

με τους συντελεστές d_i να δίνονται ως

$$d_i = \frac{1}{i!} (-\lambda^{-1})^i \frac{d^i}{dx^i} \left\{ (1 - \lambda x)^r F(x) \right\} \Big|_{x=\lambda^{-1}} \quad (2.224)$$

Παράδειγμα 2.18:

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{7x + 2}{1 + 3x - 4x^3} \quad (2.225)$$

Λύση:

Το πολυώνυμο γράφεται ως

$$F(x) = \frac{A}{1-x} + \frac{d_0}{(1+2x)^2} + \frac{d_1}{1+2x} \quad (2.226)$$

Οι σταθερές δίνονται ως

$$A = (1-x)F(x) \Big|_{x=1} = 1 \quad (2.227)$$

$$d_0 = (1+2x)^2 F(x) \Big|_{x=-1/2} = -1 \quad (2.228)$$

$$d_1 = \frac{1}{1!} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (1+2x)^2 F(x) \Big|_{x=-1/2} = 2 \quad (2.229)$$

Άρα το κλάσμα αναπτύσσεται ως

$$F(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} - \frac{1}{(1+2x)^2} \quad (2.230)$$

2.6 Χρήσιμες Σχέσεις

Ας αναφέρουμε μερικές χρήσιμες σχέσεις από τον Απειροστικό Λογισμό, ώστε ο αναγνώστης να τις έχει διαθέσιμες χωρίς να χρειάζεται να ανατρέχει σε άλλες πηγές.

Οι Πίνακες 2.5 και 2.6 περιλαμβάνουν σχέσεις παραγώγων και ολοκληρωμάτων μιας μεταβλητής, αντίστοιχα.

Παράγωγοι			
A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$\frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \frac{dy}{dx}$	2	$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$
3	$\frac{d}{dx} \cos(ax) = \frac{1}{a} \sin(ax)$	4	$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{g^2(x)}$
5	$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$	6	$\frac{d}{dx} \ln(ax) = \frac{1}{x}$
7	$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$	8	$\frac{d}{dx} \sin(ax) = a \cos(ax)$
9	$\frac{d}{dx} \cos(ax) = -a \sin(ax)$	10	$\frac{d}{dx} \tan(ax) = \frac{a}{\cos^2(ax)}$
11	$\frac{d}{dx} \sin^{-1}(ax) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$	12	$\frac{d}{dx} \cos^{-1}(ax) = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$
13	$\frac{d}{dx} \tan^{-1}(ax) = \frac{a}{1+a^2x^2}$		

Πίνακας 2.5: Πίνακας Χρήσιμων Παραγώγων

Ολοκληρώματα	
A/A	Σχέση
1	$\int f(x) \left(\frac{d}{dx} g(x) \right) dx = f(x)g(x) - \int \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) g(x) dx$
2	$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$
3	$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$
4	$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
5	$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
6	$\int x \sin(ax) dx = \frac{1}{a^2} (\sin(ax) - ax \cos(ax))$
7	$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2} (\cos(ax) + ax \sin(ax))$
8	$\int x^2 \sin(ax) dx = \frac{1}{a^3} (2ax \sin(ax) - 2 \cos(ax) - a^2 x^2 \cos(ax))$
9	$\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{1}{a^3} (2ax \cos(ax) - 2 \sin(ax) + a^2 x^2 \sin(ax))$
10	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
11	$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$
12	$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2)$
13	$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx))$
14	$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx))$
15	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
16	$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$

Πίνακας 2.6: Πίνακας Χρήσιμων Ολοκληρωμάτων

Κεφάλαιο 5

Ανάλυση Σημάτων στο Πεδίο της Συχνότητας

5.1 Εισαγωγή

Ως τώρα, η όποια ανάλυση συζητήσαμε για σήματα περιελάμβανε αποκλειστικά το χώρο του χρόνου. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γνωρίσουμε μια άλλη θεώρηση ενός σήματος. Αυτή η θεώρηση λέγεται Ανάλυση Fourier και θα ασχοληθούμε αρκετά με αυτή.

Θα ξεκινήσουμε πρώτα με τη μελέτη *περιοδικών* σημάτων, δηλ. σημάτων άπειρων σε διάρκεια, που επαναλαμβάνουν ένα τμήμα τους, τη λεγόμενη *βασική τους περίοδο*, ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Επειδή όμως η ερώτηση “αφού τα περιοδικά σήματα δεν υπάρχουν πουθενά στη φύση, ούτε μπορούν να παραχθούν στο εργαστήριο¹, τι ενδιαφέρον έχουν από τη σκοπιά του μηχανικού;” έρχεται πολύ εύκολα στο μυαλό, οφείλουμε μια απάντηση. Η απάντηση περιλαμβάνει δυο - τουλάχιστον - συνιστώσες:

1. Για διδακτικούς λόγους: τα περιοδικά σήματα είναι εύκολα στο χειρισμό τους, και τα συμπεράσματα που βγαίνουν από τη μελέτη τους μπορούν να γενικευθούν εύκολα για απεριοδικά σήματα (τα οποία υπάρχουν στη φύση και μπορούν να μελετηθούν στο εργαστήριο).
2. Για πρακτικούς λόγους: σκεφτείτε ότι και το μιγαδικό εκθετικό σήμα είναι ένα θεωρητικό κατασκευάσμα που δεν υπάρχει στην πράξη, όμως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η σημασία του ήταν θεμελιώδης για την κατανόηση της συμπεριφοράς των ημιτονοειδών και τη λύση εξισώσεων που τα περιλαμβάνουν. Ακριβώς το ίδιο ισχύει και για τα περιοδικά σήματα – μπορεί να μην υπάρχουν στη φύση, αλλά η μελέτη τους μας προσφέρει πολύτιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά των συστημάτων.

Μερικές σελίδες αργότερα, θα διαβάσετε για την *ανάλυση σε Σειρές Fourier*, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά απλά μια μέθοδος αλλαγής οπτικής γωνίας. Ναι, τόσο απλά! Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να δούμε ένα σήμα σε έναν διαφορετικό χώρο, το χώρο των *συχνοτήτων*. Το πώς, θα το δείτε σύντομα. Το *γιατί* όμως είναι ένα σοβαρό ερώτημα, και το παρακάτω παράδειγμα πιστεύουμε θα σας πείσει για την αναγκαιότητα του να μεταβαίνουμε και σε άλλους χώρους πλην αυτού του χρόνου.

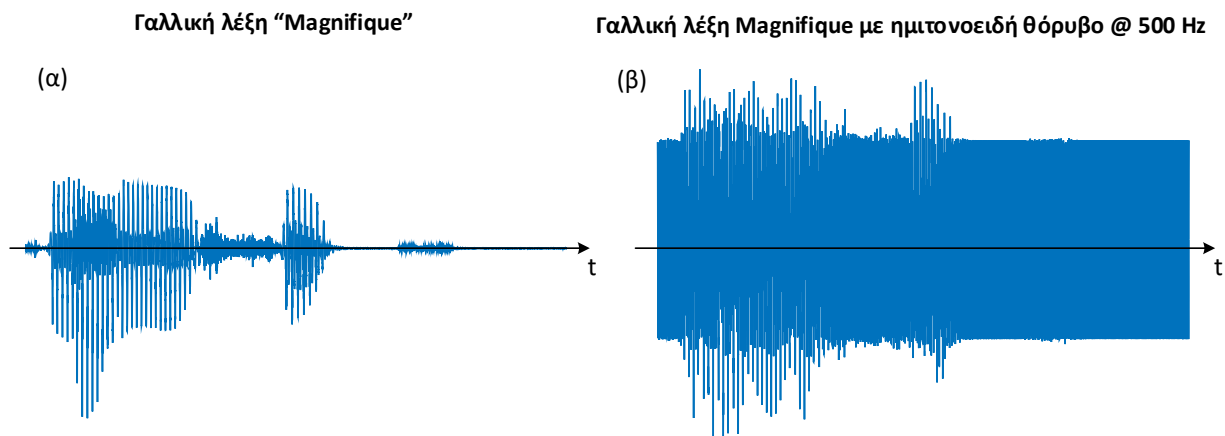
5.2 Μια μικρή εφαρμογή - κίνητρο

Έστω ότι έχουμε ένα σήμα φωνής στο πεδίο του χρόνου, όπως αυτό του Σχήματος 6.1(α). Πρόκειται για τη Γαλλική λέξη “magnifique”². Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο λόγο, ένα ισχυρό ημίτονο πλάτους 0.5, των 500 Hz (θυμηθείτε, 500 Hz σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο, το ημίτονο έχει επαναλάβει τη βασική του περίοδο 500 φορές) προστίθεται στο σήμα φωνής, και το οποίο ημίτονο θεωρείται ως ανεπιθύμητο, δηλαδή ως “θόρυβος”³. Το αποτέλεσμα στο χώρο του χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 6.1(β). Θα θέλαμε να ανακτήσουμε πίσω το αρχικό σήμα χωρίς το θόρυβο. Ασφαλώς στην πράξη δε γνωρίζουμε σχεδόν ποτέ τις ακριβείς παραμέτρους (συχνότητα, πλάτος, φάση) του ημιτόνου, οπότε ας “προσποιηθούμε” και σε αυτό το παράδειγμα ότι το ανεπιθύμητο ημίτονο

¹Μην ξεχνάτε ότι τα περιοδικά σήματα ξεκινούν από το $-\infty$ και καταλήγουν στο $+\infty$.

²Προφέρεται “μανιφίχ” που σημαίνει “υπέροχος, θαυμάσιος, μαγευτικός”.

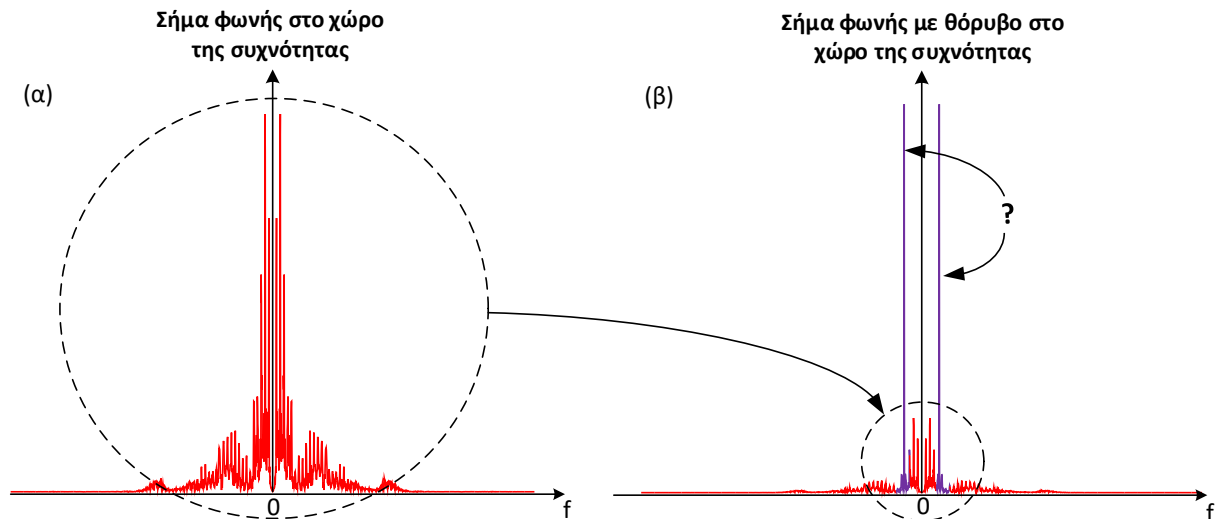
³Το παράδειγμα αυτό δεν απέχει απ’ την πραγματικότητα – στα αεροπλάνα, όταν βγαίνει μια ανακοίνωση από τα μικρόφωνα του πιλοτηρίου, ακούγεται πάνω στη φωνή του πιλότου ένα ημίτονο στα 400 Hz, λόγω του ότι η ηλεκτρική ισχύς είναι στα 400 Hz, εναντιθέσει με τα σπίτια μας, που είναι 50 – 60 Hz...



Σχήμα 5.1: (α) Σήμα φωνής με και (β) χωρίς ημιτονοειδή θόρυβο.

μας είναι εντελώς άγνωστο.

Όπως μπορείτε να δείτε, είναι τρομερά δύσκολο στην πράξη να ξεχωρίσουμε/ανακτήσουμε το σήμα μας στο πεδίο του χρόνου, μια και φαίνεται να έχει θαφτεί μέσα στο “θόρυβο” του ημιτόνου. Αν θέλαμε να το δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, θα πρέπει να γνωρίζουμε την πλήρη περιγραφή του “θορύβου”, δηλ. το πλάτος, τη συχνότητα, και τη φάση του ημιτόνου. Στην πράξη, σπάνια μπορούμε να γνωρίζουμε αυτά τα χαρακτηριστικά. Όμως, αν χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία που θα συζητήσουμε στη συνέχεια, δηλαδή την οπτική πλευρά του πεδίου της συχνότητας, τότε για το καθαρό σήμα θα έχετε το διάγραμμα του Σχήματος 6.2(α), ενώ για το “αλλοιωμένο”



Σχήμα 5.2: (α) Σήμα φωνής και (β) σήμα φωνής με ημιτονοειδή θόρυβο στο πεδίο των συχνοτήτων.

σήμα, θα έχετε το διάγραμμα του Σχήματος 6.2(β). Παρατηρήστε δυο πράγματα:

1. Ο οριζόντιος άξονας είναι πλέον η **συχνότητα** (σε Hz) στα Σχήματα 6.2, και όχι πια ο χρόνος. Πρόκειται για ακριβώς τα ίδια σήματα των Σχημάτων 6.1 μόνο που τα βλέπουμε σε έναν άλλο χώρο, αυτόν των συχνοτήτων. Το γιατί οι γραφικές παραστάσεις έχουν αυτό το σχήμα, και γιατί φαίνεται να υπάρχουν αρνητικές συχνότητες, θα το συζητήσουμε πολύ σύντομα.
2. Προσέξτε επίσης την αλλαγή της κλίμακας στα διαγράμματα αυτά. Στο διάγραμμα 6.2(β) παρατηρούμε ότι υπάρχουν δυο ισχυρές συνιστώσες - προσέξτε την αλλαγή της κλίμακας - εκατέρωθεν του μηδενός, οι οποίες έχουν σημειωθεί με διαφορετικό χρώμα και είναι εμφανές ότι δεν ανήκουν στο Σχήμα 6.2(α). Αυτές οι συνιστώσες έχουν σημειωθεί με ερωτηματικό και ίσως μπορείτε να μαντέψετε ότι βρίσκονται στις θέσεις

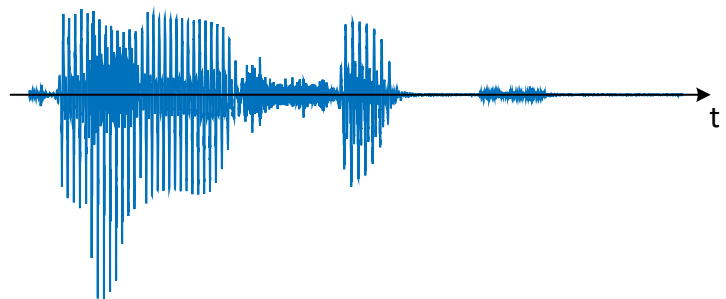
$f = \pm 500$ Hz. Σίγουρα λοιπόν αυτές οι δυο μεγάλες κατακόρυφες “γραμμές” οφείλονται στο ημίτονο που προστεθήκε εκ των υστέρων επάνω στο σήμα της φωνής. Το υπόλοιπο σήμα είναι το ίδιο και έχει σημειωθεί με διακεκομμένες ελλείψεις στα διαγράμματα.

Βλέπουμε λοιπόν τώρα ότι αυτός ο νέος χώρος, ο χώρος των συχνοτήτων, είναι πολύ πιο βοηθητικός στην προσπάθειά μας να ανακτήσουμε το σήμα μας. Η περιγραφή του σήματος σε αυτόν τον χώρο σίγουρα δε μοιάζει καθόλου με την περιγραφή του στο πεδίο του χρόνου, όμως είναι πολύ βολική για το πρόβλημα που συζητάμε. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να μηδενίσουμε τις ισχυρές συνιστώσες που βλέπουμε ότι δεν ανήκουν στο “καθαρό” σήμα φωνής (είναι τιμές ενός σήματος, αν το έχουμε καταγεγραμμένο μπορούμε να τις “πειράξουμε”). Έτσι, θα μπορέσουμε να εξαφανίσουμε το ενοχλητικό σήμα, μια και γνωρίζουμε ότι αντιστοιχεί στον ενοχλητικό “θόρυβο”. Πράγματι, αν μηδενίσουμε αυτή τη συχνότητα, και αντιστρέψουμε τη διαδικασία πίσω στο χρόνο, θα πάρουμε το Σχήμα 6.3!

Ποιός ήταν ο σκοπός όλου αυτού του – υπεραπλουστευμένου, είναι η αλήθεια – παραδείγματος; Ο σκοπός συνοψίζεται στην εξής παρατήρηση: Αν μπορούσαμε να έχουμε ένα μαθηματικό εργαλείο που μας μετατρέπει ένα οποιοδήποτε σήμα στο χώρο του χρόνου σε ένα αντίστοιχο στο χώρο των συχνοτήτων, δηλ. θα μπορούσε να μας γράψει το όποιο σήμα $x(t)$ ως συνάρτηση ημιτόνων κάποιων συγκεκριμένων συχνοτήτων (η οποία μπορεί να παρασταθεί γραφικά όπως στο Σχήμα 6.2, όπως θα δείτε σύντομα), τότε πολύ εύκολα θα μπορούσαμε να κάνουμε πράγματα που στο πεδίο του χρόνου θα ήταν πολύ δύσκολα ή και αδύνατα!

Το παραπάνω παράδειγμα, όπου απλά μηδενίζουμε μια συχνότητα (δηλ. μηδενίζουμε το πλάτος του αντίστοιχου ημιτόνου – η συχνότητα, ως τιμή, δεν μπορεί να “μηδενιστεί”) η οποία είναι ανεπιθύμητη, είναι ένα μόνο από τα εκατοντάδες παραδείγματα, όπου η αλλαγή χώρου μας λύνει τα χέρια. Αυτό το μαθηματικό εργαλείο μας είναι ήδη γνωστό εδώ και πολλά χρόνια και δεν είναι άλλο από την **Ανάλυση Fourier**...⁴

Καθαρό σήμα φωνής



Σχήμα 5.3: Αποθορυβοποιημένο Σήμα Φωνής.

5.3 Απλές αναπαραστάσεις στο χώρο της συχνότητας

Πώς λοιπόν θα μπορούσαμε να έχουμε μια γραφική παρασταση ενός σήματος στο χώρο των συχνοτήτων; Αυτό το ερώτημα ισοδυναμεί με το πώς θα μπορούσαμε να έχουμε μια μαθηματική έκφραση στο χώρο των συχνοτήτων ενός σήματος που μας δίνεται στο πεδίο του χρόνου. Η πιο απλή τέτοια αναπαράσταση φυσικά δεν είναι άλλη από της απλής μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης, συχνότητας f_0 :

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}, \quad A > 0 \quad (5.1)$$

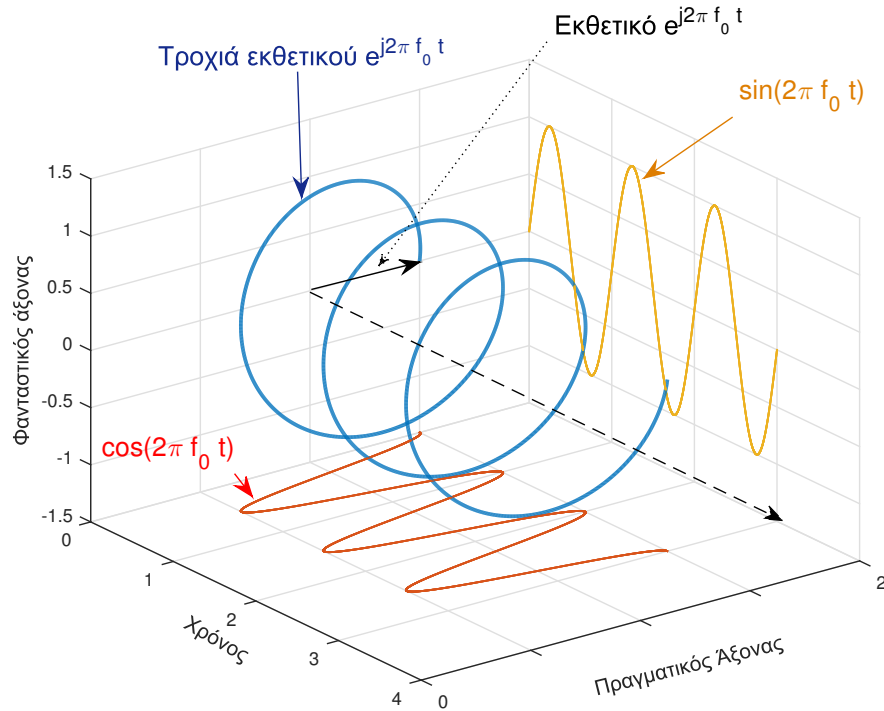
Είναι ένα σήμα που ορίζεται στο χρόνο, με πλάτος A , και με συχνότητα f_0 , η οποία είναι σταθερή και συμβολίζει το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί στο μιγαδικό επίπεδο ανά δευτερόλεπτο. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο *συντελεστής* της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης $e^{j2\pi f_0 t}$ είναι η ποσότητα A , πραγματικός θετικός αριθμός. Έχουμε ξαναδεί αυτό το σήμα - γνωρίζουμε ότι αποτελεί ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο, του οποίου το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ισούνται με

$$\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (5.2)$$

$$\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \sin(2\pi f_0 t) \quad (5.3)$$

και, ως υπενθύμιση, αναπαρίσταται όπως στο Σχήμα 6.4. Μια τέτοια αναπαράσταση, παρ' ό,τι καθόλα αληθής, δεν είναι ιδιαίτερα βολική. Οπότε, γι' αυτό το σήμα, μια διδιάστατη απεικόνιση φαίνεται στο διάγραμμα στο χώρο της συχνότητας στο Σχήμα 6.5. Δυο άξονες, με οριζόντιο τον άξονα των συχνοτήτων και κατακόρυφο τον άξονα

⁴Επειδή ίσως το σκεφτήκατε... αν το ωφέλιμο σήμα $x(t)$ έχει από μόνο του πληροφορία στη συχνότητα ± 500 Hz πριν την πρόσθεση του ημιτόνου, τότε προφανώς αυτή η πληροφορία θα χαθεί με την παραπάνω διαδικασία, και άρα το σήμα που θα πάρουμε στο πεδίο του χρόνου δε θα είναι ακριβώς ίδιο με το αρχικό.



Σχήμα 5.4: Μιγαδική εκθετική συνάρτηση $Ae^{j2\pi f_0 t}$.

του πλάτους, με μια κατακόρυφη γραμμή στη συχνότητα f_0 , ύψους A , η οποία συμβολίζει το συντελεστή της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης συχνότητας f_0 . Αυτή είναι η αναπαράσταση που ζητάμε και ονομάζεται **φάσμα - spectrum!**

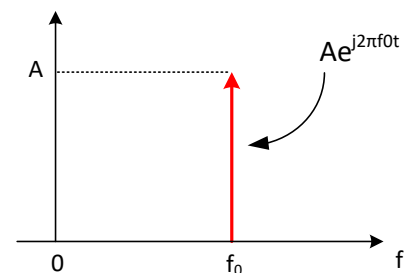
Φυσικά το σήμα που επιλέξαμε είναι το απλούστερο που μπορούσαμε να σκεφτούμε, αλλά δεν παύει να είναι ένα μιγαδικό σήμα! Αν είχαμε ένα πραγματικό σήμα όπως το

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad A > 0 \quad (5.4)$$

τότε πώς θα σχεδιάζαμε αυτή τη γραφική αναπαράσταση; Πολύ απλά, γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Euler ότι

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (5.5)$$

Οι συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων με συχνότητες $\pm f_0$ είναι τώρα $A/2$, και είναι θετικοί και πραγματικοί συντελεστές. Να λοιπόν που τώρα έχουμε ένα άθροισμα από δυο εκθετικά συχνοτήτων $\pm f_0$, οπότε θα έχουμε ένα διάγραμμα με δυο κατακόρυφες γραμμές που φυσικά αναπαριστούν αυτά τα δυο περιστρεφόμενα διανύσματα: μια στη συχνότητα $-f_0$ και μια στη συχνότητα f_0 Hz, με πλάτη $A/2$. Ας δούμε αυτά τα σχήματα μαζί, τόσο στο χρόνο όσο και στη συχνότητα, στο Σχήμα 6.6. Θα θέλαμε φυσικά η πληροφορία που μας δίνεται από τη φασματική αναπαράσταση του σήματος να είναι ισοδύναμη με αυτή του χρόνου. Δηλ. να μπορούμε, βλέποντας αυτή τη γραφική παράσταση, να καταλαβαίνουμε αμέσως για ποιά μαθηματική μορφή σήματος πρόκειται στο πεδίο του χρόνου. Πιο τυπικά, η μαθηματική/γραφική μορφή στο χώρο της συχνότητας να μπορεί να μετατραπεί μοναδικά σε μια μαθηματική μορφή στο πεδίο του χρόνου. Στο παράδειγμά μας, είναι έτσι τα πράγματα; Αρκεί η συχνότητα και το πλάτος που αναγράφονται στη φασματική αναπαράσταση για να περιγράψει πλήρως ένα οποιοδήποτε ημίτονο; Η απάντηση είναι όχι! Διότι ένα ημίτονο στη γενική του μορφή γράφεται ως



Σχήμα 5.5: Απλό παράδειγμα συχνοτικής ανάλυσης.

Στο παράδειγμά μας, είναι έτσι τα πράγματα; Αρκεί η συχνότητα και το πλάτος που αναγράφονται στη φασματική αναπαράσταση για να περιγράψει πλήρως ένα οποιοδήποτε ημίτονο; Η απάντηση είναι όχι! Διότι ένα ημίτονο στη γενική του μορφή γράφεται ως

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi), \quad A > 0, \quad \phi \in (-\pi, \pi] \quad (5.6)$$

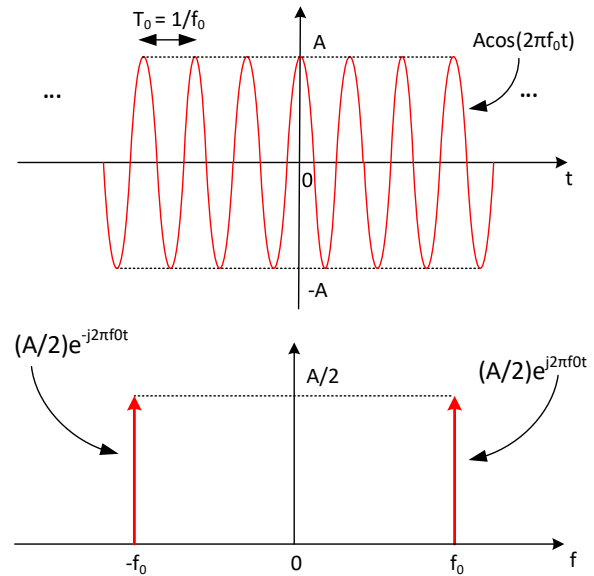
$$= \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\phi} \quad (5.7)$$

$$= \left(\frac{A}{2} e^{j\phi} \right) e^{j2\pi f_0 t} + \left(\frac{A}{2} e^{-j\phi} \right) e^{-j2\pi f_0 t} \quad (5.8)$$

$$= Z_0 e^{j2\pi f_0 t} + Z_0^* e^{-j2\pi f_0 t} \quad (5.9)$$

Παρατηρήστε τώρα ότι εδώ πλέον οι συντελεστές των εκθετικών, Z_0, Z_0^* , είναι μιγαδικοί, και συγκεκριμένα συζυγείς! Αυτοί οι μιγαδικοί συντελεστές ονομάζονται **phasors - φάσορες**, αλλά ο όρος αυτός δε θα χρησιμοποιηθεί συχνά στη συνέχεια.

Αυτό τι σημαίνει; Σημαίνει ότι αν δούμε το μιγαδικό Z_0 ως ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα, τότε αυτός έχει μια αρχική φάση ϕ (δηλ. για $t = 0$ το διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον πραγματικό οριζόντιο άξονα), η οποία δεν μπορεί να παρασταθεί εύκολα στο ίδιο διάγραμμα με το πλάτος $\frac{A}{2}$. Τα ακριβώς ίδια ισχύουν και για το περιστρεφόμενο διάνυσμα Z_0^* . Άρα στη γενικότερη μορφή ενός ημιτόνου, δε μας αρκεί μια γραφική παράσταση που να δείχνει το συντελεστή του εκθετικού, γιατί πολύ συχνά ο συντελεστής είναι μιγαδικός (δυο μεταβλητές, A, ϕ)! Χρειάζεται με κάποιο τρόπο να αναπαραστήσουμε και την (αρχική) φάση ϕ της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης ως συνάρτηση της συχνότητας. Θυμηθείτε ότι η φάση ενός ημιτόνου σχετίζεται με τη μετατόπισή του σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα.



Σχήμα 5.6: Απλό παράδειγμα φασματικής ανάλυσης σήματος στους δυο χώρους.

Όμως πριν απ' όλα χρειάζεται να συμφωνήσουμε σε κάτι: οι συντελεστές Z_i, Z_i^* των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων $e^{\pm j2\pi f_0 t}$ πρέπει να βρίσκονται σε πολική μορφή, δηλ.

$$Z_i = A_i e^{j\phi_i}, \quad \text{με } A_i = |Z_i| > 0, \quad \phi_i \in (-\pi, \pi] \quad (5.10)$$

Οπότε τελικά, η πλήρης περιγραφή ενός ημιτόνου στο χώρο της συχνότητας περιλαμβάνει δυο φάσματα: ένα που αφορά το πλάτος A_i του μιγαδικού συντελεστή Z_i ως συνάρτηση της συχνότητας (αυτό που έχουμε δει ως τώρα) και ένα που αφορά την (αρχική) φάση ϕ_i του μιγαδικού συντελεστή Z_i ως συνάρτηση της συχνότητας. Αυτές οι δυο αναπαραστάσεις λέγονται **φάσμα πλάτους** και **φάσμα φάσης**, αντίστοιχα. Ας δούμε μερικά πιο σύνθετα παραδείγματα.

5.3.1 Περισσότερα παραδείγματα

Παράδειγμα 6.1:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (5.11)$$

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του.

Λύση:

Προτού σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα, ας δούμε πως αναλύεται αυτό το σήμα. Είναι

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (5.12)$$

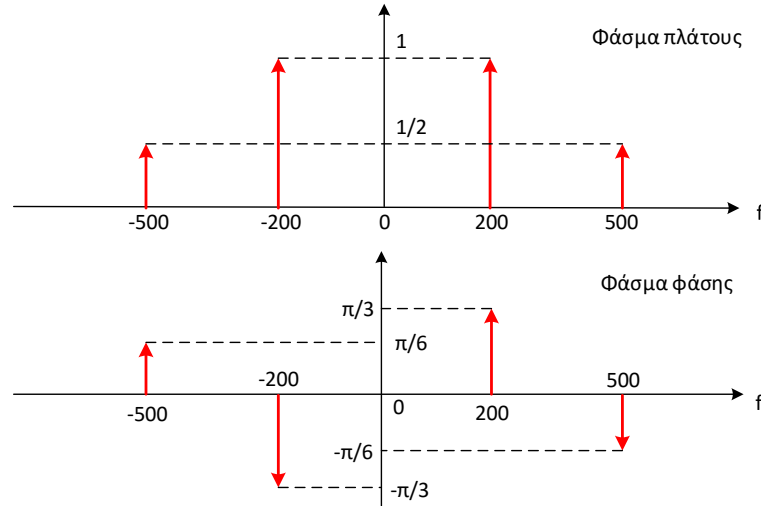
$$= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/6} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/6} \quad (5.13)$$

$$= \left(e^{j\pi/3} \right) e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3} \right) e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/6} \right) e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/6} \right) e^{-j2\pi 500t} \quad (5.14)$$

με τις παρενθέσεις να περικλείουν τους συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων συχνότητας $\pm 200, \pm 500$

Hz. Όπως βλέπετε εδώ, τώρα οι συντελεστές αυτοί είναι μιγαδικοί, $1e^{\pm j\pi/3}$, $\frac{1}{2}e^{\pm j\pi/6}$. Οι συντελεστές αυτοί είναι ήδη στην επιθυμητή πολική μορφή, $A_i e^{j\phi_i}$, με $A > 0$ και $\phi \in (-\pi, \pi]$.

Από αυτήν την αναπαράσταση, μας είναι ξεκάθαρο πώς να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης, καθώς τα A_i θα σχεδιαστούν στο φάσμα πλάτους και τα ϕ_i στο φάσμα φάσης, στις αντίστοιχες συχνότητες φυσικά. Δείτε το Σχήμα 6.7.



Σχήμα 5.7: Παράδειγμα 6.1 ανάλυσης σήματος.

Προφανώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους και φάσης οποιωνδήποτε ημιτόνων ή συνδυασμού τους με απλή εφαρμογή των σχέσεων του Euler. Προσέξτε όμως την περίπτωση που οι συντελεστές δεν καταλήγουν τόσο εύκολα σε πολική μορφή. Δείτε το παρακάτω, πιο γενικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.2:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (5.15)$$

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

Λύση:

Οι σχέσεις του Euler μας δίνουν

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (5.16)$$

$$= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2j} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/6} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/6} \quad (5.17)$$

$$= (e^{j\pi/3}) e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3}) e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2j} e^{-j\pi/6}\right) e^{j2\pi 500t} + \left(-\frac{1}{2j} e^{j\pi/6}\right) e^{-j2\pi 500t} \quad (5.18)$$

Εδώ, οι συντελεστές των εκθετικών συναρτήσεων είναι $1e^{\pm j\pi/3}$ και $\pm \frac{1}{2j} e^{\pm j\pi/6}$. Ενώ με τους συντελεστές $1e^{\pm j\pi/3}$ των δυο πρώτων στη σειρά εκθετικών συναρτήσεων είμαστε ευχαριστημένοι (είναι ήδη σε πολική μορφή), δεν ισχύει το ίδιο για τους δυο επόμενους, τους $\pm \frac{1}{2j} e^{\pm j\pi/6}$. Ο λόγος; Αυτοί οι όροι $\pm \frac{1}{2j}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, και όχι πραγματικοί, όπως απαιτείται.

Μπορούμε όμως να τους μετατρέψουμε σε φάση, γιατί από τις σχέσεις του Euler ξέρουμε ότι

$$-\frac{1}{j} = j = \cos(\pi/2) + j \sin(\pi/2) = e^{j\pi/2} \quad (5.19)$$

$$\frac{1}{j} = -j = \cos(-\pi/2) + j \sin(-\pi/2) = e^{-j\pi/2} \quad (5.20)$$

Οπότε θα έχουμε

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (5.21)$$

$$= (e^{j\pi/3})e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3})e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/6}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/6}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (5.22)$$

$$= (e^{j\pi/3})e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3})e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j\pi/6}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j\pi/6}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (5.23)$$

$$= (e^{j\pi/3})e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3})e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j2\pi/3}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2}e^{j2\pi/3}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (5.24)$$

Προσέξτε ότι όλοι οι μιγαδικοί συντελεστές ($e^{\pm j\pi/3}$, $\frac{1}{2}e^{\pm j2\pi/3}$) των εκθετικών συναρτήσεων $e^{\pm j2\pi 200t}$, $e^{\pm j2\pi 500t}$ είναι σε πολική μορφή, δηλ. στη μορφή $A_i e^{j\phi_i}$, με $A > 0$ και $\phi \in (-\pi, \pi]$. Αυτός ήταν άλλωστε και ο σκοπός μας. Τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης! Κάντε το! ☺

Ας δούμε ένα ακόμα πλήρες παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.3:

Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 3 - 2 \cos(2\pi 10t + \pi/9) + \sin(2\pi 15t - \pi/7) \quad (5.25)$$

Ζητείται η περίοδος του, το φάσμα πλάτους, και το φάσμα φάσης του.

Λύση:

Για την περίοδο, γνωρίζουμε ήδη ότι ένα άθροισμα ημιτόνων είναι περιοδικό αν ο λόγος των συχνοτήτων (ή των περιόδων του) είναι λόγος ακεραίων αριθμών. Προφανώς ο λόγος των αριθμών 10 και 15 (συχνότητες σε Hz) είναι λόγος ακεραίων, άρα το σήμα είναι περιοδικό. Η θεμελιώδης του συχνότητα είναι

$$f_0 = \text{M.K.}\Delta\{10, 15\} = 5 \text{ Hz} \quad (5.26)$$

και άρα η περίοδος του είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.2$ δευτερόλεπτα. Ας αναλύσουμε τώρα το σήμα μας σε μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις, ώστε να σχεδιάσουμε τα φάσματα. Θα είναι

$$x(t) = 3 - 2 \cos(2\pi 10t + \pi/9) + \sin(2\pi 15t - \pi/7) \quad (5.27)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.28)$$

Εδώ πρέπει λοιπόν, αφού ενός να χειριστούμε τους όρους $\pm 1/j$ όπως κάναμε και πριν, αφού ετέρου να δούμε πως θα χειριστούμε τους συντελεστές των δυο πρώτων εκθετικών συναρτήσεων συχνότητας ± 10 Hz. Κατ'αρχάς, ας μετατρέψουμε τα $\pm 1/j$ κατάλληλα, στους δυο τελευταίους όρους, αφήνοντας ήσυχους προς το παρόν τους πρώτους. Έχουμε:

$$x(t) = 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.29)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.30)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.31)$$

Πλέον τα δυο τελευταία εκθετικά συχνότητας ± 15 Hz έχουν μιγαδικούς συντελεστές γραμμένους σε πολική μορφή. Ας δούμε τώρα τα δυο πρώτα εκθετικά, συχνότητας ± 10 Hz, που έχουν αρνητικό πρόσημο.

Γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Euler ότι

$$e^{j\pi} = -1 \quad (5.32)$$

$$e^{-j\pi} = -1 \quad (5.33)$$

Ποιόν από τους δυο όρους θα διαλέξουμε; Η απάντηση είναι “και τους δυο!” Απλά θα προσέξουμε η επιλογή που θα κάνουμε να μας δίνει συνολική φάση που θα ανήκει στο $(-\pi, \pi]$! Αν δεν ανήκει εκεί, αλλάζουμε τις επιλογές

μας! Ας το δούμε.

Επιλέγουμε να αντικαταστήσουμε το -1 της εκθετικής συνάρτησης συχνότητας 10 Hz με το $e^{-j\pi}$, και το -1 της εκθετικής συνάρτησης συχνότητας -10 Hz με το $e^{j\pi}$. Άρα θα έχουμε:

$$x(t) = 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.34)$$

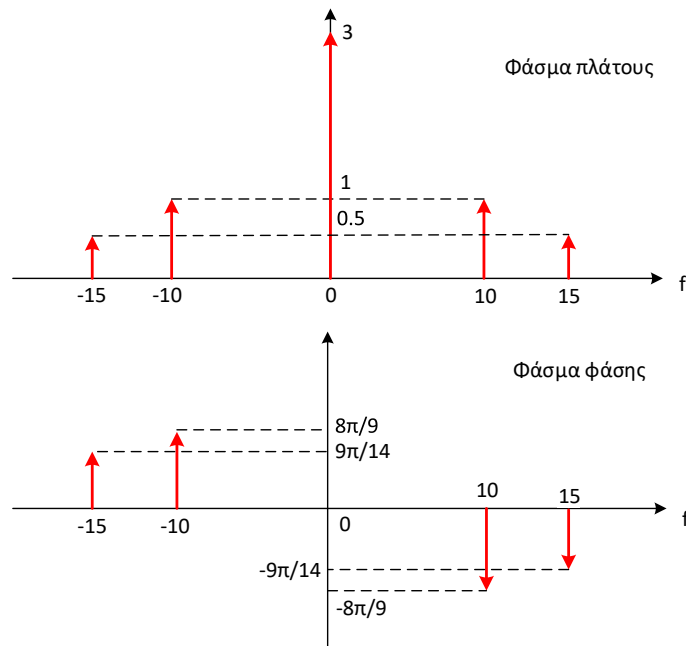
$$= 3 + (e^{j\pi/9}e^{-j\pi})e^{j2\pi 10t} + (e^{-j\pi/9}e^{j\pi})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.35)$$

$$= 3 + (e^{-j8\pi/9})e^{j2\pi 10t} + (e^{j8\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.36)$$

Βλέπετε ότι με αυτήν την αντιστοίχιση, οι φάσεις που προέκυψαν στους μιγαδικούς συντελεστές των δυο πρώτων εκθετικών συχνότητας $\pm 10\text{ Hz}$ είναι $\pm 8\pi/9$, που φυσικά ανήκουν στο $(-\pi, \pi]$, ενώ τα μέτρα τους είναι μοναδιαία (πραγματικά και θετικά). Αν κάναμε ανάποδα τις αντιστοιχίες των -1 με τις σχέσεις του Euler, τότε θα προέκυπταν φάσεις με τιμές $\pm 10\pi/9$, που ασφαλώς χρειάζονται περαιτέρω μετατροπή για να ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Τέλος, η σταθερά $c = 3$ πρέπει να εκφραστεί συχνωτικά. Είναι ένας απλός πραγματικός αριθμός, άρα που θα τον συμπεριλάβουμε; Προφανώς στο φάσμα πλάτους. Σε ποιά συχνότητα; Η απάντηση είναι τελικά απλή, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το $c = 3$ γράφεται ως $3e^{j0t}$. Άρα το $c = 3$ είναι το πλάτος της μηδενικής συχνότητας, $f = 0$. Άρα θα το βάλουμε στο φάσμα πλάτους, στη συμβολή των αξόνων, δηλ. στη θέση $f = 0^5$!

Πλέον όλες οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις έχουν μιγαδικούς συντελεστές που είναι γραμμένοι σε πολική μορφή. Εύκολα ξεχωρίζουμε τα πλάτη από τις φάσεις, οπότε μπορούμε να σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα. Δείτε το Σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 6.3.

Σε αυτό το παράδειγμα, παρατηρήστε το εξής: το φάσμα πλάτους έχει *άρτια* συμμετρία, ενώ το φάσμα φάσης έχει *περιττή* συμμετρία! Αυτό ισχύει, όπως θα δούμε και παρακάτω, για *κάθε* πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ που αναλύουμε, και προέρχεται από το γεγονός ότι οι μιγαδικοί συντελεστές των θετικών συχνοτήτων που βρήκαμε είναι συζυγείς με τους αντίστοιχους των αρνητικών συχνοτήτων. Είναι ένας καλός τρόπος να ελέγχετε τα αποτελέσματά σας.

Μπορούμε λοιπόν να συνοψίσουμε τα παραπάνω ως ακολούθως:

⁵Τι θα συνέβαινε αν αντί για $c = 3$ ήταν $c = -3$ ο σταθερός όρος; Τότε θα τον γράφαμε ως $c = -3 = 3e^{j\pi}e^{j0t}$, και το πλάτος $A = 3$ θα άνηκε στο φάσμα πλάτους, ενώ η φάση π στο φάσμα φάσης, στην ίδια θέση, $f = 0$!

Σχεδίαση Φασμάτων Εκθετικών Αναπαραστάσεων

Συνοψίζοντας, για το σχεδιασμό φάσματος πλάτους και φάσης σε ένα άθροισμα εκθετικών (ή ημιτόνων που τα μετατρέπουμε σε εκθετικά), φροντίζουμε να μετατρέψουμε όλους τους συντελεστές των εκθετικών σε πολική μορφή, δηλ. με θετικούς πραγματικούς αριθμούς ως μέτρο, και προσέχοντας η φάση που προκύπτει να ανήκει στο $(-\pi, \pi]$. Αυτό γίνεται μετατρέποντας τα αρνητικά πρόσημα συντελεστών σε φάση με τη σχέση $e^{\pm j\pi} = -1$, καθώς και τους όρους $\pm 1/j = \mp j$ σε $e^{\pm k\pi/2} = \pm j$.

Δεν καταλήγουν, προφανώς, όμως όλοι οι συνδυασμοί ημιτόνων σε περιοδικό σήμα. Για παράδειγμα, το παραπάνω σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = \text{M.K.}\Delta\{200, 500\} = 100 \text{ Hz}$, και άρα περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.01$ δευτερόλεπτα. Όμως, το σήμα $y(t) = \cos(2\pi 50t) - \sin(5t - \pi/4)$ ΔΕΝ είναι περιοδικό, γιατί δεν υπάρχει ο Μ.Κ.Δ των δυο συχνοτήτων (ή αλλιώς, ο λόγος των συχνοτήτων τους δεν είναι λόγος ακεραίων). Εμείς όμως ενδιαφερομαστε ιδιαίτερα για τα περιοδικά σήματα, σε πρώτη φάση. Όταν το σήμα που μας δίνεται είναι σε μορφή αθροίσματος ή γινομένου ημιτόνων, τότε μπορούμε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και τύπων του Euler, να το γράψουμε σε μορφή αθροίσματος ημιτόνων ή εκθετικών και να σχεδιάσουμε φάσματα πλάτους και φάσης σημάτων, όπως παραπάνω, άσχετα αν είναι το σήμα περιοδικό ή όχι.

Ας δούμε δυο ακόμα παραδείγματα, όπου το σήμα προς ανάλυση δεν είναι σε μορφή αθροίσματος ημιτόνων.

Παράδειγμα 6.4:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \sin^2(5\pi t) \cos(22\pi t) \quad (5.37)$$

Βρείτε την περίοδο T_0 του σήματος.

Λύση:

Για να βρούμε την περίοδο, θα πρέπει να γράψουμε το $x(t)$ ως άθροισμα ημιτόνων ή/και συνημιτόνων. Είναι:

$$x(t) = \sin^2(5\pi t) \cos(22\pi t) = \left(\frac{1}{2j} e^{j5\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j5\pi t} \right)^2 \left(\frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \quad (5.38)$$

$$= \left(\frac{1}{4j^2} e^{j10\pi t} - 2 \frac{1}{2j} \frac{1}{2j} e^{j5\pi t} e^{-j5\pi t} + \frac{1}{4j^2} e^{-j10\pi t} \right) \left(\frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \quad (5.39)$$

$$= \left(-\frac{1}{4} e^{j10\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-j10\pi t} \right) \left(\frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \quad (5.40)$$

$$= -\frac{1}{8} e^{j32\pi t} - \frac{1}{8} e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4} e^{j22\pi t} + \frac{1}{4} e^{-j22\pi t} - \frac{1}{8} e^{-j32\pi t} - \frac{1}{8} e^{j12\pi t} \quad (5.41)$$

$$= \frac{1}{8} e^{j\pi} e^{j32\pi t} + \frac{1}{8} e^{-j\pi} e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4} e^{j22\pi t} + \frac{1}{4} e^{-j22\pi t} + \frac{1}{8} e^{-j\pi} e^{-j32\pi t} + \frac{1}{8} e^{j\pi} e^{j12\pi t} \quad (5.42)$$

$$= \frac{1}{4} \cos(2\pi 6t + \pi) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 11t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi 16t + \pi) \quad (5.43)$$

Προφανώς, η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι: $f_0 = \text{M.K.}\Delta(6, 11, 16) = 1 \text{ Hz}$. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1 \text{ s}$. ■

Παράδειγμα 6.5:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα

$$x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)} \quad (5.44)$$

(α') Ποιά είναι η περίοδος του σήματος;

(β') Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης του σήματος.

Λύση:

Αναπτύσσουμε το σήμα μας σύμφωνα με τους τύπους του Euler:

$$x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)} = \frac{\frac{1}{2j}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t})}{\frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})} \quad (5.45)$$

$$= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) \quad (5.46)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις ταυτότητες:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad (5.47)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad (5.48)$$

για τα εκθετικά του αριθμητή. Θα είναι λοιπόν:

$$x(t) = \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) = \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}[(e^{jt})^2 - (e^{-jt})^2 + (e^{jt})^3 - (e^{-jt})^3] \quad (5.49)$$

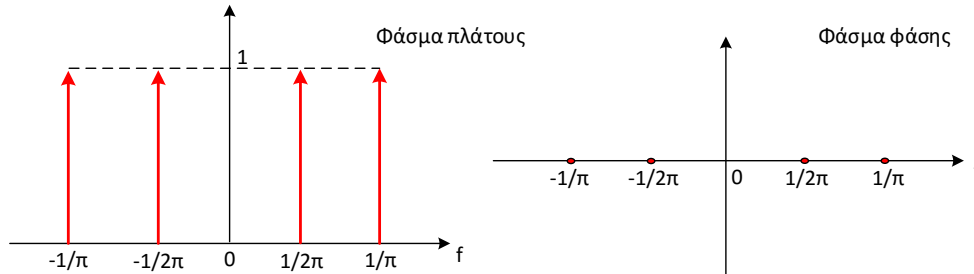
$$= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}[(e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt}) + (e^{jt} - e^{-jt})(e^{j2t} + 1 + e^{-j2t})] \quad (5.50)$$

$$= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t}) = e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t} \quad (5.51)$$

$$= 1 + e^{jt} + e^{-jt} + e^{j2t} + e^{-j2t} = 1 + 2\cos(t) + 2\cos(2t) \quad (5.52)$$

(α') Με χρήση της κυκλικής συχνότητας $\omega = 2\pi f$, που βολεύει περισσότερο στο παράδειγμα αυτό, η περίοδος του σήματος θα είναι $T_0 = \text{Μ.Κ.Δ.}\{2\pi, 4\pi\} = 2\pi$ s.

(β') Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 6.9. Παρατηρήστε ότι το φάσμα φάσης είναι μηδενικό για κάθε τιμή συχνότητας.



Σχήμα 5.9: Φάσμα Πλάτους και Φάσης Παραδείγματος 6.5.

■

5.3.2 Μόνο ημίτονα;

Όμως τα περιοδικά σήματα, όπως αυτό της Σχέσης (6.11), έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα όταν τα αναπτύσσουμε σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Αυτά τα εκθετικά έχουν συχνότητες που είναι ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας του σήματος! Παρατηρήστε ξανά ότι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος της Σχέσης (6.11) είναι 100 Hz. Οι συχνότητες του σήματος είναι ακέραιες πολλαπλάσιες του 100, δηλ. $\pm 200, \pm 500$. Αυτό ακριβώς αντικατοπτρίζεται και στο φάσμα πλάτους και φάσης.

Τι γίνεται όμως αν το περιοδικό σήμα που μας δίνεται δεν είναι σε μορφή αθροίσματος/γινομένου/πηλίκου ημιτόνων; Αν είναι ένας περιοδικός τριγωνικός ή τετραγωνικός παλμός⁶, τότε ποιό είναι το συχνοτικό του περιεχόμενο; Άρα φυσιολογικά προκύπτει το ερώτημα αν μπορούμε να εκφράσουμε ένα πραγματικό περιοδικό σήμα ως άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, δηλ. ημιτόνων (μέσω

⁶ Σήματα που εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη στις επιστήμες Η/Υ!

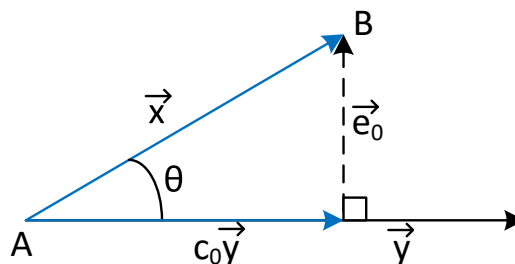
των σχέσεων Euler), με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους. Αν μπορούμε, τότε υπό ποιές συνθήκες και με ποιό σφάλμα (αν υπάρχει);. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται από τη θεωρία της Ανάλυσης σε Σειρές Fourier! Πριν φτάσουμε όμως εκεί, θα ήταν πολύ χρήσιμο για τη διαίσθησή μας και την ομαλή μετάβαση και κατανόηση των Σειρών Fourier, να μελετήσουμε το γενικότερο πρόβλημα της προσέγγισης ενός οποιουδήποτε σήματος από άλλα σήματα.

5.4 Προσέγγιση Σημάτων από Σήματα

Στις εφαρμοσμένες επιστήμες, η προσέγγιση πολύπλοκων σημάτων από άλλα απλούστερα είναι πολύ συχνό φαινόμενο. Μάλιστα, μια τέτοια προσέγγιση κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, όταν εκφράσαμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ ως συνεχές άθροισμα μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα. Η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα θεμελιώδες σήμα στη μελέτη των συστημάτων, όπως ήδη είδαμε. Στη μελέτη περιοδικών σημάτων, το αντίστοιχο θεμελιώδες σήμα είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα, $e^{j2\pi f_0 t}$, και αυτό φάνηκε ξεκάθαρα στην προηγούμενη παράγραφο, στα απλά παραδείγματα που παρουσιάστηκαν. Η ανάλυση που ακολουθεί σε αυτήν την παράγραφο ξεκινά με έννοιες οι οποίες είναι πιο οικείες στον αναγνώστη, όπως η έννοια των διανυσμάτων. Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε τις έννοιες στο χώρο των σημάτων, ώστε να καταλήξουμε στην απάντηση του ερωτήματος που τέθηκε νωρίτερα, το οποίο επαναλαμβάνουμε εδώ: μπορεί να εκφραστεί ένα οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, τα οποία έχουν συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους;

5.4.1 Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

Γνωρίζουμε ότι ένα διάνυσμα στο επίπεδο είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, με αρχή ένα σημείο A και πέρας ένα σημείο B , το οποίο συμβολίζουμε με $\vec{x}$, όπως στο Σχήμα 6.10. Θεωρώντας ένα άλλο διάνυσμα

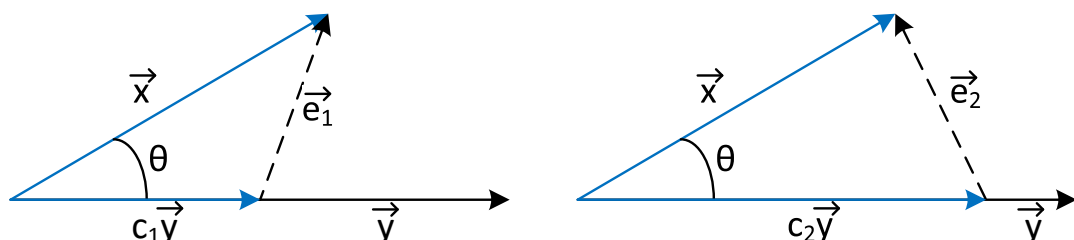


Σχήμα 5.10: Διάνυσμα $\vec{x}$ και προβολή του, $c_0 \vec{y}$, επάνω σε διάνυσμα $\vec{y}$.

$\vec{y}$, το οποίο σχηματίζει γωνία θ με το διάνυσμα $\vec{x}$, μπορούμε να φέρουμε την κάθετο από το σημείο B επάνω στο διάνυσμα $\vec{y}$. Το διάνυσμα $c_0 \vec{y}$ που δημιουργείται ονομάζεται *προβολή* του διανύσματος $\vec{x}$ επάνω στο διάνυσμα $\vec{y}$, με c_0 πραγματική σταθερά. Μπορούμε τότε να εκφράσουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως

$$\vec{x} = c_0 \vec{y} + \vec{e}_0 \quad (5.53)$$

με $\vec{e}_0$ όπως στο Σχήμα 6.10. Θα ήταν βολικό να θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{e}_0$ ως το διάνυσμα *σφάλματος* μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$, γιατί αποτελεί το διάνυσμα που πρέπει να προστεθεί στο διάνυσμα $c_0 \vec{y}$ ώστε αυτό να γίνει ίσο με το διάνυσμα $\vec{x}$. Εύκολα μπορεί κάποιος να σκεφτεί διάφορα διανύσματα σφάλματος $\vec{e}_i$, όπως αυτά που φαίνονται στο Σχήμα 6.11. Οι αντίστοιχες εκφράσεις του διανύσματος $\vec{x}$ συναρτήσει αυτών των διανυσμάτων σφάλματος



Σχήμα 5.11: Διάφορα διανύσματα σφάλματος $\vec{e}_i$.

και του διανύσματος $\vec{y}$ είναι

$$\vec{x} = c_1 \vec{y} + \vec{e}_1 \quad (5.54)$$

$$\vec{x} = c_2 \vec{y} + \vec{e}_2 \quad (5.55)$$

και τα αντίστοιχα διανύσματα σφάλματος είναι

$$\vec{e}_0 = \vec{x} - c_0 \vec{y} \quad (5.56)$$

$$\vec{e}_1 = \vec{x} - c_1 \vec{y} \quad (5.57)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{x} - c_2 \vec{y} \quad (5.58)$$

βάζοντας μαζί και το διάνυσμα σφάλματος e_0 , της αρχικής μας προσέγγισης. Αν θέλαμε να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως προσέγγιση του διανύσματος $\vec{y}$, δηλ.

$$\vec{x} = c_i \vec{y} \approx \vec{y} \quad (5.59)$$

τότε ποιά από τις (συνολικά άπειρες) εκφράσεις του διανύσματος $\vec{x}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{y}$ και $\vec{e}_i$ είναι η “καλύτερη”; Αν και θα μπορούσε κανείς να θέσει διάφορα κριτήρια για την εύρεση της καλύτερης έκφρασης, η πιο διαισθητικά προφανής είναι αυτή που σχετίζεται με το μήκος του διανύσματος σφάλματος, $\vec{e}_i$: όσο μικρότερο το μήκος του διανύσματος σφάλματος, τόσο “καλύτερη” η προσέγγιση του διανύσματος $\vec{y}$ από το διάνυσμα $\vec{x}$. Αυτή η προσέγγιση ονομάζεται *προσέγγιση ελάχιστου σφάλματος*. Σε ποιά περίπτωση λοιπόν είναι το μήκος $|\vec{e}_i|$ ελάχιστο; Η διαίσθησή μας ξανά δεν λανθεύει: όταν το διάνυσμα $\vec{e}_i$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$, δηλ. όπως το διάνυσμα $\vec{e}_0$ στο Σχήμα 6.10. Για να ολοκληρώσουμε την εύρεση της προσέγγισης, αρκεί να βρούμε τη σταθερά c_0 . Από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζουν τα διανύσματα αυτά, έχουμε

$$c_0 |\vec{y}| = |\vec{x}| \cos(\theta) \implies c_0 |\vec{y}|^2 = |\vec{y}| |\vec{x}| \cos(\theta) = \vec{x} \cdot \vec{y} \implies c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (5.60)$$

με $\vec{x} \cdot \vec{y}$ το **εσωτερικό γινόμενο** μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$.

Η παραπάνω σχέση εγείρει μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις.

- Αν το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$, δηλ. $\vec{x} \perp \vec{y}$, τότε η Σχέση (6.60) δίνει $c = 0$. Άρα καταλαβαίνουμε ότι δεν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα επάνω στο $\vec{y}$ που να γράφεται ως προσέγγιση του $\vec{x}$ με την έννοια της προβολής.
- Η σχέση $\vec{x} \perp \vec{y} \iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ ονομάζει τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ ως **ορθογώνια** μεταξύ τους.

Άρα λοιπόν μπορέσαμε και εκφράσαμε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{y}$ ως

$$\vec{x} \approx c \vec{y} \quad (5.61)$$

με

$$c = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (5.62)$$

δηλ. προσεγγίσαμε το διάνυσμα $\vec{x}$ με όρους - και συγκεκριμένα έναν όρο - του διανύσματος $\vec{y}$.

5.4.2 Προβολή Σήματος σε Σήμα

Ας επεκτείνουμε τις έννοιες που μόλις συζητήσαμε από το χώρο των διανυσμάτων στο χώρο των σημάτων. Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε ένα σήμα $x(t)$ με όρους ενός άλλου σήματος $y(t)$, τα οποία ορίζονται στο διάστημα $[t_1, t_2]$. Με άλλα λόγια, θέλουμε να βρούμε τη σταθερά c για την οποία η προσέγγιση

$$x(t) \approx cy(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (5.63)$$

είναι η “καλύτερη” - ας ονομάζουμε αυτήν την προσέγγιση ως *βέλτιση* στο εξής. Ας ορίσουμε τη *συνάρτηση σφάλματος* ως

$$e(t) = \begin{cases} x(t) - cy(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.64)$$

Θα θέλαμε αυτή η συνάρτηση σφάλματος να είναι κατά κάποια έννοια “ελάχιστη”, ώστε η προσέγγισή μας να είναι βέλτιστη. Μια πολύ δημοφιλής μέθοδος εύρεσης της βέλτιστης προσέγγισης είναι μέσω ελαχιστοποίησης της

ενέργειας της συνάρτησης σφάλματος, η οποία ορίζεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt \quad (5.65)$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε τη σταθερά c για την οποία η τιμή της E_e είναι ελάχιστη στο διάστημα $[t_1, t_2]$, δεδομένων των $x(t), y(t)$. Θέτοντας την παράγωγο της E_e ως προς c ίση με μηδέν, έχουμε:

$$\frac{dE_e}{dc} = 0 \quad (5.66)$$

$$\frac{d}{dc} \left(\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt \right) = 0 \quad (5.67)$$

$$\frac{d}{dc} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - \frac{d}{dc} \int_{t_1}^{t_2} 2cx(t)y(t) dt + \frac{d}{dc} c^2 \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt = 0 \quad (5.68)$$

$$0 - 2 \frac{d}{dc} c \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt + \frac{d}{dc} c^2 \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt}_{E_y} = 0 \quad (5.69)$$

$$2cE_y = 2 \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \quad (5.70)$$

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \quad (5.71)$$

όπου E_y η ενέργεια του σήματος $y(t)$. Άρα η σταθερά βέλτιστης προσέγγισης c δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \quad (5.72)$$

Ας συγκρίνουμε την παραπάνω σχέση με την αντίστοιχη που καταλήξαμε για τα διανύσματα:

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \quad , \quad c = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (5.73)$$

Είναι εμφανές ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$ “μεταφράζεται” σε εμβαδό του γινομένου $x(t)y(t)$ στο χώρο των σημάτων! Ας ορίσουμε λοιπόν το **εσωτερικό γινόμενο** δυο σημάτων $x(t), y(t)$ ως

$$\langle x, y \rangle = \int_A x(t)y(t) dt \quad (5.74)$$

με A το πεδίο ορισμού των δυο σημάτων.

Συνολικά λοιπόν, δείξαμε ότι ένα σήμα $x(t)$ μπορεί να προσεγγιστεί βέλτιστα, υπό την έννοια της **ελάχιστης ενέργειας σφάλματος**, από ένα σήμα $y(t)$ ως

$$x(t) \approx cy(t), \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.75)$$

με

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt = \frac{1}{E_y} \langle x, y \rangle \quad (5.76)$$

Παρατηρήστε ότι κι εδώ $\langle x, y \rangle = 0$, τότε τα σήματα ονομάζονται **ορθογώνια** μεταξύ τους, και στην παραπάνω βέλτιστη προσέγγιση ισχύει ότι $\langle e, y \rangle = 0$!

Δυο παραδείγματα θα κάνουν την παραπάνω συζήτηση πιο πρακτική και ξεκάθαρη.

Παράδειγμα 6.6:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} t, & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.77)$$

Θέλουμε να το προσεγγίσουμε μέσω του σήματος $y(t) = \sin(t)$ στο $-\pi \leq t \leq \pi$.

(α') Δείξτε ότι η βέλτιστη, με την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, προσέγγιση του $x(t)$ από το $y(t)$ είναι η

$$x(t) \approx cy(t) = 2 \sin(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad (5.78)$$

(β') Σχεδιάστε το σήμα $cy(t) = 2 \sin(t)$ στον ίδιο άξονα με το $x(t)$.

(γ') Το σφάλμα της παραπάνω προσέγγισης δίνεται από τη σχέση

$$e(t) = x(t) - cy(t) = t - 2 \sin(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad (5.79)$$

Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια σφάλματος $E_e = \int_{-\pi}^{\pi} e^2(t) dt$.

(δ') Δείξτε ότι $\langle e, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e(t)y(t) dt = 0$, δηλ. ότι τα σήματα $e(t)$, $y(t)$ είναι ορθογώνια.

Λύση:

(α') Είναι

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t) dt = \frac{1}{E_y} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt \quad (5.80)$$

με

$$E_y = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \quad (5.81)$$

$$= \frac{1}{2} t \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi - \frac{1}{4} \cdot 0 \quad (5.82)$$

$$= \pi \quad (5.83)$$

Άρα

$$c = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt = \frac{1}{\pi} \left(\sin t \Big|_{-\pi}^{\pi} - t \cos t \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \quad (5.84)$$

$$= \frac{1}{\pi} (0 - \pi \cos \pi + (-\pi) \cos(-\pi)) = \frac{1}{\pi} (\pi + \pi) = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \iff c = 2 \quad (5.85)$$

Άρα η βέλτιστη προσέγγιση είναι $x(t) \approx cy(t) = 2 \sin t$, $-\pi \leq t \leq \pi$

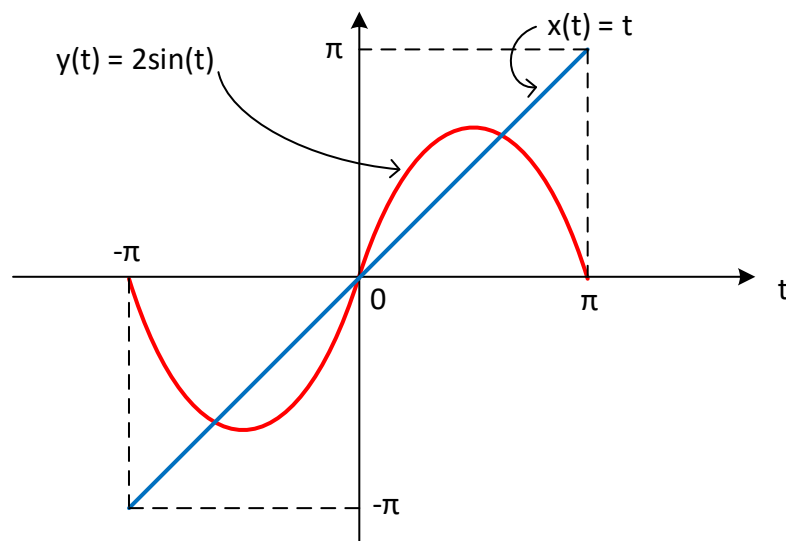
(β') Το $x(t)$ και η βέλτιστη προσέγγισή του, $2 \sin(t)$, φαίνεται στο Σχήμα 6.12.

(γ') Έχουμε

$$E_e = \int_{-\pi}^{\pi} e^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} (t - 2 \sin t)^2 dt \quad (5.86)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 - 4t \sin t + 4 \sin^2 t) dt \quad (5.87)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - 4 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt}_{cE_x=2\pi} + 4 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt}_{E_x=\pi} \quad (5.88)$$



Σχήμα 5.12: Παράδειγμα 4.6: προσέγγιση σήματος από άλλο.

$$= \frac{t^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} - 8\pi + 4\pi = \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right) - 4\pi \quad (5.89)$$

$$= \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi \quad (5.90)$$

(δ') Είναι

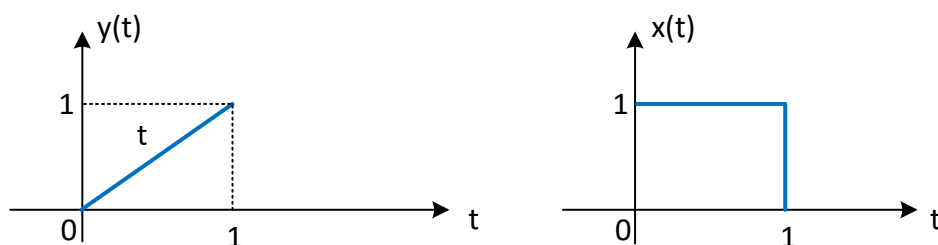
$$\langle e, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e(t)y(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} (t - 2\sin t) \sin t dt \quad (5.91)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt - \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin^2 t dt = 0 \quad (5.92)$$

άρα τα $e(t), y(t)$ είναι ορθογώνια.

Παράδειγμα 6.7:

Έστω τα σήματα του Σχήματος 6.13.



Σχήμα 5.13: Σχήματα Παραδείγματος 4.7.

(α') Βρείτε τη βέλτιστη, με την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, προσέγγιση του $y(t)$ από το $x(t)$.

(β') Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια σφάλματος $E_{e_1} = \int_0^1 e_1^2(t)dt$ για την παραπάνω προσέγγιση.

(γ') Βρείτε τη βέλτιστη, με την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, προσέγγιση του $x(t)$ από το $y(t)$.

(δ') Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια σφάλματος $E_{e_2} = \int_0^1 e_2^2(t)dt$ για την παραπάνω προσέγγιση.

Λύση:

(α') Θέλουμε να βρούμε τη σταθερά c_1 τέτοια ώστε

$$y(t) \approx c_1 x(t) \quad (5.93)$$

Η σταθερά c_1 δίνεται ως

$$c_1 = \frac{1}{E_x} \int_0^1 y(t)x(t)dt = \int_0^1 tdt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad (5.94)$$

αφού

$$E_x = \int_0^1 x^2(t)dt = \int_0^1 dt = t \Big|_0^1 = 1 \quad (5.95)$$

Οπότε το σήμα $y(t)$ γράφεται ως $y(t) \approx \frac{1}{2}x(t)$, $t \in [0, 1]$.

(β') Η συνάρτηση σφάλματος είναι

$$e_1(t) = t - \frac{1}{2}, \quad t \in [0, 1] \quad (5.96)$$

και η ελάχιστη ενέργεια σφάλματος είναι

$$E_{e_1} = \int_0^1 e_1^2(t)dt = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}t \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12} \quad (5.97)$$

(γ') Θέλουμε να βρούμε τη σταθερά c_2 τέτοια ώστε

$$x(t) \approx c_2 y(t) \quad (5.98)$$

Η σταθερά c_2 δίνεται ως

$$c_2 = \frac{1}{E_y} \int_0^1 x(t)y(t)dt = 3 \int_0^1 tdt = 3 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \quad (5.99)$$

αφού

$$E_y = \int_0^1 y^2(t)dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad (5.100)$$

Οπότε το σήμα $x(t)$ γράφεται ως $x(t) \approx \frac{3}{2}y(t)$, $t \in [0, 1]$.

(δ') Η συνάρτηση σφάλματος είναι

$$e_2(t) = 1 - \frac{3}{2}t, \quad t \in [0, 1] \quad (5.101)$$

και η ελάχιστη ενέργεια σφάλματος είναι

$$E_{e_2} = \int_0^1 e_2^2(t)dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}t \right)^2 dt = \frac{1}{4} \quad (5.102)$$

5.4.2.1 Επέκταση σε Μιγαδικά Σήματα

Παρ' όλο που η παραπάνω ανάλυση είναι πολύ ενδιαφέρουσα, ο σκοπός μας είναι να ελέγξουμε αν μπορούμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων της μορφής $e^{j2\pi k f_0 t}$, τα οποία - όπως βλέπετε - έχουν συχνότητες ακεραίες πολλαπλασίες μιας θεμελιώδους. Ας επεκτείνουμε λοιπόν την παραπάνω συζήτηση στα μιγαδικά σήματα - η ακριβώς όμοια ανάλυση με πραγματικά σήματα αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Έστω ότι τα σήματα $x(t), y(t)$ είναι μιγαδικά, και ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε το $x(t)$ με χρήση του $y(t)$ στο διάστημα $[t_1, t_2]$. Ορίζοντας τη συνάρτηση σφάλματος $e(t)$ ως

$$e(t) = x(t) - cy(t) \quad (5.103)$$

μπορούμε να αναζητήσουμε τη σταθερά c ελαχιστοποιώντας την ενέργειά της συνάρτησης σφάλματος, η οποία δίνεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - cy(t)|^2 dt \quad (5.104)$$

Έχουμε

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - cy(t)|^2 dt = 0 \quad (5.105)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))(x(t) - cy(t))^* dt = 0 \quad (5.106)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))(x^*(t) - c^*y^*(t)) dt = 0 \quad (5.107)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (x(t)x^*(t) - c^*x(t)y^*(t) - cx^*(t)y(t) + |c|^2y(t)y^*(t)) dt = 0 \quad (5.108)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (|x(t)|^2 - c^*x(t)y^*(t) - cx^*(t)y(t) + |c|^2|y(t)|^2) dt = 0 \quad (5.109)$$

Η παραπάνω συνάρτηση ως προς c δεν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο της (λόγω της παρουσίας των όρων $c^*, |c|^2$). Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της παραγώγου μιγαδικής συνάρτησης με χρήση των παραγώγων Wirtinger, των οποίων ο ορισμός είναι εκτός σκοπού αυτού του συγγράμματος - θα τις χρησιμοποιήσουμε μόνο για να βρούμε το αποτέλεσμα που ζητάμε. Σύμφωνα με τις παραγώγους Wirtinger, ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial c} c^* = 0 \text{ και } \frac{\partial}{\partial c} cc^* = c^* \quad (5.110)$$

με το συμβολισμό $\partial/\partial c$ να αναφέρεται στη μερική γραμμική παραγωγή. Θέτοντας λοιπόν ξανά την (μερική) παράγωγο της E_e ως προς c ίση με το μηδέν, έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial c} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \frac{\partial}{\partial c} \int_{t_1}^{t_2} c^* x(t)y^*(t) dt - \frac{\partial}{\partial c} \int_{t_1}^{t_2} cx^*(t)y(t) dt + \frac{\partial}{\partial c} |c|^2 \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt = 0 \quad (5.111)$$

$$0 - \int_{t_1}^{t_2} x^*(t)y(t) dt + c^* \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt = 0 \quad (5.112)$$

Γνωρίζοντας ότι

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt \quad (5.113)$$

για μιγαδικά σήματα, καταλήγουμε

$$-\int_{t_1}^{t_2} x^*(t)y(t) dt + c^* \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt = 0 \quad (5.114)$$

$$c^* = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x^*(t)y(t) dt \quad (5.115)$$

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t) dt \quad (5.116)$$

Άρα η σταθερά βέλτιστης προσέγγισης c δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{E_y} \langle x, y \rangle \quad (5.117)$$

με $\langle x, y \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο μιγαδικών σημάτων $x(t), y(t)$.

μας οδηγεί στην εύρεση των συντεταγμένων τους: είναι

$$\vec{x}_1 = [1 \ 0 \ 0] \quad (5.123)$$

$$\vec{x}_2 = [0 \ 1 \ 0] \quad (5.124)$$

$$\vec{x}_3 = [0 \ 0 \ 1] \quad (5.125)$$

καθώς αποτελούν τα μοναδιαία διανύσματα για κάθε διάσταση του τριδιάστατου χώρου: μήκος, πλάτος, ύψος.

Ποιά είναι όμως τα χαρακτηριστικά αυτών των διανυσμάτων (ή οποιωνδήποτε άλλων, αν υπάρχουν) που τα κάνει κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα το διάνυσμα $\vec{x}$;

(α') Μπορείτε να δείξετε ότι είναι *ορθογώνια*: $x_i \perp x_j$ για $i \neq j$. Η Γραμμική Άλγεβρα μας υποδεικνύει - και μπορεί ναδειχθεί πολύ εύκολα από τον αναγνώστη - ότι η ορθογωνιότητα συνεπάγεται *γραμμική ανεξαρτησία*. Η γραμμική ανεξαρτησία είναι πολύ σημαντική, καθώς κατά κάποιο τρόπο εννοεί ότι τα διανύσματα αυτά έχουν κάτι ιδιαίτερο, κάτι θεμελιώδες το καθένα, καθώς δεν μπορεί κανένα τους να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

(β') Παρατηρήστε ότι για ένα διάνυσμα στον τριδιάστατο χώρο απαιτούνται ακριβώς τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα για να τον περιγράψουν πλήρως και ακριβώς. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\vec{x}_i$ συνιστούν ένα *πλήρες σύνολο* ορθογωνίων διανυσμάτων του τριδιάστατου χώρου! Η έννοια της πληρότητας συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει κάποιο διάνυσμα $\vec{x}_4$ στον τριδιάστατο χώρο, το οποίο να είναι ορθογώνιο (και άρα γραμμικά ανεξάρτητο) και με τα τρία προηγούμενα $\vec{x}_i$, για $i = 1, 2, 3$.

Άρα το κλειδί για την αναπαράσταση ενός διανύσματος στον N -διάστατο χώρο με μηδενικό διάνυσμα σφάλματος είναι η εύρεση ενός συνόλου N το πλήθος διανυσμάτων που ικανοποιούν την ιδιότητα της *γραμμικής ανεξαρτησίας* και της *πληρότητας*. Αυτές οι δυο ιδιότητες μπορούν να εκφραστούν με μια λέξη: το σύνολο αυτό των διανυσμάτων αποτελεί **βάση** του N -διάστατου χώρου, δηλ. οποιοδήποτε διάνυσμα ανήκει στο χώρο μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός όλων των διανυσμάτων της βάσης, με μηδενικό σφάλμα.

Η επέκταση της παραπάνω ανάλυσης στο χώρο των σημάτων δεν (πρέπει να) είναι προφανής. Αναζητούμε ένα σύνολο σημάτων της μορφής $e^{j2\pi f_k t}$, με $f_k = kf_0$, τα οποία να αναπαριστούν με “ακρίβεια” ένα οποιοδήποτε περιοδικό σήμα. Η ανάλυσή μας ως τώρα περιελάμβανε απεριοδικά σήματα, οπότε ας παραμείνουμε σε μια περίοδο του σήματος, $[0, T_0]$. Ας θεωρήσουμε το σύνολο των περιοδικών - με περίοδο k/T_0 το καθένα - μιγαδικών σημάτων

$$\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-N}^N, \quad \text{με } k \in \mathbb{Z} \quad (5.126)$$

Ας προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ που ορίζεται στο $[0, T_0]$ ως άθροισμα $2N + 1$ τέτοιων σημάτων ως

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.127)$$

με συντελεστές X_k . Ο λόγος των αρνητικών τιμών του k έγκειται στο ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε ένα *πραγματικό* σήμα από άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Γνωρίζουμε από τη σχέση του Euler ότι αυτό μπορεί να συμβεί μόνον όταν οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις έρχονται σε συζυγή ζεύγη (τόσο οι ίδιες όσο και οι συντελεστές τους).

Η συνάρτηση σφάλματος $e(t)$ δίνεται ως

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.128)$$

Η ενέργεια της συνάρτησης σφάλματος, E_e , δίνεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |e(t)|^2 dt \quad (5.129)$$

Μπορούμε να βρούμε τα X_k για τα οποία η ενέργεια της συνάρτησης σφάλματος είναι ελάχιστη. Θα παραλείψουμε την ακριβή διαδικασία μια και δεν προσθέτει κάτι στη συζήτηση, ενώ μοιάζει αρκετά με όσα περιγράψαμε στην Παράγραφο 6.4.2.1. Αποδεικνύεται λοιπόν ότι οι συντελεστές X_k δίνονται ως

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.130)$$

Για τους συντελεστές X_k , μπορεί κανείς να δείξει ότι η ελάχιστη ενέργεια σφάλματος δίνεται από τη σχέση

$$E_e = \int_0^{T_0} x^2(t)dt - T_0 \sum_{k=-N}^N |X_k|^2 = E_x - T_0 \sum_{k=-N}^N |X_k|^2 \quad (5.131)$$

Παρατηρήστε ότι η ενέργεια σφάλματος E_e φθίνει όσο αυξάνει το N , δηλ. όσο προσθέτουμε ζεύγη συζυγών μιγαδικών εκθετικών (δηλ. ημιτόνων!). Άρα όταν $N \rightarrow +\infty$, θα πρέπει $E_e \rightarrow 0$. Όταν αυτό συμβαίνει, τότε το σύνολο $\mathbb{E}$ ονομάζεται **πλήρες**, και τότε η Σχέση (6.127) δεν είναι πια προσέγγιση αλλά ισότητα:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}, \quad t \in [0, T_0] \quad (5.132)$$

υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος πάντα.

Εφόσον το σύνολο $\mathbb{E}$ περιλαμβάνει στοιχεία που είναι ορθογώνια και είναι πλήρες όταν $N \rightarrow +\infty$, τότε το σύνολο αυτό αποτελεί **βάση** του χώρου των περιοδικών σημάτων. Η σειρά που περιγράφεται στη Σχέση (6.132) ονομάζεται **Σειρά Fourier**.

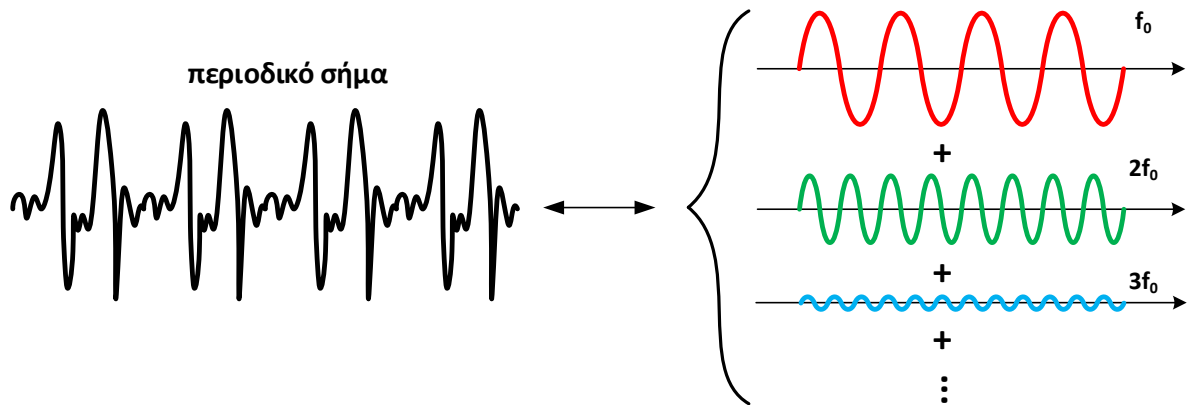
Τέλος, επειδή η ενέργεια σφάλματος E_e φθίνει στο μηδέν, η ενέργεια του αθροίσματος των μιγαδικών εκθετικών ισούται με την ενέργεια του συνολικού σήματος $x(t)$, βάσει της Σχέσης (6.131):

$$E_x = \int_0^{T_0} x^2(t)dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \quad (5.133)$$

Η Σχέση (6.133) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως το **Θεώρημα του Parseval**.

5.5 Ανάλυση σε Σειρές Fourier

Η Ανάλυση Fourier είναι ίσως το βασικότερο εργαλείο ανάλυσης σημάτων, η οποία μας δίνει πληροφορίες για το *συχνотικό τους περιεχόμενο*, δηλ. για το ποιές συχνότητες υπάρχουν στο σήμα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μας πληροφορεί για το πόσα και ποιά ημίτονα (δηλ. με ποιό πλάτος, συχνότητα, και φάση) πρέπει να προσθέσουμε μεταξύ τους για να πάρουμε το συνολικό σήμα που αναλύουμε. Ένα οπτικό παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 6.15. Με άλλα λόγια, η ανάλυση σε Σειρές Fourier δεν είναι τίποτα παραπάνω από ένα μαθηματικό εργαλείο που μας



Σχήμα 5.15: Ανάλυση σήματος σε άθροισμα ημιτόνων με ακέραιες πολλαπλάσιες συχνότητες.

επιτρέπει να γράφουμε ένα οποιοδήποτε (ή μάλλον, σχεδόν οποιοδήποτε $\ominus$, όπως θα δούμε σύντομα) περιοδικό, πραγματικό σήμα ως ένα άθροισμα ημιτόνων. Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, με περίοδο T_0 , αναλύεται σε σειρά Fourier με χρήση των σχέσεων

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.134)$$

όπου

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt, \quad k \neq 0 \quad (5.135)$$

και

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \quad (5.136)$$

με

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (5.137)$$

όπου X_k είναι οι περίφημοι **συντελεστές Fourier**, και η συχνότητα f_0 είναι η γνωστή μας θεμελιώδης συχνότητα, γιατί όλα τα εκθετικά στη Σχέση (6.134) έχουν συχνότητες που είναι ακέραιες πολλαπλάσιες αυτής. Είδαμε λοιπόν εδώ πως γράφουμε ένα οποιοδήποτε περιοδικό σήμα ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων, όπως κάναμε στην Παράγραφο 6.3 για τα απλά αθροίσματα ημιτόνων. Η Σειρά Fourier αυτής της μορφής λέγεται **εκθετική ή δίπλευρη σειρά Fourier**.

Μα ένα λεπτό... Πριν είπαμε ότι η ανάλυση Fourier μας αναλύει το σήμα και σε ημίτονα. Πού βρίσκονται αυτά στις παραπάνω σχέσεις; Μα φυσικά, απ' τις γνωστές σχέσεις του Euler, μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε εκθετική αναπαράσταση, που έχει προκύψει από ανάλυση πραγματικού σήματος, σε ημιτονοειδή αναπαράσταση. Θυμηθείτε:

$$\cos(\theta t) = \frac{e^{j(\theta t)} + e^{-j(\theta t)}}{2}, \quad \sin(\theta t) = \frac{e^{j(\theta t)} - e^{-j(\theta t)}}{2j} \quad (5.138)$$

Άρα ουσιαστικά οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις είναι κι αυτές ημίτονα, όταν βρίσκονται σε συζυγή ζεύγη. Ας δούμε πως γίνεται αυτή η μετατροπή.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.139)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.140)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (5.141)$$

Όπως όμως είπαμε, μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε οι συντελεστές X_k έρχονται σε συζυγή ζεύγη, δηλ. $X_k^* = X_{-k}$. Άρα

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (5.142)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (5.143)$$

Όμως

$$X_k^* = (|X_k| e^{j\phi_k})^* = |X_k|^* (e^{j\phi_k})^* = |X_k| e^{-j\phi_k} \quad (5.144)$$

Άρα

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (5.145)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (5.146)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \quad (5.147)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left(e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \right) \quad (5.148)$$

$$= \boxed{X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \quad (5.149)$$

Άρα δείξαμε ότι κάθε πραγματικό, περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί και ως άθροισμα ημιτόνων με πλάτη $2|X_k|$, συχνότητες $k f_0$, και φάσεις ϕ_k . Το παραπάνω ανάπτυγμα λέγεται **τριγωνομετρική ή μονόπλευρη Σειρά Fourier**, και δείχνει ξεκάθαρα πώς αναλύεται ένα περιοδικό, πραγματικό σήμα σε ένα άθροισμα από ημίτονα με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους!

Πριν πάμε σε παραδείγματα, ας ξεκινήσουμε πρώτα μερικές παρατηρήσεις σχετικά με την ανάλυση σε Σειρές Fourier.

Παρατηρήσεις

- (α') Ας ξεκινήσουμε από κάτι πολύ σημαντικό: όλες οι συχνότητες της Σχέσης (6.134) είναι *ακέραιες πολλαπλάσιες* μιας συγκεκριμένης, της θεμελιώδους συχνότητας, που ορίζεται ως το αντίστροφο της βασικής περιόδου του σήματος. Αυτό σημαίνει ότι τα φάσματα πλάτους και φάσης που - θα δούμε πως - προκύπτουν θα πρέπει να έχουν γραμμές μόνο στις συχνότητες $k f_0$, $k \in \mathbb{Z}$, και πουθενά αλλού!
- (β') Το ολοκλήρωμα στη Σχέση (6.135) μας πληροφορεί ότι για να βρούμε τους συντελεστές X_k κάθε εκθετικής συνάρτησης, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το περιοδικό σήμα $x(t)$ με τις περιφημες *συναρτήσεις βάσης*, και για την ακρίβεια τις συζυγείς τους $e^{-j2\pi k f_0 t}$, και να ολοκληρώσουμε το αποτέλεσμα σε μια περίοδο - οποιαδήποτε περίοδο του σήματος, όχι απαραίτητα από 0 ως T_0 ! Μπορούμε να βάλουμε στα άκρα του ολοκληρώματος όποιο διάστημα μιας βασικής περιόδου μας βολεύει, αρκεί να αποτελεί ένα τμήμα βασικής περιόδου του σήματος! Περισσότερα για τους συντελεστές Fourier σε επόμενη παρατήρηση...
- (γ') Ίσως παρατηρήσατε ότι, για πραγματικά σήματα, ο όρος X_0 εξ' ορισμού δεν είναι τίποτα άλλο παρά το (αλγεβρικό) εμβαδό μιας περιόδου του σήματος. Άρα ο όρος X_0 είναι απλά η μέση τιμή του σήματος. Πραγματικός αριθμός *πάντα*, για πραγματικά σήματα!
- (δ') Αντίθετα, οι συντελεστές X_k , $k \neq 0$ δεν είναι απαραίτητα πραγματικοί αριθμοί, συνήθως μάλιστα είναι μιγαδικοί. Το είδαμε άλλωστε σε προηγούμενες παραγράφους, στα σήματα που μελετήσαμε. Για το λόγο αυτό, οι συντελεστές X_k μπορούν - και συνήθως πρέπει, γιατί μας βοηθά στη σχεδίαση των φασμάτων - να γραφούν σε πολική μορφή:

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k} = |X_k| e^{j\phi_k} \quad (5.150)$$

Το $|X_k|$ - επανάληψη μήτηρ μαθήσεως - αποτελεί το **μέτρο** των συντελεστών Fourier (πάντα θετικό) και το $\angle X_k = \phi_k$ αποτελεί τη **φάση** αυτών. Η φάση *πάντα* εκφράζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Υπάρχουν πολλές ιδιότητες σχετικά με τους συντελεστές X_k ανάλογα με το είδος του σήματος $x(t)$. Για παράδειγμα, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε ισχύει ότι $X_k^* = X_{-k}$, δηλ. οι συντελεστές για αρνητικά k είναι απλά οι συζυγείς συντελεστές των όρων θετικών k . Προσοχή! Αυτό ισχύει μόνο για *πραγματικά*, περιοδικά σήματα $x(t)$!

- (ε') Σημαντικό είναι επίσης να παρατηρήσουμε ότι τα πραγματικά σήματα $x(t)$ που αναπτύσσονται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (5.151)$$

μπορούν να γραφούν ως

$$x(t) = X_0 + 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \right\} \quad (5.152)$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα μπορεί να ιδωθεί ως το πραγματικό μέρος ενός αθροίσματος περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, οι οποίες έχουν συχνότητες $k f_0$ και αρχικές φάσεις ϕ_k . Είναι ενδιαφέρον να παρουσιαστεί αυτή η οπτική στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν.

5.5.1 Ύπαρξη Σειράς Fourier

Είπαμε πιο πριν ότι μπορούμε να γράψουμε σχεδόν οποιοδήποτε περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier. Ποιές είναι αυτές οι συνθήκες που καθορίζουν πότε μπορούμε να γράψουμε ένα περιοδικό σήμα ως σειρά Fourier και πότε όχι; Προφανώς τα σήματα που δεν μπορούν να αναπτυχθούν κατά Fourier πρέπει να είναι κάπως ασυνήθιστα. Αν και από τη σκοπιά του μηχανικού δε μας ενδιαφέρουν τέτοια σήματα, μια και υπάρχουν μόνο στη θεωρία, ενδιαφέρον είναι να δούμε ποιές είναι οι συνθήκες που καθορίζουν την ύπαρξη ή όχι του αναπτύγματος Fourier.

Υπάρχουν δύο βασικές συνθήκες για την ύπαρξη της σειράς Fourier.

- (α') Οι συντελεστές X_k πρέπει να έχουν πεπερασμένο μέτρο, δηλ. $|X_k| < \infty$. Αυτό αποδεικνύεται ότι συμβαίνει μόνον όταν

$$|X_k| = \frac{1}{T_0} \left| \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right| \leq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad (5.153)$$

Η Σχέση 6.153 ονομάζεται *ασθενής συνθήκη του Dirichlet*. Αν μια συνάρτηση $x(t)$ ικανοποιεί την ασθενή συνθήκη του Dirichlet, η ύπαρξη της σειράς Fourier είναι εγγυημένη, αλλά μπορεί η σειρά να μη συγκλίνει σε κάθε σημείο. Για παράδειγμα, αν ένα σήμα $x(t)$ απειρίζεται σε κάποιο σημείο, τότε προφανώς κανένα άθροισμα ημιτόνων δεν μπορεί να αναπαραστήσει αυτήν την περιοχή, οπότε η σειρά που θα αναπαριστά το σήμα θα είναι “προβληματική” σε αυτήν την περιοχή, με άλλα λόγια, δε θα συγκλίνει. Παρόμοια, αν ένα σήμα έχει άπειρα σημεία μεγιστου-ελαχίστου σε μια περίοδό του. Έτσι, απαιτούμε μια ακόμα συνθήκη.

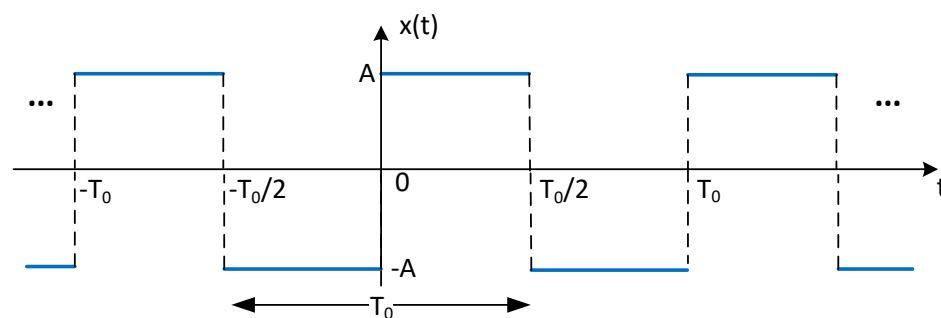
- (β') Το σήμα $x(t)$ πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων σε μια περίοδό του, και πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένων ασυνεχειών σε μια περίοδό του. Αυτές οι δυο συνθήκες λέγονται *ισχυρές συνθήκες του Dirichlet*. Αξίζει να σημειωθεί ότι οποιοδήποτε σήμα μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση (υπό την προσέγγιση της περιοδικότητας φυσικά) ικανοποιεί τις ισχυρές συνθήκες του Dirichlet, και άρα έχει σειρά Fourier που συγκλίνει. Έτσι, στην πράξη, η φυσική ύπαρξη του σήματος είναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της σειράς Fourier του.

5.5.2 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Έχοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις υπόψη μας, ας δούμε τέσσερα χαρακτηριστικά παραδείγματα, πλήρως αναλυτικά.

Παράδειγμα 6.8:

Βρείτε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 6.16.



Σχήμα 5.16: Παράδειγμα 6.8 Ανάλυσης σε Σειρά Fourier.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η περίοδός του είναι ίση με T_0 (περιλαμβάνονται σε αυτή δυο παλμοί, ένας πάνω κι ένας κάτω). Αυτό το σήμα λοιπόν γράφεται σε μια περίοδο ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < T_0/2 \\ -A, & 0 \leq T_0/2 < t \leq T_0 \end{cases} \quad (5.154)$$

Θα έχουμε λοιπόν:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} (-A) dt \quad (5.155)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} dt - \frac{A}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} dt = \frac{A}{T_0} \left[t \right]_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0} \left[t \right]_{T_0/2}^{T_0} \quad (5.156)$$

$$= \frac{A}{T_0} \left(\frac{T_0}{2} - 0 \right) - \frac{A}{T_0} \left(T_0 - \frac{T_0}{2} \right) = \frac{A}{2} \frac{T_0}{2} - \frac{A}{T_0} T_0 + \frac{A}{T_0} \frac{T_0}{2} \quad (5.157)$$

$$= \frac{A}{2} - A + \frac{A}{2} = 0 \quad (5.158)$$

που ήταν αναμενόμενο, καθώς έχουμε σε μια περίοδο δύο παλμούς ίσου εμβαδού ($AT_0/2$) που βρίσκονται εκατέρωθεν του οριζώντιου άξονα. Οπότε το συνολικό αλγεβρικό εμβαδό είναι μηδέν σε μια περίοδο.

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.159)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{A}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.160)$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{T_0/2}^{T_0} \quad (5.161)$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0) - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}}) \quad (5.162)$$

Ξέρουμε ότι $f_0 T_0 = 1$, και με αντικατάσταση έχουμε

$$X_k = \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0) - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}}) \quad (5.163)$$

$$= -\frac{A}{j2k\pi} (e^{-jk\pi} - 1) + \frac{A}{j2k\pi} (e^{-j2k\pi} - e^{-jk\pi}) = -\frac{A}{j2k\pi} (e^{-jk\pi} - 1) + \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) \quad (5.164)$$

$$= \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) + \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) = \frac{A}{jk\pi} (1 - e^{-jk\pi}) \quad (5.165)$$

και επειδή $e^{-jk\pi} = (-1)^k$, έχουμε

$$X_k = \frac{A}{jk\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{2A}{jk\pi}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (5.166)$$

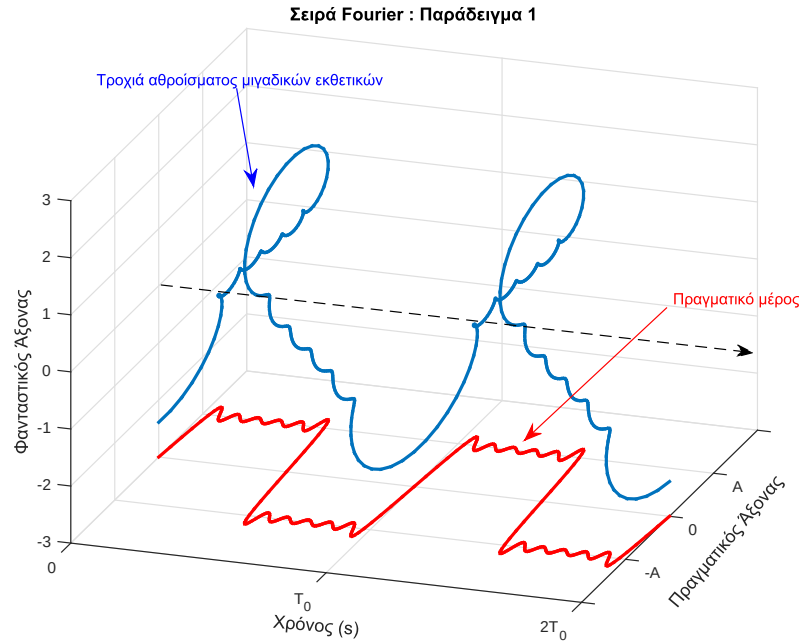
γιατί προφανώς το $1 - (-1)^k$ είναι μηδέν για k άρτια, και 2 για k περιττά. Οπότε σε πρώτη φάση, η Σειρά Fourier μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2} e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.167)$$

ή αλλιώς, περιλαμβάνοντας μόνο τα περιττά k ,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2A}{(2k-1)\pi} e^{-j\pi/2} \right) e^{j2\pi(2k-1)f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2A}{(2k-1)\pi} e^{j(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2)} \quad (5.168)$$

Αυτή λοιπόν είναι η εκθετική σειρά Fourier που αντιστοιχεί στο δεδομένο περιοδικό σήμα $x(t)$. Ας βρούμε και τη μονόπλευρη σειρά Fourier.



Σχήμα 5.17: Σειρά Fourier Παραδείγματος 6.8 στο μιγαδικό χώρο για 6 μη μηδενικούς όρους.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \frac{4A}{k\pi} \cos\left(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.169)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4A}{(2k-1)\pi} \sin(2\pi(2k-1)f_0 t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4A}{(2k-1)\pi} \Re\{e^{j(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2)}\} \quad (5.170)$$

Το άθροισμα 11 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 6.17.

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε φάσμα πλάτους και φάσης από τους συντελεστές X_k που βρήκαμε; Κάποιος θα μπορούσε να πει ότι οι συντελεστές X_k είναι ήδη διαθέσιμοι και γραμμένοι σε πολική μορφή. Αυτό όμως είναι λάθος, γιατί ο όρος k στον παρονομαστή του X_k μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Αυτό σημαίνει ότι για $k < 0$, το $\frac{2A}{k\pi}$ θα λάβει αρνητικό πρόσημο, οπότε δεν μπορεί να είναι πλέον μέτρο (δηλ. θετικό). Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να διαχωρίσουμε τις καταστάσεις σε περιττά $k > 0$ και $k < 0$, στη σχέση του X_k που βρήκαμε. Η φιλοσοφία είναι η ίδια με αυτή όταν συζητούσαμε για αθροίσματα ημιτόνων και τους μιγαδικούς συντελεστές τους. Άρα θα έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{(-|k|)\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ -\frac{2A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (5.171)$$

$$= \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{|k|\pi} e^{j\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (5.172)$$

Τώρα έχουμε πλέον την πολική μορφή που θέλουμε. Το μέτρο είναι

$$|X_k| = \frac{2A}{|k|\pi}, \quad k \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\} \quad (5.173)$$

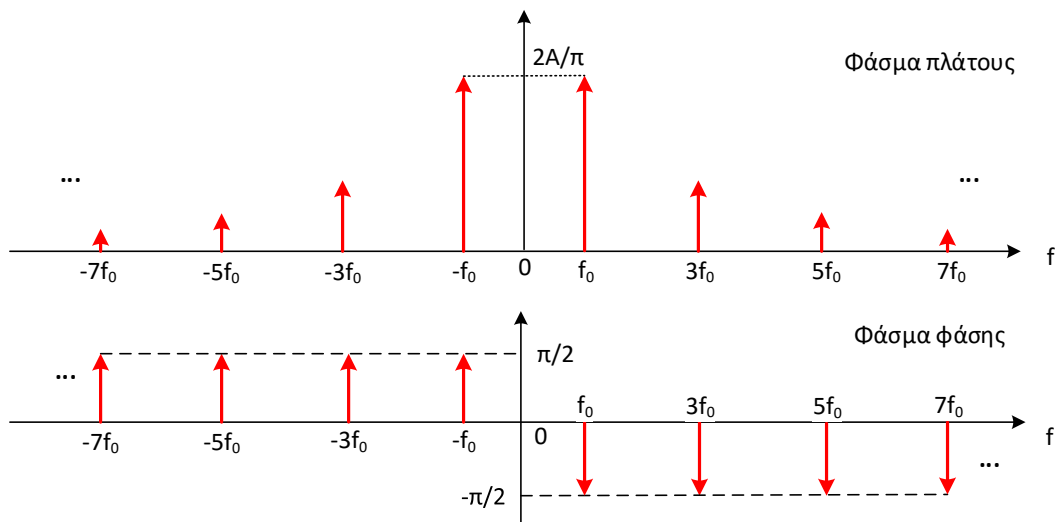
$$|X_0| = 0 \quad (5.174)$$

και η φάση είναι

$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} -\pi/2, & k > 0 \text{ και περιττά} \\ \pi/2, & k < 0 \text{ και περιττά} \end{cases} \quad (5.175)$$

$$\angle X_0 = 0 \quad (5.176)$$

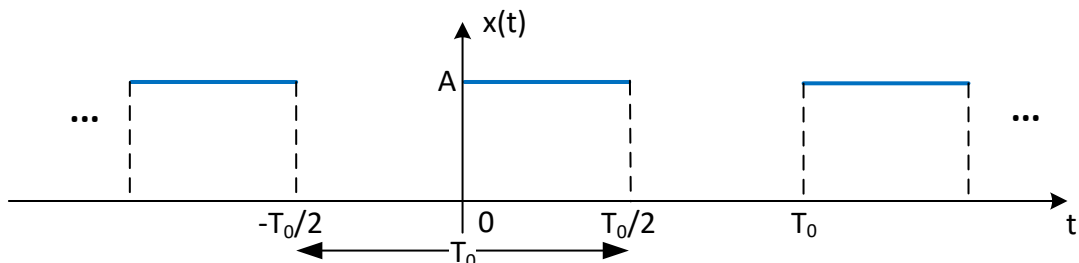
Έτσι, ο σχεδιασμός του φάσματος πλάτους και φάσης είναι τετριμμένη υπόθεση, αρκεί να βάλουμε μερικές ενδεικτικές τιμές (λίγες) του k , στις παραπάνω σχέσεις και να λάβουμε τελικά φάσματα όπως αυτό του Σχήματος 6.18.



Σχήμα 5.18: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 6.8.

Παράδειγμα 6.9:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 6.19.



Σχήμα 5.19: Περιοδικός Παλμός Παραδείγματος 6.9.

Λύση:

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις μας, θα έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A dt = \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} dt = \frac{A}{T_0} t \Big|_0^{T_0/2} = \frac{A}{T_0} \left(\frac{T_0}{2} - 0 \right) = \frac{AT_0}{2T_0} = \frac{A}{2} \quad (5.177)$$

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.178)$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0/2} = -\frac{A}{j2\pi k} \left(e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0 \right) \quad (5.179)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi k} (e^{-j\pi k} - 1) = \frac{A}{j2\pi k} (1 - e^{-j\pi k}) \quad (5.180)$$

Όμως,

$$e^{-j\pi k} = (e^{-j\pi})^k = (-1)^k \quad (5.181)$$

άρα

$$X_k = \frac{A}{j2\pi k} (1 - e^{-j\pi k}) = \frac{A}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) \quad (5.182)$$

Προφανώς το $1 - (-1)^k$ είναι μηδέν για k άρτια, και $1 - (-1) = 2$ για k περιττά. Οπότε

$$X_k = \frac{A}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{A}{j\pi k}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (5.183)$$

Άρα καταλήγουμε ότι

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2} e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \pi/2)} \quad (5.184)$$

Η αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά Fourier θα είναι

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \pi/2)} = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{\pi k} \cos(2\pi k f_0 t - \pi/2) \quad (5.185)$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k-1)} \cos(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k-1)} \Re\{e^{j(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2)}\} \quad (5.186)$$

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης. Υπενθυμίζουμε ότι

$$X_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2} \quad (5.187)$$

και ότι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το k μπορεί να πάρει και αρνητικές περιττές τιμές, οπότε πρέπει να το λάβουμε υπόψη μας στην πολική μορφή. Είναι:

$$X_k = \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{A}{(-|k|)\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (5.188)$$

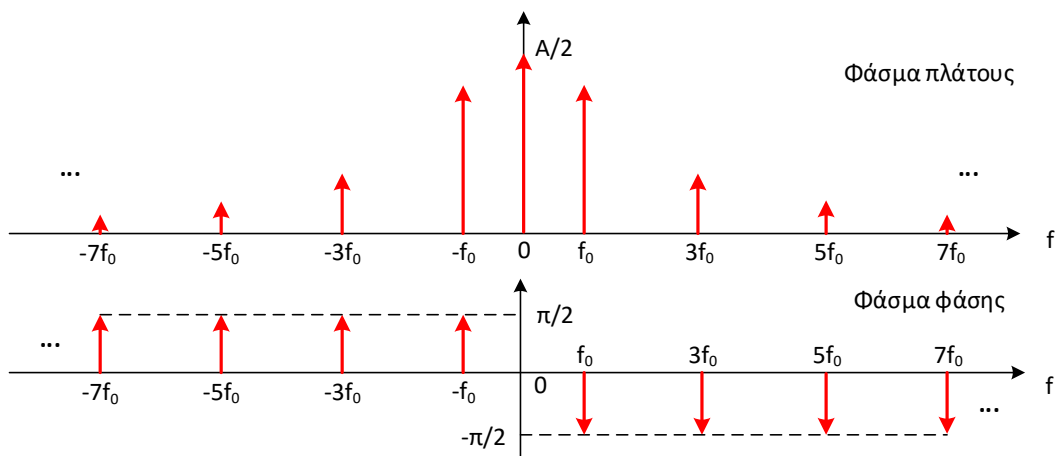
Άρα τελικά το μέτρο είναι

$$|X_k| = \frac{A}{|k|\pi}, \quad k \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\} \quad (5.189)$$

και η φάση είναι

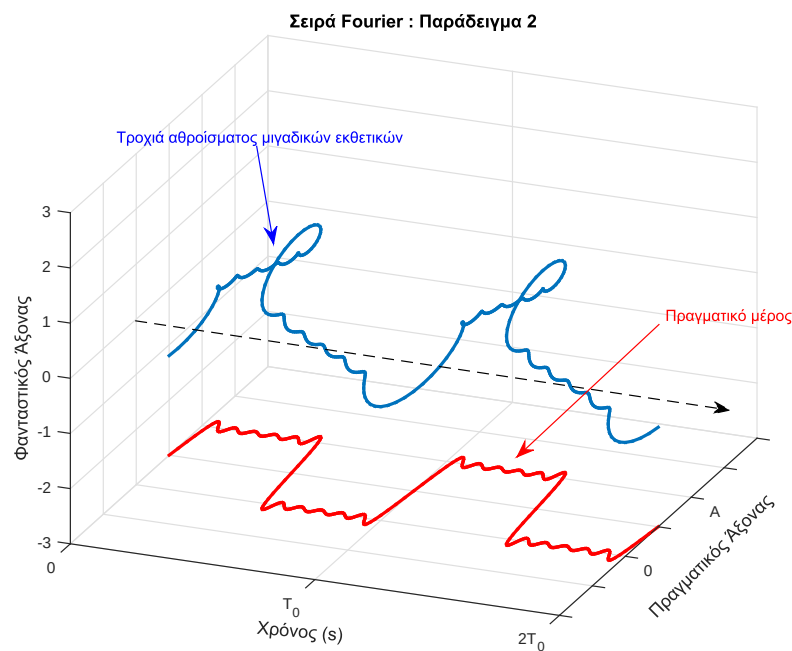
$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} -\pi/2, & k > 0 \text{ και περιττά} \\ \pi/2, & k < 0 \text{ και περιττά} \end{cases} \quad (5.190)$$

Έτσι, ο σχεδιασμός του φάσματος πλάτους και φάσης είναι τετριμμένη υπόθεση, αρκεί να βάλουμε μερικές ενδεικτικές τιμές (λίγες) του k , στις παραπάνω σχέσεις και να λάβουμε τελικά φάσματα όπως αυτό του Σχήματος 6.20.



Σχήμα 5.20: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 6.9.

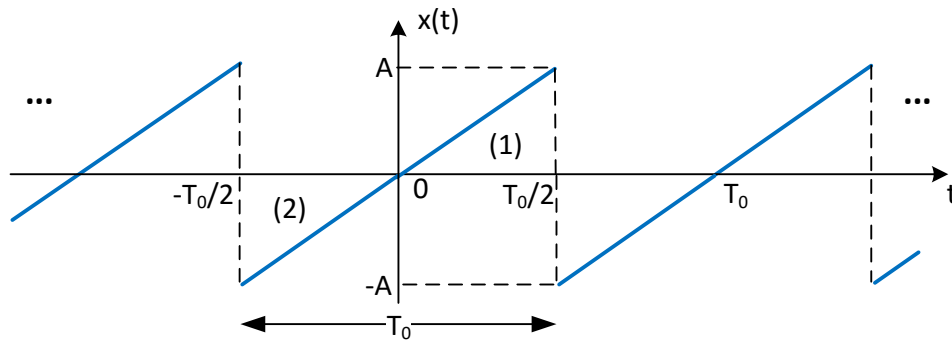
Το άθροισμα 6 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 6.21.



Σχήμα 5.21: Σειρά Fourier Παραδείγματος 6.9 στο μιγαδικό χώρο για 6 όρους.

Παράδειγμα 6.10:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 6.22.



Σχήμα 5.22: Περιοδικό Σήμα Παραδείγματος 6.10.

Λύση:

Επιλέγουμε ως περίοδο το διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$. Η πλάγια ευθεία που ορίζεται εκεί περνάει από τα σημεία $(0, 0)$, $(T_0/2, A)$, άρα θα έχει τη μορφή

$$y - 0 = \frac{A - 0}{T_0/2 - 0}(t - 0) \iff y = \frac{2A}{T_0}t = x(t) \quad (5.191)$$

Έτσι θα έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{2A}{T_0} t dt = 2A \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} = 0 \quad (5.192)$$

Εναλλακτικά, θέλουμε το εμβαδό του σήματος σε μια περίοδο, επί $1/T_0$. Στο διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$, έχουμε δυο ορθογώνια τρίγωνα (σημειωμένα με (1), (2) στο Σχήμα), που έχουν εμβαδό $T_0/2 \times A = \frac{AT_0}{2}$ το καθένα. Όμως το ένα είναι κάτω από τον άξονα ενώ το άλλο επάνω, άρα το αλγεβρικό άθροισμα είναι μηδέν.

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{2A}{T_0} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{2A}{T_0^2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.193)$$

Με χρήση του δοσμένου ολοκληρώματος, θα έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{T_0^2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{2A}{T_0^2} \left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{(-j2\pi k f_0)} \left(t - \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} \right) \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} \quad (5.194)$$

$$= \frac{2A}{T_0^2} \left(-\frac{e^{-j2\pi k f_0 T_0/2}}{j2\pi k f_0} \left(\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) + \frac{e^{j2\pi k f_0 T_0/2}}{j2\pi k f_0} \left(-\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) \right) \quad (5.195)$$

Κάνοντας πράξεις, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις

$$f_0 T_0 = 1 \quad (5.196)$$

$$e^{jk\pi} = (-1)^k \quad (5.197)$$

και συμμαζεύοντας την κατάσταση $\odot$, έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{T_0^2} \frac{e^{-jk\pi}}{(-j2\pi k f_0)} \left(\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) + \frac{2A}{T_0^2} \frac{e^{jk\pi}}{j2\pi k f_0} \left(\frac{1}{j2\pi k f_0} - \frac{T_0}{2} \right) \quad (5.198)$$

$$= \frac{2A}{T_0} \frac{T_0}{2} \frac{(-1)^k}{(-j2\pi k)} + \frac{2A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{(-1)^k}{(-j2\pi k)} + \frac{2A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{(-1)^k}{j2\pi k} - \frac{2A}{T_0} \frac{T_0}{2} \frac{(-1)^k}{j2\pi k} \quad (5.199)$$

$$= -2A \frac{(-1)^k}{j2\pi k} - 2A \frac{(-1)^k}{(j2\pi k)^2} + 2A \frac{(-1)^k}{(j2\pi k)^2} \quad (5.200)$$

$$= -A \frac{(-1)^k}{jk\pi} = \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j\pi/2} \quad (5.201)$$

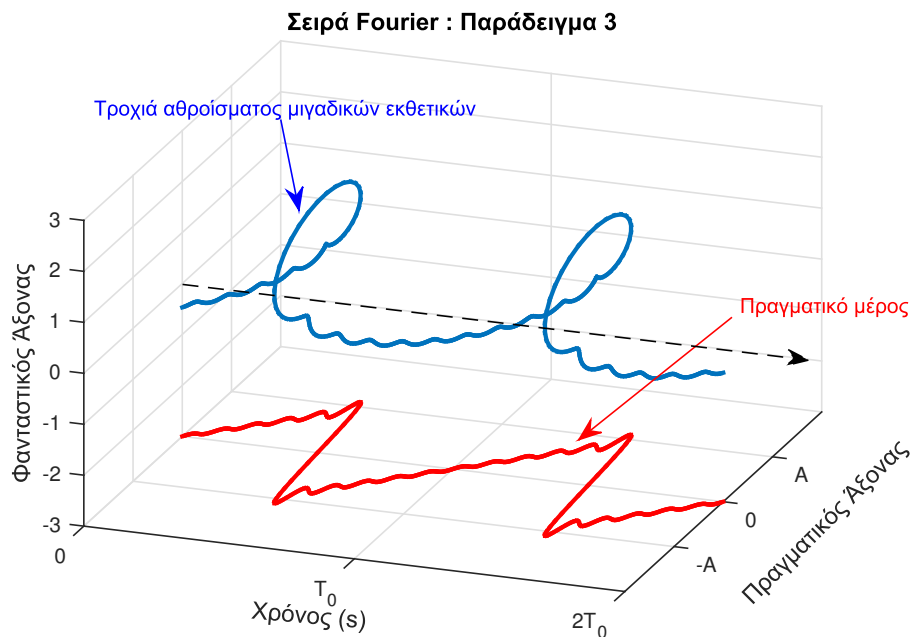
Ουφ! Τελικά η πλήρης μορφή της δίπλευρης Σειράς Fourier ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j(2\pi k f_0 t + \pi/2)} \quad (5.202)$$

ενώ για την μονόπλευρη Σειρά Fourier η γραφή είναι πιο πολύπλοκη, όπως θα φανεί παρακάτω, όμως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Re \left\{ \frac{2A}{k\pi} (-1)^k e^{j(2\pi k f_0 t + \pi/2)} \right\} \quad (5.203)$$

Το άθροισμα 11 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 6.23.



Σχήμα 5.23: Σειρά Fourier Παράδειγματος 6.10 στο μιγαδικό χώρο για 11 όρους.

Για να σχεδιάσουμε, τέλος, φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης πρέπει να γράψουμε τους συντελεστές X_k σε πολική μορφή. Εδώ θέλει προσοχή, γιατί όχι μόνο ο όρος k στον παρονομαστή, αλλά και ο όρος $(-1)^k$ του αριθμητή πρέπει να ληφθεί υπόψη. Άρα

$$X_k = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ -\frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} \quad (5.204)$$

$$= \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, θετικά} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, θετικά} \\ -\frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, αρνητικά} \\ -\frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, αρνητικά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, θετικά} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, θετικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ άρτια, αρνητικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά, αρνητικά} \end{cases} \quad (5.205)$$

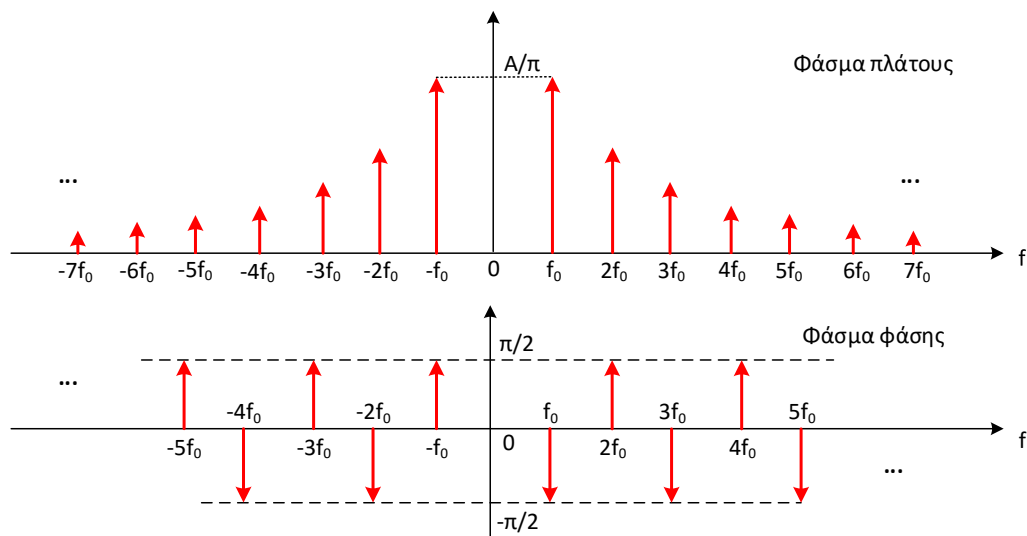
Τώρα πλέον είναι εμφανές ότι

$$|X_k| = \frac{A}{|k|\pi}, \quad k \in Z - \{0\} \quad (5.206)$$

και

$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} \pi/2, & k > 0 \text{ και άρτια, } k < 0 \text{ και περιττά} \\ -\pi/2, & k > 0 \text{ και περιττά, } k < 0 \text{ και άρτια} \end{cases} \quad (5.207)$$

Οπότε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα 6.24.



Σχήμα 5.24: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 6.10.

Παρατηρήσεις

(α') Τα μαθηματικά που περιγράφουν την ανάλυση Fourier πρέπει να σας είναι ξεκάθαρα, σαν απλά μαθηματικά. Το πρόβλημα είναι ότι δεν πρέπει να αρχειστείτε σε αυτό. Πρέπει να καταλάβετε πώς αυτά ερμηνεύονται απ'τη σκοπιά του μηχανικού. Δείξαμε ότι κάθε *πραγματικό, περιοδικό σήμα* μπορεί να γραφεί στη μορφή μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier ως

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (5.208)$$

όπου $A_0 = X_0$, $A_k = 2|X_k|$, και $\phi_k = \angle X_k$. Είναι προφανές ότι η Σχέση (6.208) προκύπτει εύκολα αν έχουμε βρει όλους τους αγνώστους της Σχέσης (6.134). Αυτή η σχέση είναι πλήρως ισοδύναμη με την αντίστοιχη σχέση των εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων. Μάλιστα υπάρχουν κλειστοί τύποι για τον υπολογισμό των A_k χωρίς τη χρήση του X_k .

- (β') Αν θέλαμε να περιγράψουμε διαισθητικά την ανάλυση Fourier (όχι μόνο τη Σειρά, αλλά και κάθε άλλη συχνοτική ανάλυση που θα δούμε), τότε μια ταιριαστή αναλογία είναι αυτή της συνταγής ενός ανάμεικτου χυμού φρούτων! ☺ Το ολοκλήρωμα X_k παίρνει το χυμό ($x(t)$) και μας βρίσκει τη “συνταγή”. Πώς; Περνά το χυμό ($x(t)$) μέσα από μια σειρά από k φίλτρα ($e^{-j2\pi k f_0 t}$), όπου το κάθε φίλτρο κρατά μόνο ένα συστατικό του χυμού και μας λέει μάλιστα και την ποσότητα (X_k) που υπάρχει! Η διαδικασία όμως πρέπει να είναι αναστρέψιμη, δηλ. πρέπει να μπορούμε αναμειγνύοντας ξανά τα συστατικά ($e^{j2\pi k f_0 t}$) στις σωστές ποσότητες (X_k) να πάρουμε πίσω το χυμό ($x(t)$): αυτό το αναλαμβάνει το άθροισμα της σειράς Fourier!

Για να μπορεί όμως να ισχύσει μια τέτοια διαδικασία πρέπει:

- (α') **Τα φίλτρα να είναι ανεξάρτητα:** το φίλτρο που “πιάνει” το χυμό μπανάνα πρέπει να πιάνει μόνο χυμό μπανάνας, και τίποτε άλλο. Αν περάσουμε από το φίλτρο αυτό μερικά πορτοκάλια, η ένδειξη θα πρέπει να δείχνει μηδέν. Αυτό, στην ορολογία των μαθηματικών εξασφαλίζεται από τη γραμμική ανεξαρτησία των συναρτήσεων $e^{-j2\pi k f_0 t}$. Γνωρίζετε από τη Γραμμική Άλγεβρα την έννοια της ανεξαρτησίας: σε ένα σύνολο διανυσμάτων, ένα οποιοδήποτε από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Στα δικά μας ενδιαφέροντα, η έννοια αυτή σημαίνει ότι ένα μιγαδικό εκθετικό $e^{-j2\pi k f_0 t}$ πρέπει να μην περιέχει πληροφορία για το μιγαδικό εκθετικό $e^{-j2\pi(k+1)f_0 t}$, που πράγματι συμβαίνει, γιατί τα μιγαδικά εκθετικά είναι ορθογώνια μεταξύ τους.
- (β') **Τα φίλτρα πρέπει να είναι πλήρη:** τα φίλτρα μας πρέπει να “πιάνουν” μέχρι και το τελευταίο συστατικό του χυμού. Δε θα μπορέσουμε ποτέ να φτιάξουμε τον αρχικό χυμό ($x(t)$) αν π.χ. λείπει το φίλτρο για το χυμό ροδάκινο. ☹ Αυτό εξασφαλίζεται από το ότι η προβολή του σήματος $x(t)$ γίνεται επάνω σε κάθε συχνότητα πολλαπλάσια της θεμελιώδους.
- (γ') **Τα συστατικά πρέπει να είναι “συνδυάσιμα”:** Τα συστατικά πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα ανεξαρτητως της σειράς με την οποία συνδυάζονται.
- (γ') Μετά από το παραπάνω πολύ διαισθητικό παράδειγμα, ας πάμε λίγο στην πραγματικότητα. Έστω ότι αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, και ένας συντελεστής Fourier είναι $X_3 = 2e^{j\pi/4}$, τότε αυτό τι μας λέει; Δεδομένου ότι το περιοδικό σήμα συντίθεται από μιγαδικά εκθετικά ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.209)$$

ο προαναφερθέντας συντελεστής μας λέει ότι το εκθετικό $e^{j2\pi 3 f_0 t}$ συνεισφέρει στη σύνθεση του σήματος με πλάτος 2 και φάση $\pi/4$. Αν αυτό σας φαντάζει κάπως δυσνόητο (αν και δε θα έπρεπε), τότε αφού το σήμα είναι πραγματικό, θα έχει και ένα συντελεστή $X_{-3} = X_3^* = 2e^{-j\pi/4}$. Αν προσθέσουμε τις εκθετικές συναρτήσεις $X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t}$ θα έχουμε:

$$X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t} = 2e^{j(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)} + 2e^{-j(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)} = 4 \cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4) \quad (5.210)$$

Αυτό ξεκάθαρα δηλώνει ότι το περιοδικό σήμα που αναλύουμε περιέχει τον όρο $4 \cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)$, με άλλα λόγια, για να κατασκευάσουμε το σήμα που αναλύουμε είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε ένα ημίτονο με συχνότητα $f_3 = 3f_0$, πλάτος $A = 4$, και φάση $\phi = \pi/4$ (μεταξύ άλλων ημιτονων, πιθανότατα). Έτσι λοιπόν, τώρα σας είναι ξεκάθαρο τι ακριβώς σημαίνουν οι συντελεστές Fourier όσον αφορά τη σημασία τους στην ανάλυση και στη σύνθεση.

- (δ') Φυσικά παρατηρείτε ότι η σειρά Fourier αποτελείται από άπειρα εκθετικά (ή ημίτονα). Στην πράξη, δεν μπορούμε να έχουμε άπειρα ημίτονα. Αναγκαστικά κρατάμε έναν αριθμό από αυτά, και άρα η προσέγγιση ενός περιοδικού σήματος από πεπερασμένα ημίτονα θα είναι αναγκαστικά με σφάλμα.
- (ε') Τέλος, είδαμε ότι μια βολική αναπαράσταση της ανάλυσης σε σειρές Fourier είναι η σχεδίαση του φάσματος πλάτους και του φάσματος φάσης. Οι φασματικές αναπαραστάσεις (και οι δυο μαζί) μας δίνουν όλη την απαραίτητη πληροφορία για το περιοδικό σήμα. Με άλλα λόγια, αν έχουμε τις φασματικές

αναπαραστάσεις, μπορούμε να βρούμε την σειρά Fourier που αυτές αντιπροσωπεύουν. Σημαντικό: θυμίζεται ότι στο φάσμα πλάτους αναπαριστούμε τις ποσότητες $|X_k|$, δηλ. το πως αλλάζει το πλάτος των συντελεστών ανά συχνότητα, ενώ στο φάσμα φάσης αναπαριστούμε τις ποσότητες $\angle X_k$, που δηλώνει το πως αλλάζει η φάση των συντελεστών ανά συχνότητα, δηλ. ποιά είναι η σχετική μετατόπιση των ημιτόνων.

- (ε') Προσέξτε ότι το μέτρο των συντελεστών Fourier, $|X_k|$, είναι σταθερό ή φθίνει στο 0 όσο το $k \rightarrow +\infty$. Αυτό είναι γενικό φαινόμενο στο φάσμα πλάτους, όταν έχουμε άπειρο πλήθος ημιτόνων. Δε θα μπορούσαν οι συντελεστές $|X_k|$ να μεγαλώνουν όσο $f \rightarrow \infty$, γιατί ένα τέτοιο άθροισμα ημιτόνων θα έδινε συνολικά άπειρο πλάτος στο περιοδικό σήμα. Έχοντας αυτό στο μυαλό σας, και την προηγούμενη παρατήρηση, μπορείτε να ελέγχετε τις απαντήσεις σας στο φάσμα πλάτους σε θεωρητικές ασκήσεις. Τονίζεται ότι το παραπάνω ισχύει όταν αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα σε άπειρο πλήθος από ημίτονα. Όταν π.χ. έχουμε ένα άθροισμα

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^N 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (5.211)$$

ή

$$x(t) = \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.212)$$

τότε έχουμε πεπερασμένου πλήθους ημίτονα a' , άρα τα A_k ή τα X_k μπορούν να έχουν όποια κατανομή θέλουν, όσο αυξάνει το k . Φυσικά αν αυτά τα N ημίτονα προέρχονται ως προσέγγιση άπειρου πλήθους ημιτόνων, προφανώς θα ακολουθούν την κατανομή που συζητήσαμε (σταθερά ή φθίνοντα πλάτη $|X_k|$).

- (ζ') Σίγουρα ένα στοιχείο που θα σας ξενίζει αρκετά είναι αυτό των αρνητικών συχνοτήτων των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Ξέρουμε ότι συχνότητα είναι ο αριθμός επαναλήψεων ενός τμήματος σήματος στη μονάδα του χρόνου, και αναμφίβολα αυτός ο αριθμός είναι μια θετική ποσότητα. Δεν μπορούμε να έχουμε $f_0 = -4$ επαναλήψεις ανά δευτερόλεπτο! Άρα πώς ερμηνεύεται μια αρνητική συχνότητα; Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία, μπορούμε να εκφράσουμε ένα ημίτονο αρνητικής συχνότητας $-f_0$ ως

$$\cos(-2\pi f_0 t + \theta) = \cos(-(2\pi f_0 t - \theta)) = \cos(2\pi f_0 t - \theta) \quad (5.213)$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει καθαρά ότι η συχνότητα του ημιτόνου είναι $|f_0|$, και είναι θετική. Πώς τώρα όμως ερμηνεύουμε τις φασματικές γραμμές στις αρνητικές συχνότητες; Ένας ασφαλής τρόπος είναι να πούμε απλά ότι το φάσμα είναι μια γραφική αναπαράσταση των συντελεστών $|X_k|$ συναρτήσει του f . Η παρουσία αρνητικών συχνοτήτων απλά σημαίνει ότι υπάρχει ένα εκθετικό μιας τέτοιας αρνητικής συχνότητας στη σειρά Fourier που αναλύουμε. Απλό, έτσι δεν είναι; ☺

- (η') Τα Σχήματα 6.17, 6.21, και 6.23 δείχνουν το άθροισμα μερικών από τα πρώτα μιγαδικά εκθετικά, καθώς και το πραγματικό του μέρος. Θα ήταν περισσότερο ενδιαφέρον και διορατικό να δούμε τη συνεισφορά καθενός μιγαδικού εκθετικού στη σύνθεση ενός περιοδικού σήματος. Δείτε το Σχήμα 6.25. Αριστερά, βλέπουμε τα τρία πρώτα μη μηδενικού πλάτους περιστρεφόμενα μιγαδικά εκθετικά, κυκλικής συχνότητας $\omega_0 = 2\pi f_0$, $3\omega_0$, $5\omega_0$, καθώς και το άθροισμά τους. Η σχεδιάσή τους είναι τέτοια ώστε να μπορεί να είναι εμφανές το πως αθροίζονται. Δεξιά, βλέπουμε το πραγματικό μέρος καθενός από τα μιγαδικά εκθετικά, καθώς και το άθροισμά τους, που συνιστά το περιοδικό σήμα του Παραδείγματος 1. Το σχήμα δείχνει δυο χρονικές στιγμές, μια στο πρώτο και μια στο τρίτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου.

- (θ') Υπάρχει μια ακόμα αναπαράσταση περιοδικών σημάτων κατά Fourier, η οποία είναι η ακόλουθη:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2\pi k f_0 t) \quad (5.214)$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.215)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.216)$$

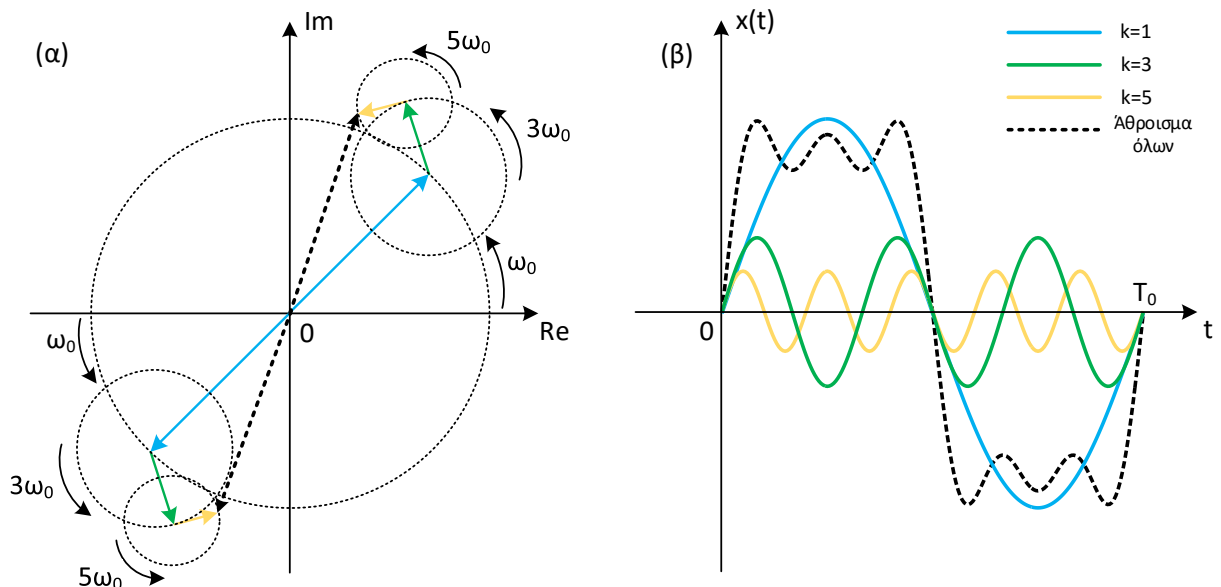
Οι παραπάνω συντελεστές a_k, b_k σχετίζονται με τους γνωστούς συντελεστές X_k ως

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k), & k > 0 \\ \frac{1}{2}a_0, & k = 0 \\ X_k^*, & k < 0 \end{cases} \quad (5.217)$$

(ι') Ίσως γνωρίζετε ότι τα “Στοιχεία” του Αλεξανδρινού μαθηματικού Ευκλείδη είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα στην ιστορία της ανθρωπότητας. Η μελέτη και εμπέδωση των 13 βιβλίων των “Στοιχείων” ήταν και παραμένει ζόρικη υπόθεση! Κάποια στιγμή, ο βασιλιάς της Αλεξάνδρειας, Πτολεμαίος ο Α', ζήτησε από τον Ευκλείδη έναν τρόπο να μάθει Γεωμετρία πιο εύκολο από τη μελέτη των “Στοιχείων”. Η απάντηση του μεγάλου μαθηματικού ήταν λακωνική, σαφής, και έμεινε στην Ιστορία: “Δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη Γεωμετρία!”.

Αν λοιπόν ζούσε σήμερα ο J. B. Fourier, και τον ρωτούσατε ποιός είναι ο πιο εύκολος τρόπος να μάθετε Σειρές Fourier, θα σας απαντούσε όπως ο μεγάλος μαθηματικός της Αρχαιότητας: “Δεν υπάρχει εύκολος δρόμος για τις Σειρές Fourier!”. Αυτό σημαίνει ότι για τις Σειρές Fourier απαιτείται αρκετή εξάσκηση!

^a Έχουμε N ημίτονα στην πρώτη περίπτωση, πόσα στη δεύτερη;



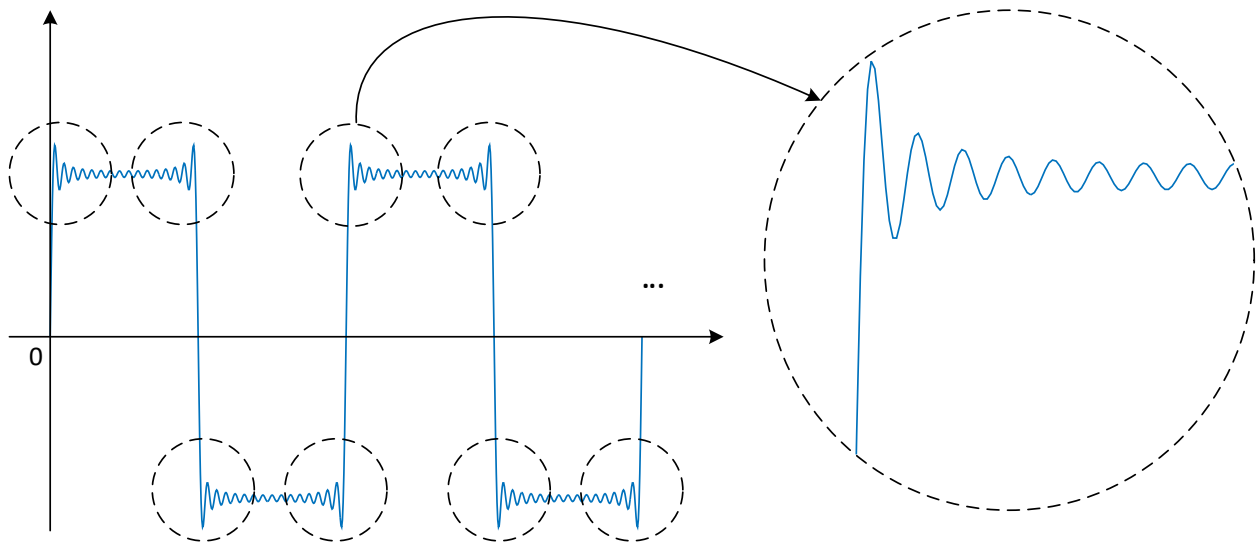
Σχήμα 5.25: Σύνθεση πραγματικού σήματος από περιστρεφόμενα μιγαδικά εκθετικά: (α) περιστρεφόμενα μιγαδικά εκθετικά, (β) το πραγματικό τους μέρος.

5.6 Το φαινόμενο Gibbs

Σε όλα τα παραδείγματα που έχουμε δει ως τώρα, θα παρατηρήσατε ότι το συντιθέμενο σήμα δεν είναι μια ακριβής “ρέπλικα” του εκάστοτε σήματος που αναλύεται, αλλά παρουσιάζει ταλαντώσεις, τόσο στα διαστήματα που το αρχικό σήμα είναι γραμμικό ή σταθερό, όσο και στα σημεία ασυνέχειας. Μάλιστα στα τελευταία, η τιμή της Σειράς Fourier είναι σημαντικά μεγαλύτερη από οποιοδήποτε άλλο σημείο. Ας πάρουμε για παράδειγμα το σήμα του Παραδείγματος 1 που παρουσιάστηκε νωρίτερα, του οποίου η Σειρά Fourier φαίνεται στο Σχήμα 6.26. Επάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί όλα τα σημεία ασυνέχειας και οι ταλαντώσεις τις Σειράς Fourier που συμβαίνουν. Όλες οι Σειρές Fourier που απεικονίζονται στις προηγούμενες σελίδες χρησιμοποιούν πεπερασμένου πλήθους ημίτονα για τη σύνθεση. Θα περίμενε λοιπόν κανείς ότι όσο προσθέτουμε ημίτονα στη Σειρά Fourier, τόσο θα μειώνονται αυτές οι ταλαντώσεις. Ιδανικά, όταν το πλήθος των ημιτόνων N τείνει στο ∞ , τότε γνωρίζουμε ότι η ενέργεια

σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν, οπότε θα περίμενε κανείς η Σειρά Fourier να “ταυτίζεται” με το αρχικό περιοδικό σήμα.

Αν δοκιμάσουμε πειραματικά να προσθέσουμε πολλά ημίτονα, θα δούμε ότι όντως η Σειρά Fourier προσεγγίζει



Σχήμα 5.26: Το φαινόμενο Gibbs στα σημεία ασυνέχειας ενός περιοδικού σήματος.

πολύ καλά το περιοδικό σήμα στα διαστήματα όπου το σήμα είναι γραμμικό ή σταθερό, αλλά στα σημεία ασυνέχειας παρατηρείται η ίδια προβληματική κατάσταση, με ισχυρές ταλαντώσεις της Σειράς Fourier γύρω από αυτά τα σημεία. Αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται να αντιτίθεται στο γεγονός ότι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο φθίνει στο μηδέν όσο προσθέτουμε ημίτονα στη Σειρά Fourier. Πράγματι, αυτή η φαινομενική αντίθεση προβληματίσε για πολύ καιρό τους μηχανικούς και τους μαθηματικούς. Την εξήγηση έδωσε τελικά ο J. W. Gibbs, δείχνοντας ότι το φαινόμενο αυτό μπορεί να συμβαίνει ακριβώς λόγω των ασυνεχειών του αρχικού σήματος - και μόνο παρουσία αυτών - ακόμα κι αν πράγματι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν! Συγκεκριμένα, ο Gibbs έδειξε ότι η Σειρά Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή του περιοδικού σήματος σε κάθε σημείο, εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, όπου η Σειρά Fourier συγκλίνει στη μέση τιμή των τιμών του περιοδικού σήματος εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας. Η Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων που δεν παρουσιάζουν ασυνέχειες λέγεται ότι συγκλίνει *ομοιόμορφα* σε όλα τα σημεία της περιόδου του περιοδικού σήματος, ενώ για ασυνεχή περιοδικά σήματα, η Σειρά Fourier συγκλίνει σε κάθε σημείο της περιόδου πλην των σημείων ασυνέχειας.

Τέλος, θυμηθείτε ότι η εύρεση των συντελεστών Fourier βασίζεται στην έννοια της *ελάχιστης ενέργειας* σφάλματος E_e μεταξύ του περιοδικού σήματος και της προσέγγισής του από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, και όχι στην ελάχιστη διαφορά των δυο σημάτων ή στην ελάχιστη διαφορά σε κάθε σημείο. Αυτός ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών Fourier επιτρέπει στην ενέργεια σφάλματος να τείνει στο μηδέν όσο αυξάνει το πλήθος των ημιτόνων, και ταυτόχρονα να υπάρχουν σημεία όπου η διαφορά της Σειράς Fourier με το περιοδικό σήμα να μην είναι μηδενική (μη ομοιόμορφη σύγκλιση)!

5.7 Ιδιότητες Σειρών Fourier

Υπάρχουν πολλές χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, που βοηθούν σε πολλές εφαρμογές. Ο Πίνακας 6.1 απεικονίζει τις περισσότερες.

5.7.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Παρακάτω ακολουθούν αποδείξεις των ιδιοτήτων, καθώς και ένα παράδειγμα χρήσης τους σε καθεμιά. Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα έχει συντελεστές Fourier X_k , και - όπου απαιτείται - ένα δεύτερο περιοδικό σήμα $y(t)$ με περίοδο T_0 έχει συντελεστές Fourier Y_k .

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 $y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X_{-k}^*
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a > 0$	X_k , με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγωγή	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X_{-k}^*, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ X_k = X_{-k} , \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t), x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \mathbb{R}$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t), x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \mathbb{S}$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k ^2$

Πίνακας 5.1: Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

5.7.1.1 Γραμμικότητα

Οι συντελεστές Fourier του αθροίσματος $z(t) = Ax(t) + By(t)$ δίνονται ως

$$Z_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} z(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} (Ax(t) + By(t)) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.218)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} Ax(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0} By(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.219)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{B}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.220)$$

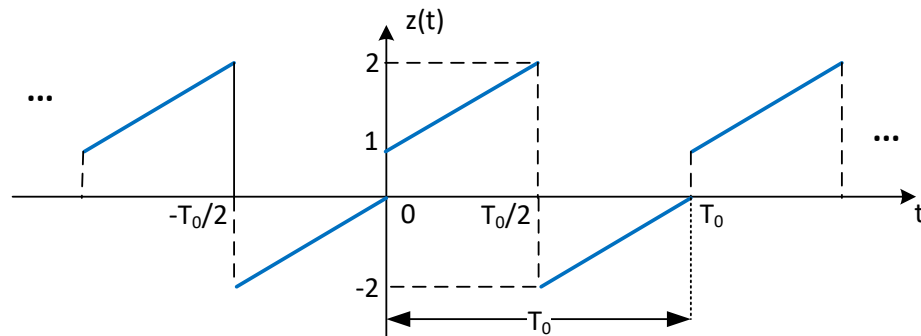
$$= AX_k + BY_k \quad (5.221)$$

Άρα

$$Ax(t) + By(t) \longleftrightarrow AX_k + BY_k \quad (5.222)$$

Παράδειγμα 6.11:

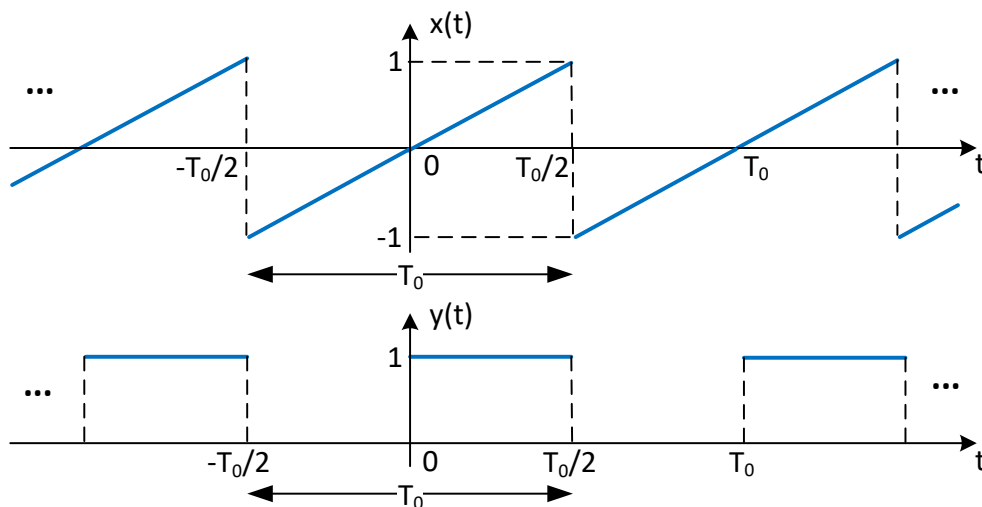
Βρείτε τους συντελεστές Fourier του περιοδικού με περίοδο T_0 σήματος $z(t)$ του Σχήματος 6.27.



Σχήμα 5.27: Εφαρμογή της Γραμμικότητας: περιοδικό σήμα $z(t)$.

Λύση:

Το περιοδικό σήμα του Σχήματος 6.27 μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των περιοδικών σημάτων που φαίνονται στο Σχήμα 6.28. Αυτά τα περιοδικά σήματα όμως είναι γνωστά από τα παραδείγματα. Οι συντελεστές Fourier



Σχήμα 5.28: Εφαρμογή της Γραμμικότητας: περιοδικά σήματα $x(t), y(t)$.

τους είναι οι

$$X_k = \frac{1}{\pi k} (-1)^k e^{j\pi/2} \quad (5.223)$$

$$Y_k = \frac{1}{2\pi k} (1 - (-1)^k) e^{-j\pi/2} \quad (5.224)$$

Άρα οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος του Σχήματος 6.27 είναι

$$Z_k = X_k + Y_k = \frac{1}{\pi k} (-1)^k e^{j\pi/2} + \frac{1}{2\pi k} (1 - (-1)^k) e^{-j\pi/2} \quad (5.225)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ -\frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2} + \frac{1}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ -\frac{2j}{\pi k} \sin(\pi/2), & k \text{ περιττό} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ \frac{2}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \end{cases} \quad (5.226)$$

5.7.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $y(t) = x(t - t_0)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t - t_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 (u+t_0)} du \quad (5.227)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 t_0} e^{-j2\pi k f_0 u} du = \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 u} du \quad (5.228)$$

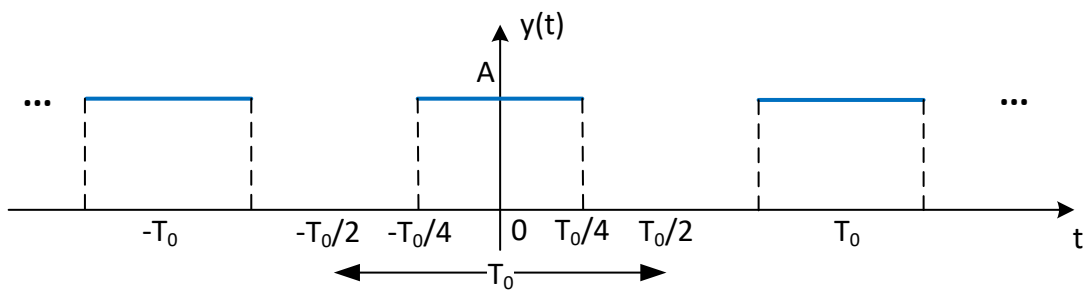
$$= X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0} \quad (5.229)$$

Άρα

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0} \quad (5.230)$$

Παράδειγμα 6.12:

Βρείτε τους συντελεστές Fourier του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 6.29.



Σχήμα 5.29: Εφαρμογή της Χρονικής Μετατόπισης: περιοδικό σήμα $y(t) = x(t - t_0)$.

Λύση:

Το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 6.29 δεν είναι άλλο από το σήμα $x(t)$ του Σχήματος 6.19 μετατοπισμένο κατά $t_0 = -T_0/4$. Οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $y(t)$ θα είναι

$$Y_k = X_k e^{j2\pi k f_0 \frac{T_0}{4}} = \frac{A}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) e^{j\pi k/2} = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιο} \\ \frac{A}{\pi k} e^{j\left(\frac{\pi}{2}(k-1)\right)}, & k \text{ περιττό} \end{cases} \quad (5.231)$$

5.7.1.3 Μετατόπιση στη Συχνότητα

Αντικαθιστώντας το δείκτη k των συντελεστών Fourier X_k με $k - M$, όπου M ακέραιος αριθμός, τότε οι συντελεστές μπορούν να γραφούν ως

$$X_{k-M} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi(k-M)f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} e^{j2\pi M f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} (x(t) e^{j2\pi M f_0 t}) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.232)$$

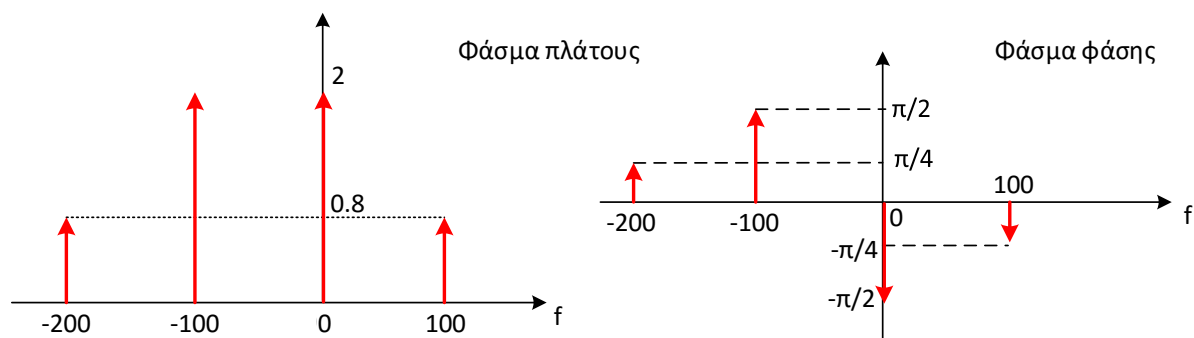
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές X_{k-M} αντιστοιχούν στο περιοδικό σήμα $x(t) e^{j2\pi M f_0 t}$, δηλ. στον πολλαπλασιασμό του αρχικού σήματος $x(t)$ με μια μιγαδική εκθετική συνάρτηση συχνότητας $M f_0$. Σημειώστε ότι η αντικατάσταση $k \leftarrow k - M$ αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση των φασματικών γραμμών κατά M . Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, τότε τα φάσματα πλάτους και φάσης θα έχουν τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία, αντίστοιχα. Μια οποιαδήποτε μετατόπιση των φασμάτων κατά M , οδηγεί σε άρση αυτών των συμμετριών, με αποτέλεσμα το περιοδικό σήμα στο χρόνο να μην είναι πια πραγματικό, όπως φαίνεται και από την παραπάνω ιδιότητα (πολλαπλασιασμός στο χρόνο με ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα).

Άρα

$$x(t) e^{j2\pi M f_0 t} \longleftrightarrow X_{k-M} \quad (5.233)$$

Παράδειγμα 6.13:

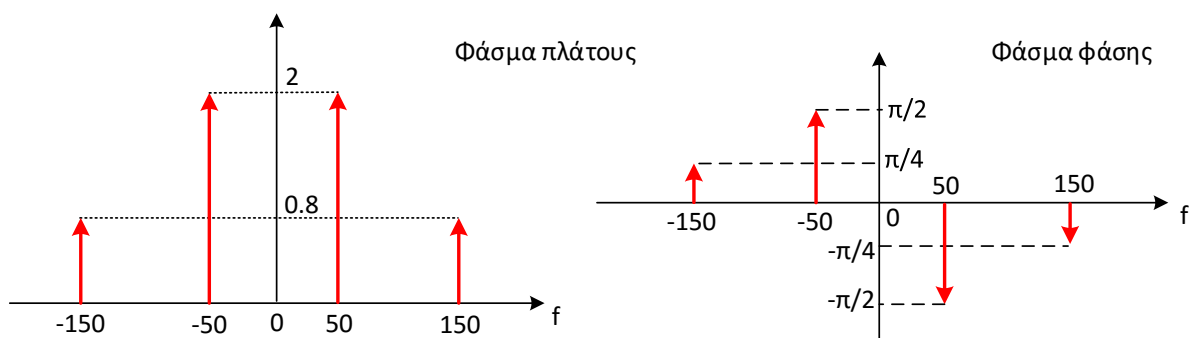
Έστω τα φάσματα του Σχήματος 6.30. Βρείτε το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί σε αυτά.



Σχήμα 5.30: Εφαρμογή της Συχνοτικής Μετατόπισης: μετατοπισμένο φάσμα.

Λύση:

Θα μπορούσαμε να βρούμε αναλυτικά το σήμα στο χρόνο από την πληροφορία των φασμάτων, αλλά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα φάσματα του Σχήματος 6.30 δεν είναι άλλα από τα φάσματα του Σχήματος 6.31, τα οποία έχουν θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 50$ Hz, μετατοπισμένα αριστερά κατά $M = 1$, δηλ. μετατοπισμένα κατά $M = -1$. Τα φάσματα του Σχήματος 6.31 πληροφορούν ότι το περιοδικό σήμα στο χρόνο $x(t)$ δίνεται ως



Σχήμα 5.31: Εφαρμογή της Συχνοτικής Μετατόπισης: μη μετατοπισμένο φάσμα.

$$x(t) = 4 \cos(2\pi 50t - \pi/2) + \cos(2\pi 150t - \pi/4) \quad (5.234)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα, το σήμα στο χρόνο $y(t)$ που αντιστοιχεί στα φάσματα του Σχήματος 6.30 είναι το

$$y(t) = e^{-j2\pi 50t} x(t) = 4e^{-j2\pi 50t} \cos(2\pi 50t - \pi/2) + e^{-j2\pi 50t} \cos(2\pi 150t - \pi/4) \quad (5.235)$$

5.7.1.4 Συζυγία στο Χρόνο

Για ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$, οι συντελεστές Fourier του συζυγούς σήματος $y(t) = x^*(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \right)^* \quad (5.236)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi(-k) f_0 t} dt \right)^* = X_{-k}^* \quad (5.237)$$

Άρα

$$x^*(t) \longleftrightarrow X_{-k}^* \quad (5.238)$$

Παράδειγμα 6.14:

Αν ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = -\frac{2}{\pi k} + \frac{j}{\pi k} \quad (5.239)$$

βρείτε τους συντελεστές του συζυγούς σήματος, $y(t) = x^*(t)$.

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier του συζυγούς του $y(t) = x^*(t)$ είναι

$$Y_k = X_{-k}^* = \frac{2}{\pi k} + \frac{j}{\pi k} \quad (5.240)$$

5.7.1.5 Αντιστροφή στο Χρόνο

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = x(-t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{j2\pi k f_0 u} du \quad (5.241)$$

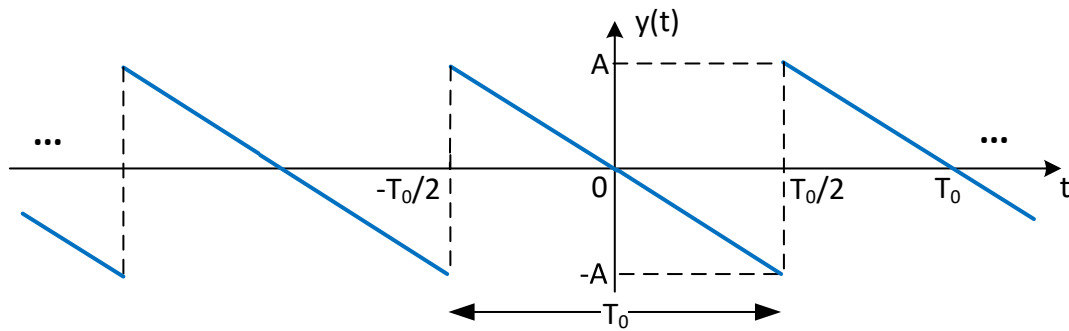
$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi(-k) f_0 u} du = X_{-k} \quad (5.242)$$

Άρα

$$x(-t) \longleftrightarrow X_{-k} \quad (5.243)$$

Παράδειγμα 6.15:

Το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 6.32



Σχήμα 5.32: Εφαρμογή της Αντιστροφής στο Χρόνο: περιοδικό σήμα $y(t) = x(-t)$.

δεν είναι άλλο από το περιοδικό σήμα του Σχήματος 6.22 ανεστραμμένο στο χρόνο. Βρείτε τους συντελεστές Fourier του.

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = X_{-k} = -\frac{A}{\pi k} (-1)^{-k} e^{j\pi/2} = \frac{A}{\pi k} (-1)^k e^{-j\pi/2} \quad (5.244)$$

5.7.1.6 Στάθμιση στο Χρόνο

Αν ορίσουμε το περιοδικό σήμα $x(t)$ και το αναπτύξουμε σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.245)$$

τότε το σταθμισμένο στο χρόνο σήμα $y(t) = x(at)$, με $a > 0$, θα είναι

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 (at)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k (af_0) t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k \frac{a}{T_0} t} \quad (5.246)$$

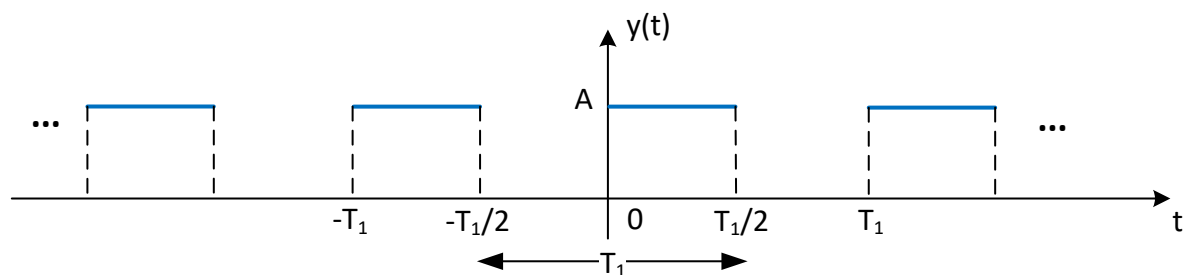
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές X_k δεν μεταβλήθηκαν καθόλου, αλλά άλλαξε η θεμελιώδης συχνότητα από f_0 σε af_0 , και άρα και η περίοδος από T_0 σε $\frac{T_0}{a}$. Αυτό σημαίνει ότι οι αποστάσεις των φασματικών γραμμών στο φάσμα πλάτους και φάσης αλλάζουν!

Άρα

$$x(at) \longleftrightarrow X_k \text{ με } \hat{T}_0 = \frac{T_0}{a} \quad (5.247)$$

Παράδειγμα 6.16:

Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 6.33.



Σχήμα 5.33: Εφαρμογή της Κλιμάκωσης στο Χρόνο: περιοδικό σήμα $y(t) = x(2t)$.

Το περιοδικό αυτό σήμα είναι μια συμπιεσμένη εκδοχή του σήματος του Σχήματος 6.19, κατά παράγοντα $a = 2$. Βρείτε τους συντελεστές Fourier του.

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier Y_k είναι οι ίδιοι με του Παραδείγματος 5.9, δηλ.

$$Y_k = X_k = \begin{cases} \frac{A}{\pi k} e^{-k\pi/2}, & k \text{ περιττό} \\ 0, & k \text{ άρτιο} \end{cases} \quad (5.248)$$

με τη διαφορά ότι η περίοδος είναι ίση με $T_1 = \frac{T_0}{2}$.

5.7.1.7 Περιοδική Συνέλιξη

Έστω το περιοδικό σήμα $z(t)$ που ορίζεται ως

$$z(t) = \int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (5.249)$$

Οι συντελεστές Fourier του δίνονται ως

$$Z_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) \left(\int_{T_0} y(t-\tau)e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) d\tau \quad (5.250)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) T_0 Y_k e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau = T_0 Y_k \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \quad (5.251)$$

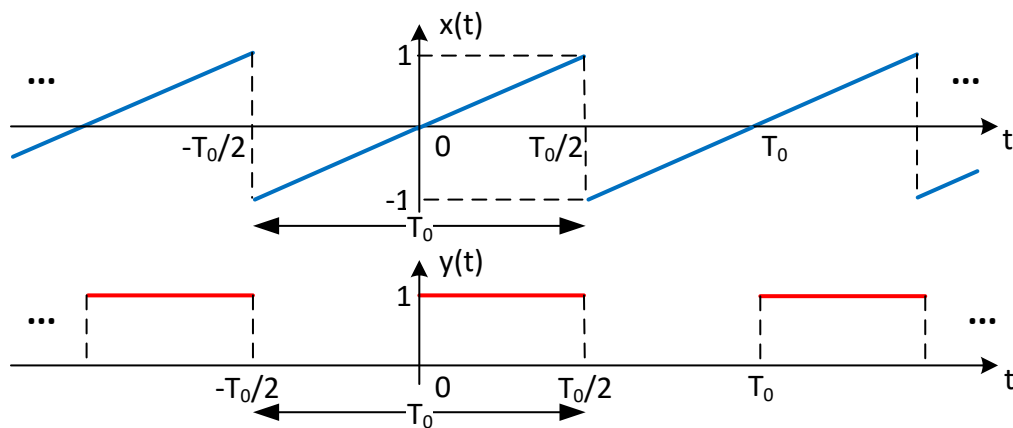
$$= T_0 Y_k X_k \quad (5.252)$$

Άρα

$$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \longleftrightarrow T_0 X_k Y_k \quad (5.253)$$

Παράδειγμα 6.17:

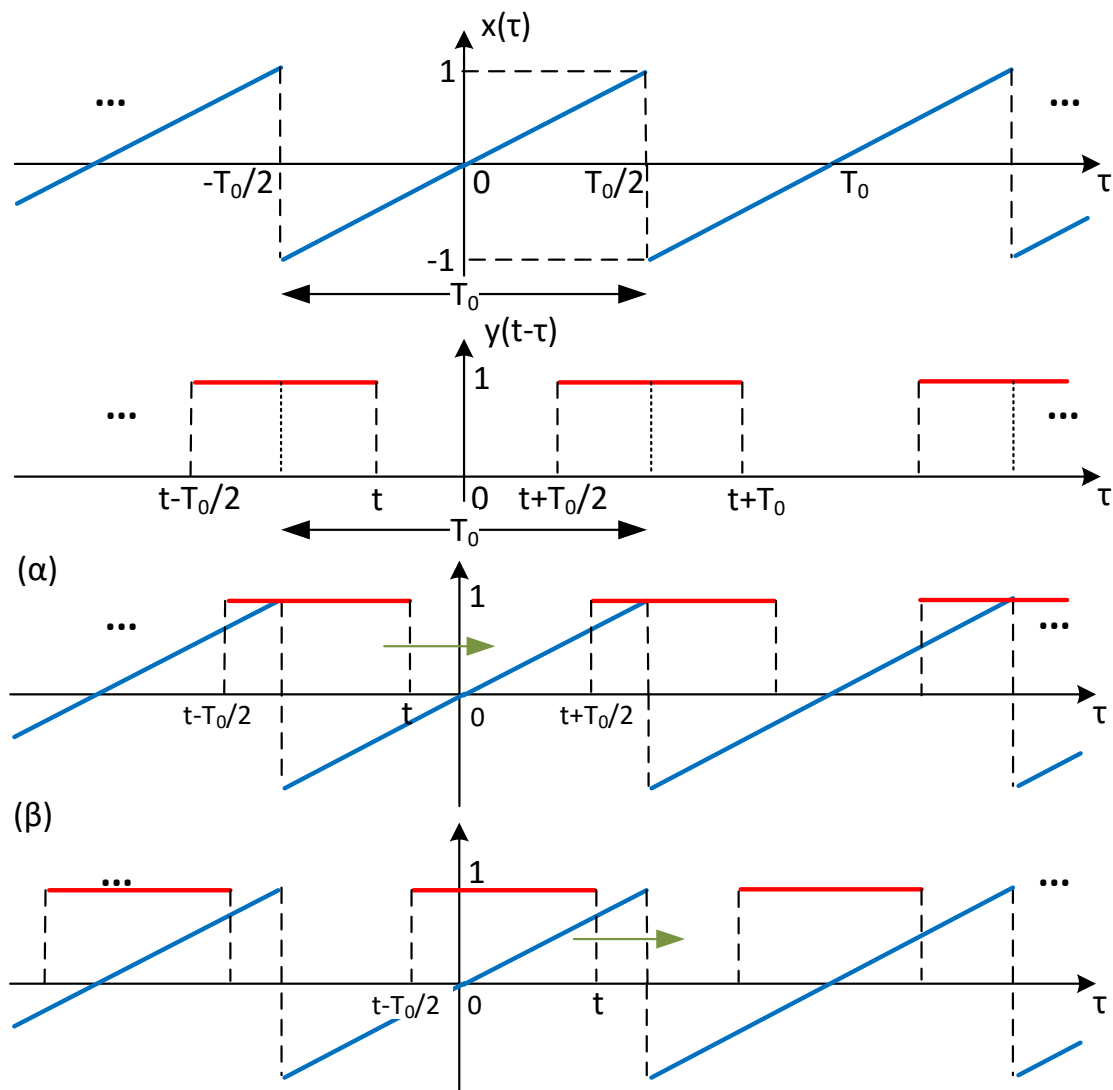
Υπολογίστε την περιοδική συνέλιξη των σημάτων που φαίνονται στο Σχήμα 6.34.



Σχήμα 5.34: Εφαρμογή της Περιοδικής Συνέλιξης στο Χρόνο: περιοδικά σήματα $x(t), y(t)$.

Λύση:

Κατασκευάζοντας το σήμα $y(t-\tau)$, έχουμε τις περιπτώσεις που απεικονίζονται στο Σχήμα 6.35. Η περιοδική



Σχήμα 5.35: Περιπτώσεις Περιοδικής Συνέλιξης στο Χρόνο.

συνέλιξη υπολογίζεται σε μια περίοδο, στο διάστημα $(-T_0/2, T_0/2]$. Στην περίπτωση (α) έχουμε

$$z(t) = \int_{-T_0/2}^t \frac{2}{T_0} \tau d\tau + \int_{t+T_0/2}^{T_0/2} \frac{2}{T_0} \tau d\tau = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^t \tau d\tau + \frac{2}{T_0} \int_{t+T_0/2}^{T_0/2} \tau d\tau \quad (5.254)$$

$$= \left. \frac{2}{T_0} \frac{\tau^2}{2} \right]_{-T_0/2}^t + \left. \frac{2}{T_0} \frac{\tau^2}{2} \right]_{t+T_0/2}^{T_0/2} = \frac{t^2}{T_0} - \frac{T_0}{4} - t - \frac{t^2}{T_0} \quad (5.255)$$

$$= -t - \frac{T_0}{4} \quad (5.256)$$

για $-T_0/2 \leq t < 0$. Στην περίπτωση (β), έχουμε

$$z(t) = \int_{t-T_0/2}^t \frac{2}{T_0} \tau d\tau = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0/2}^t \tau d\tau = \left. \frac{2}{T_0} \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-T_0/2}^t = t - \frac{T_0}{4} \quad (5.257)$$

για $0 \leq t < T_0/2$. Άρα το αποτέλεσμα της περιοδικής συνέλιξης γράφεται σε μια περίοδο ως

$$z(t) = \begin{cases} -t - \frac{T_0}{4}, & -T_0/2 \leq t < 0 \\ t - \frac{T_0}{4}, & 0 \leq t < T_0/2 \end{cases} \quad (5.258)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της περιοδικής συνέλιξης, το περιοδικό αυτό σήμα έχει συντελεστές Fourier ως

$$Z_k = T_0 X_k Y_k \quad (5.259)$$

με X_k, Y_k τους γνωστούς από τα Παραδείγματα 5.9 και 5.10 συντελεστές Fourier, τους οποίους επαναλαμβάνουμε εδώ:

$$X_k = \frac{1}{\pi k} (-1)^k e^{j\pi/2} \quad (5.260)$$

$$Y_k = \frac{1}{2\pi k} e^{-j\pi/2} (1 - (-1)^k) \quad (5.261)$$

Οπότε οι συντελεστές Z_k θα είναι

$$Z_k = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{T_0}{\pi^2 k^2} e^{j\pi}, & k \text{ περιττός} \end{cases} \quad (5.262)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει αναλυτικά ότι το περιοδικό σήμα $z(t)$ έχει πράγματι τους παραπάνω συντελεστές (Άσκηση XXXX).

5.7.1.8 Πολλαπλασιασμός

Για το σήμα $z(t) = x(t)y(t)$, η Σειρά Fourier του δίνεται ως

$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y_l e^{j2\pi(k+l)f_0 t} \quad (5.263)$$

Θέτοντας $m = k + l$, έχουμε

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y_l e^{j2\pi(k+l)f_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{m-l} Y_l e^{j2\pi m f_0 t} \quad (5.264)$$

Από την παραπάνω σχέση είναι εμφανές ότι οι συντελεστές Fourier του σήματος $z(t) = x(t)y(t)$ είναι

$$Z_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l} Y_l \quad (5.265)$$

Άρα

$$x(t)y(t) \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l} Y_l \quad (5.266)$$

Παράδειγμα 6.18:

Έστω το γινόμενο

$$z(t) = x(t)y(t) \quad (5.267)$$

με

$$x(t) = 2 \cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{3}\right) \longleftrightarrow X_{-1} = e^{-j\pi/3}, \quad X_1 = e^{j\pi/3} \quad (5.268)$$

$$y(t) = \cos\left(2\pi 500t - \frac{\pi}{8}\right) \longleftrightarrow Y_{-5} = \frac{1}{2} e^{j\pi/8}, \quad Y_5 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/8} \quad (5.269)$$

με τους συντελεστές Y_k να είναι μη μηδενικοί για $k = \pm 5$, αν θεωρήσουμε το σήμα $y(t)$ ως περιοδικό με περίοδο $T_0 = 1/100 = 0.01$ s, με τους ημιτονοειδείς όρους συχνοτήτων $f_k = 100k$ Hz, $k = 1, 2, 3, 4$ να είναι μηδενικού πλάτους. Παρ' όλο που είναι απλό να βρεθεί εύκολα - μέσω τριγωνομετρικών σχέσεων - το $z(t)$, και στη συνέχεια τα φάσματα πλάτους και φάσης, ας δούμε πως μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Z_k κατευθείαν.

Λύση:
Είναι

$$Z_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l}Y_l = X_{k-5}Y_5 + X_{k+5}Y_{-5} \quad (5.270)$$

Προφανώς το παραπάνω άθροισμα είναι μη μηδενικό μόνον όταν τα γινόμενα $X_{k-5}Y_5$ και $X_{k+5}Y_{-5}$ είναι μη μηδενικά. Άρα

$$Z_6 = X_1Y_5 + X_{11}Y_{-5} = X_1Y_5 = \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{24}} \quad (5.271)$$

$$Z_{-6} = X_{-11}Y_5 + X_{-1}Y_{-5} = X_{-1}Y_{-5} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{24}} \quad (5.272)$$

$$Z_4 = X_{-1}Y_5 + X_9Y_{-5} = X_{-1}Y_5 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{11\pi}{24}} \quad (5.273)$$

$$Z_{-4} = X_{-9}Y_5 + X_1Y_{-5} = X_1Y_{-5} = \frac{1}{2}e^{j\frac{11\pi}{24}} \quad (5.274)$$

με την περίοδο του $z(t)$ να είναι $T_0 = 0.01$ s. Οπότε το $z(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$z(t) = \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{24}}e^{j2\pi 600t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{24}}e^{-j2\pi 600t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{11\pi}{24}}e^{j2\pi 400t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{11\pi}{24}}e^{-j2\pi 400t} \quad (5.275)$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις του Euler, το $z(t)$ είναι

$$z(t) = \cos\left(2\pi 400t - \frac{11\pi}{24}\right) + \cos\left(2\pi 600t + \frac{5\pi}{24}\right) \quad (5.276)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι η εφαρμογή γνωστών τριγωνομετρικών σχέσεων δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

5.7.1.9 Παραγωγήσις

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{d}{dt}x(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt = \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi kf_0t} \Big|_{T_0} - \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \frac{d}{dt}e^{-j2\pi kf_0t}dt \quad (5.277)$$

$$= 0 - \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \frac{1}{-j2\pi kf_0}e^{-j2\pi kf_0t}dt = j2\pi kf_0 \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt \quad (5.278)$$

$$= j2\pi kf_0 X_k \quad (5.279)$$

αφού η τιμή

$$\frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi kf_0t} \Big|_{T_0} = \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi kf_0t} \Big|_0^{T_0} = \frac{1}{T_0}(x(T_0)e^{-j2\pi k} - x(0)) = 0 \quad (5.280)$$

αφού $x(T_0) = x(0)$. Σημειώστε ότι η τιμή Y_0 πρέπει να υπολογιστεί ξεχωριστά.

Άρα

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j2\pi kf_0 X_k} \quad (5.281)$$

Η ιδιότητα της παραγωγισής χρησιμοποιείται συνήθως ως με την αντίστροφη μορφή της, την ιδιότητα της ολοκλήρωσης, που ακολουθεί.

5.7.1.10 Ολοκλήρωση

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt = -\frac{1}{j2\pi kf_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) \left(\frac{d}{dt}e^{-j2\pi kf_0t}\right)dt \quad (5.282)$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k} y(t)e^{-j2\pi kf_0t} \Big|_{T_0} + \frac{1}{j2\pi kf_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)e^{-j2\pi kf_0t}dt \quad (5.283)$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k} y(T_0) e^{-j2\pi k f_0 T_0} + \frac{1}{j2\pi k} y(0) + \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.284)$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k} (y(T_0) - y(0)) + \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.285)$$

$$= \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.286)$$

$$= \frac{X_k}{j2\pi k f_0} \quad (5.287)$$

αφού για το περιοδικό σήμα $y(t)$ ισχύει $y(T_0) = y(0)$.

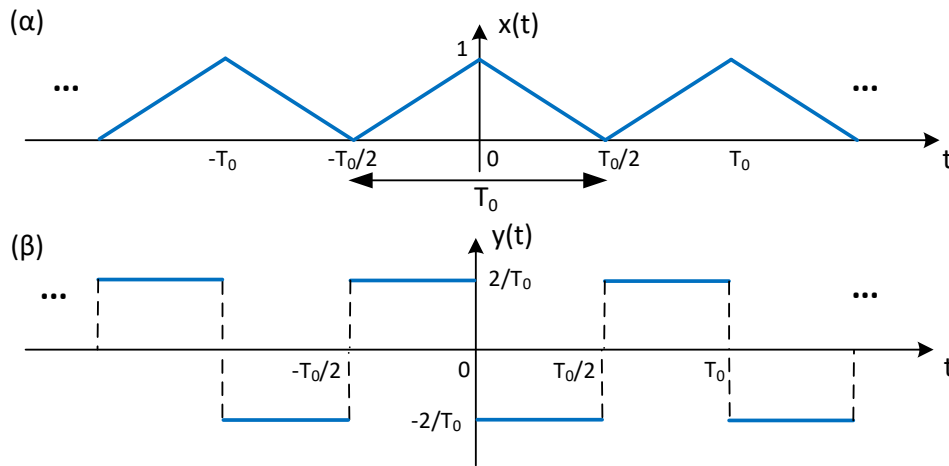
Άρα

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{X_k}{j2\pi k f_0} \quad (5.288)$$

Στην Άσκηση XXXX θα δείξετε ότι η παραπάνω ιδιότητα ισχύει μόνον αν $X_0 = 0$. Αν δεν ισχύει, το Y_0 πρέπει να υπολογιστεί ξεχωριστά.

Παράδειγμα 6.19:

Θεωρώντας το περιοδικό σήμα $x(t)$ του Σχήματος 6.36(α), η παράγωγός του $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ απεικονίζεται στο Σχήμα 6.36(β).



Σχήμα 5.36: Εφαρμογή της Ολοκλήρωσης στο Χρόνο: (α) σήμα $x(t)$, (β) η παράγωγός του, $y(t)$.

Βρείτε τους συντελεστές Fourier του σήματος $x(t)$.

Λύση:

Η εφαρμογή του ορισμού είναι δύσκολη, καθώς απαιτούνται αρκετές πράξεις. Όμως γνωρίζουμε ότι το σήμα $y(t)$ μας είναι γνωστό από τα Παραδείγματα, με $A = 2/T_0$, μόνο που έχει καθυστερήσει κατά $t_0 = T_0/2$. Οπότε οι συντελεστές Fourier του δίνονται ως

$$Y_k = \frac{2}{jk\pi T_0} (1 - e^{-jk\pi}) e^{-j2\pi k f_0 T_0/2} = \frac{2}{jk\pi T_0} (1 - e^{-jk\pi}) e^{-j\pi k} = \frac{2}{jk\pi T_0} (1 - (-1)^k) (-1)^k = \frac{2}{jk\pi T_0} ((-1)^k - 1) \quad (5.289)$$

που καταλήγει στο

$$Y_k = \begin{cases} -\frac{4}{jk\pi T_0}, & k \text{ περιττό} \\ 0, & k \text{ άρτιο} \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{k\pi T_0} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \\ 0, & k \text{ άρτιο} \end{cases} \quad (5.290)$$

Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης, μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Fourier του $x(t)$ ως

$$X_k = \frac{Y_k}{j2\pi k f_0} = \frac{\frac{4}{k\pi T_0} e^{j\pi/2}}{j2\pi k f_0} = \frac{4}{j2\pi^2 k^2} e^{j\pi/2} = \frac{2}{\pi^2 k^2} \quad (5.291)$$

για k περιττά. Μπορείτε να υπολογίσετε την τιμή του X_0 για αυτό το σήμα;

5.7.1.11 Συζυγής Συμμετρία

Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, δηλ. ισχύει ότι $x(t) = x^*(t)$, τότε

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.292)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \right)^* = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi(-k)f_0 t} dt \right)^* \quad (5.293)$$

$$= X_{-k}^* \quad (5.294)$$

Από την παραπάνω σχέση, εξάγουμε ότι

$$X_k = X_{-k}^* \quad (5.295)$$

$$\Re\{X_k\} + j\Im\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\} - j\Im\{X_{-k}\} \quad (5.296)$$

$$\Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\} \text{ και } \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\} \quad (5.297)$$

Επίσης, η πολική μορφή της Σχέσης (6.295) δίνει

$$X_k = X_{-k}^* \quad (5.298)$$

$$|X_k| e^{j\phi_k} = |X_{-k}| e^{-j\phi_{-k}} \quad (5.299)$$

$$|X_k| = |X_{-k}| \text{ και } \phi_k = -\phi_{-k} \quad (5.300)$$

Άρα, για πραγματικά σήματα, το φάσμα πλάτους είναι άρτια συνάρτηση της συχνότητας ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτησή της.

Άρα

$$x(t) = x^*(t) \longleftrightarrow X_k = X_{-k}^* \quad (5.301)$$

Παράδειγμα 6.20:

Ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = -\frac{\pi^2}{2jk^2} \quad (5.302)$$

Ας ελέγξουμε αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό ή μιγαδικό.

Λύση:
Είναι

$$X_k^* = \left(-\frac{\pi^2}{2jk^2} \right)^* = \frac{\pi^2}{2jk^2} \quad (5.303)$$

και

$$X_{-k} = -\frac{\pi^2}{2j(-k)^2} = -\frac{\pi^2}{2jk^2} \quad (5.304)$$

άρα το σήμα δεν είναι πραγματικό.

5.7.1.12 Άρτιο Σήμα

Ένα σήμα λέγεται *άρτιο* όταν ισχύει

$$x(t) = x(-t) \quad \forall t \quad (5.305)$$

Οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt - j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \right) \quad (5.306)$$

Το ολοκλήρωμα

$$-j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.307)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$-j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt = 0 \quad (5.308)$$

Οπότε

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.309)$$

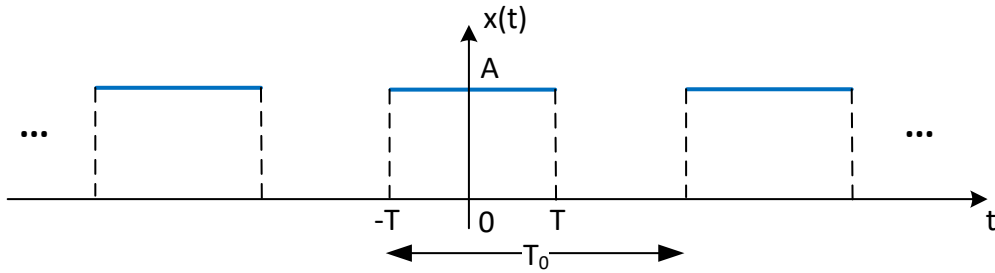
που είναι ασφαλώς πραγματικοί αριθμοί, δηλ. $\Re\{X_k\} = X_k$.

Άρα

$$x(t) \text{ άρτιο} \longleftrightarrow \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.310)$$

Παράδειγμα 6.21:

Δείξτε ότι το περιοδικό σήμα του Σχήματος 6.37



Σχήμα 5.37: Άρτιο σήμα.

έχει πραγματικούς συντελεστές Fourier

Λύση:
Θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T A e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.311)$$

$$= \frac{A}{-j2\pi k} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{-T}^T = -\frac{A}{j2\pi k} (-2j \sin(2\pi k f_0 T)) \quad (5.312)$$

$$= \frac{A}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 T) \quad (5.313)$$

που προφανώς είναι πραγματικοί, δηλ. $\Re\{X_k\} = X_k$. Υπολογίζοντας τους συντελεστές με τη Σχέση (6.309), έχουμε

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T A \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.314)$$

$$= \frac{A}{2\pi k} \sin(2\pi k f_0 t) \Big|_{-T}^T = \frac{A}{2\pi k} (\sin(2\pi k f_0 T) - \sin(-2\pi k f_0 T)) \quad (5.315)$$

$$= \frac{A}{2\pi k} 2 \sin(2\pi k f_0 T) = \frac{A}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 T) \quad (5.316)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα.

5.7.1.13 Περιττό Σήμα

Ένα σήμα λέγεται περιττό όταν ισχύει

$$x(t) = -x(-t) \quad \forall t \quad (5.317)$$

Οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt - j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \right) \quad (5.318)$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.319)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου περιττής επί άρτιας συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt = 0 \quad (5.320)$$

Οπότε

$$X_k = -j \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.321)$$

που είναι ασφαλώς φανταστικοί αριθμοί, δηλ. $j\Im\{X_k\} = X_k$.

Άρα

$$x(t) \text{ περιττό} \longleftrightarrow -j \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.322)$$

Παράδειγμα 6.22:

Στο Παράδειγμα 4.11 δείξαμε ότι το περιοδικό σήμα του Σχήματος 6.22 έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j\pi/2} = j \frac{A}{k\pi} (-1)^k \quad (5.323)$$

που προφανώς είναι φανταστικοί.

Λύση:

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει το παραπάνω αποτέλεσμα με χρήση της Σχέσης (6.321).

5.7.1.14 Άρτιο μέρος

Το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad (5.324)$$

και άρα οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_{e_k} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.325)$$

$$= \frac{1}{2} X_k + \frac{1}{2} X_{-k} = \frac{1}{2} X_k + \frac{1}{2} X_k^* \quad (5.326)$$

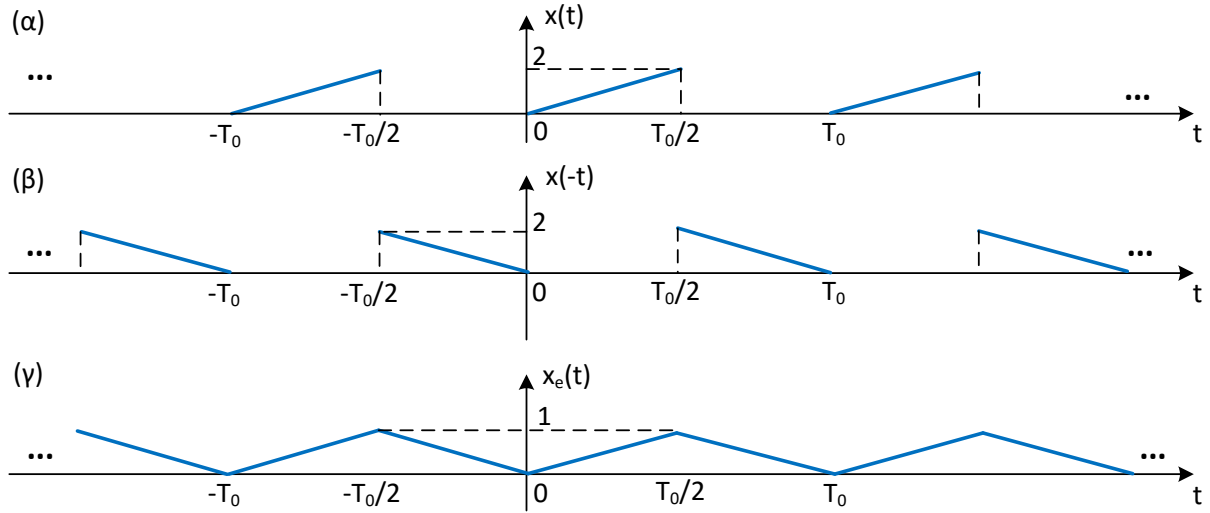
$$= \frac{1}{2} 2\Re\{X_k\} = \Re\{X_k\} \quad (5.327)$$

Άρα

$$x_e(t) \longleftrightarrow \Re\{X_k\} \quad (5.328)$$

Παράδειγμα 6.23:

Στο Σχήμα 6.38 φαίνεται ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, το σήμα $x(-t)$, καθώς και το άρτιο μέρος $x_e(t)$ του $x(t)$.



Σχήμα 5.38: (α) σήμα $x(t)$, (β) σήμα $x(-t)$, (γ) $x_e(t)$: άρτιο μέρος του $x(t)$.

Δείξτε ότι το άρτιο μέρος του σήματος $x_e(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_{ek} = \Re\{X_k\} = \frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) \quad (5.329)$$

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $x(t)$ είναι (Άσκηση XXXX)

$$X_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) + j \frac{(-1)^k}{\pi k} \quad (5.330)$$

Άρα οι συντελεστές Fourier του άρτιου μέρους του σήματος, $x_e(t)$, (Άσκηση XXXX) είναι

$$X_{ek} = \Re\{X_k\} = \frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) \quad (5.331)$$

5.7.1.15 Περιττό μέρος

Το περιττό μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (5.332)$$

και άρα οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_{ok} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.333)$$

$$= \frac{1}{2} X_k - \frac{1}{2} X_{-k} = \frac{1}{2} X_k - \frac{1}{2} X_k^* \quad (5.334)$$

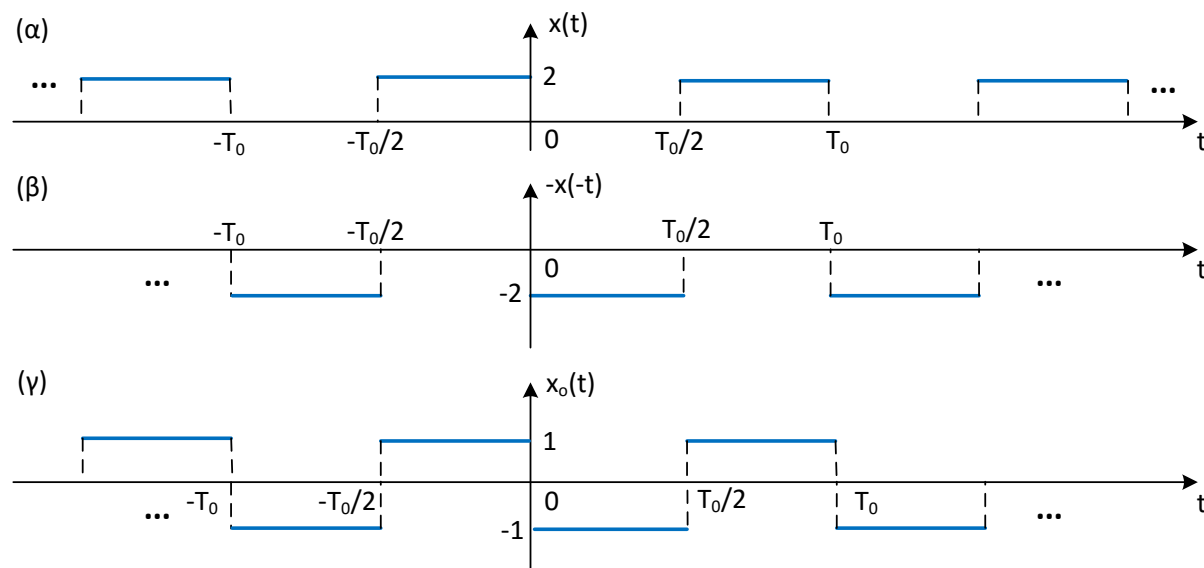
$$= \frac{1}{2} 2j \Im\{X_k\} = j \Im\{X_k\} \quad (5.335)$$

Άρα

$$\boxed{x_o(t) \longleftrightarrow j \Im\{X_k\}} \quad (5.336)$$

Παράδειγμα 6.24:

Στο Σχήμα 6.39 φαίνεται ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, το σήμα $-x(-t)$, καθώς και το περιττό μέρος $x_o(t)$ του $x(t)$.



Σχήμα 5.39: (α) σήμα $x(t)$, (β) σήμα $-x(-t)$, (γ) $x_o(t)$: περιττό μέρος του $x(t)$.

Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier του περιττού μέρους $x_o(t)$ είναι

$$X_{o_k} = j\Im\{X_k\} = -j\frac{1}{\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \quad (5.337)$$

Λύση:

Το σήμα $x(t)$ δεν είναι άλλο από το σήμα του Παραδείγματος 6.9 με πλάτος $A = 2$, κι έχοντας υποστεί αντιστροφή χρόνου. Άρα οι συντελεστές Fourier του θα είναι

$$X_k = 2\frac{1}{j2\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \quad (5.338)$$

Οι συντελεστές Fourier του περιττού μέρους του σήματος, $x_o(t)$, είναι

$$X_{o_k} = j\Im\{X_k\} = -j\frac{1}{\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \quad (5.339)$$

Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται από το Παράδειγμα 6.8, αφού το περιττό μέρος $x_o(t)$ που συζητάμε είναι το περιοδικό σήμα του Παραδείγματος 6.8, έχοντας υποστεί αντιστροφή στο χρόνο.

5.7.1.16 Θεώρημα του Parseval

Έστω ότι το περιοδικό σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.340)$$

Η ισχύς του σήματος δίνεται ως

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right|^2 dt \quad (5.341)$$

Το σύνολο $\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ περιέχει στοιχεία που είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Μπορούμε να δείξουμε ότι λόγω της ορθογωνιότητας, η ενέργεια του αθροίσματός τους ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ενεργειών, δηλ.

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right|^2 dt \quad (5.342)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right)^* dt \quad (5.343)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 t} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \right) dt \quad (5.344)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{+\infty} X_l X_k^* e^{j2\pi(l-k)f_0 t} \right) dt \quad (5.345)$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_0^{T_0} dt + \frac{1}{T_0} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{+\infty} X_l X_k^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt \quad (5.346)$$

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (5.347)$$

Οπότε

$$P_x = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_0^{T_0} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \quad (5.348)$$

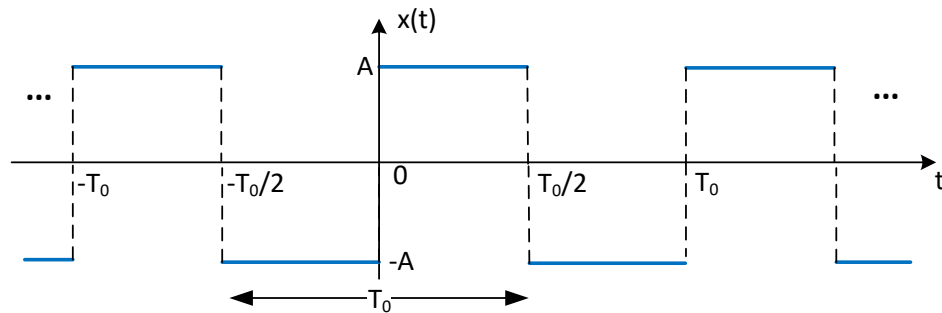
που είναι και το ζητούμενο.

Άρα

$$\boxed{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2} \quad (5.349)$$

Παράδειγμα 6.25:

Υπολογίστε την ισχύ P_x του περιοδικού σήματος $x(t)$ του Σχήματος 6.16, το οποίο επαναλαμβάνουμε εδώ για ευκολία.



Σχήμα 5.40: Θεώρημα του Parseval για το περιοδικό σήμα του παραδείγματος 6.8.

Λύση:

Η ισχύς του σήματος υπολογίζεται ως

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_0^{\frac{T_0}{2}} A^2 dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} A^2 dt \right) = A^2 \quad (5.350)$$

Βρήκαμε νωρίτερα ότι οι συντελεστές Fourier του σήματος είναι

$$X_k = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\pi/2} \quad (5.351)$$

για περιττά k . Άρα

$$|X_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2 k^2} \quad (5.352)$$

Το Θεώρημα του Parseval δίνει

$$P_x = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2} \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4A^2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{4} = A^2 \quad (5.353)$$

γιατί μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} \quad (5.354)$$

Ως τώρα αναλύσαμε μια μέθοδο αναπαράστασης ενός περιοδικού σήματος ως ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών περιοδικών σημάτων των οποίων οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους. Αυτή η αναπαράσταση (Σειρά Fourier), καθώς και τα συμπεράσματά της, είναι πολύτιμη σε πολλές εφαρμογές. Όμως, η Σειρά Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για περιοδικά σήματα. Όλα όμως τα σήματα στην πράξη είναι μη περιοδικά (θυμηθείτε ότι ένα περιοδικό σήμα ξεκινά από το $-\infty$ και εκτείνεται ως το $+\infty$).

Αυτό μπορεί να υπερκεραστεί με την αναπαράσταση μη περιοδικών σημάτων ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Αυτό δεν είναι άλλο από τον περίφημο *μετασχηματισμό Fourier*, που θα συζητήσουμε άμεσα.

3.4 Μερικά χρήσιμα μοντέλα σημάτων

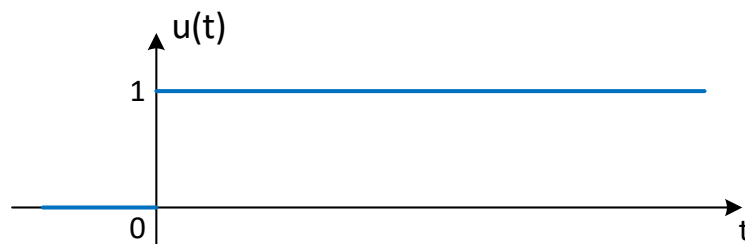
Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε μερικά νέα σήματα (δηλ. νέες συναρτήσεις, που δεν έχουμε δει ξανά ποτέ) που θα μας αποδειχθούν πολύ χρήσιμα. Αυτά είναι τέσσερα: (α) η βηματική συνάρτηση (step function), (β) ο τετραγωνικός παλμός (rectangular pulse), (γ) ο τριγωνικός παλμός (triangular pulse), και (δ) η κρουστική συνάρτηση Δέλτα (Delta function).

3.4.1 Η βηματική συνάρτηση $u(t)$

Σε πολλά από τα παραδείγματά μας ως τώρα, τα σήματά μας έχουν μηδενικές τιμές για $t < 0$, δηλ. ξεκινούν τη χρονική στιγμή $t = 0$. Αυτά τα σήματα λέγονται *αιτιατά*. Τέτοια σήματα μπορούν να περιγραφούν εύκολα με τη χρήση της περίφημης *βηματικής συνάρτησης* $u(t)$, της οποίας ο ορισμός είναι πολύ απλός:

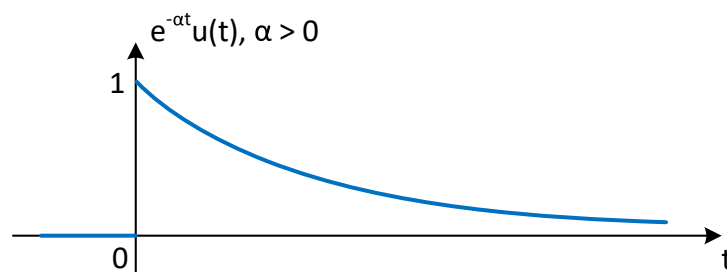
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

Μπορείτε να φανταστείτε τη βηματική συνάρτηση ως ένα σήμα-“διακόπτη”, που είναι μηδέν για $t < 0$ (κλειστός διακόπτης) και γίνεται μονάδα για $t > 0$ (ανοιχτός διακόπτης). Αν θέλουμε λοιπόν ένα σήμα μας να ξεκινάει από το $t = 0$ (δηλ. να έχει μηδενικές τιμές για $t < 0$), απλά το πολλαπλασιάζουμε με τη βηματική συνάρτηση $u(t)$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 3.10. Αντίστοιχα, αν θέλουμε να ξεκινάει από μια χρονική στιγμή



Σχήμα 3.10: Η βηματική συνάρτηση $u(t)$.

$t = t_0 > 0$, το πολλαπλασιάζουμε με τη βηματική $u(t - t_0)$. Για παράδειγμα, το σήμα e^{-at} , $a > 0$ αναπαρίσταται γραφικά ως ένα άπειρης διάρκειας εκθετικό που ξεκινά από το $t = -\infty$. Αν θέλουμε να βρούμε την αιτιατή του μορφή, απλά θα πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με τη βηματική συνάρτηση, παίρνοντας τη γραφική παράσταση του Σχήματος 3.11 και η μαθηματική μορφή θα είναι φυσικά η $e^{-at}u(t)$. Η βηματική απόκριση αποδεικνύεται επίσης



Σχήμα 3.11: Η αιτιατή εκθετική συνάρτηση $e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

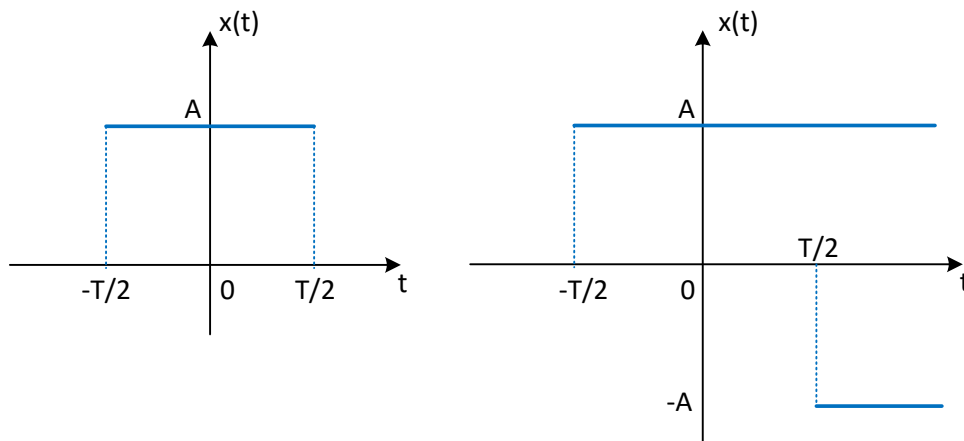
πολύ χρήσιμη στην περιγραφή συναρτήσεων που έχουν ανά διαστήματα διαφορετικές μαθηματικές αναπαραστάσεις. Αυτά τα σήματα έχουν διαφορετική μαθηματική περιγραφή ανά τμήματα του χρόνου. Μια τέτοια σύνθετη περιγραφή αποδεικνύεται άβολη όταν θέλουμε να κάνουμε πράξεις με σήματα. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε τη βηματική συνάρτηση, τότε θα έχουμε μια και μόνο μαθηματική έκφραση για κάθε τιμή του t !

3.4.2 Ο Τετραγωνικός Παλμός

Ο τετραγωνικός παλμός είναι πολύ χρήσιμος και θα τον χρησιμοποιήσουμε αρκετά στη συνέχεια, οπότε ας του δώσουμε ένα βολικό όνομα κι έναν ορισμό. Ας τον πούμε *rect*, από τη συντομογραφία του *rectangular*³. Οπότε ας ορίσουμε ότι

$$\text{παλμός πλάτους } A \text{ στο διάστημα } \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A, & t \in (-T/2, T/2) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.55)$$

όπως στο Σχήμα 3.12. Παρατηρήστε ότι η διάρκεια του παλμού αναφέρεται ως παρονομαστής του ορίσματος της



Σχήμα 3.12: Ορισμός βασικού παλμού με βηματικές συναρτήσεις.

rect(·). Από τον ορισμό φαίνεται ότι ο παλμός είναι άρτια συνάρτηση του t . Έτσι, ο παλμός θα γραφτεί με χρήση βηματικών ως

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) = A(u(t - (-T/2)) - u(t - T/2)) = A\left(u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \quad (3.56)$$

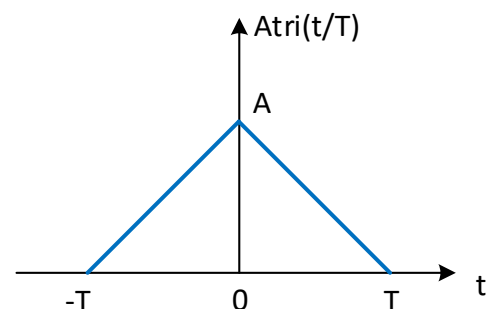
3.4.3 Ο Τριγωνικός Παλμός

Αντίστοιχα μπορεί να οριστεί ο *τριγωνικός* παλμός, τον οποίο θα συμβολίζουμε ως *tri*, από τη συντομογραφία του *triangular*⁴. Οπότε ας ορίσουμε ότι

$$\text{τριγωνικός παλμός πλάτους } A \text{ στο διάστημα } (-T, T) = \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & t \in (-T, T) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.57)$$

όπως στο Σχήμα 3.13.

Από τον ορισμό φαίνεται ότι ο τριγωνικός παλμός είναι επίσης άρτια συνάρτηση του t . Παρατηρήστε ότι η *μισή* διάρκεια του τριγωνικού παλμού αναφέρεται ως παρονομαστής του ορίσματος της *tri*(·) - σε αντίθεση με τον τετραγωνικό παλμό, όπου όλη η διάρκειά του εμφανιζόταν ως παρονομαστής στο όρισμα του *rect*. Ο λόγος αυτής της “ασυνέπειας” στο συμβολισμό θα φανεί στη συνέχεια.



Σχήμα 3.13: Τριγωνικός παλμός.

3.4.4 Κρουστική Συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$

Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα (ή συνάρτηση Δέλτα απλά, ή ακόμα απλούστερα, $\delta(t)$, από δω και πέρα), είναι μια από τις σημαντικότερες συναρτήσεις στην ανάλυση σημάτων και συστημάτων. Ακριβέστερα, δε θα έλεγε κανείς ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι συνάρτηση με την αυστηρή έννοια του όρου. Η συνάρτηση Δέλτα είναι μια

³Τετραγωνικός, στα Αγγλικά.

⁴Τριγωνικός, στα Αγγλικά.

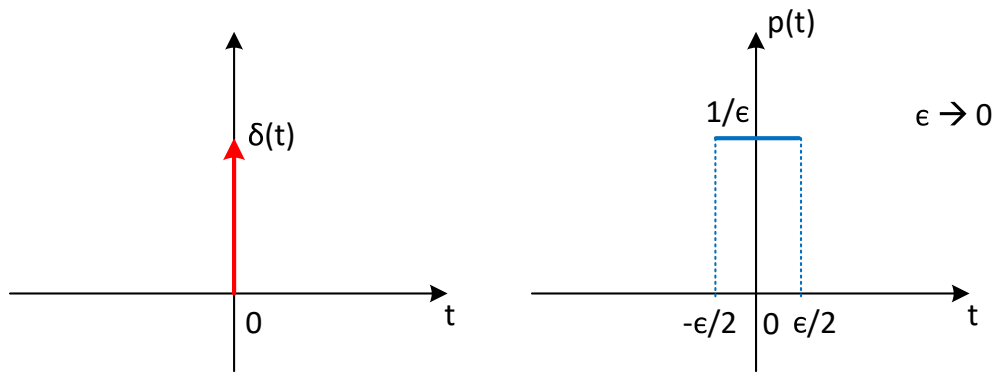
γενικευμένη συνάρτηση⁵.

Η συνάρτηση Δέλτα ορίζεται ως

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (3.58)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.59)$$

Βλέπετε ότι η συνάρτηση Δέλτα δεν ορίζεται με κάποιο κλειστό τύπο όπως οι περισσότερες συναρτήσεις. Μπορούμε όμως να φανταστούμε τη συνάρτηση Δέλτα ως μια ψηλή, πολύ πολύ στενή “έκδοση” του τετραγωνικού παλμού που είδαμε νωρίτερα, με μοναδιαίο εμβαδό (όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα της Σχέσης (3.59)). Η διάρκεια ϵ του παλμού θα έχει πολύ πολύ μικρή τιμή $\epsilon \rightarrow 0$. Έτσι, το ύψος του παλμού θα έχει πολύ μεγάλη τιμή, $\frac{1}{\epsilon}$ (για να ικανοποιείται η σχέση του εμβαδού $\frac{1}{\epsilon} \epsilon = 1$). Οπότε, η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τετραγωνικός παλμός με απειροστά μικρή διάρκεια, και απειροστά μεγάλο πλάτος, αλλά εμβαδό ίσο με μονάδα! Περίεργο, έτσι δεν είναι; ©Το Σχήμα 3.14 δείχνει τη θεωρητική αναπαράσταση της συνάρτησης Δέλτα, και την προσέγγισή της από τετραγωνικό παλμό, όπως την εξηγήσαμε μόλις. Τι είναι λοιπόν αυτό το τόσο σπουδαίο που καθιστά τη



Σχήμα 3.14: Συνάρτηση Δέλτα: ορισμός και προσέγγισή της.

συνάρτηση Δέλτα χρήσιμη για τους μηχανικούς; Ίσως έχετε ήδη καταλάβει ότι η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσομοιώσει ένα ακαριαίως φύσως σήμα, που δρα στιγμιαία και ύστερα εξαφανίζεται. Ένα τέτοιο - θεωρητικό - σήμα είναι πολύ χρήσιμο στη μελέτη των συστημάτων, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

3.4.4.1 Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα

Ας δούμε τι συμβαίνει όταν πολλαπλασιάσουμε τη συνάρτηση Δέλτα με μια άλλη συνάρτηση $x(t)$, η οποία είναι συνεχής στο $t = 0$. Αφού η συνάρτηση Δέλτα είναι μη μηδενική μόνο για $t = 0$, και η τιμή της $x(t)$ για $t = 0$ είναι προφανώς $x(0)$, τότε θα έχουμε

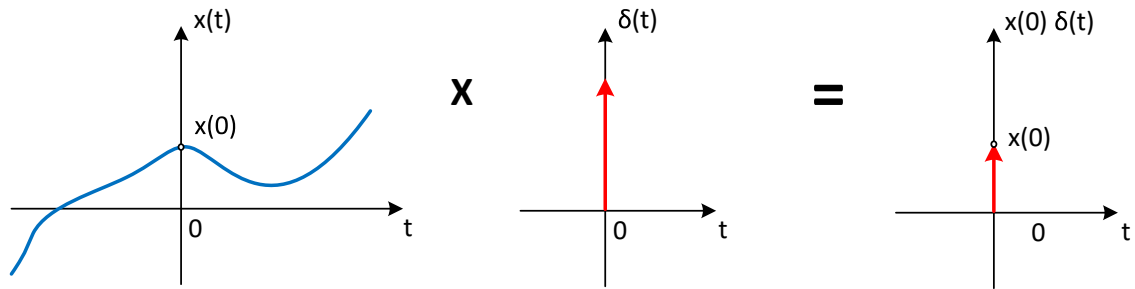
$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (3.60)$$

Όμοια, αν η $x(t)$ πολλαπλασιαστεί από μια μετατοπισμένη έκδοση της $\delta(t)$, έστω την $\delta(t - T)$ (η οποία είναι μια συνάρτηση Δέλτα τη χρονική στιγμή $t = T$), θα έχουμε

$$x(t)\delta(t - T) = x(T)\delta(t - T) \quad (3.61)$$

Τι σημαίνουν τα παραπάνω; Σημαίνουν ότι ο πολλαπλασιασμός μιας συνάρτησης Δέλτα με μια συνάρτηση $x(t)$, μας δίνει την ίδια συνάρτηση Δέλτα με πλάτος την τιμή της συνάρτησης $x(t)$ τη χρονική στιγμή που ορίζεται η συνάρτηση Δέλτα! Με άλλα λόγια, η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να δειγματοληπτήσει μια άλλη συνάρτηση, ανάλογα με τη θέση (χρονική στιγμή) που θα διαλέξουμε να την τοποθετήσουμε! Αυτή η ιδιότητα φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 3.15.

⁵Μια γενικευμένη συνάρτηση ορίζεται από την επίδρασή της σε άλλες συναρτήσεις ή από τις τιμές της για κάθε χρονική στιγμή t .



Σχήμα 3.15: Δειγματοληπτική ικανότητα συνάρτησης Δέλτα.

Άρα, αν έχουμε ένα κάπως ασυνήθιστο σήμα, που ορίζεται μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, όπως το

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = -2 \\ -1, & t = 0 \\ 2, & t = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.62)$$

τότε η συνάρτηση Δέλτα θα μας βοηθήσει να το γράψουμε ως

$$x(t) = 1\delta(t+2) - 1\delta(t) + 2\delta(t-3) \quad (3.63)$$

Τώρα, αν ολοκληρώσουμε τη Σχέση (3.60), θα έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = x(0) \quad (3.64)$$

δεδομένου πάντα ότι η $x(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την παραπάνω σχέση ως εξής: το εμβαδό του γινομένου μιας συνάρτησης $x(t)$ με τη συνάρτηση Δέλτα ισούται με την τιμή της συνάρτησης τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm T)dt = x(\mp T) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm T)dt = x(\mp T) \quad (3.65)$$

Η ερμηνεία της παραπάνω σχέσης είναι ακριβώς η ίδια με προηγουμένως, μόνο που πλέον η τιμή της συνάρτησης εξαρτάται από τη θέση της συνάρτησης Δέλτα.

Παραπάνω είδατε κάποιες πράξεις που μπορούν να γίνουν με τη συνάρτηση Δέλτα. Αυτό δε σημαίνει ότι όλες οι κοινές πράξεις που γίνονται σε συνήθεις συναρτήσεις μπορούν να γίνουν και με τη συνάρτηση Δέλτα. Για παράδειγμα, επιτρέπεται η ολίσθηση, καθώς και το άθροισμα με άλλες συναρτήσεις. Δε θα προτείναμε να την υψώσετε στο τετράγωνο, να υψώσετε στο τετράγωνο τη μεταβλητή t του ορίσμά της, ή να την πολλαπλασιάσετε με μια συνάρτηση που δεν είναι συνεχής στο σημείο που βρίσκεται η συνάρτηση Δέλτα.

Η συνάρτηση Δέλτα έχει επιπλέον τις ακόλουθες ιδιότητες, οι οποίες παρατίθενται χωρίς απόδειξη.

$$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}, \quad a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (3.66)$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (3.67)$$

3.4.4.2 Σχέση Συνάρτησης Δέλτα και Βηματικής Συνάρτησης

Τέλος, μια πολύ σημαντική ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα είναι ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t) \quad (3.68)$$

δηλ. η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης που είδαμε νωρίτερα ισούται με τη συνάρτηση Δέλτα. Το “μυστικό” αυτής της σχέσης είναι ότι αν σκεφτούμε τη βηματική συνάρτηση ως μια ασυνέχεια (μια και από την τιμή 0 αλλάζει

ακαριαία στην τιμή 1, όταν $t = 0$), τότε μόλις ορίσαμε την παράγωγο της ασυνέχειας!⁶

Κατ' αρχάς, γνωρίζετε ότι μια συνάρτηση που είναι ασυνεχής σε ένα σημείο - όπως η βηματική συνάρτηση - δεν μπορεί να έχει παράγωγο με τη συνήθη έννοια. Ας κάνουμε όμως την ερώτηση: "αν η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είχε παράγωγο $\frac{d}{dt}u(t)$, τότε ποιές θα ήταν οι ιδιότητές της;" Ας ξεκινήσουμε από τα απλά: προφανώς η βηματική συνάρτηση έχει παράγωγο μηδέν σε όλα τα σημεία της, πλην του $t = 0$. Άρα μια πρώτη ιδιότητα θα πρέπει να είναι η

$$\frac{d}{dt}u(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (3.69)$$

Μια δεύτερη ιδιότητα της βηματικής συνάρτησης προέρχεται από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού: για $t_1 < 0 < t_2$, πρέπει

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}u(t)dt = u(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = u(t_2) - u(t_1) = 1 - 0 = 1 \quad (3.70)$$

Άρα μια δεύτερη ιδιότητα πρέπει να είναι η

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}u(t)dt = 1, \quad \forall \quad t_1 < 0 < t_2 \quad (3.71)$$

Καμιά συνάρτηση - με την αυστηρή έννοια του όρου - δεν έχει αυτές τις δυο ιδιότητες! Δείτε όμως τις Σχέσεις (3.58, 3.59). Αν $t_1 \rightarrow -\infty$ και $t_2 \rightarrow +\infty$, υπάρχει απόλυτη ταύτιση των σχέσεων! Άρα η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση Δέλτα!

Ας θεωρήσουμε τη Σχέση (3.68) ως αληθής. Τότε, η παράγωγος της $u(t)$ πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}u(t)x(t)dt = u(t)x(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{d}{dt}x(t)dt \quad (3.72)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)u(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)u(t) - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)dt \quad (3.73)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - 0 - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)dt \quad (3.74)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - x(t) \Big|_0^{+\infty} \quad (3.75)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) + \lim_{t \rightarrow 0} x(t) \quad (3.76)$$

$$= x(0) \quad (3.77)$$

δεδομένου ότι η $x(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$. Άρα δείξαμε ότι η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης ικανοποιεί την ιδιότητα της δειγματοληψίας της συνάρτησης Δέλτα. Άρα είναι και αυτή μια συνάρτηση Δέλτα!

Άμεση συνέπεια της Σχέσης (3.68) είναι ότι

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3.78)$$

3.4.4.3 Παράγωγοι της συνάρτησης Δέλτα

Η παράγωγος της συνάρτησης Δέλτα ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\delta(t)x(t)dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \frac{d}{dt}x(t)dt = - \frac{d}{dt}x(t) \Big|_{t=0} \quad (3.79)$$

Όμοια ορίζεται η n -οστή παράγωγος ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n}\delta(t)x(t)dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}x(0) \Big|_{t=0} \quad (3.80)$$

⁶Βεβαίως γνωρίζετε ότι μια ασυνεχής συνάρτηση δεν παραγωγίζεται με τη συνήθη έννοια της παραγώγου.... γι' αυτό και η παραπάνω παράγωγος ονομάζεται γενικευμένη παράγωγος, όπως η συνάρτηση Δέλτα είναι μια γενικευμένη συνάρτηση.

Κεφάλαιο 6

Ο Μετασχηματισμός Fourier

6.1 Εισαγωγή στο Μετασχ. Fourier

Ο μετασχ. Fourier ορίζεται εύκολα ως η επέκταση των σειρών Fourier, όταν η περίοδος του σήματος τείνει στο άπειρο, όταν δηλαδή το σήμα πλησιάζει στο να μην είναι πια περιοδικό. Άρα αφορά κυρίως ΜΗ περιοδικά σήματα. Τότε τα X_k παύουν να ορίζονται για ακέραια k και για συγκεκριμένες συχνότητες kf_0 , και ορίζονται πλέον για κάθε συχνότητα f , σε ένα συνεχές φάσμα $X(f)$.

Διασθητικά, μπορούμε να “αποδείξουμε” αυτή τη σχέση ως εξής. Δείτε το Σχήμα 6.1. Στο Σχήμα 6.1(α), βλέπουμε το φάσμα πλάτους ενός περιοδικού σήματος, που έχει περίοδο $T_0 = 5$ s. Βλέπετε πως οι φασματικές γραμμές είναι σχετικά αραιές. Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0 = 1/T_0 = 0.2$ Hz και τα πολλαπλάσιά της βρίσκονται στις θέσεις $kf_0 = 0.2k$, $k \in \mathbb{Z}$ Hz.

Δείτε τώρα το Σχήμα 6.1(β). Βλέπετε πως αν μεγαλώσουμε την περίοδο, και γίνει $T_0 = 10$ s, τότε η θεμελιώδης συχνότητα γίνεται $f_0 = 1/T_0 = 1/10 = 0.1$ Hz και είναι πιο μικρή, και άρα και τα πολλαπλάσιά της, $kf_0 = 0.1k$, $k \in \mathbb{Z}$ Hz, θα είναι πιο κοντά το ένα με το άλλο. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο φάσμα πλάτους. Οι φασματικές γραμμές είναι πολύ πιο κοντά απ’ ό,τι πριν. Σκεφτείτε να επαναλαμβάνουμε συνέχεια αυτή τη διαδικασία για όλο και πιο μεγάλες περιόδους T_0 . Η θεμελιώδης συχνότητα f_0 γίνεται συνεχώς όλο και πιο μικρή, και οι φασματικές γραμμές έρχονται όλο και πιο κοντά, καθώς τα kf_0 είναι όλο και πιο κοντά το ένα στο άλλο.

Όταν το T_0 γίνει πολύ πολύ (πολύ! :-)) μεγάλο, και τείνει προς το $+\infty$ – δηλ. το σήμα δέν θεωρείται πια περιοδικό – όπως στο Σχήμα 6.1(γ), τότε το f_0 θα γίνει απειροστά μικρό, και τα πολλαπλάσιά του, kf_0 , με $k \in \mathbb{Z}$, θα είναι τόσο κοντά το ένα με το άλλο που δε θα ορίζουν πια διακριτές τιμές, αλλά ένα συνεχή άξονα του f ! Έτσι, οι φασματικές γραμμές θα είναι απειροστά κοντά μεταξύ τους, τόσο κοντά που πλέον δε θα είναι φασματικές γραμμές σε συγκεκριμένες συχνότητες, αλλά θα ορίζουν μια συνεχή συνάρτηση $X(f)$! Αυτή είναι η διαισθητική προσέγγιση της σχέσης μετασχ. Fourier και της σειράς Fourier.

Αν θεμελιώσουμε τώρα τη διαισθητική μας προσέγγιση, ξεκινώντας από τη Σειρά Fourier που μας αναπτύσσει το σήμα σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συχνοτήτων kf_0

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.1)$$

Αντικαθιστώντας το γνωστό μας ολοκλήρωμα του X_k , επιλέγοντας ως περίοδο το διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$,

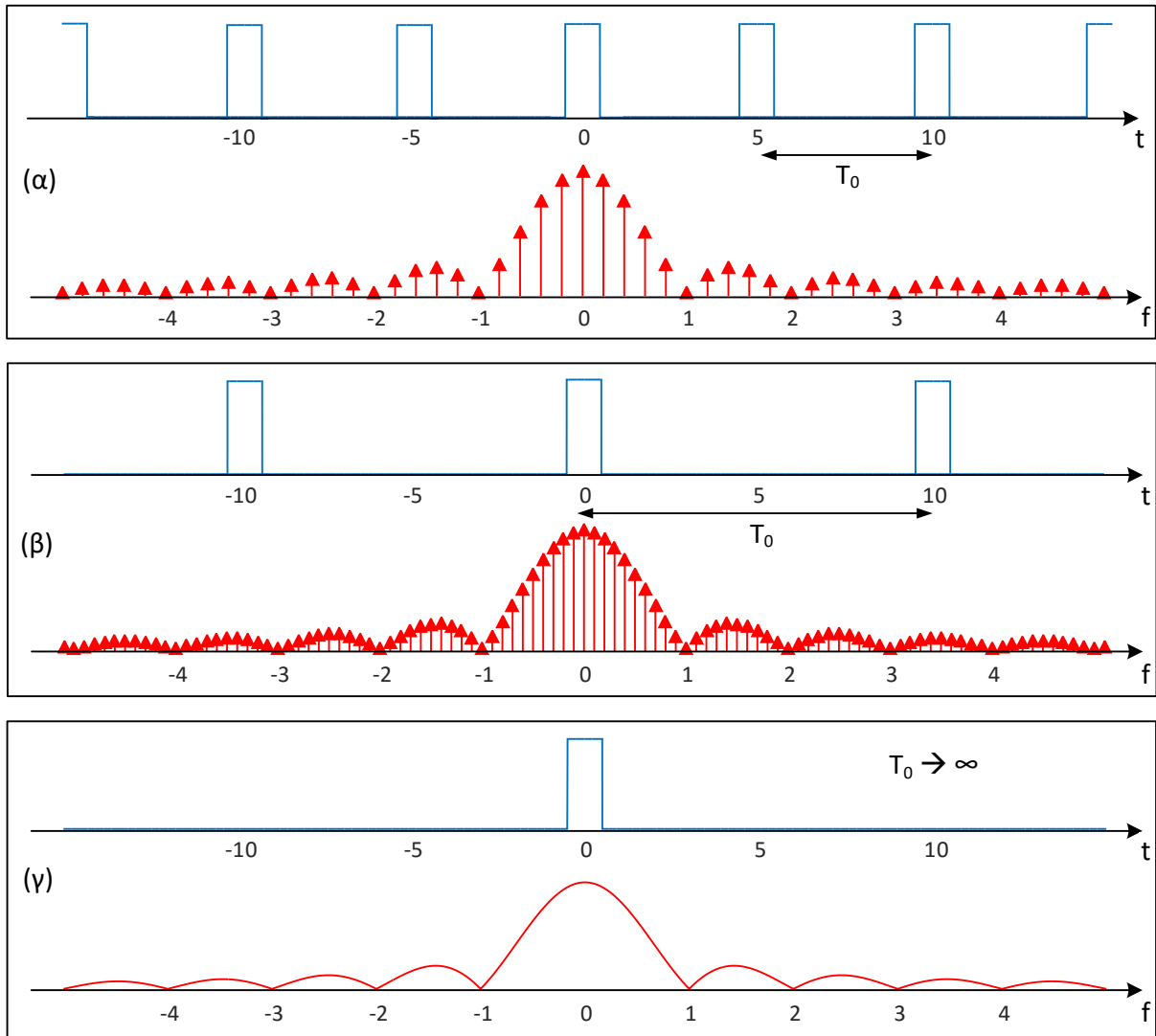
$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (6.2)$$

θα έχουμε

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.3)$$

Όταν το $T_0 \rightarrow \infty$, τότε το $f_0 = \frac{1}{T_0} \rightarrow df$, δηλ. σε μια απειροστά μικρή ποσότητα, τόσο μικρούλα που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια μικρή μετατόπιση μιας συνεχούς μεταβλητής f . Άρα, $kf_0 \rightarrow f$, σε μια συνεχή μεταβλητή f που ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό (συχνότητα).

Επίσης, όταν $T_0 \rightarrow \infty$, το $1/T_0$ μπροστά από το ολοκλήρωμα τείνει στο df . Τέλος, αφού πλέον δεν έχουμε



Σχήμα 6.1: Διαισθητική απόδειξη της σχέσης μεταξύ των σειρών Fourier και του μετασχη. Fourier.

ακέραιες πολλαπλάσιες συχνότητες του f_0 , το άθροισμα ($\sum$) της σειράς επάνω στα k μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ($\int$) πάνω στη συνεχή μεταβλητή f .

Οπότε, τελικά

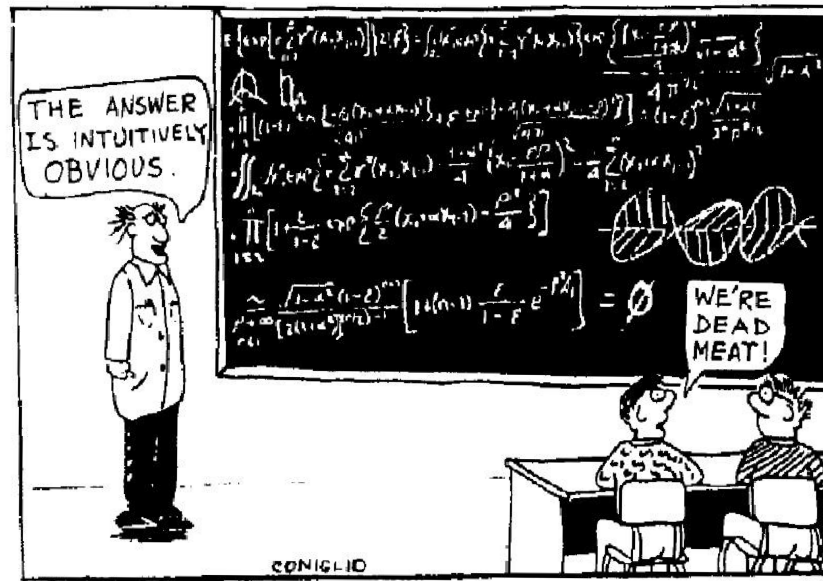
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) e^{j2\pi k f_0 t} \xrightarrow{T_0 \rightarrow \infty} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f t} \quad (6.4)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{X(f)} e^{j2\pi f t} df \quad (6.5)$$

με

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (6.6)$$

να είναι ο περίφημος Μετασχηματισμός Fourier.



Σχήμα 6.2: Βασιστείτε στη διαίσθησή σας!! ©

6.2 Ο μετασχηματισμός Fourier

Αποδείξαμε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier ορίζεται ως:

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.7)$$

και ο αντίστροφος μετασχ. Fourier ως

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (6.8)$$

Η Σχέση (6.7) μας αναλύει ένα μη περιοδικό σήμα σε ένα συνεχές φάσμα $X(f)$, ενώ η Σχέση (6.8) μας συνθέτει το σήμα $x(t)$ ως ένα συνεχές άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων, με συντελεστές $X(f)$.

Η ομοιότητα με τις Σειρές Fourier είναι, όπως είδαμε, αρκετά μεγάλη. Όπως για πραγματικά περιοδικά σήματα, δυο μιγαδικά εκθετικά στις συχνότητες $\pm kf_0$ δίνουν ένα συνημίτονο συχνότητας kf_0 , αυτό συμβαίνει και εδώ. Έστω ένα απειροστά μικρό εύρος συχνοτήτων Δf του συνεχούς φάσματος του σήματος. Επειδή αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και το αντίστοιχο εύρος $-\Delta f$ και το πλάτος καθενός - υποθέτοντας ότι το εύρος Δf είναι τόσο μικρό που το πλάτος του είναι σταθερό - θα είναι $X(\Delta f)$ και $X^*(\Delta f)$ αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων συζυγίας συντελεστών για τα πραγματικά σήματα. Άρα προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} X(\Delta f)e^{j\Delta ft} + X^*(\Delta f)e^{-j\Delta ft} &= |X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + (|X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}})^*e^{-j2\pi\Delta ft} \\ &= |X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + |X(\Delta f)|e^{-j\phi_{\Delta f}}e^{-j2\pi\Delta ft} \\ &= |X(\Delta f)|e^{j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} + |X(\Delta f)|e^{-j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} \\ &= 2|X(\Delta f)|\cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους $2|X(\Delta f)|$ για ένα πολύ μικρό εύρος συχνοτήτων Δf . Μάλιστα, αν θέσουμε $\Delta f \rightarrow df$ και αθροίσουμε ως προς όλες τις απειροστά μικρές συχνοτικές μεταβολές df (δηλ. ολοκληρώσουμε ως προς df), θα λάβουμε

$$x(t) = 2 \int_0^{+\infty} |X(f)| \cos(2\pi ft + \phi(f)) df \quad (6.10)$$

με $|X(f)|$ και $\phi(f)$ το μέτρο και τη φάση αντίστοιχα, του μιγαδικού (εν γένει) μετασχ. Fourier. Έτσι, και ο

μετασχηματισμός Fourier αναλύει ένα σήμα σε ημίτονα στην πραγματικότητα! Μια τέτοια ανάλυση όπως τη δείξαμε μόλις βοηθά πολύ στην καλύτερη κατανόηση του μετασχηματισμού, ενώ αναδεικνύει και τις ομοιότητές του με τη Σειρά Fourier.

Ο μετασχ. Fourier μπορεί εν γένει να γραφεί ως

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (6.12)$$

$$= \Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = R(f) + jI(f) \quad (6.13)$$

με $R(f), I(f)$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού, αντίστοιχα. Άρα ο μετασχ. Fourier είναι εν γένει μιγαδικό σήμα, με το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος να υπολογίζεται ως

$$R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (6.14)$$

$$I(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (6.15)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συνεπάγεται ότι

$$R(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(-2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt = R(f) \quad (6.16)$$

που σημαίνει ότι το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού είναι ένα άρτιο σήμα, ενώ

$$I(-f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(-2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = -I(f) \quad (6.17)$$

που σημαίνει ότι το φανταστικό του μέρους είναι περιττό σήμα. Πολλές φορές χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $X_R(f), X_I(f)$ για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα.

Μια εναλλακτική και πολύ χρήσιμη αναπαράσταση του μετασχ. Fourier είναι η πολική μορφή, δηλ.

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)} \quad (6.18)$$

με

$$|X(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} \quad (6.19)$$

να είναι το μέτρο του μετασχηματισμού (δηλ. το φάσμα πλάτους) και

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \left(\frac{I(f)}{R(f)} \right) \quad (6.20)$$

η φάση του μετασχηματισμού (δηλ. το φάσμα φάσης). Βλέπουμε λοιπόν πως όπως η Σειρά Fourier ανέλυε ένα περιοδικό σήμα στο φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του, το ίδιο συμβαίνει και εδώ.

6.2.1 Ύπαρξη του μετασχ. Fourier

Όπως προείπαμε, ο μετασχ. Fourier προέκυψε από την ανάγκη εύρεσης του συχνοτικού περιεχομένου μη περιοδικών σημάτων. Για να υπάρχει ο μετασχ. Fourier, πρέπει το ολοκλήρωμα της Σχέσης (6.7) να συγκλίνει, δηλ.

$$|X(f)| < \infty \iff \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)e^{-j2\pi ft}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (6.21)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι το $x(t)$ πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο.

Τα σήματα ενέργειας έχουν σχεδόν πάντα μετασχ. Fourier. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, δεν έχει μετασχηματισμό Fourier γιατί δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Αυτό δεν είναι τυχαίο, γιατί είναι το

σήμα αυτό δεν είναι σήμα ενέργειας, και για αυτά τα σήματα ο μετασχη. Fourier δεν υπάρχει, γιατί το ολοκλήρωμα της Σχέσης (6.7) δε συγκλίνει. Εν γένει, σήματα που δεν είναι σήματα ενέργειας δε σημαίνει απαραίτητα ότι δεν έχουν μετασχη. Fourier - ίσως έχουν αλλά αυτός δεν υπολογίζεται μέσω του ολοκληρώματος της Σχέσης (6.7). Περισσότερα όμως θα συζητήσουμε παρακάτω.

6.2.2 Χαρακτηριστικά παραδείγματα

Παρακάτω παρουσιάζονται τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα σημάτων και η μεθοδολογία υπολογισμού του μετασχη. Fourier τους.

Παράδειγμα 6.1:

Ας δείξουμε ότι

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) \quad (6.22)$$

με

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (6.23)$$

όπως στο Σχήμα 6.3(α).

Λύση:
Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.24)$$

$$= A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt = A \frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-T/2}^{T/2} \quad (6.25)$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f} (e^{-j2\pi fT/2} - e^{j2\pi fT/2}) = \frac{A}{j2\pi f} (e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}) \quad (6.26)$$

Η παρένθεση μοιάζει πολύ με τη σχέση του Euler για το ημίτονο

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (6.27)$$

Έτσι, είναι

$$X(f) = \frac{A}{j2\pi f} (e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}) = \frac{2A}{2\pi f} \frac{e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}}{2j} = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi fT) \quad (6.28)$$

Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (6.23), για να γράψουμε πιο όμορφα το αποτέλεσμα. Η σχέση αυτή θέλει έναν όρο π μέσα στο ημίτονο και στον παρονομαστή. Πρέπει κάπως να το βάλουμε, και επίσης να φτιάξουμε κατάλληλα το πηλίκο για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Σχέση (6.23).

Θα είναι

$$X(f) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi fT) = A \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = AT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = AT \frac{\sin(\pi(fT))}{\pi(fT)} \quad (6.29)$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (6.23) και να πάρουμε τελικά

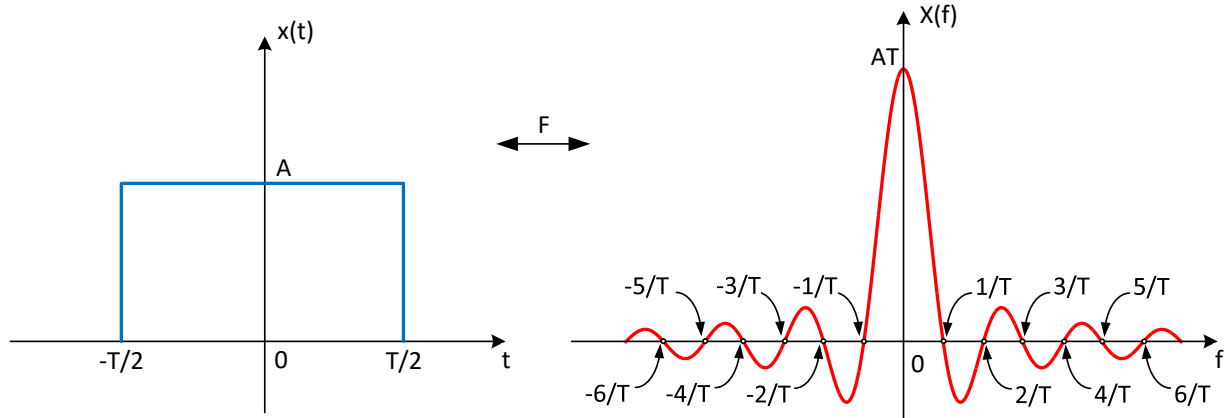
$$X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) \quad (6.30)$$

Το ζεύγος

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) \quad (6.31)$$

είναι πολύ χρήσιμο και θα το θεωρούμε δεδομένο από δω και στο εξής. Παρατηρήστε ότι το $\operatorname{sinc}(fT)$ μηδενίζεται στις θέσεις όπου μηδενίζεται ο αριθμητής $\sin(\pi fT)$, δηλ. στις $f = \pm \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$. Προσέξτε ότι για $f = 0$ υπάρχει απροσδιοριστία, οπότε το αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί μέσω κανόνων De L' Hospital (χάντε το!) και ισούται με 1. Το $X(f)$ είναι εν γένει μιγαδική συνάρτηση, άρα κι αυτή μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή ως

$$X(f) = |X(f)| e^{j\angle X(f)} \quad (6.32)$$



Σχήμα 6.3: Σήμα τετραγωνικού παλμού και ο Μετασχ. Fourier του.

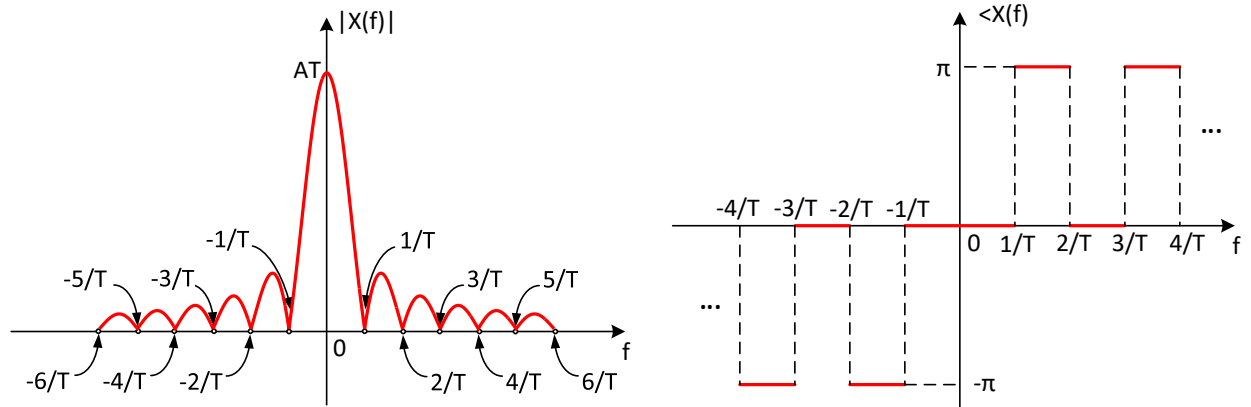
όπου το $|X(f)|$ είναι πάντα θετικό, ως μέτρο, και το $\angle X(f)$ η φάση του μετασχ. Fourier, αντίστοιχα. Για το παράδειγμά μας, έστω $A = 1$, και θα είναι

$$|X(f)| = T \left| \text{sinc}(fT) \right| \quad (6.33)$$

και

$$\angle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{(1+l)}{T} \leq f < \frac{(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{(2+l)}{T} \leq f < -\frac{(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} \leq |f| < \frac{(l+1)}{T} \end{cases} \quad (6.34)$$

με $l = 0, 2, 4, \dots$. Ας μείνουμε λίγο στις τιμές της φάσης. Το $X(f)$ είναι σε κάποια διαστήματα θετικό και σε



Σχήμα 6.4: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$.

κάποια αρνητικό. Δείτε το Σχήμα 6.3 με προσοχή. Εκεί που το $X(f)$ είναι θετικό, η φάση είναι μηδέν. Εκεί που είναι αρνητικό, έχουμε δυο περιπτώσεις:

- αν βρισκόμαστε σε θετικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(f) = -T \text{sinc}(fT) = T \text{sinc}(fT) e^{j\pi}, \quad \frac{1+l}{T} \leq f < \frac{2+l}{T}. \quad (6.35)$$

Άρα η φάση είναι $\angle X(f) = \pi$ σε αυτά τα διαστήματα.

- αν βρισκόμαστε σε αρνητικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(f) = -T \operatorname{sinc}(fT) = T \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi}, \quad -\frac{2+l}{T} \leq f < -\frac{1+l}{T}. \quad (6.36)$$

Άρα η φάση είναι $\angle X(f) = -\pi$ σε αυτά τα διαστήματα.

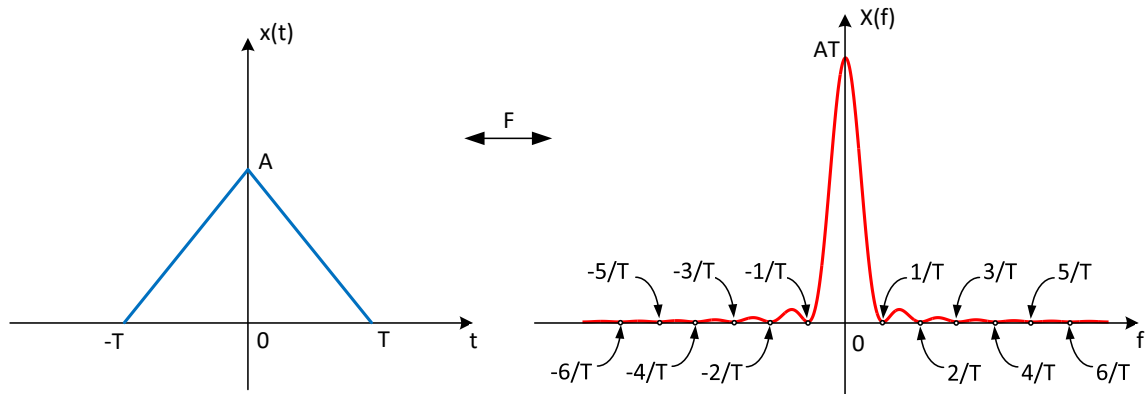
Το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού φαίνονται στο Σχήμα 6.4. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τετραγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f| \rightarrow \infty$, ενώ η φάση είναι μηδενική για κάποια ημίτονα ή $\pm\pi$ για κάποια άλλα. Επίσης παρατηρήστε τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης, αντίστοιχα! Δεν είναι τυχαία - αναλύουμε πραγματικά σήματα, και όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια, οι συμμετρίες αυτές εξακολουθούν να ισχύουν και για το μετασχηματισμό Fourier!

Παράδειγμα 6.2:

Δείξτε ότι

$$x(t) = A \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}^2(fT) \quad (6.37)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα (6.5).



Σχήμα 6.5: Σήμα τριγωνικού παλμού και ο Μετασχ. Fourier του.

Λύση:

Προσέξτε, εδώ η μισή διάρκεια του τριγώνου είναι T , και όχι ολόκληρη, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Ο λόγος θα γίνει εμφανής τώρα. Θα είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T}^0 \left(\frac{A}{T}t + A\right) e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^T \left(-\frac{A}{T}t + A\right) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.38)$$

$$= \frac{A}{T} \int_{-T}^0 t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_{-T}^0 e^{-j2\pi ft} dt - \frac{A}{T} \int_0^T t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.39)$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\int_a^b t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2} (at - 1) \Big|_a^b \quad (6.40)$$

και έχουμε

$$X(f) = \frac{A}{T} \int_{-T}^0 t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_{-T}^0 e^{-j2\pi ft} dt - \frac{A}{T} \int_0^T t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.41)$$

$$= \frac{A}{T} \frac{e^{-j2\pi ft}}{(-j2\pi f)^2} (-j2\pi ft - 1) \Big|_{-T}^0 - \frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-T}^0 - \frac{A}{T} \frac{e^{-j2\pi ft}}{(-j2\pi f)^2} (-j2\pi ft - 1) \Big|_0^T - \frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_0^T \quad (6.42)$$

$$= \frac{A}{2T(\pi f)^2} (1 - \cos(2\pi fT)) \quad (6.43)$$

μετά από απλή αλλά βαρετή άλγεβρα, την οποία παραλείπουμε. Με χρήση της ταυτότητας

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad (6.44)$$

έχουμε

$$X(f) = \frac{A}{2T(\pi f)^2} 2 \sin^2(\pi f T) = \frac{A}{T(\pi f)^2} \sin^2(\pi f T) \quad (6.45)$$

Αν προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση sinc, θα έχουμε

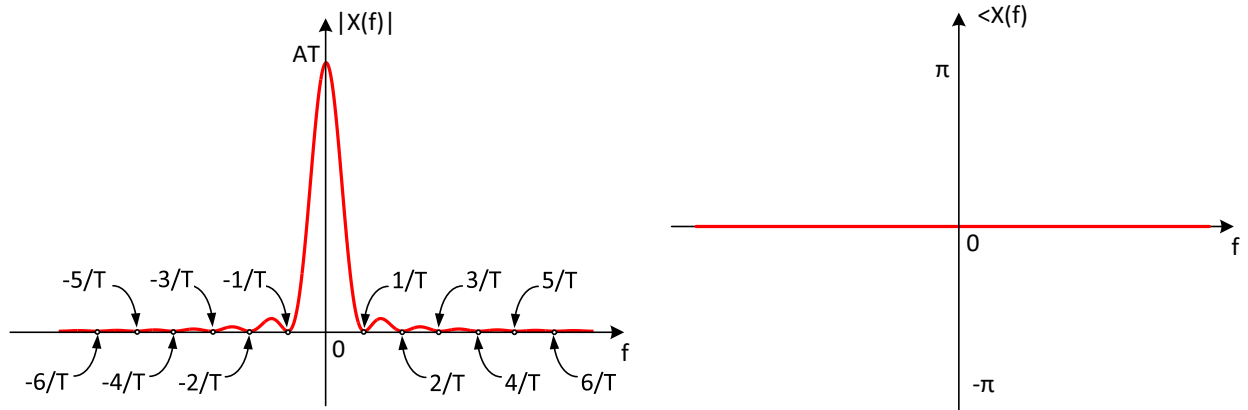
$$X(f) = \frac{A}{T(\pi f)^2} \sin^2(\pi f T) = \frac{AT}{T^2 \pi^2 f^2} \sin^2(\pi f T) \quad (6.46)$$

$$= AT \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2 = AT \text{sinc}^2(fT) \quad (6.47)$$

Άρα τελικά

$$x(t) = A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \text{sinc}^2(fT) \quad (6.48)$$

Προφανώς, επειδή το $X(f)$ είναι μόνιμα θετικό, για κάθε f , η φάση του είναι πάντα μηδέν. Το φάσμα πλάτους



Σχήμα 6.6: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$.

φαίνεται στο Σχήμα (6.5) και είναι ο ίδιος ο μετασχ. Fourier. Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 6.6. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τριγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f| \rightarrow \infty$, ενώ η φάση είναι μηδενική όλα τα ημίτονα - άρα δε χρειάζεται καμιά μετατόπιση στα ημίτονα αυτά ώστε να συντεθεί ο τριγωνικός παλμός. Επίσης παρατηρήστε ξανά τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 6.3:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier ενός άλλου συνήθους σήματος ενέργειας, του

$$x(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0 \quad (6.49)$$

Λύση:
Είναι:

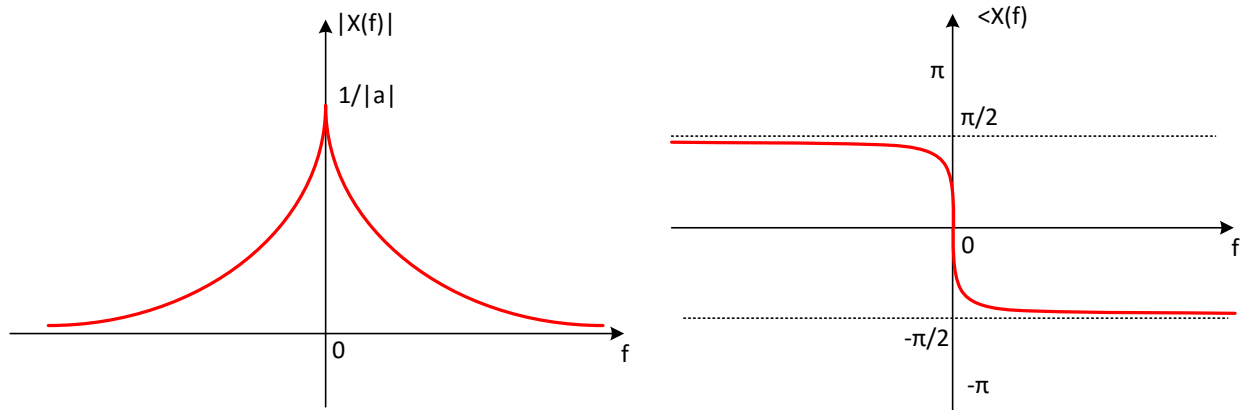
$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt \\ &= \frac{1}{-(a+j2\pi f)} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{a+j2\pi f} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right) \end{aligned} \quad (6.50)$$

Εδώ τώρα πρέπει να σταματήσουμε. Για να μην αποκλίνει αυτό το όριο στο ∞ , θα πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι αρνητικό, ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν. Όμως το $a + j2\pi f$ είναι μιγαδικός αριθμός. Ως γνωστόν,

οι μιγαδικοί αριθμοί δεν έχουν διάταξη, άρα το να πούμε ότι πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι θετικό ή αρνητικό είναι άνευ νοήματος! Όμως στην Παράγραφο ;; βρήκαμε τις τιμές αυτού του ορίου, στη Σχέση (6.51), την οποία επαναλαμβάνουμε για ευκολία εδώ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a+jb)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} e^{jbt} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \infty, & a > 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

Για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα, θα πρέπει να είναι $a > 0$, οπότε τελικά



Σχήμα 6.7: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

$$X(f) = -\frac{1}{a + j2\pi f} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right) = -\frac{1}{a + j2\pi f} (0 - 1) = \frac{1}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (6.52)$$

Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, είναι

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (6.53)$$

Παρατηρήστε ότι ο μετασχ. Fourier είναι μιγαδικό σήμα, και μπορεί να διαχωριστεί στο άθροισμα του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους ως

$$X(f) = \Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} + j \frac{-2\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (6.54)$$

Το μέτρο και η φάση του δίνονται ως

$$|X(f)| = \frac{1}{|a + j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (6.55)$$

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{\Im\{X(f)\}}{\Re\{X(f)\}} = -\tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} \quad (6.56)$$

και φαίνονται στο Σχήμα 6.7. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τετραγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f| \rightarrow \infty$, ενώ η φάση παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$.

Παράδειγμα 6.4:

Ας υπολογίσουμε επίσης το μετασχ. Fourier ενός άλλου σήματος ενέργειας, του

$$x(t) = e^{at}u(-t), \quad a > 0 \quad (6.57)$$

Λύση:

Βλέπετε ότι μοιάζει αρκετά με το προηγούμενο παράδειγμα. Ας δούμε τι θα συμβεί. Έχουμε

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a-j2\pi f} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-j2\pi f)t}\right) \quad (6.58)$$

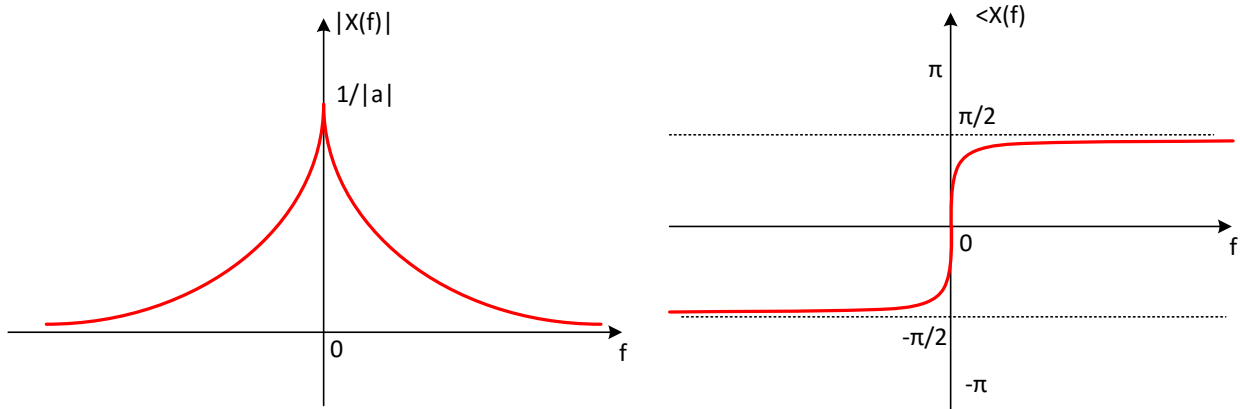
Με ακριβώς όμοιο με πριν σκεπτικό, η συνάρτηση e^{at} φθίνει στο 0 όταν $t \rightarrow -\infty$, **μόνο αν** $a > 0$, που ισχύει από υπόθεση. Άρα

$$X(f) = \frac{1}{a-j2\pi f} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-j2\pi f)t}\right) = \frac{1}{a-j2\pi f} (1-0) = \frac{1}{a-j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (6.59)$$

Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$, είναι

$$x(t) = e^{at}u(-t), \quad a > 0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a-j2\pi f} \quad (6.60)$$

Αν εξετάσουμε την πολική μορφή του μετασχηματισμού, τότε θα δούμε ότι είναι



Σχήμα 6.8: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$.

$$|X(f)| = \frac{1}{|a-j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (6.61)$$

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{\Im\{X(f)\}}{\Re\{X(f)\}} = \tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} \quad (6.62)$$

Το Σχήμα 6.8 απεικονίζει το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού. Παρατηρήστε ότι ενώ το μέτρο του μετασχ. Fourier είναι ίδιο με του Παραδείγματος 6.30, η φάση είναι αντίθετη! Αυτό σημαίνει ότι για να συνθέσουμε το σήμα $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ημίτονα ίδιου πλάτους με αυτά που συνθέτουν το $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, μόνο που οι φάσεις του θα είναι αντίθετες!

Παράδειγμα 6.5:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα $\delta(t)$.

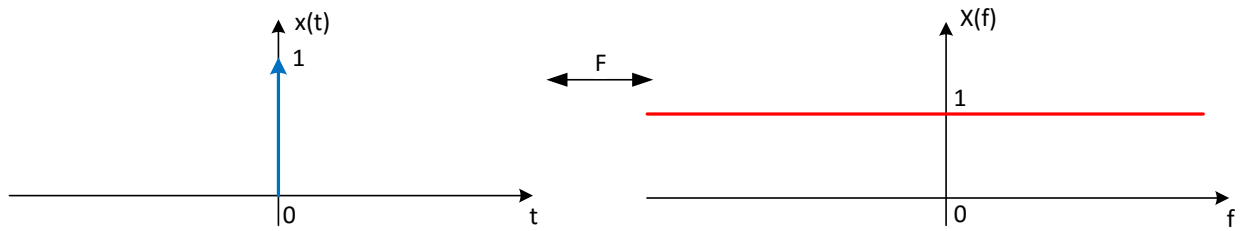
Λύση:
Είναι

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=0} = 1 \quad (6.63)$$

από τις γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. Άρα πολύ απλά

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(f) = 1 \quad (6.64)$$

Το ζεύγος αυτό αναπαρίσταται στο Σχήμα 6.9. Ερμηνεύοντας αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να πούμε ότι για να

Σχήμα 6.9: Σήμα $x(t) = \delta(t)$ και μετασχ. Fourier του.

συνθέσουμε ένα τόσο “ακαριαίο” σήμα στο χρόνο όπως το $x(t) = \delta(t)$ χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των δυνατών συχνοτήτων (όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα), με σταθερό, μοναδιαίο πλάτος και μηδενική φάση!

Παράδειγμα 6.6:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα $\delta(t - t_0)$.

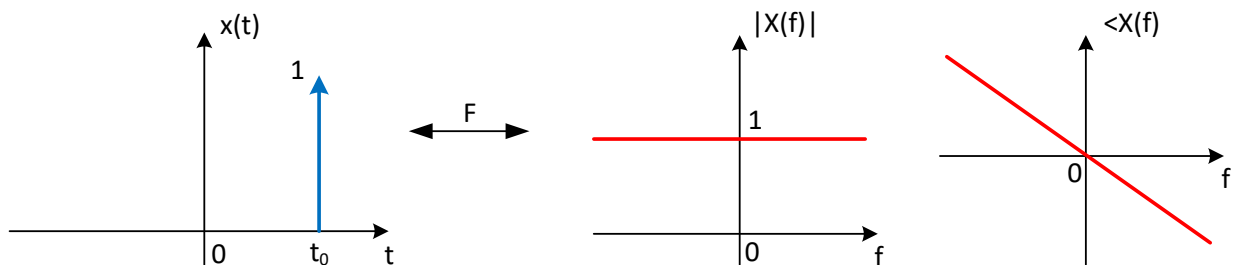
Λύση:
Είναι

$$F\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=t_0} = e^{-j2\pi ft_0} \quad (6.65)$$

από τις γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. Άρα πολύ απλά

$$x(t) = \delta(t - t_0) \longleftrightarrow X(f) = e^{-j2\pi ft_0} \quad (6.66)$$

Το ζεύγος αυτό αναπαρίσταται στο Σχήμα 6.10. Ερμηνεύοντας αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να πούμε ότι για

Σχήμα 6.10: Σήμα $x(t) = \delta(t)$ και μετασχ. Fourier του σε μέτρο και φάση.

να συνθέσουμε ένα τόσο “ακαριαίο” σήμα στο χρόνο όπως το $x(t) = \delta(t - t_0)$ χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των δυνατών συχνοτήτων (όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα), με σταθερό, μοναδιαίο πλάτος και γραμμική φάση!

Από τα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να εξάγουμε μερικές σχέσεις που θα είναι χρήσιμες στη συνέχεια:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df \quad (6.67)$$

$$\delta(t \pm t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t \pm t_0)} df \quad (6.68)$$

Ας δούμε και δυο παραδείγματα χρήσης αντίστροφου μετασχ. Fourier, του οποίου τα αποτελέσματα θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

Παράδειγμα 6.7:

Ας υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα στο χώρο της συχνότητας, $\delta(f)$.

Λύση:

Θα έχουμε τότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi ft} \Big|_{f=0} = 1 \quad (6.69)$$

Οπότε με αυτό το αποτέλεσμα βρήκαμε το μετασχ. Fourier του σταθερού σήματος! Άρα πολύ απλά

$$x(t) = 1 \longleftrightarrow X(f) = \delta(f) \quad (6.70)$$

Παράδειγμα 6.8:

Ας υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier της μετατοπισμένης συνάρτησης Δέλτα στο χώρο της συχνότητας, $\delta(f - f_0)$.

Λύση:

Θα έχουμε τότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_0 t} \Big|_{f=f_0} = e^{j2\pi f_0 t} \quad (6.71)$$

Άρα

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \delta(f - f_0) \quad (6.72)$$

Από τα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να εξάγουμε μερικές σχέσεις που θα είναι χρήσιμες στη συνέχεια:

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.73)$$

$$\delta(f \pm f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f \pm f_0)t} dt \quad (6.74)$$

6.3 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Υπάρχουν πολλές ιδιότητες του μετασχ. Fourier που βοηθούν να αποφεύγουμε την επαναλαμβανόμενη χρήση του ορισμού. Στον Πίνακα 6.1 απεικονίζονται οι περισσότερες. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε καθεμιά από αυτές, παραθέτοντας και ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της.

6.3.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Fourier $X(f)$, και - όπου απαιτείται - ένα δεύτερο σήμα $y(t)$ έχει μετασχ. Fourier $Y(f)$.

6.3.1.1 Γραμμικότητα

Ο μετασχ. Fourier του αθροίσματος $z(t) = Ax(t) + By(t)$ δίνεται ως

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax(t) + By(t)) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.75)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Ax(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} By(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.76)$$

$$= A \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + B \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.77)$$

$$= AX(f) + BY(f) \quad (6.78)$$

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(f)$ $Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f - f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{f}{a}\right)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυσικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f) = X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\ X(f) = X(-f) , \\ \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$

Πίνακας 6.1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier

Παράδειγμα 6.9:

Έστω το σήμα

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0, \quad \forall t \quad (6.79)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Λύση:

Το παραπάνω σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο σημάτων ως

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \quad (6.80)$$

με μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} = \frac{a - j2\pi f + a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)(a - j2\pi f)} \quad (6.81)$$

$$= \frac{2a}{(a + j2\pi f)(a - j2\pi f)} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (6.82)$$

6.3.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Ο μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = x(t - t_0)$ δίνεται ως

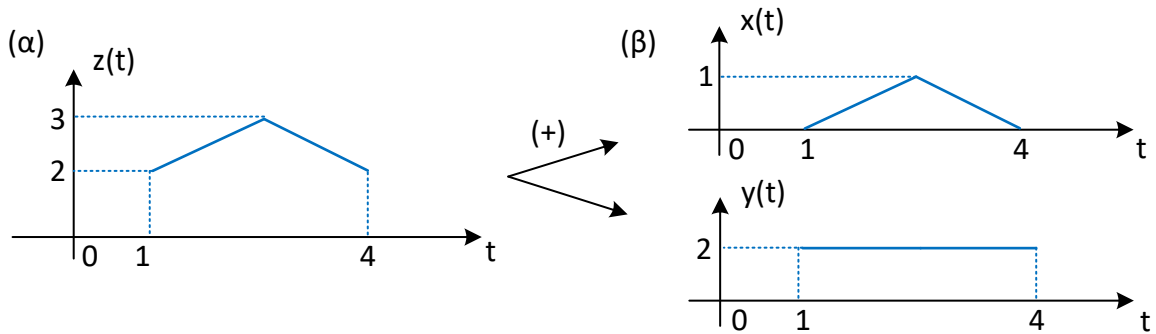
$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f (u+t_0)} du \quad (6.83)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f t_0} e^{-j2\pi f u} du = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f u} du \quad (6.84)$$

$$= X(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (6.85)$$

Παράδειγμα 6.10:

Έστω το σήμα $z(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 6.11(α).



Σχήμα 6.11: Εφαρμογή της Χρονικής Μετατόπισης: σήματα $z(t), x(t), y(t)$.

Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Λύση:

Μπορεί κανείς να γράψει το $z(t)$ ως άθροισμα δυο μετατοπισμένων γνωστών σημάτων $x(t), y(t)$, τα οποία φαίνονται στο Σχήμα 6.11(β) ως

$$z(t) = x(t) + y(t) \quad (6.86)$$

Τα $x(t), y(t)$ είναι τα γνωστά μας σήματα

$$x(t) = \text{tri}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}\right) \longleftrightarrow X(f) = \frac{3}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{3}{2}f\right) e^{-j5\pi f} \quad (6.87)$$

$$y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{3}\right) \longleftrightarrow Y(f) = 6\text{sinc}(3f)e^{-j5\pi f} \quad (6.88)$$

Οπότε το $z(t)$ είναι

$$z(t) = \text{tri}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}\right) + \text{rect}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{3}\right) \quad (6.89)$$

και ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Z(f) = \frac{3}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{3}{2}f\right)e^{-j5\pi f} + 6\text{sinc}(3f)e^{-j5\pi f} \quad (6.90)$$

6.3.1.3 Μετατόπιση στη συχνότητα

Ο μετασχ. Fourier ενός σήματος $x(t)$ είναι $X(f)$. Έστω ότι μετατοπίζουμε το φάσμα κατά $f = \pm f_0$, με $f_0 > 0$, δηλ. έχουμε το $X(f \pm f_0)$. Το σήμα στο χρόνο $y(t)$ που αντιστοιχεί σε αυτό το φάσμα είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f \pm f_0)e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi(u \mp f_0)t} du \quad (6.91)$$

$$= e^{\mp j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut} du = e^{\mp j2\pi f_0 t} x(t) \quad (6.92)$$

Παράδειγμα 6.11:

Έστω ο μετασχ. Fourier ενός σήματος ως

$$X(f) = 2\text{sinc}(2(f - 4))e^{j2\pi 2(f - 4)} \quad (6.93)$$

Βρείτε το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό αυτό.

Λύση:

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$X(f) = Y(f - 4) = 2\text{sinc}(2(f - 4))e^{j2\pi 2(f - 4)} \quad (6.94)$$

και από την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα έχουμε

$$x(t) = e^{j2\pi 4t} y(t) \quad (6.95)$$

με

$$y(t) = F^{-1}\{Y(f)\} = F^{-1}\{2\text{sinc}(2f)e^{j2\pi f}\} = \text{rect}\left(\frac{t + 1}{2}\right) \quad (6.96)$$

από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης. Άρα το σήμα $x(t)$ είναι το

$$x(t) = e^{j2\pi 4t} \text{rect}\left(\frac{t + 1}{2}\right) \quad (6.97)$$

6.3.1.4 Συζυγές σήμα στο χρόνο

Για ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, το συζυγές σήμα $y(t) = x^*(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt \right)^* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^* = X^*(-f) \quad (6.98)$$

Παράδειγμα 6.12:

Γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = 1 + j\delta(t - 2) \longleftrightarrow X(f) = \delta(f) + je^{-j4\pi f} \quad (6.99)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του $x^*(t)$.

Λύση:

Σύμφωνα με την ιδιότητα, θα είναι

$$F\{x^*(t)\} = X^*(-f) = (\delta(-f) + je^{-j4\pi(-f)})^* = \delta(f) - je^{j4\pi(-f)} = \delta(f) - je^{-j4\pi f} \quad (6.100)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\delta(x) = \delta(-x)$ και την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης. Πράγματι, αναλυτικά,

$$F\{x^*(t)\} = F\{1 - j\delta(t-2)\} = \delta(f) - je^{-j4\pi f} \quad (6.101)$$

6.3.1.5 Αντιστροφή στο χρόνο

Το σήμα $y(t) = x(-t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-j2\pi ft} dt = - \int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{j2\pi fu} du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{j2\pi fu} du = X(-f) \quad (6.102)$$

Παράδειγμα 6.13:

Στο Παράδειγμα 6.3 δείξαμε ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (6.103)$$

και στο Παράδειγμα 6.4 δείξαμε ότι

$$y(t) = e^{at}u(-t), \quad a > 0 \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (6.104)$$

Τα παραπάνω ζεύγη μπορούν να αποδειχθούν από την ιδιότητα της αντιστροφής στο χρόνο.

Λύση:

Είναι

$$x(-t) = e^{-a(-t)}u(-t) = e^{at}u(-t) = y(t) \longleftrightarrow X(-f) = \frac{1}{a + j2\pi(-f)} = \frac{1}{a - j2\pi f} = Y(f) \quad (6.105)$$

που αποτελεί το ζεύγος της Σχέσης (6.104).

6.3.1.6 Στάθμιση στο χρόνο

Ας θεωρήσουμε το σήμα $y(t) = x(at)$, $a > 0$. Ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u} du = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (6.106)$$

Για το σήμα $y(t) = x(at)$, $a < 0$, ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u} du = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u} du = -\frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (6.107)$$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (6.108)$$

Παράδειγμα 6.14:

Ας θεωρήσουμε το γνωστό μας σήμα

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (6.109)$$

το οποίο έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = T \text{sinc}(fT) \quad (6.110)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(2t)$.

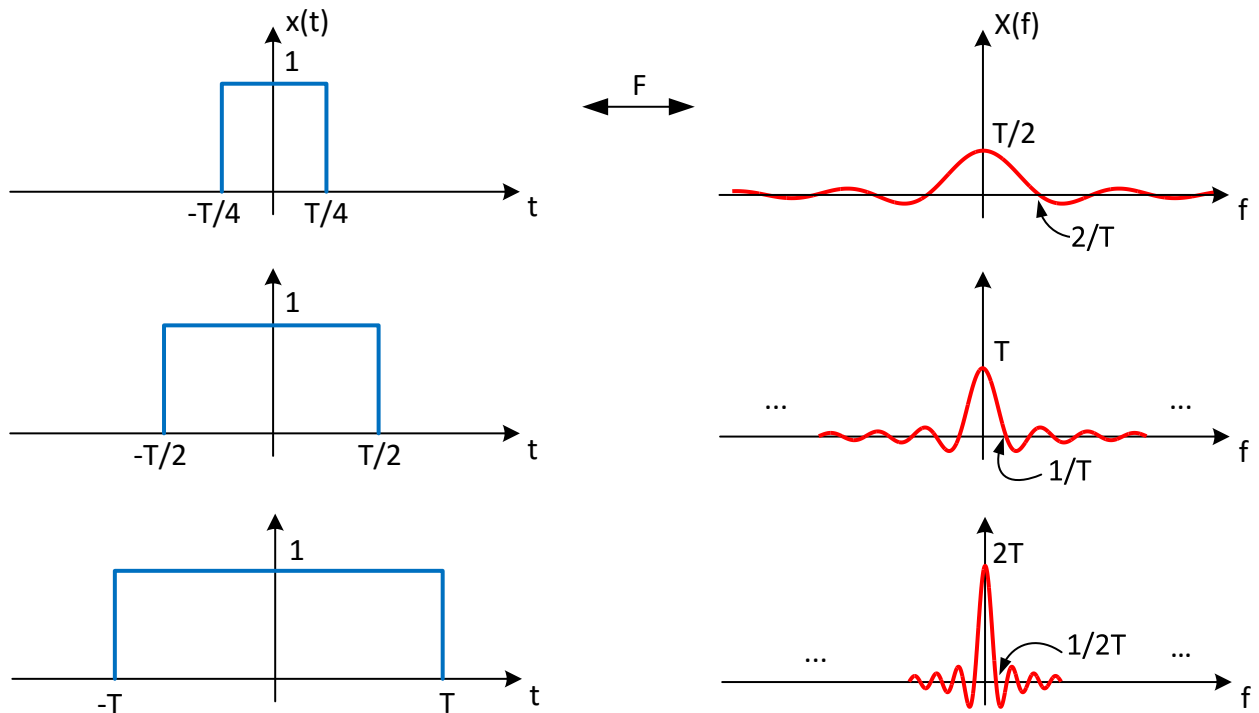
Λύση:

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, θα έχουμε

$$x(2t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{2}X\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{T}{2}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) \quad (6.111)$$

$$x\left(\frac{t}{2}\right) = \text{rect}\left(\frac{t/2}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \longleftrightarrow 2X(2f) = 2T\text{sinc}(2fT) \quad (6.112)$$

Τα παραπάνω απεικονίζονται στο Σχήμα 6.12. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική γιατί μας πληροφορεί ότι



Σχήμα 6.12: Εφαρμογή της Χρονικής Κλιμάκωσης: σήματα χρόνου και συχνότητας.

δεν μπορούμε να έχουμε μικρή διάρκεια τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας. Αυτή η εγγενής ιδιότητα του μετασχ. Fourier είναι πολύ χρήσιμη στη φασματική ανάλυση σημάτων.

6.3.1.7 Συνέλιξη στο χρόνο

Ο μετασχ. Fourier της συνέλιξης δυο σημάτων στο χρόνο είναι

$$F\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t))e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.113)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.114)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-j2\pi ft} dt \right) d\tau \quad (6.115)$$

$$= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (6.116)$$

$$= X(f)Y(f) \quad (6.117)$$

όπου στη Σχέση (6.115) έγινε χρήση της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό. Μας πληροφορεί ότι η πράξη της συνέλιξης στο χρόνο μετατρέπεται σε γινόμενο στο χώρο της συχνότητας. Γνωρίζουμε ήδη ότι η συνέλιξη αποτελεί σημαντικότερη πράξη στο χώρο των συστημάτων. Αργότερα θα δούμε πως λειτουργεί αυτή η ιδιότητα στο χώρο της συχνότητας των συστημάτων.

Παράδειγμα 6.15:

Θα μιλήσουμε για τη συνέλιξη αναλυτικότερα στη συνέχεια.

6.3.1.8 Δυικότητα

Είναι

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (6.118)$$

Θέτουμε $u = -t$, και τότε

$$x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi fu} df \quad (6.119)$$

και αλλάζοντας τις μεταβλητές u, f μεταξύ τους, έχουμε

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{-j2\pi fu} du = F\{X(t)\} \quad (6.120)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σπουδαίο, γιατί εκτός των άλλων, για κάθε ζεύγος μετασχηματισμού Fourier, μας δίνει άλλο ένα (το δυικό του)!

Παράδειγμα 6.16:

Ας δούμε το γνωστό μας σήμα

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (6.121)$$

που έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = AT\text{sinc}(fT) \quad (6.122)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $X(t)$.

Λύση:

Αν μεταφέρουμε τη συνάρτηση $\text{sinc}(\cdot)$ στο χρόνο, θα έχουμε το σήμα

$$X(t) = AT\text{sinc}(tT) \quad (6.123)$$

και σύμφωνα με το θεώρημα της δυικότητας, ο μετασχ. Fourier του θα είναι

$$x(-f) = \text{Arect}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{Arect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (6.124)$$

λόγω αρτιότητας της συνάρτησης $\text{rect}(\cdot)$.

6.3.1.9 Πολλαπλασιασμός στο χρόνο

Ο μετασχ. Fourier του γινομένου δυο σημάτων στο χρόνο είναι

$$F\{x(t)y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.125)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut} du \right) y(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.126)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-u)t} dt \right) du \quad (6.127)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)du \quad (6.128)$$

$$= X(f) * Y(f) \quad (6.129)$$

Άρα το γινόμενο δυο σημάτων στο χρόνο μετατρέπεται σε συνέλιξη στο χώρο της συχνότητας.

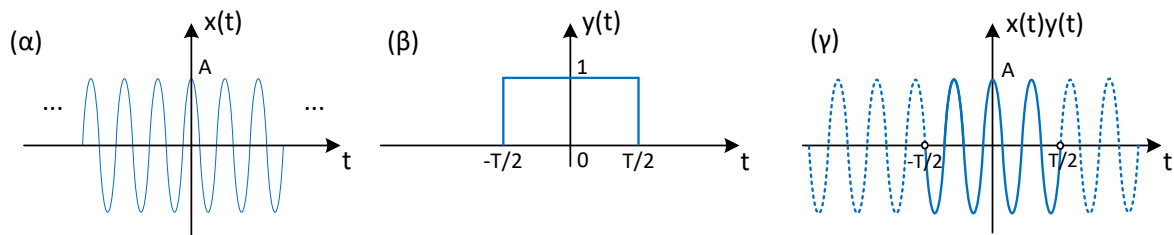
Παράδειγμα 6.17:

Ας θεωρήσουμε δυο απλά σήματα, τα

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (6.130)$$

$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (6.131)$$

Τα σήματα αυτά, καθώς και το γινόμενο $x(t)y(t)$ φαίνονται στο Σχήμα 6.13.



Σχήμα 6.13: Εφαρμογή του Γινομένου στο Χρόνο: σήματα (α) $x(t)$, (β) $y(t)$, (γ) $x(t)y(t)$.

Βρείτε το μετασχ. Fourier του γινομένου τους.

Λύση:

Παρατηρήστε ότι το γινόμενο ενός σήματος με το τετραγωνικό παλμό “κόβει” ένα τμήμα του σήματος που αντιστοιχεί στη διάρκεια του παλμού. Αναζητούμε πλέον το μετασχ. Fourier του σήματος $z(t) = x(t)y(t)$. Η ιδιότητα του γινομένου στο χρόνο δηλώνει ότι ο μετασχ. Fourier ενός γινομένου σημάτων ισούται με τη συνέλιξη των μετασχ. Fourier τους. Γνωρίζουμε ότι

$$X(f) = \frac{A}{2}F\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{A}{2}F\{e^{-j2\pi f_0 t}\} = \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0) \quad (6.132)$$

$$Y(f) = T\text{sinc}(fT) \quad (6.133)$$

με το μετασχ. Fourier του ημιτόνου να προκύπτει από τις Σχέσεις 6.74. Το $X(f)$ αποτελείται από συναρτήσεις Δέλτα, και μπορούμε να δείξουμε ότι για μια οποιαδήποτε συνάρτηση $X(f)$ ισχύει

$$X(f) * \delta(f-f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-f_0)X(f-u)du = X(f-u)\Big|_{u=f_0} = X(f-f_0) \quad (6.134)$$

από τις ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. Άρα τελικά

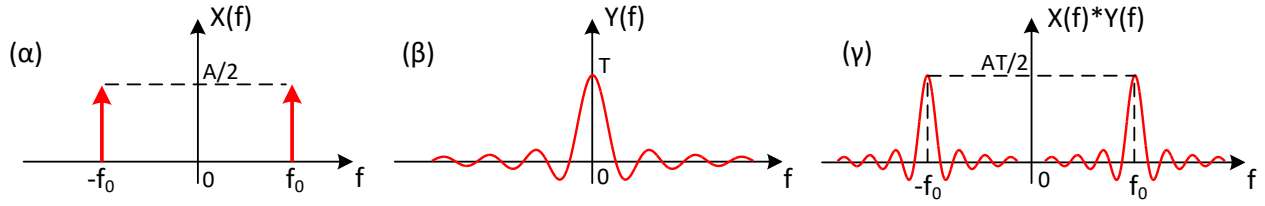
$$Z(f) = X(f) * Y(f) = \frac{AT}{2}\text{sinc}(T(f-f_0)) + \frac{AT}{2}\text{sinc}(T(f+f_0)) \quad (6.135)$$

Τα σήματα αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 6.14. Το παράδειγμα αυτό είναι μια καλή ευκαιρία να σκεφτεί κανείς την επιρροή της διάρκειας του τετραγωνικού παλμού στο φάσμα πλάτους. Τι συμβαίνει στο φάσμα πλάτους του γινομένου των σημάτων όταν η διάρκεια του τετραγωνικού παλμού είναι μεγάλη; Τι συμβαίνει όταν είναι μικρή;

6.3.1.10 Παραγωγή στη συχνότητα

Παραγωγίζοντας το μετασχ. Fourier $X(f)$ του σήματος $x(t)$ έχουμε

$$\frac{d}{df}X(f) = \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{d}{df}e^{-j2\pi ft}dt \quad (6.136)$$



Σχήμα 6.14: Εφαρμογή του Γινομένου στο Χρόνο: σήματα (α) $X(f)$, (β) $Y(f)$, (γ) $X(f) * Y(f)$.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j2\pi t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-j2\pi t x(t))e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.137)$$

$$= -j2\pi F\{tx(t)\} \quad (6.138)$$

$$F\{tx(t)\} = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f) \quad (6.139)$$

Παράδειγμα 6.18:

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$y(t) = te^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (6.140)$$

Λύση:

Θα ήταν χρονοβόρο να λύσει κανείς το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού αναλυτικά. Με χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης στη συχνότητα, έχουμε

$$y(t) = te^{-at}u(t) = tx(t) \quad (6.141)$$

με $x(t) = e^{-at}u(t)$. Άρα

$$Y(f) = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f) = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{1}{(a + j2\pi f)^2} \quad (6.142)$$

6.3.1.11 Παραγώγιση στο χρόνο

Το σήμα $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.143)$$

$$= x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.144)$$

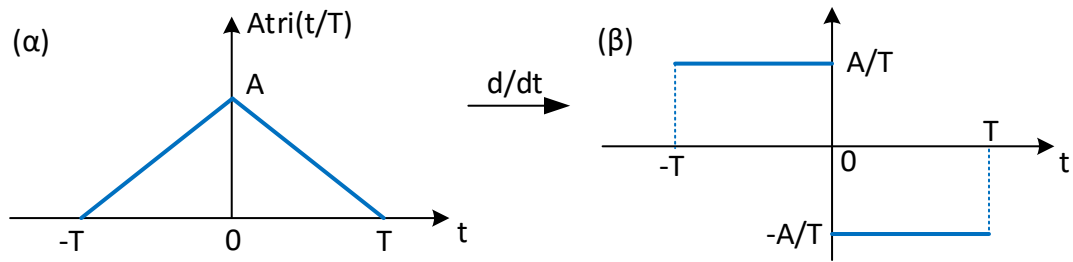
$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t)e^{-j2\pi ft}) - \lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t)e^{-j2\pi ft}) + j2\pi f X(f) \quad (6.145)$$

$$= j2\pi f X(f) \quad (6.146)$$

διότι το $x(t)$ φθίνει στο μηδέν όταν $t \rightarrow \pm\infty$, αφού έχει μετασχ. Fourier (και άρα είναι σήμα ενέργειας).

Παράδειγμα 6.19:

Ας αποδείξουμε ξανά τη Σχέση (6.37), αυτή τη φορά με λιγότερες πράξεις, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγώγισης. Το Σχήμα 6.15 δείχνει το σήμα τριγωνικού παλμού, καθώς και την παράγωγό του.



Σχήμα 6.15: Εφαρμογή της Παραγώγισης στο Χρόνο: σήματα (α) σήμα τριγωνικού παλμού, (β) παράγωγος τριγωνικού παλμού.

Λύση:

Η παράγωγος αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς οι οποίοι γράφονται ως

$$\frac{d}{dt} \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (6.147)$$

Με την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης, ο μετασχ. Fourier της παραγώγου του σήματος είναι

$$F\left\{\frac{d}{dt} \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = F\left\{\frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)\right\} \quad (6.148)$$

$$= A \text{sinc}(fT) e^{j\pi fT} - A \text{sinc}(fT) e^{-j\pi fT} \quad (6.149)$$

$$= A \text{sinc}(fT) (e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) \quad (6.150)$$

$$= j2A \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT) \quad (6.151)$$

Όμως η ιδιότητα της παραγώγου μας δίνει ότι

$$F\left\{\frac{d}{dt} \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = j2\pi f F\left\{AT \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} \quad (6.152)$$

$$j2A \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT) = j2\pi f F\left\{AT \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} \quad (6.153)$$

$$F\left\{\text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \frac{A \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi f} \quad (6.154)$$

$$= \frac{AT \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi fT} \quad (6.155)$$

$$= AT \text{sinc}(fT) \text{sinc}(fT) \quad (6.156)$$

$$= AT \text{sinc}^2(fT) \quad (6.157)$$

6.3.1.12 Ολοκλήρωση στο χρόνο

Σε αυτήν την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα αποτέλεσμα που αποδεικνύεται στη συνέχεια του βιβλίου. Το σήμα $y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$ μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = x(t) * u(t) \quad (6.158)$$

όπου $u(t)$ η γνωστή μας βηματική συνάρτηση. Με χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο, έχουμε

$$Y(f) = X(f)U(f) \quad (6.159)$$

Στην Παράγραφο 6.5 αποδεικνύουμε ότι

$$U(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (6.160)$$

οπότε

$$Y(f) = X(f)U(f) = \frac{X(0)}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} \quad (6.161)$$

Παράδειγμα 6.20:

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (6.162)$$

με $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (6.163)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα, θα είναι

$$Y(f) = \frac{X(0)}{2} + X(f) \frac{1}{j2\pi f} = \frac{1}{2a} \delta(f) + \frac{1}{(a + j2\pi f)j2\pi f} \quad (6.164)$$

Κάνοντας αναλυτικά την ολοκλήρωση, έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})u(t) \quad (6.165)$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει αυτούς τους μετασχηματισμούς, οπότε

$$Y(f) = \frac{1}{2a} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi a f} - \frac{1}{a} \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (6.166)$$

και μετά από πράξεις,

$$Y(f) = \frac{1}{2a} \delta(f) + \frac{1}{(a + j2\pi f)(j2\pi f)} \quad (6.167)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της ιδιότητας.

6.3.1.13 Συζυγής συμμετρία

Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, δηλ. ισχύει ότι $x(t) = x^*(t)$, τότε

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (6.168)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi f t} dt \right)^* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^* \quad (6.169)$$

$$= X^*(-f) \quad (6.170)$$

Από την παραπάνω σχέση, εξάγουμε ότι

$$X(f) = X^*(-f) \quad (6.171)$$

$$\Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\} - j\Im\{X(-f)\} \quad (6.172)$$

$$\Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\} \text{ και } \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\} \quad (6.173)$$

Επίσης, η πολική μορφή της Σχέσης (6.171) δίνει

$$X(f) = X^*(-f) \quad (6.174)$$

$$|X(f)| e^{j\phi_x(f)} = |X(-f)| e^{-j\phi_x(-f)} \quad (6.175)$$

$$|X(f)| = |X(-f)| \text{ και } \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \quad (6.176)$$

Άρα, για πραγματικά σήματα, το φάσμα πλάτους είναι άρτια συνάρτηση του f ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτηση του f .

Παράδειγμα 6.21:

Ελέγξτε αν το σήμα με μετασχ. Fourier

$$X(f) = j \frac{\pi^2}{2f} \quad (6.177)$$

είναι πραγματικό ή όχι.

Λύση:
Ισχύει ότι

$$X^*(-f) = \left(j \frac{\pi^2}{2(-f)} \right)^* = -j \frac{\pi^2}{(-2f)} = j \frac{\pi^2}{2f} = X(f) \quad (6.178)$$

άρα το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό. Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι το μέτρο και η φάση του σήματος έχουν τις συμμετρίες που αναφέρονται παραπάνω.

6.3.1.14 Άρτιο σήμα

Αν το σήμα είναι άρτιο, ισχύει $x(t) = x(-t)$, και τότε το φανταστικό μέρος του μετασχ. Fourier είναι

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (6.179)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$I(f) = 0 \quad (6.180)$$

Οπότε

$$X(f) = R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (6.181)$$

με την αλλαγή των άκρων του ολοκληρώματος να οφείλεται στο ότι το γινόμενο δυο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, και το ολοκλήρωμα αυτής σε συμμετρικό διάστημα $[-a, a]$ μπορεί να γραφεί ως το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο διάστημα $[0, a]$.

Παράδειγμα 6.22:

Ο γνωστός μας τετραγωνικός παλμός είναι ένα άρτιο σήμα. Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Λύση:
Μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier του ως

$$X(f) = F\{A \text{rect}(t/T)\} = 2 \int_0^{T/2} A \cos(2\pi ft) dt \quad (6.182)$$

$$= 2A \left[\frac{1}{2\pi f} \sin(2\pi ft) \right]_0^{T/2} = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi fT) \quad (6.183)$$

$$= AT \text{sinc}(fT) \quad (6.184)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τον κλασικό ορισμό του μετασχηματισμού.

6.3.1.15 Περιττό σήμα

Αν το σήμα είναι περιττό, ισχύει $x(t) = -x(-t)$, και τότε το πραγματικό μέρος του μετασχ. Fourier είναι

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (6.185)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$R(f) = 0 \quad (6.186)$$

Οπότε

$$X(f) = jI(f) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = -j2 \int_0^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (6.187)$$

με την αλλαγή των άκρων του ολοκληρώματος να οφείλεται στο ότι το γινόμενο δυο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, και το ολοκλήρωμα αυτής σε συμμετρικό διάστημα $[-a, a]$ μπορεί να γραφεί ως το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο διάστημα $[0, a]$.

Παράδειγμα 6.23:

Έστω το σήμα $x(t) = 1/t$, του οποίου ζητούμε το μετασχ. Fourier.

Λύση:

Το σήμα $x(t)$ είναι περιττό, και άρα ο μετασχ. Fourier θα έχει μόνο φανταστικό μέρος, δηλ.

$$X(f) = jI(f) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = -j2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{t} dt \quad (6.188)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t} dt = \begin{cases} \pi/2, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -\pi/2, & a < 0 \end{cases} \quad (6.189)$$

οπότε ο μετασχ. Fourier $X(f)$ είναι

$$X(f) = \begin{cases} -j\pi, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ j\pi, & f < 0 \end{cases} \quad (6.190)$$

6.3.1.16 Άρτιο μέρος

Το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad (6.191)$$

και άρα

$$F\{x_e(t)\} = \frac{1}{2}F\{x(t)\} + \frac{1}{2}F\{x(-t)\} = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}X(-f) \quad (6.192)$$

$$= \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}X^*(f) = \frac{1}{2}2\Re\{X(f)\} \quad (6.193)$$

$$= \Re\{X(f)\} \quad (6.194)$$

Παράδειγμα 6.24:

Το άρτιο μέρος του σήματος

$$x(t) = 2e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (6.195)$$

είναι το σήμα

$$x_e(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad (6.196)$$

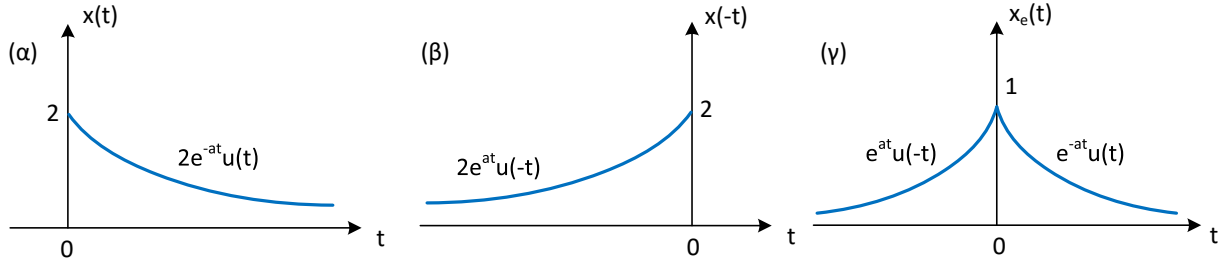
Βρείτε το μετασχ. Fourier του, $X_e(f)$.

Λύση:

Το σήμα $x_e(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$e^{-a|t|} = e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t) = x_e(t) \quad (6.197)$$

Η παραπάνω διάσπαση φαίνεται στο Σχήμα 6.16. Γνωρίζουμε ότι



Σχήμα 6.16: (α): σήμα $x(t)$, (β) σήμα $x(-t)$, (γ) $x_e(t)$: άρτιο μέρος του $x(t)$.

$$x(t) = 2e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{2}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (6.198)$$

και άρα ο μετασχ. Fourier του $x_e(t)$ θα είναι

$$X_e(f) = \Re\{X(f)\} = \Re\left\{\frac{2}{a + j2\pi f}\right\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (6.199)$$

6.3.1.17 Περιττό μέρος

Το περιττό μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (6.200)$$

και άρα

$$F\{x_o(t)\} = \frac{1}{2}F\{x(t)\} - \frac{1}{2}F\{x(-t)\} = \frac{1}{2}X(f) - \frac{1}{2}X(-f) \quad (6.201)$$

$$= \frac{1}{2}X(f) - \frac{1}{2}X^*(f) = j\frac{1}{2}2\Im\{X(f)\} \quad (6.202)$$

$$= j\Im\{X(f)\} \quad (6.203)$$

Παράδειγμα 6.25:

Το περιττό μέρος του σήματος

$$x(t) = 2e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (6.204)$$

είναι το σήμα

$$x_o(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t), \quad a > 0 \quad (6.205)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του, $X_o(f)$.

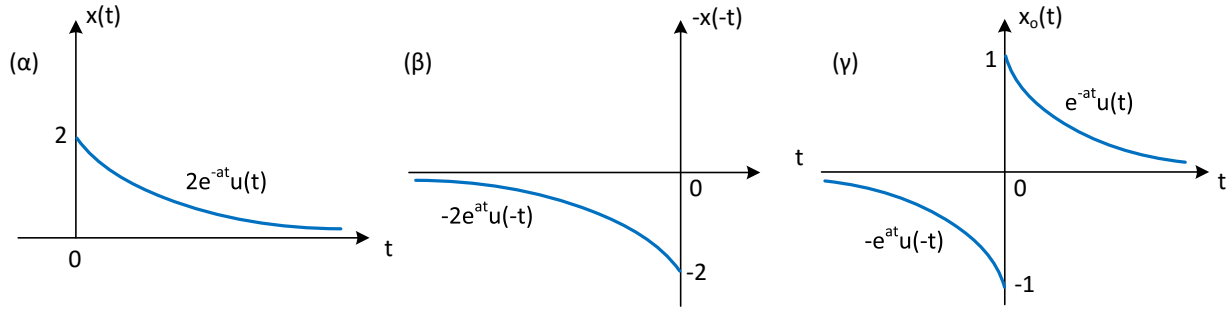
Λύση:

Δείτε το Σχήμα 6.17. Γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = 2e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{2}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (6.206)$$

και άρα ο μετασχ. Fourier του $x_o(t)$ θα είναι

$$X_o(f) = j\Im\{X(f)\} = j\Im\left\{\frac{2}{a + j2\pi f}\right\} = -j\frac{4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (6.207)$$



Σχήμα 6.17: (α): σήμα $x(t)$, (β) σήμα $-x(-t)$, (γ) $x_o(t)$: περιττό μέρος του $x(t)$.

6.3.1.18 Θεώρημα του Parseval

Ξεκινώντας από το αριστερό μέλος και για ένα εν γένει μιγαδικό σήμα $x(t)$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut} du \right)^* dt \quad (6.208)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)e^{-j2\pi ut} du dt \quad (6.209)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(u) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t} dt du df \quad (6.210)$$

Όμως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t} dt = \delta(f-u) \quad (6.211)$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)\delta(f-u) du \right) df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (6.212)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει με όμοιο τρόπο τη γενικότερη σχέση του Parseval, η οποία είναι η

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f) df \quad (6.213)$$

Παράδειγμα 6.26:

Δείξαμε νωρίτερα ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (6.214)$$

Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος.

Λύση:

Η ενέργεια του σήματος είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} \quad (6.215)$$

Ας δείξουμε ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα μέσω του χώρου της συχνότητας.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{a + j2\pi f} \right|^2 df \quad (6.216)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df \quad (6.217)$$

λόγω άρτιας συμμετρίας της συνάρτησης εντός του ολοκληρώματος. Γνωρίζουμε ότι

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \Big|_{c_1}^{c_2} \quad (6.218)$$

Άρα η Σχέση (6.217) μας δίνει

$$E_x = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df = \frac{2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 + f^2} df \quad (6.219)$$

$$= \frac{1}{a\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\pi f}{a} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a\pi} \left(\lim_{f \rightarrow +\infty} \tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} - \tan^{-1}(0) \right) \quad (6.220)$$

$$= \frac{1}{a\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2a} \quad (6.221)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε στο πεδίο του χρόνου.

Παρατηρήσεις

- (α') Έχουμε μιλήσει για τα σήματα ισχύος, που είναι άπειρα σε διάρκεια, κι έχουν πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια. Στον αντίποδα, υπάρχουν τα σήματα ενέργειας, που έχουν πεπερασμένη ενέργεια και μηδενική ισχύ. Θυμίζουμε ότι σήματα ενέργειας είναι τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad (6.222)$$

μια σχέση που μοιάζει με τη Σχέση (6.21) αλλά όχι ακριβώς. Τα σήματα ενέργειας έχουν ΠΑΝΤΑ μετασχηματισμό Fourier.

- (β') Αξίζει να αναφέρουμε ότι κι εδώ ισχύει η ιδέα της προβολής που είδαμε στις σειρές Fourier. Μόνο που εδώ δεν προβάλλουμε το σήμα σε εκθετικά συγκεκριμένων συχνοτήτων kf_0 , αλλά σε εκθετικά όλων των συχνοτήτων!
- (γ') Τέλος, ένα σημαντικό, όσο και αξιοθαύμαστο, στοιχείο που αξίζει να αναφερθεί είναι το εξής: τόσο στις Σειρές Fourier, όσο και στο μετασχ. Fourier, ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ αναπαρίσταται (ή αλλιώς, μπορεί να συντεθεί) από μιγαδικά εκθετικά, που στην περίπτωση των πραγματικών σημάτων είναι συνημίτονα (είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier σχετίζεται στενά με τις σειρές Fourier). Ός γνωστόν, τα συνημίτονα έχουν άπειρη διάρκεια. Σκεφτείτε το λίγο: ένα μη περιοδικό σήμα που είναι, για παράδειγμα, μη μηδενικό σε ένα διάστημα $[a, b]$ και μηδέν παντού αλλού, μπορεί να αναπαρασταθεί ΑΚΡΙΒΩΣ ως ένα άθροισμα άπειρων σε διάρκεια συνημιτόνων!

Το φάσμα $X(f)$ περιέχει άπειρα μιγαδικά εκθετικά (ή συνημίτονα) που ξεκινούν από το $-\infty$ και διαρκούν για πάντα. Τα πλάτη και οι φάσεις αυτών των συνιστωσών είναι τέτοια ώστε όταν τα προσθέσουμε, παίρνουμε ΑΚΡΙΒΩΣ το σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[a, b]$, ενώ έξω από αυτό, οι συνιστώσες αυτές αθροίζονται στο μηδέν!!!! Αν “παίζαμε” μόνοι μας με πλάτη και φάσεις άπειρου αριθμού συνημιτόνων για να πετύχουμε μια τόσο τέλεια, ακριβής, και λεπτή ισορροπία μεταξύ τους ώστε να ανακατασκευάζουμε ακριβώς το σήμα μας, θα ήταν αφάνταστα δύσκολο – πιθανώς αδύνατο – να τα καταφέρουμε! Κι όμως, ο μετασχ. Fourier (όπως και οι Σειρές Fourier) το πετυχαίνει με μεγάλη ευκολία, χωρίς πολλή σκέψη από μέρους μας. Μερικές φορές, μας απορροφούν τόσο τα μαθηματικά που ξεχνάμε να προσέξουμε μερικές τέτοιες, όμορφες, και θαυμαστές λεπτομέρειες...

6.4 Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

Ιδανικά, θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε τον μετασχ. Fourier και για σήματα ισχύος, όχι μόνο ενέργειας, ενοποιώντας τη θεωρία του μετασχ. Fourier για κάθε σήμα, ενέργειας ή ισχύος. Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό του μετασχ. Fourier σε ένα γνωστό περιοδικό σήμα ισχύος όπως το $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.223)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt \quad (6.224)$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε αυτά τα ολοκληρώματα!

Τι κάνουμε τότε; Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας συνάρτηση Δέλτα, που έχουμε ήδη δει. Με χρήση του ακόλουθου ζεύγους μετασχ. Fourier

$$e^{\mp j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f \pm f_0) \quad (6.225)$$

ο μετασχ. Fourier του δεδομένου σήματος θα είναι

$$X(f) = F\left\{\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \quad (6.226)$$

και άρα

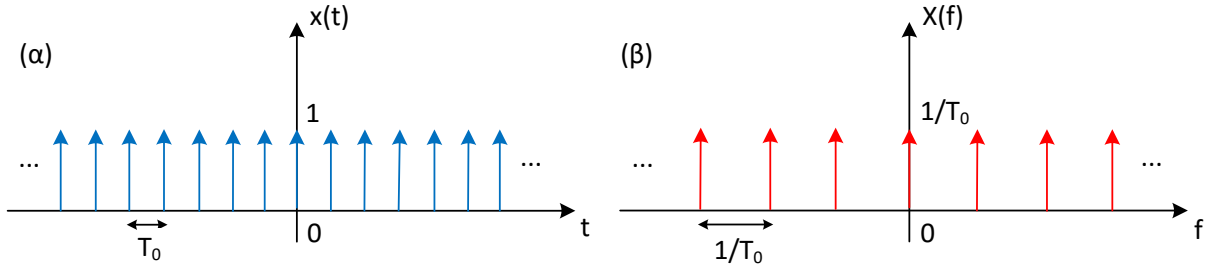
$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0) \quad (6.227)$$

Αφού λοιπόν κάθε περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ημιτόνων ή, γενικότερα, άθροισμα μιγαδικών εκθετικών $e^{j2\pi k f_0 t}$ μέσω της Σειράς Fourier, μπορούμε να βρούμε το μετασχ. Fourier ενός περιοδικού σήματος! Ας δούμε πως.

Ένα βασικό περιοδικό σήμα είναι η σειρά συναρτήσεων Δέλτα που φαίνεται στο Σχήμα 6.18(α) και που περιγράφεται μαθηματικά με την εξίσωση

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \quad (6.228)$$

Οπως ήδη γνωρίζουμε μπορούμε να αναπτύξουμε ένα περιοδικό σήμα σε εκθετική Σειρά Fourier ως



Σχήμα 6.18: (α): σειρά συναρτήσεων Δέλτα στο πεδίο του χρόνου με περίοδο T_0 και (β) σειρά συναρτήσεων Δέλτα στο πεδίο της συχνότητας με περίοδο $1/T_0$, και (β) ο Μετασχηματισμός Fourier του (α).

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.229)$$

όπου οι συντελεστές Δ_k υπολογίζονται από τη σχέση

$$\Delta_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta_{T_0}(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \quad (6.230)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του συντελεστή Fourier, Δ_k στην Εξίσωση (6.229) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - k f_0) \quad (6.231)$$

ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος της σειράς συναρτήσεων Δέλτα είναι

$$F\{\delta_{T_0}(t)\} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_0) = \frac{1}{T_0} \delta_{1/T_0}(f) \quad (6.232)$$

Ο μετασχ. Fourier της σειράς συναρτήσεων Δέλτα φαίνεται στο Σχήμα 6.18(β). Όπως φαίνεται και από το σχήμα, ο μετασχ. Fourier είναι πάλι μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα, με περίοδο $1/T_0$ και πλάτος $1/T_0$.

6.4.1 Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

Γράφοντας ένα περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier μπορούμε να βρούμε ένα σύνδεσμο μεταξύ του διακριτού φάσματος που μόλις είδαμε και των συντελεστών του αναπτύγματος του περιοδικού σήματος σε Σειρά Fourier. Έχουμε δει ότι το εκθετικό ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος είναι

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.233)$$

όπου

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (6.234)$$

Ο μετασχ. Fourier του σήματος δίνεται από τη σχέση

$$F\{x(t)\} = X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k F\{e^{j2\pi k f_0 t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - k f_0) \quad (6.235)$$

όπου $f_0 = 1/T_0$. Μπορούμε να δείξουμε (χωρίς να το κάνουμε εδώ) ότι

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(f) \Big|_{f=k f_0} \quad (6.236)$$

με $X_{T_0}(f)$ το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του περιοδικού σήματος!

Εν κατακλείδει, για να υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier ενός περιοδικού σήματος, εκτελούμε τα παρακάτω δυο βήματα:

Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

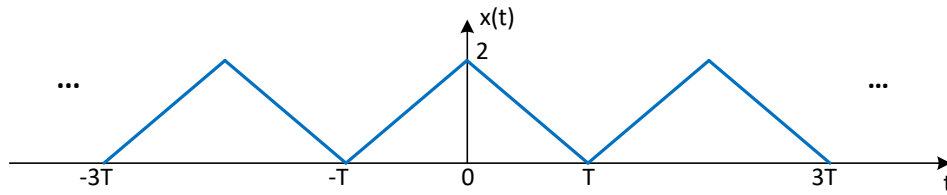
- Υπολογίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier σε μια περίοδο του σήματος $x_{T_0}(t)$ (σαν να ήταν - που είναι - σήμα ενέργειας)
- Δειγματοληπτούμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής (θεμελειώδους) συχνότητας: $f = k f_0$ όπου $f_0 = 1/T_0$. Αυτή η δειγματοληψία μας δίνει τους συντελεστές X_k του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος.
- Υπολογίζουμε το $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - k f_0)$

Ένα πολύ ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι, όπως βλέπετε, το T_0 μπορεί να είναι οποιαδήποτε περίοδος! Με άλλα λόγια, μπορούμε από το φάσμα του μετασχ. Fourier, να βρούμε τους συντελεστές Fourier για οποιαδήποτε περίοδο του αντίστοιχου περιοδικού σήματος! Αυτό που συμβαίνει είναι ότι απλά δειγματοληπτούμε σε διαφορετικές αποστάσεις το φάσμα του μετασχηματισμού Fourier!

Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε και τον κουραστικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της Σειράς Fourier... δείτε πόσο απλά στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.27:

Βρείτε τους συντελεστές του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος του Σχήματος 6.19.



Σχήμα 6.19: Περιοδικό Τριγωνικό Σήμα Παραδείγματος 6.27

Λύση:

Θα βρούμε πρώτα το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος $x(t)$ και μετά θα δειγματοληπτήσουμε το φάσμα $X(f)$ για να βρούμε τους συντελεστές Fourier. Προφανώς το σήμα είναι περιοδικό μια περίοδο $T_0 = 2T$. Αν απομονώσουμε μια περίοδό του, δηλ. τον κεντρικό τριγωνικό παλμό, αυτός γράφεται ως

$$x_{T_0}(t) = 2\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (6.237)$$

και έχει μετασχ. Fourier

$$X_{T_0}(f) = 2T\text{sinc}^2(fT) \quad (6.238)$$

Η περίοδος του περιοδικού σήματος είναι $T_0 = 2T$, άρα οι συντελεστές Fourier θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(f) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{2T} 2T\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2T}T\right) = \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττό} \quad (6.239)$$

που είναι και το ζητούμενο.

6.5 Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος - Μη Περιοδικά Σήματα

Επίσης, όταν το υπό εξέταση σήμα ισχύος δεν είναι περιοδικό, υπάρχουν άλλες τεχνικές για τον υπολογισμό του μετασχ. Fourier τέτοιων σημάτων. Για παράδειγμα, ένα σήμα ισχύος $\hat{x}(t)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα της μέσης τιμής του και ενός σήματος που έχει μηδενική μέση τιμή, δηλ.

$$\hat{x}(t) = x_0 + x_z(t) \quad (6.240)$$

όπου x_0 είναι η μέση τιμή του σήματος και $x_z(t)$ το τμήμα του σήματος με τη μηδενική μέση τιμή. Προφανώς, ο μετασχ. Fourier του θα είναι:

$$\hat{X}(f) = x_0\delta(f) + F\{x_z(t)\} \quad (6.241)$$

Αρκεί να βρούμε το μετασχ. Fourier του $x_z(t)$. Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.28:

Έστω $x(t) = \text{sgn}(t)$ η συνάρτηση προσήμου

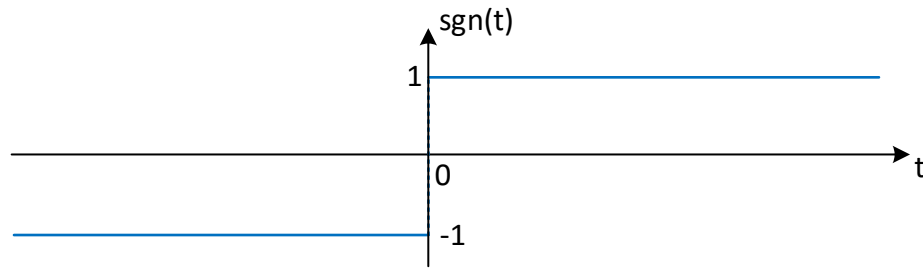
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \quad (6.242)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του $x(t)$.

Λύση:

Η συνάρτηση προσήμου φαίνεται στο Σχήμα 6.20 και προφανώς έχει μηδενική μέση τιμή. Άρα $x_z(t) = \text{sgn}(t)$ και $x_0 = 0$, οπότε $x(t) = x_z(t)$. Παραγωγίζοντας το $x_z(t)$ έχουμε

$$\frac{d}{dt}x_z(t) = 2\delta(t) \quad (6.243)$$

Σχήμα 6.20: Σήμα προσήμου $\text{sgn}(t)$

και από την ιδιότητα της παραγωγίσης του μετασχ. Fourier, έχουμε

$$j2\pi f X_z(f) = 2F\{\delta(t)\} \iff j2\pi f X_z(f) = 2 \iff X_z(f) = \frac{1}{j\pi f} \quad (6.244)$$

Άρα τελικά

$$x(t) = \text{sgn}(t) \longleftrightarrow X(f) = \begin{cases} 0, & f = 0 \\ \frac{1}{j\pi f}, & f \neq 0 \end{cases} \quad (6.245)$$

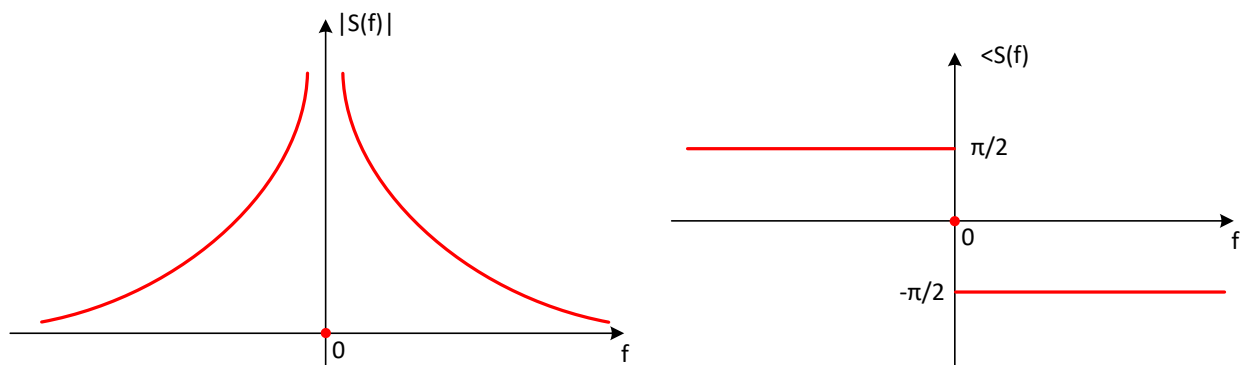
Αναλύοντας το μετασχ. Fourier σε πολική μορφή, έχουμε

$$F\{\text{sgn}(t)\} = S(f) = \frac{1}{j\pi f} \implies |S(f)| = \begin{cases} \frac{1}{\pi|f|}, & f \neq 0 \\ 0, & f = 0 \end{cases} \quad (6.246)$$

και

$$\phi_s(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0 \end{cases} \quad (6.247)$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 6.21.

Σχήμα 6.21: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \text{sgn}(t)$.

Παράδειγμα 6.29:

Η γνωστή βηματική συνάρτηση $x(t) = u(t)$ δεν έχει μηδενική μέση τιμή. Μπορεί όμως να γραφεί ως:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t) \quad (6.248)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier της.

Λύση:

Προφανώς $x_z(t) = \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$ και $x_0 = \frac{1}{2}$. Γνωρίζουμε όμως το μετασχ. Fourier της συνάρτησης προσήμου, οπότε τελικά η βηματική συνάρτηση έχει μετασχ. Fourier

$$x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (6.249)$$

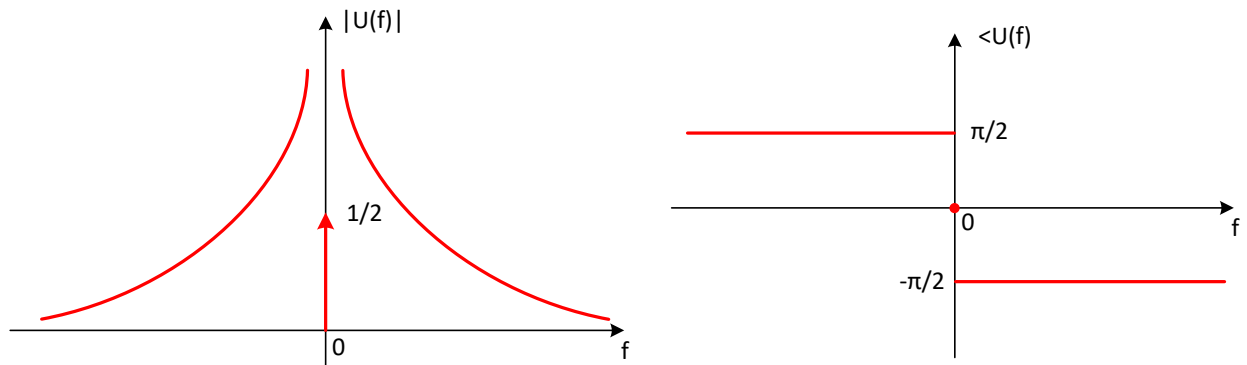
Αναλύοντας ξανά σε πολική μορφή, θα είναι

$$F\{u(t)\} = U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \Rightarrow |U(f)| = \begin{cases} \frac{1}{2}, & f = 0 \\ \frac{1}{2\pi|f|}, & f \neq 0 \end{cases} \quad (6.250)$$

και

$$\phi_u(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0 \end{cases} \quad (6.251)$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 6.22.



Σχήμα 6.22: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = u(t)$.

■

Ένα καλό κριτήριο – αλλά όχι και αναγκαίο – για την ύπαρξη του μετασχ. Fourier ενός σήματος ισχύος είναι το να είναι απολύτως φραγμένου πλάτους, δηλ.

$$|x(t)| < M, \quad M < \infty \quad (6.252)$$

όπως για παράδειγμα τα

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \quad z(t) = u(t), \quad w(t) = \text{sgn}(t) \quad (6.253)$$

και άλλα που ικανοποιούν τη Σχέση (6.252).

Είναι αξιοσημείωτο ότι παρ' όλες τις τεχνικές που μπορούμε να εφαρμόσουμε για να βρούμε το μετασχ. Fourier

σημάτων ισχύος, αυτός μπορεί να μην υπάρχει! Δεν είναι σίγουρο δηλαδή ότι ένα σήμα ισχύος έχει μετασχ. Fourier, όσες τεχνικές κι αν χρησιμοποιήσουμε. Οπότε τίθεται το πρόβλημα του τι μπορούμε να κάνουμε για να μελετήσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο τέτοιων σημάτων. Η απάντηση είναι ότι μελετούμε το μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης του σήματος, όπως θα δούμε αργότερα σε σχετικό κεφάλαιο.

6.6 Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Ο Πίνακας 6.2 δείχνει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που είναι πολύ χρήσιμα στην πράξη.

Συνήθη ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{j\phi}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\phi}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{-j\phi}e^{-j\pi/2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{j\phi}e^{j\pi/2}\delta(f + f_0)$
1	$\delta(f)$
$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}(fT)$
$\text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-a t }, \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$te^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^n}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2 f^2}{2}}$

Πίνακας 6.2: Πίνακας ζευγών μετασχ. Fourier

Κεφάλαιο 7

Ανάλυση Συστημάτων στο Πεδίο του Χρόνου

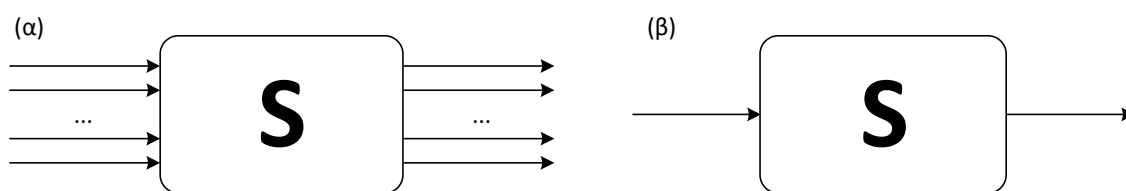
7.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συζητήσουμε για το πως μπορούμε να μελετάμε συστήματα στο πεδίο του χρόνου.

Τι είναι όμως τα συστήματα και γιατί τα χρησιμοποιούμε; Ίσως ήδη φαντάζεστε ότι τα συστήματα χρησιμοποιούνται για να επεξεργαστούν ή να εξάγουν πληροφορία από σήματα.

Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται από τρία στοιχεία: την είσοδό του, την έξοδό του, και τις αρχές από τις οποίες διέπεται η λειτουργία του. Οι αρχές λειτουργίας του δεν είναι τίποτε άλλο από το *μαθηματικό μοντέλο* που μπορεί κανείς να αναπτύξει για να περιγράψει τη σχέση που συνδέει την είσοδο με την έξοδό του. Για παράδειγμα, ένα ηλεκτρικό κύκλωμα διέπεται από τους γνωστούς από τη Φυσική νόμους του Kirchhoff, και από τις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν την τάση και την ένταση του ρεύματος στα άκρα των στοιχείων του (αντιστάσεις, πυκνωτές, κλπ.). Το σύνολο αυτών των εξισώσεων αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο του ηλεκτρικού κυκλώματος.

Παρόλο που τα ηλεκτρικά κυκλώματα είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα συστήματος στις Επιστήμες Μηχανικού Η/Υ, το να συνδέσουμε την έννοια του συστήματος με ένα συγκεκριμένο είδος υλοποίησης θα ήταν αρκετά περιοριστικό. Θα προτιμήσουμε λοιπόν μια πιο αφαιρετική έννοια για τα συστήματα που θα συζητήσουμε. Θα μπορούσε κανείς να τα δει ως “μαύρα κουτιά”, των οποίων οι εσωτερικές λεπτομέρειες υλοποίησης δεν μας ενδιαφέρουν, παρά μόνο η επίδρασή τους στις εισόδους που δέχονται και το αποτέλεσμα (έξοδοι) που παράγουν. Επίσης, τα συστήματα μπορεί να είναι *πολλαπλών εισόδων και πολλαπλών εξόδων* ή *μιας εισόδου και μιας εξόδου*, όπως στο Σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1: (α) Σύστημα MIMO, (β) Σύστημα SISO.

Στο παρόν σύγγραμμα, θα μας απασχολήσουν σχεδόν αποκλειστικά συστήματα μιας εισόδου και μιας εξόδου. Τέτοια συστήματα αποκαλούνται Single Input - Single Output (SISO) συστήματα.

Ένα SISO σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας *τελεστής* $T[\cdot]$ ο οποίος εφαρμόζεται στην είσοδο $x(t)$ του συστήματος, και παράγει μια έξοδο $y(t)$. Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = T[x(t)] \quad (7.1)$$

Τα φυσικά συστήματα περιγράφονται στο πεδίο του χρόνου από μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{l=0}^M \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \quad (7.2)$$

με a_k, b_l σταθερούς συντελεστές. Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως μπορούμε εύκολα να λύνουμε τέτοια συστήματα.

Θα θεωρούμε στα πλαίσια του μαθήματος ότι ένα τέτοιο σύστημα (και εν γένει όσα συστήματα μελετήσουμε) είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ). Θα δούμε συνοπτικά τι σημαίνουν αυτές οι δυο έννοιες, αφού πρώτα παρουσιάσουμε γιατί είναι ενδιαφέρουσες η μελέτη συστημάτων.

7.1.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Πολλά φυσικά συστήματα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, εξ ου και το ενδιαφέρον μας να μπορούμε να λύνουμε τέτοιες. Η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής (7.2) συνίσταται στην εύρεση της εξόδου $y(t)$ δεδομένης μιας εισόδου $x(t)$. Ας δούμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα της Μηχανικής τα οποία (πρέπει να) είναι γνωστά στον αναγνώστη.

Πολλά πραγματικά, μηχανικά συστήματα εμπλέκουν ελατήρια και σώματα. Το πιο σύνθηδες τέτοιο παράδειγμα είναι ο Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής, που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σώμα μάζας m συνδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς k . Δείτε το Σχήμα 7.2.

Το σύστημα ελατήριο-σώμα βρίσκεται σε ισορροπία στο Σχήμα 7.2(α). Εκτείνουμε το ελατήριο τραβώντας το σώμα προς τα δεξιά, μέχρι τη μέγιστη έκτασή του από τη θέση ισορροπίας. Έστω ότι η έκταση αυτή βρίσκεται A μέτρα από το σημείο ισορροπίας, όπως στο Σχήμα 7.2(β). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το σώμα, το οποίο εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση. Όλη η κίνηση αυτή περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

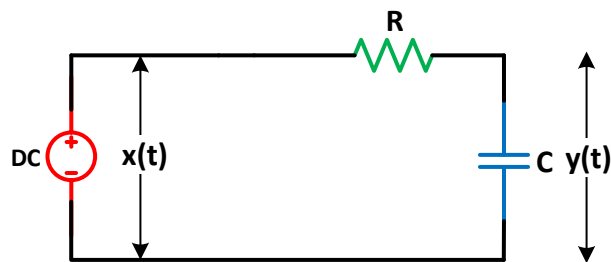
$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega_0^2 x(t) \iff \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (7.3)$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση ονομάζεται *ομογενής*. Πιθανότατα γνωρίζετε ότι η εξίσωση θέσης του σώματος (που είναι και η λύση της διαφορικής εξίσωσης) οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t > 0$ δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad t > 0 \quad (7.4) \quad \text{Σχήμα 7.2: Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής.}$$

με την τιμή ω_0 να εξαρτάται από το υλικό του ελατηρίου, και ϕ την αρχική φάση του ταλαντωτή, που εν γένει μας είναι άγνωστη και εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Παρατηρήστε ότι η διαφορική εξίσωση (7.3) παρουσιάζει μόνο έξοδο $x(t)$, καθώς η είσοδος του είναι μηδενική.

Επίσης, η πλειονότητα των ηλεκτρικών συστημάτων που υπάρχουν γύρω μας περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Ένα πολύ απλό παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι το κύκλωμα πυκνωτή-αντιστάτη, ή αλλιώς το κύκλωμα RC . Δείτε το Σχήμα 7.3. Η αντίσταση του αντιστάτη συμβολίζεται με R ενώ



Σχήμα 7.3: Κύκλωμα RC .

η χωρητικότητα του πυκνωτή συμβολίζεται με C . Είσοδος σε αυτό το σύστημα είναι η τάση της πηγής, ενώ έξοδος είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το

κύκλωμα αυτό δίνεται ως

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \quad (7.5)$$

Αρχικά η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι μηδενική. Αν εφαρμόσουμε στο κύκλωμα μια ιδανική πηγή σταθερής τάσης τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλ. $x(t) = V_0 u(t)$, τότε μπορεί κανείς να δείξει ότι η τάση στα άκρα του πυκνωτή δίνεται ως

$$y(t) = V_0(1 - e^{-t/RC}), \quad t > 0 \quad (7.6)$$

Πώς προκύπτει αυτή η σχέση από τη διαφορική εξίσωση;

Το κεφάλαιο αυτό αναλαμβάνει να απαντήσει στα ερωτήματα των παραπάνω παραδειγμάτων. Η μελέτη μας θα περιοριστεί στα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Ας δούμε συνοπτικά αυτούς τους ορισμούς.

7.2 Γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα

Τα γραμμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ικανοποιούνται δυο συγκεκριμένες ιδιότητες: η ιδιότητα της *προσθετικότητας* και η ιδιότητα της *ομογένειας*.

Η ιδιότητα της προσθετικότητας αναφέρει ότι αν σε ένα σύστημα εφαρμόσουμε δυο διαφορετικές εισόδους $x_i(t)$, με $i = 1, 2$, και πάρουμε δυο διαφορετικές εξόδους $y_i(t)$, με $i = 1, 2$, τότε αν εφαρμόσουμε ως είσοδο το *άθροισμα* όλων των δυο εισόδων

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (7.7)$$

θα λάβουμε ως έξοδο το *άθροισμα* των επιμέρους εξόδων

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (7.8)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί για N εισόδους.

Επιπλέον, η ιδιότητα της *ομογένειας* σχετίζεται με την κλιμάκωση της εισόδου κατά παράγοντα a . Η ιδιότητα της ομογένειας ικανοποιείται αν για το ζεύγος εισόδου-εξόδου

$$x(t) \longrightarrow y(t) \quad (7.9)$$

ισχύει το ζεύγος

$$ax(t) \longrightarrow ay(t) \quad (7.10)$$

για κάθε πραγματικό ή φανταστικό αριθμό a .

Οι δυο παραπάνω ιδιότητες από κοινού μας δίνουν την ιδιότητα της **γραμμικότητας**, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως εξής: αν

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \quad (7.11)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \quad (7.12)$$

είναι ζεύγη εισόδου-εξόδου για ένα σύστημα, τότε για οποιεσδήποτε μιγαδικές ή πραγματικές σταθερές a, b , το

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t) \quad (7.13)$$

είναι ζεύγος εισόδου-εξόδου για το ίδιο σύστημα. Αν θέλαμε να εκφράσουμε τη γραμμικότητα περιγραφικά, γραμμικά είναι τα συστήματα στα οποία αν εφαρμόσουμε ως είσοδο ένα άθροισμα σημάτων, θα πάρουμε ως έξοδο το άθροισμα των εξόδων που θα παίρναμε αν είχαμε δώσει ως είσοδο ένα-ένα τα σήματα, κι όχι όλα μαζί ως άθροισμα. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 2x(t+1) - 3x(t-4) \quad (7.14)$$

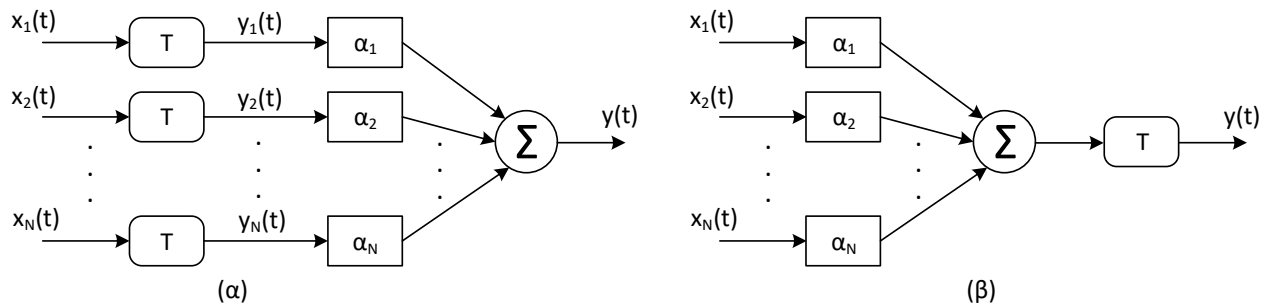
είναι γραμμικό, ενώ το σύστημα

$$y(t) = \sqrt{x(t)} \quad (7.15)$$

δεν είναι γραμμικό, όπως επίσης και το

$$y(t) = x^2(t) \quad (7.16)$$

δεν είναι γραμμικό. Μια καλή σχηματική αναπαράσταση της έννοιας της γραμμικότητας φαίνεται το Σχήμα 7.4. Αν η έξοδος στο Σχήμα 7.4(α) είναι η ίδια με αυτή του Σχήματος 7.4(β), τότε το σύστημα είναι γραμμικό.



Σχήμα 7.4: Η ιδιότητα της γραμμικότητας συστημάτων.

Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική, οπότε ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.1:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{3}x(2-t) + x(t) \quad (7.17)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $ax_1(t)$ η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \frac{1}{3}ax_1(2-t) + ax_1(t) = a\left(\frac{1}{3}x_1(2-t) + x_1(t)\right) \quad (7.18)$$

ενώ για είσοδο $bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y_2(t) = \frac{1}{3}bx_2(2-t) + bx_2(t) = b\left(\frac{1}{3}x_2(2-t) + x_2(t)\right) \quad (7.19)$$

Για είσοδο $ax_1(t) + bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y(t) = \frac{1}{3}(ax_1(2-t) + bx_2(2-t)) + ax_1(t) + bx_2(t) \quad (7.20)$$

$$= \frac{1}{3}ax_1(2-t) + \frac{1}{3}bx_2(2-t) + ax_1(t) + bx_2(t) \quad (7.21)$$

$$= a\left(\frac{1}{3}x_1(2-t) + x_1(t)\right) + b\left(\frac{1}{3}x_2(2-t) + x_2(t)\right) \quad (7.22)$$

$$= y_1(t) + y_2(t) \quad (7.23)$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό. ■

Παράδειγμα 7.2:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{x(t+1)} \quad (7.24)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $ax_1(t)$, η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \frac{1}{ax_1(t+1)} \quad (7.25)$$

ενώ για είσοδο $bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y_2(t) = \frac{1}{bx_2(t+1)} \quad (7.26)$$

Για είσοδο $ax_1(t) + bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y(t) = \frac{1}{ax_1(t+1) + bx_2(t+1)} \neq y_1(t) + y_2(t) \quad (7.27)$$

άρα το σύστημα δεν είναι γραμμικό. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της ομογένειας, απλά παρατηρώντας ότι

$$ax(t) \not\rightarrow ay(t) \quad (7.28)$$

Οπότε θα μπορούσαμε να αποφανθούμε εξ' αρχής ότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό, παρ' όλα αυτά προχωρήσαμε το παράδειγμα ως το τέλος για λόγους πληρότητας. ■

Τα παραπάνω συστήματα ήταν αντιπροσωπευτικά για το πως μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα σύστημα είναι γραμμικό ή όχι. Στην πράξη, τα περισσότερα φυσικά συστήματα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις. Ας δούμε δυο τέτοια παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.3:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) \quad (7.29)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $x_1(t)$, η έξοδος είναι

$$\frac{d}{dt}y_1(t) + 2y_1(t) = x_1(t) \quad (7.30)$$

ενώ για είσοδο $x_2(t)$, η έξοδος είναι

$$\frac{d}{dt}y_2(t) + 2y_2(t) = x_2(t) \quad (7.31)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με a και b αντίστοιχα, έχουμε

$$\frac{d}{dt}ay_1(t) + 2ay_1(t) = ax_1(t) \quad (7.32)$$

$$\frac{d}{dt}by_2(t) + 2by_2(t) = bx_2(t) \quad (7.33)$$

Το άθροισμά τους δίνει

$$\frac{d}{dt}ay_1(t) + 2ay_1(t) + \frac{d}{dt}by_2(t) + 2by_2(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (7.34)$$

Όμως η παραπάνω σχέση δεν είναι άλλη από τη Σχέση (7.29) με

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (7.35)$$

$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t) \quad (7.36)$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό. ■

Εύκολα μπορεί να γενικεύσει κανείς το παραπάνω αποτέλεσμα για μια διαφορική εξίσωση N -οστού βαθμού: η διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} b_k x(t) \quad (7.37)$$

αναπαριστά ένα γραμμικό σύστημα. Οι συντελεστές a_k, b_k της διαφορικής εξίσωσης μπορούν να είναι σταθεροί ή συναρτήσεις του χρόνου. Στη συνέχεια, θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα που περιγράφονται από

διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πάρα πολύ σημαντική καθώς απλοποιεί αρκετά την ανάλυση των συστημάτων. Στην πράξη, σχεδόν όλα τα συστήματα είναι *μη γραμμικά* για μεγάλες τιμές εισόδου. Όμως για μικρές τιμές εισόδου, η λειτουργία τους μπορεί να θεωρηθεί γραμμική. Παρ' όλο που τα μη γραμμικά συστήματα έχουν συγκεκριμένα πλεονεκτήματα, είναι περισσότερο δύσκολα στην ανάλυσή τους και αποτελούν μια κατηγορία από μόνα τους.

7.3 Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβλητά συστήματα

Τα συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα είναι αυτά για τα οποία οι παράμετροί τους δεν αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου, δηλ. η έξοδός τους δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο t ως παράγοντα. Σε τέτοια συστήματα, αν το

$$x(t) \longrightarrow y(t) \quad (7.38)$$

είναι ένα ζεύγος εισόδου-εξόδου, τότε

$$x(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0) \quad (7.39)$$

δηλ. αν η είσοδος καθυστερήσει κατά t_0 , τότε η έξοδος θα είναι ίδια με πριν, μόνο που θα είναι κι αυτή καθυστερημένη κατά t_0 .

Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 3x(t + 2) - 2\cos(x(t - 2)) \quad (7.40)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ το σύστημα

$$y(t) = tx(t) \quad (7.41)$$

είναι χρονικά μεταβλητό. Ας το αποδείξουμε.

Παράδειγμα 7.4:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = 3x(t + 2) - 2\cos(x(t - 2)) \quad (7.42)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:

Για είσοδο $x(t - t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = 3x(t - t_0 + 2) - 2\cos(x(t - t_0 - 2)) \quad (7.43)$$

Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$y(t - t_0) = 3x(t - t_0 + 2) - 2\cos(x(t - t_0 - 2)) \quad (7.44)$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι ίδιες, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. ■

Παράδειγμα 7.5:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = tx(t) \quad (7.45)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:

Για είσοδο $x(t - t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = tx(t - t_0) \quad (7.46)$$

Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$y(t - t_0) = (t - t_0)x(t - t_0) \quad (7.47)$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις δεν είναι ίδιες, άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό. ■

Παράδειγμα 7.6:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = 4x(t) \quad (7.48)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:

Για είσοδο $x(t - t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = 4x(t - t_0) \quad (7.49)$$

με $z(t)$ την έξοδο όταν η είσοδος είναι $x(t - t_0)$. Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t - t_0) = 4x(t - t_0) = \frac{d^2}{dt^2}z(t) \quad (7.50)$$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά αμεταβλητό. ■

7.4 Η χρουστική απόκριση $h(t)$

Θα θέλαμε να γνωρίζουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος όταν παρουσιάζουμε ως είσοδο ένα σήμα “ακαριαίας” μορφής, ένα σήμα που υπάρχει σε απειροστά μικρό χρονικό διάστημα¹. Η είσοδος αυτή θα διεγείρει το σύστημα, και θα το αναγκάσει να παράξει κάποια έξοδο. Η έξοδος αυτή πρέπει να “μοιάζει” με την απόκριση μηδενικής εισόδου, αφού η ύπαρξή της οφείλεται σε μια είσοδο που υπάρχει μόνο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, και μετά χάνεται. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η διέγερση αυτή δημιουργεί νέες αρχικές συνθήκες στο σύστημα, και η λύση της ομογενούς εξίσωσης για αυτές τις αρχικές συνθήκες θα μας δώσει μια έξοδο, μια απόκριση σε ένα “χρουστικό” σήμα - δε θα ήταν λοιπόν παράλογο να ονομάσουμε αυτήν την έξοδο ως **χρουστική απόκριση**²! Με βάση τα παραπάνω, ένα τέτοιο σήμα “ακαριαίας” εισόδου μπορεί να μοντελοποιηθεί εξαιρετικά από τη γνωστή μας συνάρτηση Δέλτα! Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που “υπάρχει” μόνο για $t = 0$ και είναι μηδέν για $t \neq 0$.

Ας ορίσουμε λοιπόν την **χρουστική απόκριση - impulse response** $h(t)$ ενός συστήματος ως την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος όταν στην είσοδο του παρουσιάζεται η συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$. Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του τελεστή $T[\cdot]$ για το ΓΧΑ σύστημα, θα είναι

$$h(t) = T[\delta(t)] \quad (7.51)$$

ή εναλλακτικά

$$\delta(t) \longrightarrow h(t) \quad (7.52)$$

Η γνώση της χρουστικής απόκρισης ενός συστήματος μπορεί να μας δώσει την έξοδο $y(t)$ για οποιαδήποτε είσοδο $x(t)$! Η έξοδος $y(t)$ αναπαρίσταται ως η **συνέλιξη - convolution** της εισόδου $x(t)$ με την χρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$! Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (7.53)$$

με το $*$ να συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης, που θα δούμε ευθύς αμέσως!

¹Σκεφτείτε ότι χτυπάτε ένα καμπανάκι (σύστημα) με ένα σφυρί (είσοδος) πολύ γρήγορα, όσο “ακαριαία” γίνεται. Θα μπορούσατε να ισχυριστείτε ότι ο ήχος που θα παραχθεί, δηλ. η έξοδος του συστήματος, χαρακτηρίζει το καμπανάκι (το υλικό του, το πάχος του, την επιφάνειά του, κλπ).

²Σκεφτείτε το: η απόκριση (έξοδος) σε μια χρούση (ακαριαία διέγερση).

7.5 Συνέλιξη

Η πράξη της συνέλιξης είναι θεμελιώδους σημασίας, λόγω του ότι εμφανίζεται συχνά στις φυσικές επιστήμες, στη μηχανική, και στα μαθηματικά, οπότε της αξίζει ξεχωριστή και εκτενής αναφορά. Αμέσως παρακάτω, θα την εξετάσουμε ως γενικότερη πράξη, χωρίς να τη συνδέουμε απαραίτητα με την είσοδο και την έξοδο ενός συστήματος.

Προτού μελετήσουμε αναλυτικά το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, ας δούμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες με βάση τον ορισμό της.

7.5.1 Ιδιότητες Συνέλιξης

Η πράξη της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από ιδιότητες, όπως αυτές στον Πίνακα 7.1.

Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)), a \in \mathbb{R}$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

Πίνακας 7.1: Ιδιότητες συνέλιξης

Ακολουθούν οι αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων, με αποκλειστική χρήση του ορισμού.

7.5.1.1 Ομογένεια

Έχουμε

$$(ax(t)) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ax(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)ay(t-\tau)d\tau = x(t) * (ay(t)) \quad (7.54)$$

και

$$x(t) * (ay(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)ay(t-\tau)d\tau = a \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = a(x(t) * y(t)) \quad (7.55)$$

7.5.1.2 Αντιμεταθετικότητα

Θέτοντας $u = t - \tau$ στον ορισμό της συνέλιξης, έχουμε

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = - \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)y(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)y(u)du = y(t) * x(t) \quad (7.56)$$

7.5.1.3 Προσεταιριστικότητα

Είναι

$$(x(t) * y(t)) * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(\tau) * y(\tau))z(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(\tau-u)du \right) z(t-\tau)d\tau \quad (7.57)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau-u)z(t-\tau)d\tau \right) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(m)z(t-m-u)dm \right) du \quad (7.58)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)(y(t-u) * z(t-u))du \quad (7.59)$$

$$= x(t) * (y(t) * z(t)) \quad (7.60)$$

όπου στη Σχέση (7.58) θέσαμε $m = \tau - u$.

7.5.1.4 Επιμεριστικότητα

Είναι

$$x(t) * (y(t) + z(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)(y(t-\tau) + z(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(\tau)y(t-\tau) + x(\tau)z(t-\tau))d\tau \quad (7.61)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau \quad (7.62)$$

$$= x(t) * y(t) + x(t) * z(t) \quad (7.63)$$

7.5.1.5 Γραμμικότητα

Είναι

$$z(t) = x(t) * y(t) = (ax_1(t) + bx_2(t)) * y(t) \quad (7.64)$$

$$= ax_1(t) * y(t) + bx_2(t) * y(t) \quad (7.65)$$

$$= a(x_1(t) * y(t)) + b(x_2(t) * y(t)) \quad (7.66)$$

$$= az_1(t) + bz_2(t) \quad (7.67)$$

με

$$z_1(t) = x_1(t) * y(t) \quad (7.68)$$

$$z_2(t) = x_2(t) * y(t) \quad (7.69)$$

λόγω των ιδιοτήτων της ομογένειας και της επιμεριστικότητας.

7.5.1.6 Εύρος

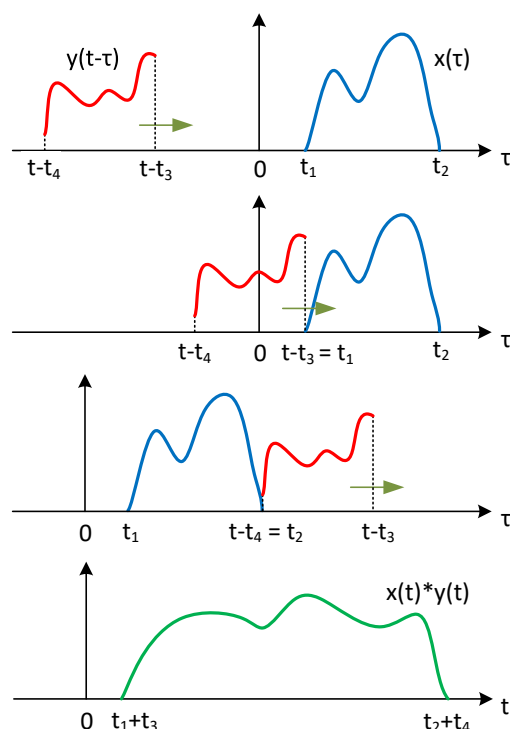
Η απόδειξη της ιδιότητας του εύρους φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 7.5. Στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης, το σήμα $y(t)$ χρησιμοποιείται ως $y(t-\tau)$, με μεταβλητή το τ . Άρα υπόκειται σε πράξεις αντιστροφής χρόνου και μετατόπισης. Ως εκ τούτου, το σήμα θα είναι μη μηδενικό στο $[t-t_4, t-t_3]$. Στη διαδικασία της συνέλιξης, το γινόμενο $x(\tau)y(t-\tau)$ είναι μη μηδενικό για $t-t_3 \geq t_1$ και $t-t_4 \leq t_2$, δηλ. στο διάστημα $[t_1+t_3, t_2+t_4]$.

7.5.1.7 Ουδέτερο στοιχείο

Είναι

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(\tau)\Big|_{\tau=t} = x(t) \quad (7.70)$$

από ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα.



Σχήμα 7.5: Γραφική απόδειξη της ιδιότητας του εύρους.

Η συνέλιξη φημίζεται ως μια πράξη αρκετά περίπλοκη και δύσκολη, και σε πρώτη επαφή αποθαρρύνει τον αναγνώστη. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη της ολοκλήρωσης εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί ανάκλαση και μετατόπιση.

7.5.2 Η συνέλιξη αναλυτικά

Ας αναλύσουμε διεξοδικά τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (7.71)$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το τ και όχι το t . Το t το θεωρούμε σταθερό μέσα στο ολοκλήρωμα. Έπειτα, το ολοκλήρωμα αυτό εμπλέκει δυο σήματα: το $x(\tau)$ και το $y(t-\tau)$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα $x(t)$, δεν έχει υποστεί κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη πράξεων στην ανεξάρτητη μεταβλητή: *ανάκλαση και μετατόπιση*. Μια ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

$$y(t) \rightarrow y(\tau) \rightarrow y(-\tau) \rightarrow y(-\tau+t) = y(t-\tau) \quad (7.72)$$

Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση κατά t* . Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x(\tau)$ και ολοκληρώνεται ως προς τ . Το αποτέλεσμα της συνέλιξης μπορεί να βρεθεί με δυο τρόπους: *αλγεβρικά και γραφικά*. Συνήθως προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 7.6.

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x(t)$ και το $y(t)$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y(t)$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε σύμφωνα με τον ορισμό.
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του τ και όχι του t , όπως ακριβώς επιτάσσει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, και το $y(\tau)$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά t . Θυμίζουμε ότι αυτό το t το χειριζόμαστε ως σταθερά στο ολοκλήρωμα. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y(\tau)$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.
- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y(t-\tau)$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το “ολισθαίνουμε” πάνω στον ίδιο άξονα με το $x(\tau)$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι το $y(\tau)$ “συναντά” κάποια στιγμή το $x(\tau)$. Όταν συμβεί αυτό, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα έχουμε μια μη μηδενική τιμή για το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Αυτές οι χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξιό “άκρο” του $y(t-\tau)$ συναντά το αριστερό “άκρο” του $x(\tau)$ και πέρα, και όταν το αριστερό “άκρο” του $y(t-\tau)$ δεν έχει περάσει το $t=0$, δηλ. όταν

$$t-1 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1 \text{ και } t-4 \leq 0 \Rightarrow t \leq 4 \quad (7.73)$$

οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $t-1$, εκεί δηλαδή που το γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων είναι μη μηδενικό, ως

$$c_{xy}(t) = \int_0^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (7.74)$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Στην πέμπτη γραμμή, το $y(t-\tau)$ έχει μπει ολόκληρο μέσα στο $x(\tau)$, πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη είναι μη μηδενική όταν το αριστερό “άκρο” της $y(t-\tau)$ περάσει το $t=0$, δηλ. όταν

$$t-4 > 0 \Rightarrow t > 4 \quad (7.75)$$

και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (7.76)$$

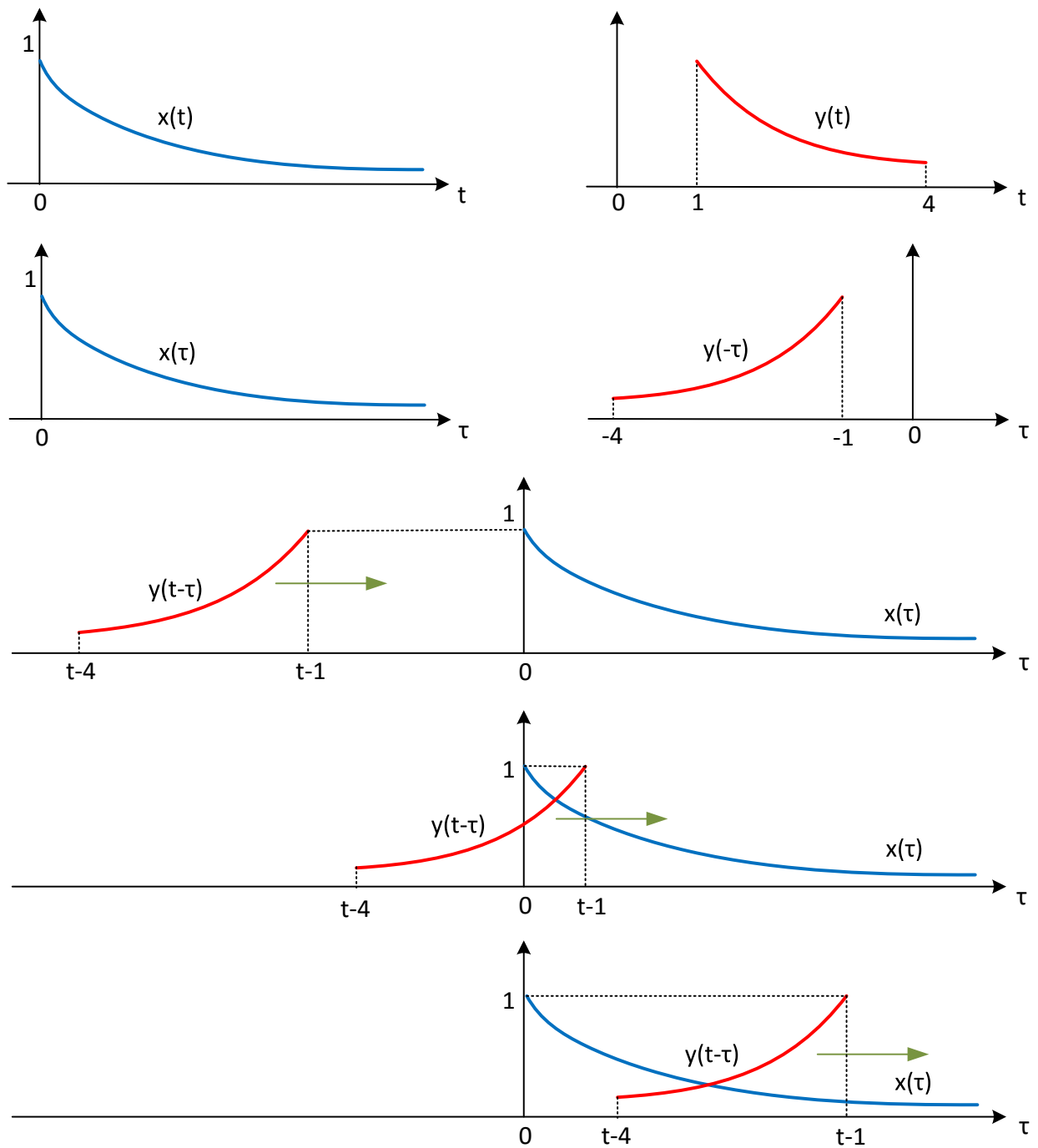
όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο t εκτός από τα παραπάνω, το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι μηδέν, άρα

$$c_{xy}(t) = 0, \quad t < 1 \quad (7.77)$$

Τώρα που η διαδικασία είναι περισσότερο ξεκάθαρη, ας θεωρήσουμε ότι τα παραπάνω σήματα είναι τα

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad (7.78)$$



Σχήμα 7.6: Γραφική απεικόνιση της συνέλιξης.

$$y(t) = e^{-bt}, \quad t \in [1, 4] \quad (7.79)$$

Οπότε θα έχουμε

- Όταν $t - 1 \leq 0 \iff t \leq 1$, τότε $c_{xy}(t) = 0$.
- Όταν $t - 1 > 0$ και $t - 4 \leq 0$, δηλ. όταν $0 < t \leq 4$, τότε

$$c_{xy}(t) = \int_0^{t-1} e^{-a\tau} e^{-b(t-\tau)} d\tau \quad (7.80)$$

$$= e^{-bt} \int_0^{t-1} e^{(b-a)\tau} d\tau \quad (7.81)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} e^{(b-a)\tau} \Big|_0^{t-1} \quad (7.82)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)} - 1) \quad (7.83)$$

$$= \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-1)-bt} - e^{-bt}) \quad (7.84)$$

- Τέλος, όταν $t - 4 > 0$, δηλ. $t > 4$, τότε

$$c_{xy}(t) = \int_{t-4}^{t-1} e^{-a\tau} e^{-b(t-\tau)} d\tau \quad (7.85)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} e^{(b-a)\tau} \Big|_{t-4}^{t-1} \quad (7.86)$$

$$= e^{-bt} \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-4)} - e^{(b-a)(t-1)}) \quad (7.87)$$

$$= \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)(t-4)-bt} - e^{(b-a)(t-1)-bt}) \quad (7.88)$$

Μπορούμε λοιπόν να συνοψίσουμε την παραπάνω γραφική λύση της συνέλιξης ως ακολούθως:

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων $x(t)$ και $y(t)$

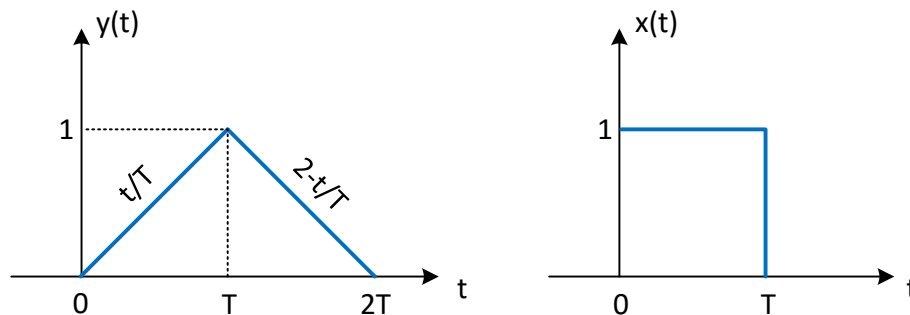
1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x(t)$, το οποίο και μετατρέπουμε σε $x(\tau)$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x(t - \tau)$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς τ , και “σύρουμε” το $x(t - \tau)$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα “συνυπάρχουν”, δηλ. όπου το γινόμενο $x(t - \tau)y(\tau)$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

7.5.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Πολύ χρήσιμα είναι τα ακόλουθα παραδείγματα, τα οποία θα σας βοηθήσουμε να κατανοήσετε ακόμα περισσότερο την πράξη της συνέλιξης.

Παράδειγμα 7.7:

Έστω τα σήματα του Σχήματος 7.7.

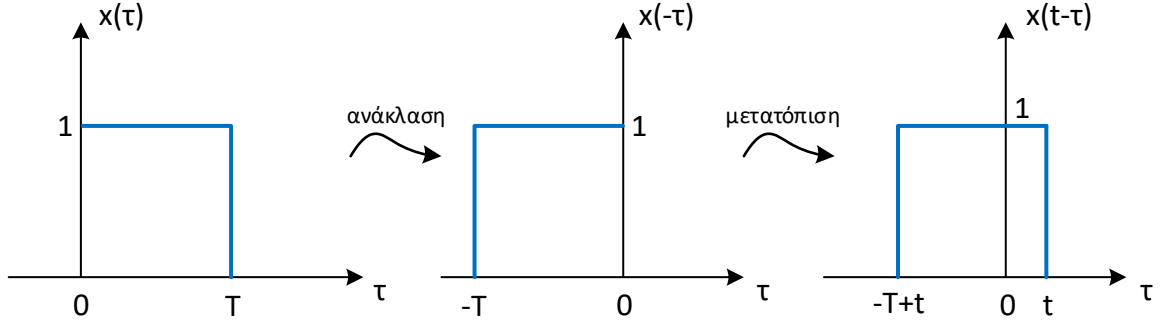


Σχήμα 7.7: Σήματα Παραδείγματος 7.7.

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * y(t)$.

Λύση:

Επιλέγουμε να κάνουμε πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του $x(t)$, καθ' ότι ευκολότερο. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο Σχήμα 7.8. και άρα θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις, όπως αυτές



Σχήμα 7.8: Μετατόπιση και ανάκλαση σήματος $x(t)$.

απεικονίζονται στο Σχήμα 7.9.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι $y(t) = 0, t \leq 0$.
- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$y(t) = \int_0^t \frac{\tau}{T} d\tau = \left. \frac{\tau^2}{2T} \right|_0^t = \frac{t^2}{2T} \quad (7.89)$$

για $t > 0$ και $t - T \leq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq T$.

- Για την τρίτη περίπτωση είναι

$$y(t) = \int_{t-T}^t \frac{\tau}{T} d\tau + \int_T^t \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2} \quad (7.90)$$

για $t - T \leq T$ και $t > T \Leftrightarrow T < t \leq 2T$.

- Για την τέταρτη περίπτωση είναι

$$y(t) = \int_{t-T}^{2T} \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = \left(2\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right) \Big|_{t-T}^{2T} = \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2} \quad (7.91)$$

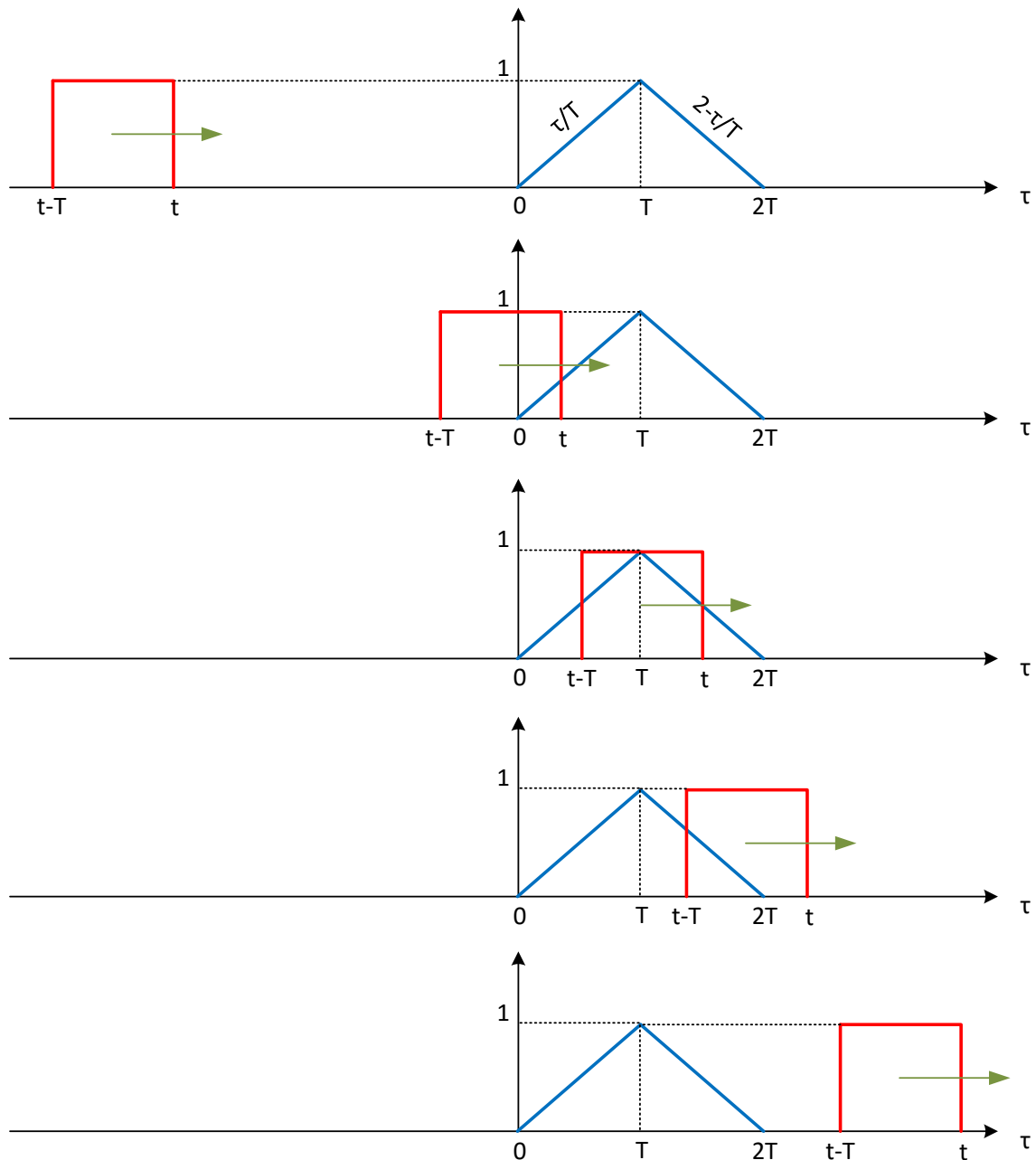
για $t \leq 3T$ και $t > 2T \Leftrightarrow 2T < t \leq 3T$.

- Για την πέμπτη περίπτωση είναι $y(t) = 0, t > 3T$.

Άρα τελικά θα είναι:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \text{ και } t > 3T \\ \frac{t^2}{2T}, & 0 < t \leq T \\ -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}, & T < t \leq 2T \\ \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}, & 2T < t \leq 3T \end{cases} \quad (7.92)$$

■



Σχήμα 7.9: Περιπτώσεις Συνέλιξης Παραδείγματος 7.7.

Παράδειγμα 7.8:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = u(t) \quad (7.93)$$

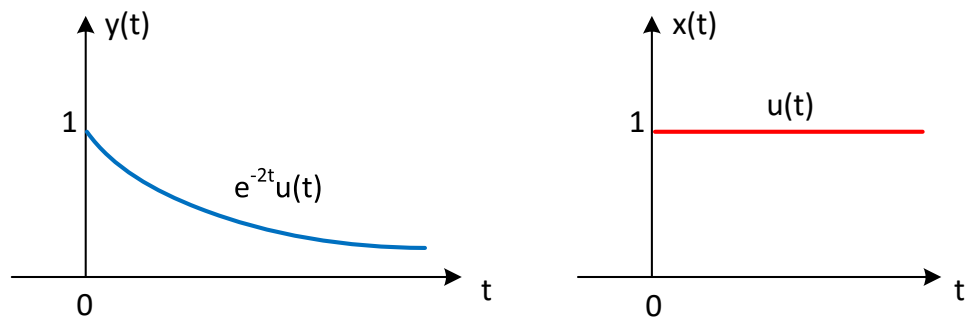
$$y(t) = e^{-2t}u(t) \quad (7.94)$$

Λύση:

Τα δύο σήματα φαίνονται στο Σχήμα 7.10. Το $x(t)$ είναι πιο κατάλληλο για να υποστεί τις μεταβολές που είναι απαραίτητες στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 7.11.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι $c_{xy}(t) = 0$ για $t \leq 0$.

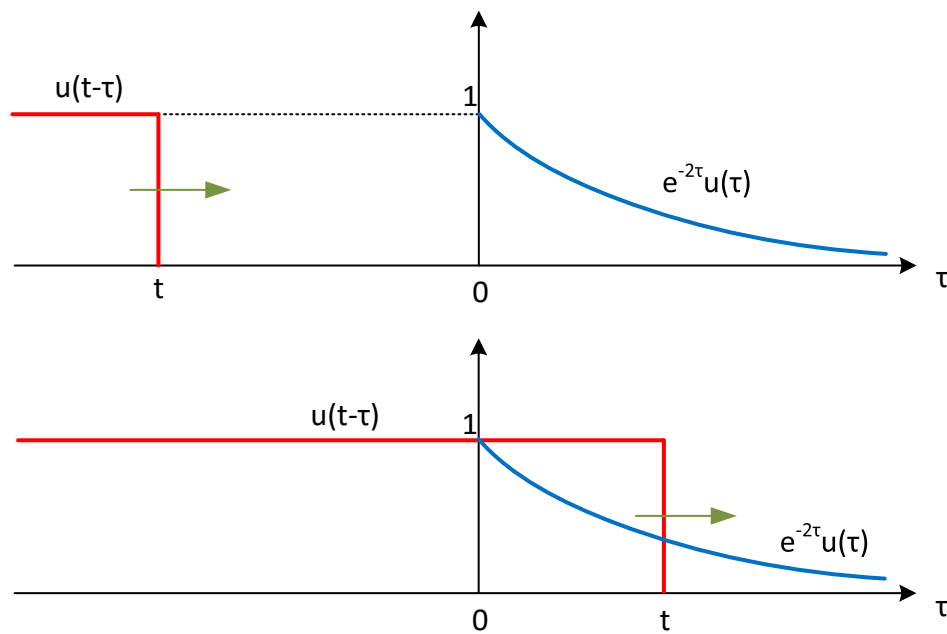


Σχήμα 7.10: Σήματα Παραδείγματος 7.8.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \frac{1-e^{-2t}}{2} \quad (7.95)$$

για $t > 0$.



Σχήμα 7.11: Περιπτώσεις Παραδείγματος 7.8.

Άρα τελικά θα είναι

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-2t}}{2}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (7.96)$$

Το παράδειγμα αυτό είναι εξαιρετικό για να δείξουμε την αλγεβρική μέθοδο υπολογισμού της συνέλιξης. Θα είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (7.97)$$

Ο όρος

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.98)$$

αφού

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.99)$$

και

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.100)$$

Η Σχέση (7.97) γράφεται ως

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2} e^{-2\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}), \quad \text{για } t > 0 \quad (7.101)$$

Οπότε

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) u(t) \quad (7.102)$$

■

Παράδειγμα 7.9:

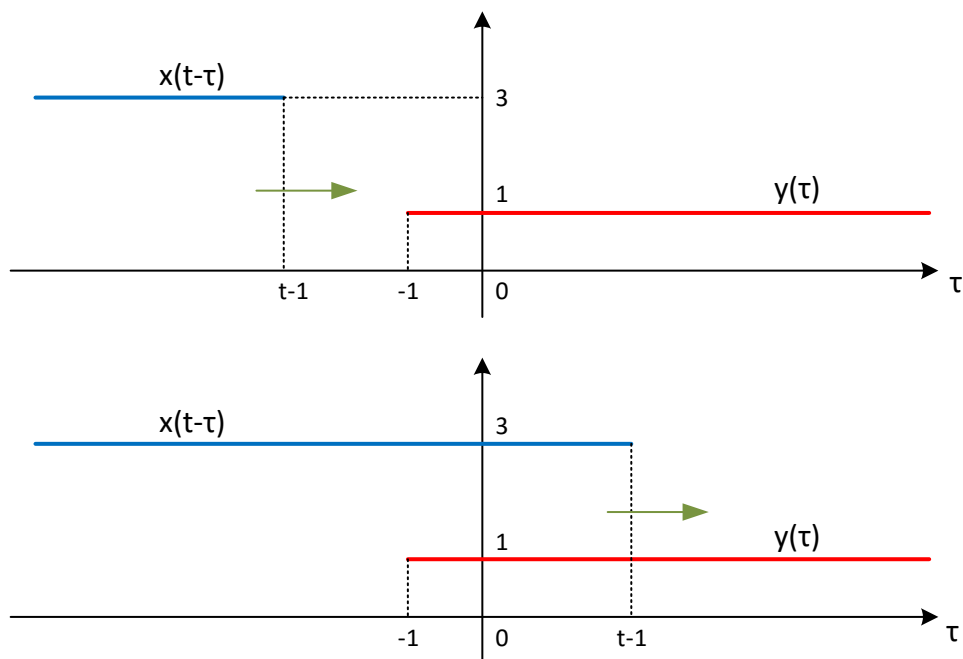
Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = 3u(t - 1) \quad (7.103)$$

$$y(t) = u(t + 1) \quad (7.104)$$

Λύση:

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 7.12. Θα είναι



Σχήμα 7.12: Περιπτώσεις Παραδείγματος 7.9.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = 0 \quad (7.105)$$

$$\text{για } t - 1 \leq -1 \iff t \leq 0.$$

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 3u(t-\tau-1)u(t+1)d\tau \quad (7.106)$$

$$= \int_{-1}^{t-1} 3d\tau = 3t \Big|_{-1}^{t-1} = 3(t-1) + 3 = 3t \quad (7.107)$$

για $t-1 > -1 \iff t > 0$, αφού

$$3u(t-\tau-1)u(t+1) = \begin{cases} 1, & -1 < \tau < t-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.108)$$

Άρα συνολικά

$$c_{xy} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 3t, & t > 0 \end{cases} \quad (7.109)$$

■

Παράδειγμα 7.10:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = 2e^{-3t}u(t-1) \quad (7.110)$$

$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t+2}{2}\right) \quad (7.111)$$

Λύση:

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 7.13. Θα είναι

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = 0 \quad (7.112)$$

για $t+3 \leq 1 \iff t \leq -2$.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_1^{t+3} 2e^{-3\tau}d\tau \quad (7.113)$$

$$= -\frac{2}{3}e^{-3\tau} \Big|_1^{t+3} = -\frac{2}{3}(e^{-3(t+3)} - e^{-3}) \quad (7.114)$$

$$= -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3} \quad (7.115)$$

για $t+1 \leq 1$ και $t+3 > 1$, άρα $-2 < t \leq 0$.

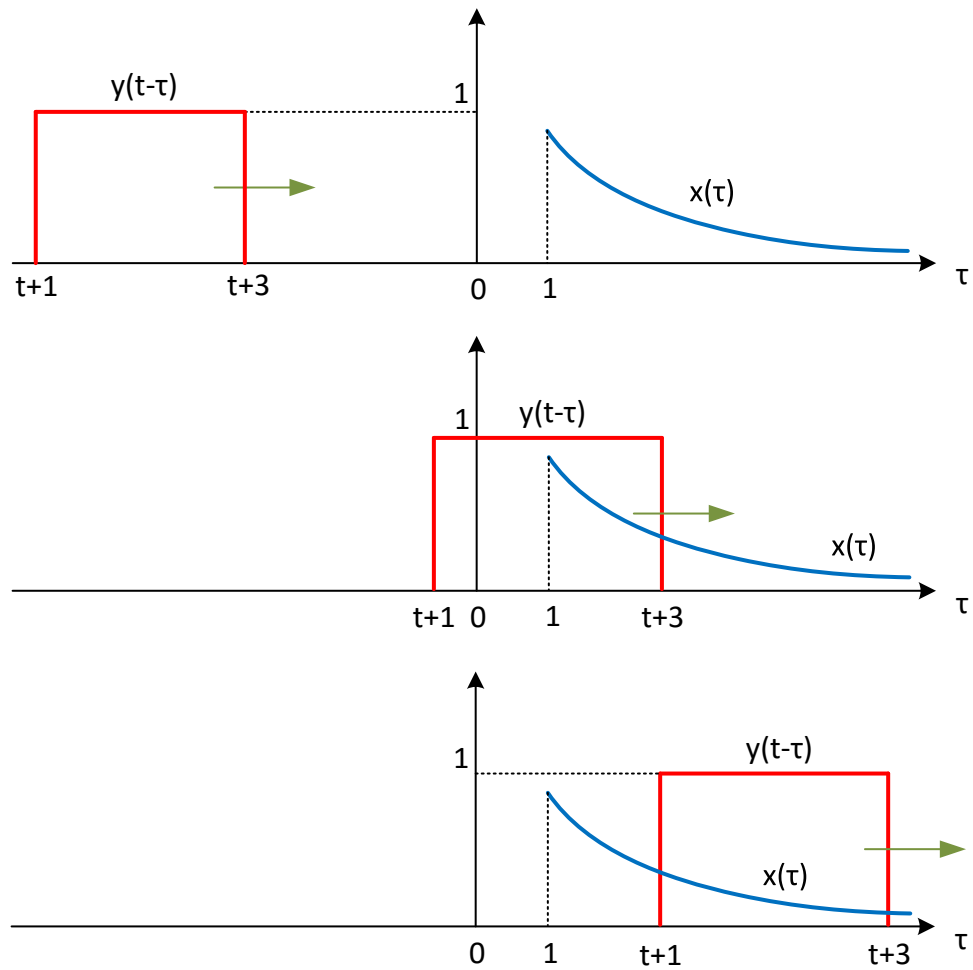
- Για την τρίτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{t+1}^{t+3} 2e^{-3\tau}d\tau \quad (7.116)$$

$$= -\frac{2}{3}e^{-3\tau} \Big|_{t+1}^{t+3} = -\frac{2}{3}(e^{-3(t+3)} - e^{-3(t+1)}) \quad (7.117)$$

$$= -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3(t+1)} \quad (7.118)$$

για $t+1 > 1 \iff t > 0$.



Σχήμα 7.13: Περιπτώσεις Παραδείγματος 7.10.

Άρα συνολικά

$$c_{xy} = \begin{cases} 0, & t \leq -2 \\ -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3}, & -2 < t \leq 0 \\ -\frac{2}{3}e^{-3(t+3)} + \frac{2}{3}e^{-3(t+1)}, & t > 0 \end{cases} \quad (7.119)$$

■

Παράδειγμα 7.11:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = e^{-2|t|} \quad (7.120)$$

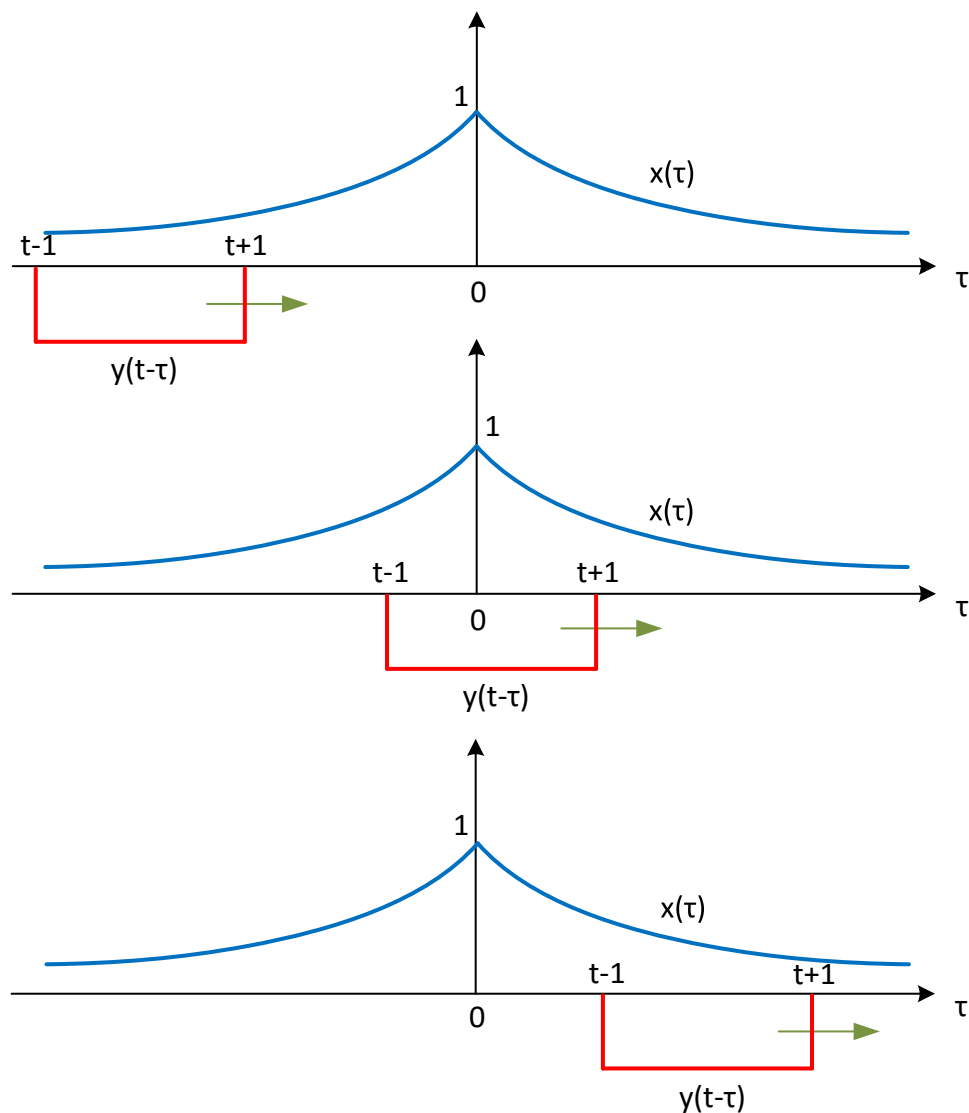
$$y(t) = -\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \quad (7.121)$$

Λύση:

Αρχικά, θα ήταν βολικό να γράψουμε το σήμα $x(t) = e^{-2|t|}$ ως

$$x(t) = \begin{cases} e^{2t}, & t < 0 \\ e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (7.122)$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 7.14. Θα είναι



Σχήμα 7.14: Περιπτώσεις Παραδείγματος 7.11.

- Για την πρώτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = - \int_{t-1}^{t+1} e^{2\tau} d\tau \quad (7.123)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{2\tau} \Big|_{t-1}^{t+1} = \frac{1}{2}(e^{2(t-1)} - e^{2(t+1)}) \quad (7.124)$$

για $t+1 \leq 0 \iff t \leq -1$.

- Για τη δεύτερη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = - \int_{t-1}^{t+1} e^{-2|\tau|} d\tau \quad (7.125)$$

$$= - \int_{t-1}^0 e^{2\tau} d\tau - \int_0^{t+1} e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2}e^{2\tau} \Big|_{t-1}^0 + \frac{1}{2}e^{-2\tau} \Big|_0^{t+1} \quad (7.126)$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - e^{2(t-1)}) + \frac{1}{2}(e^{-2(t+1)} - 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t+1)} - \frac{1}{2} \quad (7.127)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t+1)} - 1 \quad (7.128)$$

για $t - 1 < 0$ και $t + 1 > 0$, δηλ. $-1 < t < 1$.

- Για την τρίτη περίπτωση είναι

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = - \int_{t-1}^{t+1} e^{-2|\tau|}d\tau \quad (7.129)$$

$$= - \int_{t-1}^{t+1} e^{-2\tau}d\tau = \frac{1}{2}e^{-2\tau} \Big|_{t-1}^{t+1} \quad (7.130)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-2(t+1)} - e^{-2(t-1)}) \quad (7.131)$$

για $t - 1 \geq 0$, δηλ. $t \geq 1$.

Άρα συνολικά

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{2(-1)} - e^{2(t+1)}), & t \leq -1 \\ \frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t+1)} - 1, & -1 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}(e^{-2(t+1)} - e^{-2(t-1)}), & t \geq 1 \end{cases} \quad (7.132)$$

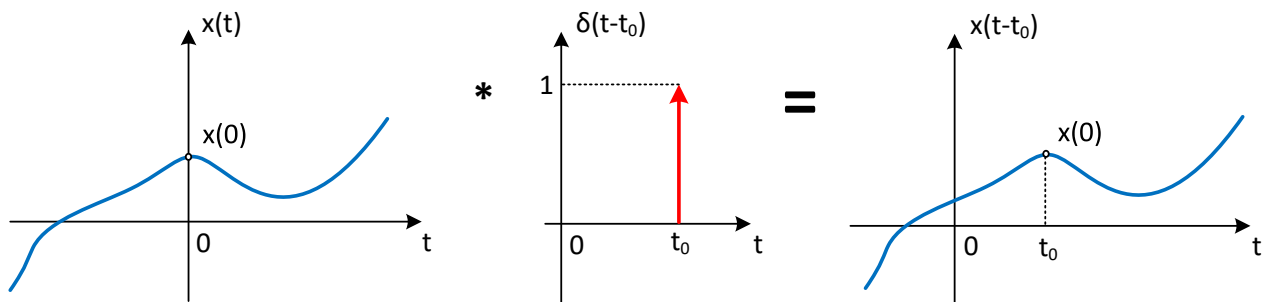
■

7.5.4 Συνέλιξη και Συναρτήσεις Δέλτα

Η ιδιότητα

$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = x(t \pm t_0) \quad (7.133)$$

όπου $*$ δηλώνει την πράξη της συνέλιξης είναι πολύ χρήσιμη στη μελέτη συστημάτων. Η Σχέση (7.133) δηλώνει ότι όταν κάνουμε συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται στη χρονική στιγμή $t = \pm t_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x(t)$ μετατοπισμένο στη θέση $t = \pm t_0$! Θα δούμε πιο κάτω ότι αυτή η ιδιότητα μας διευκολύνει πάρα πολύ, όταν έχουμε να κάνουμε με συστήματα. Σχηματικά, δείτε το Σχήμα (7.15). Μπορούμε προς το παρόν να δούμε ένα παράδειγμα που θα μας βοηθήσει να δούμε πως δουλεύει αυτή η πράξη και



Σχήμα 7.15: Συνέλιξη σήματος με συνάρτησης Δέλτα.

πως διαφέρει η συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα με τον πολλαπλασιασμό του με την ίδια συνάρτηση.

Παράδειγμα 7.12:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} -1, & t = -4 \\ 1, & t = 0 \\ -1, & t = 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.134)$$

(α') Σχεδιάστε το σήμα στο χρόνο.

(β') Γράψτε το σήμα ως άθροισμα Συναρτήσεων Δέλτα $\delta(t)$.

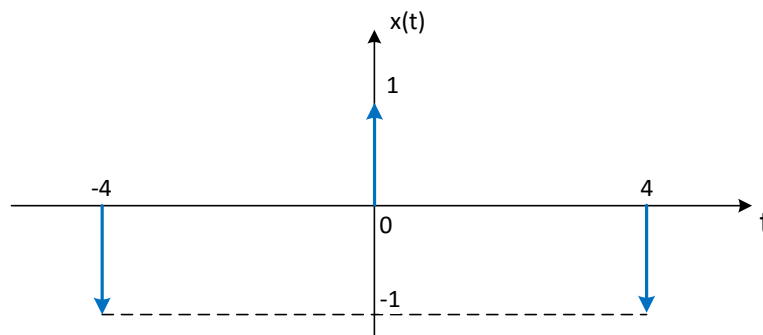
(γ') Πολλαπλασιάζουμε το $x(t)$ με το σήμα $y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$. Σχεδιάστε το αποτέλεσμα.

(δ') Κάνουμε συνέλιξη το $x(t)$ με το σήμα $y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$. Σχεδιάστε πρώτα τα σήματα που προκύπτουν και μετά γράψτε μια βολική μαθηματική σχέση που περιγράφει το αποτέλεσμα.

(ε') Ποιός είναι ο γενικός κανόνας που προκύπτει από τα δυο παραπάνω ερωτήματα; Δηλ. τι συμβαίνει σε ένα σήμα όταν πολλαπλασιάζεται με μια συνάρτηση Δέλτα, και τι συμβαίνει όταν γίνεται συνέλιξη με μια Συνάρτηση Δέλτα;

Λύση:

(α') Το σήμα στο χρόνο φαίνεται στο Σχήμα 7.16.



Σχήμα 7.16: Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: σήμα στο χρόνο.

(β') Είναι

$$x(t) = -\delta(t+4) + \delta(t) - \delta(t-4) \quad (7.135)$$

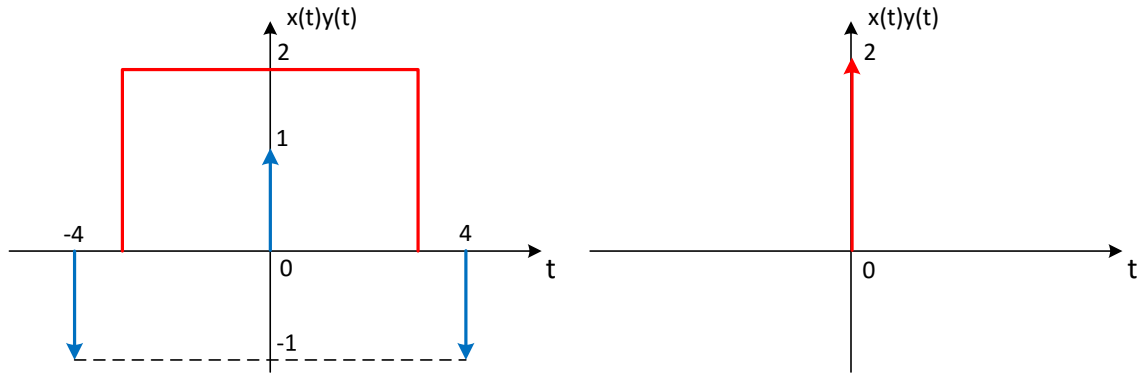
(γ') Το γινόμενο των δυο σημάτων είναι

$$x(t) \cdot y(t) = x(t) \cdot 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) \cdot \left(-\delta(t+4) + \delta(t) - \delta(t-4)\right) = 2\delta(t) = \begin{cases} 2, & t = 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.136)$$

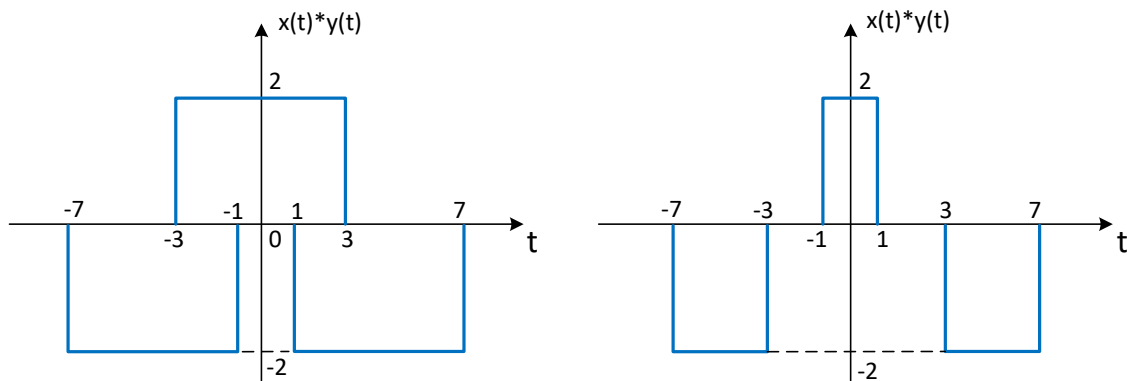
και φαίνεται στο Σχήμα 7.17.

(δ') Η συνέλιξη των σημάτων είναι

$$x(t) * y(t) = x(t) * 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) = -2\text{rect}\left(\frac{t+4}{6}\right) + 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-4}{6}\right) \quad (7.137)$$



Σχήμα 7.17: Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: γινόμενο σημάτων.



Σχήμα 7.18: Παράδειγμα συνέλιξης σήματος με Συνάρτηση Δέλτα: συνέλιξη σημάτων.

και φαίνεται στο Σχήμα 7.18 αριστερά. Παρατηρώντας το, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$x(t) * y(t) = -2\text{rect}\left(\frac{t+5}{4}\right) + 2\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-5}{4}\right) \quad (7.138)$$

και φαίνεται στο Σχήμα 7.18 δεξιά.

- (ε') Ο γενικός κανόνας είναι ότι το γινόμενο σήματος με Συνάρτηση Δέλτα δίνει μια Συνάρτηση Δέλτα με πλάτος το πλάτος του σήματος στη θέση της Συνάρτησης Δέλτα. Η συνέλιξη σήματος με Συνάρτηση Δέλτα μετατοπίζει τη θέση αναφοράς του σήματος από το μηδέν στη θέση t_0 , αν $\delta(t - t_0)$ είναι η Συνάρτηση Δέλτα η οποία εμπλέκεται στη συνέλιξη. ■

7.5.5 Πίνακας Συνέλιξης

Η διαδικασία της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από έτοιμους πίνακες συνέλιξης, όπως ο Πίνακας 7.2. Αυτός ο πίνακας, που αναφέρει διάφορα ζεύγη σημάτων και το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους, μπορεί να σας βοηθήσει στον έλεγχο των αποτελεσμάτων σας.

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις με βάση όσα έχουμε συζητήσει ως τώρα.

Παρατηρήσεις

(α') Όπως βλέπετε, είναι πολύ σημαντικό να μπορείτε να υπολογίσετε σωστά το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του ολοκληρώματος. Οι πράξεις στο ολοκλήρωμα είναι συνήθως αρκετά απλές.

(β') Όπως είδαμε, η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει δηλ. ότι

$$c_{fg}(t) = f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = c_{gf}(t) \quad (7.139)$$

Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης		
$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{x(t) * y(t)}$
$x(t)$	$\delta(t - T)$	$x(t - T)$
$e^{at}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1 - e^{at}}{-a}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}u(t), a \neq b$
$e^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$te^{at}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}u(t)$
$t^n u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{n!e^{at}}{a^{n+1}}u(t) - \sum_{j=0}^n \frac{n!t^{n-j}}{a^{j+1}(n-j)!}u(t)$
$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{bt} - e^{at} + (a-b)te^{at}}{(a-b)^2}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{at}u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{at}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{bt}u(t)$	$\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j m!(n+j)!t^{m-j}e^{at}}{j!(m-j)!(a-b)^{n+j+1}}u(t)$
		$+ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!(m+k)!t^{n-k}e^{bt}}{k!(n-k)!(b-a)^{m+k+1}}u(t), a \neq b$
$e^{at} \cos(bt + \theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta - \phi)e^{\lambda t} - e^{-at} \cos(bt + \theta - \phi)}{\sqrt{(a+\lambda)^2 + b^2}}u(t),$ $\phi = \tan^{-1} \frac{-b}{a+\lambda}$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}u(t) + e^{bt}u(-t)}{b-a}, \Re\{b\} > \Re\{a\}$
$e^{at}u(-t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{b-a}u(-t)$

Πίνακας 7.2: Πίνακας ζευγών συνελιξέων

Αυτό σημαίνει ότι αν κάναμε πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του $f(t)$ αντί για του $g(t)$, θα είχαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

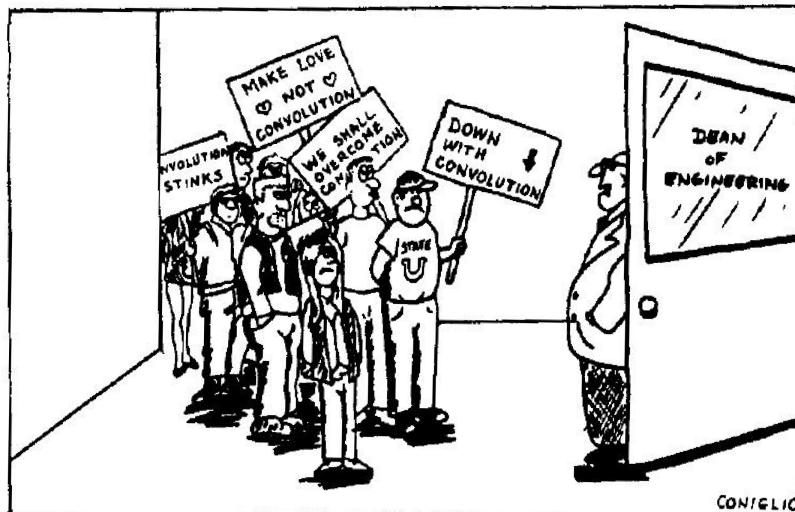
- (γ') Προτιμούμε να ανακλάσουμε και μετατοπίσουμε το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδικασία υπολογισμού της συνέλιξης. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.
- (δ') Χρήσιμη ιδιότητα, η οποία αναφέρεται στον Πίνακα 7.1, για πεπερασμένης διάρκειας σήματα είναι η εξής: αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[a, b]$ και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[c, d]$, τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα $[a+c, b+d]$. Γνωρίζοντας αυτό, μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας. Για παράδειγμα, αν στο Σχήμα 7.6, είχαμε συνέλιξη της $y(t)$ με τον εαυτό της, δηλ. $c_{yy}(t) = y(t) * y(t)$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μη μηδενικό στο διάστημα $[2, 8]$.
- (ε') Στη βιβλιογραφία, θα βρείτε τον ορισμό της συνέλιξης με διαφορετικές μεταβλητές. Π.χ.

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (7.140)$$

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau-t)dt \quad (7.141)$$

Και οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι σωστές. Απλά αλλάξαμε τις μεταβλητές t, τ μεταξύ τους. Διαλέξτε όποια σας βολεύει, αρκεί να είστε συνεπείς και προσεκτικοί. Στα παραδείγματα αλλά και γενικότερα, προτιμούμε την πρώτη σχέση.

- (ε') Η γραφική επίλυση που συζητήσαμε εδώ φαίνεται εκ πρώτης όψεως περίπλοκη. Πράγματι, κάποιои ισχυρίζονται ότι η συνέλιξη έχει οδηγήσει πολλούς προπτυχιακούς σε τμήματα Μηχανικών Η/Υ να ενστερνιστούν τη Θεολογία, είτε για σωτηρία ψυχής είτε ως εναλλακτική καριέρα!! (δείτε το περιοδικό IEEE Spectrum, Μάρτιος 1991, σελ. 60).



Σχήμα 7.19: Πολύς κόσμος έχει ταλαιπωρηθεί από τη συνέλιξη...

7.6 Ευστάθεια Συστήματος

Ας αναφερθούμε τώρα αναλυτικότερα σε μια έννοια η οποία είναι πολύ σημαντική, αυτή της *ευστάθειας* ενός συστήματος. Ένα σύστημα λέγεται *ευσταθές* αν

$$|x(t)| < M_x \implies |y(t)| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathbb{R} \quad (7.142)$$

και ονομάζουμε αυτού του είδους την ευστάθεια ως Bounded-Input-Bounded-Output (BIBO)-ευστάθεια.

Αν η είσοδος είναι μη μηδενική και απολύτως φραγμένη

$$|x(t)| < M_x < +\infty \quad (7.143)$$

η ευστάθεια συνεπάγεται αν

$$|y(t)| = |x(t) * h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| \quad (7.144)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)h(t-\tau)|d\tau \quad (7.145)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau \quad (7.146)$$

$$\leq M_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau \not\rightarrow +\infty \quad (7.147)$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau < +\infty \quad (7.148)$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < +\infty \quad (7.149)$$

Άρα, ένα σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι ευσταθές αν η τελευταία είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το σύστημα είναι ασταθές.

Εν κατακλείδει:

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

Η ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος δεδομένης μιας οποιασδήποτε απολύτως φραγμένης εισόδου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την κρουστική του απόκριση $h(t)$, η οποία πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

Ας συζητήσουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις επάνω στο ζήτημα της ευσταθείας.

Παρατηρήσεις

- (α') Σε ένα ευσταθές σύστημα, μια απολύτως φραγμένη είσοδος παράγει πάντα μια απολύτως φραγμένη έξοδο. Όμως, μπορεί κανείς να δείξει ότι σε ένα ασταθές ή οριακά ευσταθές σύστημα, η έξοδος του μπορεί να είναι μη απολύτως φραγμένη, ακόμα κι αν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη! Σκεφτείτε για παράδειγμα το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = u(t)$. Για είσοδο $x(t) = u(t)$, η οποία είναι απολύτως φραγμένη από τη μονάδα, έχουμε έξοδο $y(t) = tu(t)$, η οποία δεν είναι απολύτως φραγμένη.
- (β') Όπως μπορείτε να καταλάβετε, ένα ασταθές σύστημα δεν έχει και τόσο χρησιμότητα στην πράξη - κάθε σύστημα που υλοποιούμε σε υλικό ή λογισμικό πρέπει να είναι ευσταθές. Σκεφτείτε για παράδειγμα ένα απλό, "κακοφτιαγμένο" ηχείο, το οποίο δέχεται είσοδο από ένα μικρόφωνο. Αν το σύστημα ήταν ασταθές, τότε οποιαδήποτε και όσοδήποτε μικρή είσοδος από το μικρόφωνο, θα παρήγαγε σύντομα μια έξοδο (ήχο) υπερβολικά μεγάλης τιμής με πολύ δυσάρεστα - το λιγότερο! - αποτελέσματα.
- (γ') Τα παραπάνω όμως δε σημαίνουν ότι δεν μπορούν να προκύψουν ασταθή συστήματα στην πράξη. Για παράδειγμα, η θεωρία του Αυτομάτου Ελέγχου προσπαθεί να ελέγξει τη συμπεριφορά πραγματικών συστημάτων "διορθώνοντας" τυχούσες αστάθειες που φυσιολογικά προκύπτουν κατά τη λειτουργία τους. Για παράδειγμα, αν θέλουμε ένα αεροσκάφος να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη πορεία, με συγκεκριμένο υψόμετρο και ταχύτητα, ανεξάρτητα από τις πιθανές ροές ανέμων του περιβάλλοντος που προκαλούν αστάθειες στη συμπεριφορά του, θα πρέπει να έχουμε ένα μηχανισμό ελέγχου της ευσταθείας του συστήματος.

7.7 Αιτιατότητα Συστήματος

Τα **αιτιατά** συστήματα είναι αυτά για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου **δεν** απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 2x(t - 1) + \sin(x(t)) \quad (7.150)$$

είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα

$$y(t) = x(t - 2)^2 + 4x(t + 4) \quad (7.151)$$

είναι μη αιτιατό, επειδή για τον υπολογισμό του $y(t)$ απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου, η $x(t + 4)$.

Πιο περιγραφικά, ένα **αιτιατό** σύστημα είναι ένα σύστημα το οποίο δεν παράγει κάποια έξοδο προτού εφαρμοστεί σε αυτό μια είσοδος. Αν το σύστημα παράγει έξοδο πριν την είσοδο, σημαίνει ότι το σύστημα γνωρίζει τη μελλοντική είσοδο και παράγει έξοδο βάσει αυτής της γνώσης, και άρα είναι μη αιτιατό.

Προφανώς, κάθε σύστημα υλοποιήσιμο σε πραγματικό χρόνο πρέπει να είναι αιτιατό. Οπότε κάποιος θα μπορούσε να θέσει το ερώτημα “γιατί να μελετήσει κανείς τότε ένα μη αιτιατό σύστημα;” Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έχει - τουλάχιστον - τρεις συνιστώσες:

1. Ένα μη αιτιατό σύστημα απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να παράξει έξοδο. Αν όμως η είσοδος είναι διαθέσιμη σε κάποιον αποθηκευτικό χώρο (μνήμη), τότε το σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί, αφού οι μελλοντικές τιμές της εισόδου είναι διαθέσιμες. Αυτό σημαίνει ότι τα μη αιτιατά συστήματα είναι μεν πραγματοποιήσιμα, αλλά όχι σε πραγματικό χρόνο. Παρ’ όλα αυτά, η χρησιμότητά τους είναι μεγάλη, καθώς υπάρχουν πολλές εφαρμογές (επεξεργασία φωνής, ήχου, εικόνas, γεωφυσική, μετεωρολογία, ανάλυση βιοσημάτων) όπου η είσοδος υπάρχει ολόκληρη διαθέσιμη σε μια π.χ. βάση δεδομένων.
2. Ένα μη αιτιατό σύστημα μπορεί να κάνει πράγματα που ένα αιτιατό σύστημα δεν μπορεί. Για παράδειγμα, στα πρότυπα συμπίεσης εικόνας και ήχου (MP3, JPEG, MPEG κλπ), η υψηλή συμπίεση επιτυγχάνεται επειδή ο αλγόριθμος συμπίεσης (ο οποίος αποτελεί το σύστημα) γνωρίζει μελλοντική πληροφορία της εισόδου (ήχος, εικόνα, βίντεο), την οποία χρησιμοποιεί για να αυξήσει την επίδοσή του (συμπιεσμένη έξοδος).
3. Τα μη αιτιατά συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως το άνω όριο των επιδόσεων αιτιατών συστημάτων. Όπως θα δούμε αρκετά αργότερα, ένα αιτιατό *φίλτρο* (δηλ. ένα σύστημα που επιλέγει την “ποσότητα” του σήματος εισόδου που θα περάσει στην έξοδο) εισάγει πάντα *παραμόρφωση* στο σήμα εισόδου του, μεταβάλλοντάς το με ανεπιθύμητο (αλλά ελεγχόμενο) τρόπο. Όμως, ένα μη αιτιατό *φίλτρο* μπορεί να σχεδιαστεί έτσι ώστε να εισάγει μηδενική ανεπιθύμητη παραμόρφωση στο σήμα εξόδου του.

Η αιτιατότητα είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα ενός συστήματος, ειδικά αν το σύστημα προορίζεται να υλοποιηθεί σε πραγματικό χρόνο. Ασφαλώς, όλα τα φυσικά συστήματα είναι αιτιατά εξ’ ορισμού, διότι αποκρίνονται μόνον αν “διεγερθούν”: οι ζωντανοί οργανισμοί, ο καιρός, τα μουσικά όργανα, κλπ³. Ένα αιτιατό σύστημα λοιπόν δεν πρέπει να αποκρίνεται αν δε διεγείρεται, ή με άλλα λόγια, δεν πρέπει να παράγει έξοδο αν δεν του παρασχεθεί μια είσοδος.

Καθαρά μαθηματικά, αν ένα σύστημα για δυο εισόδους $x_1(t)$ και $x_2(t)$ παράγει δυο εξόδους $y_1(t)$ και $y_2(t)$, τότε αυτό είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t < t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t < t_0 \quad (7.152)$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τις συνθήκες αιτιατότητας για ένα σύστημα ως εξής:

Αιτιατότητα Συστήματος

Ένα σύστημα είναι αιτιατό αν βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**, δηλ.

$$\begin{aligned} \text{αν } x(t) &= 0, \quad t < t_0 \\ \text{τότε } y(t) &= 0, \quad t < t_0 \end{aligned} \quad (7.153)$$

που μπορεί να ειπωθεί χαρακτηριστικά ως “no input, no output”. ©

Όμως μπορούμε άραγε για ένα ΓΧΑ σύστημα να βρούμε μια σχέση αιτιατότητας και χρονιστικής απόκρισης, όπως κάναμε για την ευστάθεια; Η απάντηση είναι ναι! Σκεφτείτε ότι αν ένα σύστημα είναι ΓΧΑ και εμφανιστεί

³Φανταστείτε να είχατε ένα σύστημα που η έξοδός του ήταν οι τιμές των μετοχών της αυριανής μέρας! Προφανώς θα ήταν μη αιτιατό....

στην είσοδό του η συνάρτηση Δέλτα, τότε γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα είναι η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος. Η είσοδος όμως εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, και δεν υπήρξε πιο πριν. Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν $h(t) = 0, t < 0$.

Οπότε:

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος και Κρουστική Απόκριση

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$h(t) = 0, t < 0 \quad (7.154)$$

Κεφάλαιο 8

Ανάλυση Συστημάτων στο Πεδίο της Συχνότητας

8.1 Εισαγωγή

Ως τώρα συζητήσαμε για σήματα στο χώρο της συχνότητας. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γνωρίσουμε την οπτική των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας. Θα δούμε τι παραπάνω μπορεί να μας προσφέρει αυτή η οπτική σε σχέση με όσα γνωρίζουμε από το χώρο του χρόνου και πώς μπορούμε να την εκμεταλλευτούμε σε πραγματικά προβλήματα, ενώ θα συστηθούμε με πραγματικές (ή κοντά στις πραγματικές ☺) και πολύ γνωστές σας εφαρμογές που καταδεικνύουν τη χρησιμότητα του πεδίου της συχνότητας.

8.2 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Ας υποθέσουμε ότι δυο ανταγωνιστικοί ραδιοφωνικοί σταθμοί θέλουν να εκπέμψουν το πρόγραμμά τους. Γνωρίζουμε ότι το ανθρώπινο αυτί μπορεί να ακούσει συχνότητες από 20 ως 20.000 Hz. Παρ' ότι η ανθρώπινη φωνή παράγει σημαντικές συχνότητες από 70 ως περίπου 14.000 Hz, κάποια μουσικά όργανα παράγουν αρμονικές συχνότητες εκτός αυτού του διαστήματος, οπότε ας υποθέσουμε ότι το *φάσμα* του σήματος πληροφορίας (δηλ. της εκπομπής που μεταδίδεται) είναι μη μηδενικό στο διάστημα [20, 20.000] Hz, το οποίο και αποτελεί το *ακουστικό φάσμα* του ανθρώπινου αυτιού.

Ένα πρώτο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι σταθμοί είναι η πρακτική υλοποίηση της κεραίας εκπομπής. Η Θεωρία Κεραίων μας πληροφορεί ότι το μήκος μιας κεραίας εκπομπής πρέπει να είναι ανάλογο του μήκους κύματος της πληροφορίας λ που μεταδίδεται. Γνωρίζουμε ότι

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (8.1)$$

με c την ταχύτητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος (σταθερή και ίση με 3×10^8 m/s) και f τη συχνότητα του σήματος πληροφορίας. Στην περίπτωση της μετάδοσης ραδιοφωνικού προγράμματος, η συχνότητα f δεν είναι ούτε μοναδική ούτε σταθερή με την πάροδο του χρόνου. Ας πάρουμε όμως τις δυο ακραίες συχνότητες που μεταδίδουν οι σταθμοί, δηλ. $f_{min} = 20$ Hz και $f_{max} = 20.000$ Hz. Το μήκος κύματός τους είναι

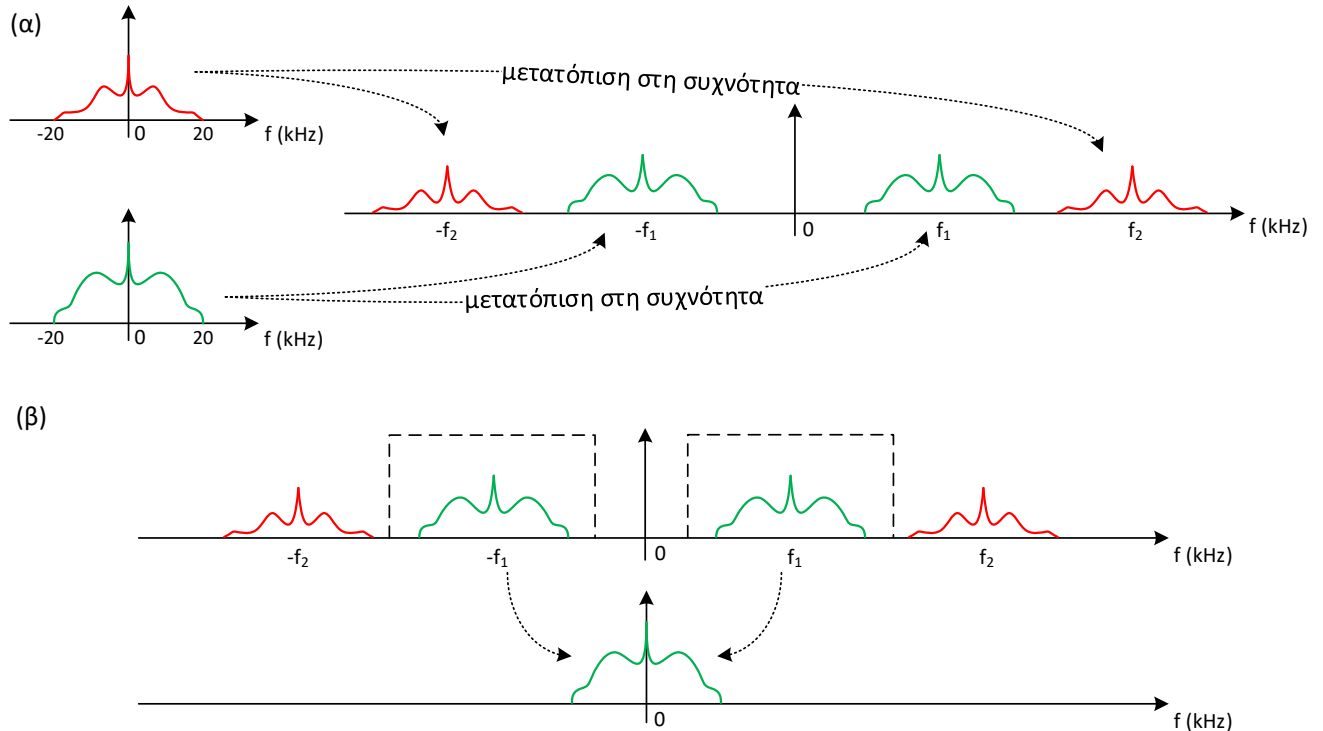
$$\lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}} = \frac{3 \times 10^8}{20 \times 10^3} = 1.5 \times 10^4 \text{ m} \quad (8.2)$$

$$\lambda_{max} = \frac{c}{f_{min}} = \frac{3 \times 10^8}{20} = 1.5 \times 10^7 \text{ m} \quad (8.3)$$

Παρατηρήστε πόσο μη πρακτικά είναι αυτά τα μεγέθη! Αν υποθέσουμε ότι το μέγεθος της κεραίας πρέπει να είναι περίπου το 1/10 του μήκους κύματος που εκπέμπεται, τότε η κεραία πρέπει να έχει μέγεθος ίσο με 1.5×10^6 m, δηλ. 1500 χιλιόμετρα, για να μεταδώσει ένα απλό ημίτονο στα 20 Hz!

Ακόμα κι αν αυτό το πρόβλημα δεν ήταν - που είναι! - σημαντικό, υπάρχει ένα δεύτερο πρόβλημα! - οι σταθμοί εκπέμψουν στην ίδια περιοχή συχνοτήτων, αφού αμφότεροι εκπέμψουν φωνή και μουσική και άρα καταλαμβάνουν και οι δυο το εύρος φάσματος μεταξύ 20 Hz και 20.000 Hz. Μπορούμε να λύσουμε και τα δυο αυτά προβλήματα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της *μετατόπισης στη συχνότητα* του μετασχ. Fourier, “στέλνοντας” το σήμα πληροφορίας σε συχνότητες αρκετά μεγάλες ώστε η κατασκευή της κεραίας να καθίσταται πρακτική, αλλά και το

φασματικό περιεχόμενο των δυο εκπομπών να μην καταλαμβάνει το ίδιο εύρος συχνοτήτων. Μια τέτοια διαδικασία ονομάζεται **Διαμόρφωση - Modulation**. Ασφαλώς όμως θα θέλαμε κάποια συστήματα τα οποία να μπορούν να απομονώνουν το επιθυμητό σήμα πληροφορίας και να το μεταφέρουν στη “φυσική” του ζώνη συχνοτήτων ώστε αυτό να είναι αντιληπτό από τον ακροατή. Η αντίστροφη αυτή διαδικασία ονομάζεται **Αποδιαμόρφωση - Demodulation**. Μια απλουστευμένη απεικόνιση των δυο αυτών διαδικασιών φαίνεται στο Σχήμα 8.1. Τέτοια



Σχήμα 8.1: (α) Διαμόρφωση και (β) Αποδιαμόρφωση σήματος.

συστήματα - κι ακόμη περισσότερα - θα συζητήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

8.3 Συστήματα στο χώρο της συχνότητας

Ως τώρα περιγράφαμε τα συστήματα είτε ως μια σχέση εισόδου-εξόδου $y(t) = T\{x(t)\}$, είτε μέσω της κρουστικής τους απόκρισης $h(t)$, η οποία είχε θεμελιώδη ρόλο. Πλέον έχουμε ένα ισχυρό εργαλείο ανάλυσης σημάτων στο χώρο της συχνότητας, τον μετασχ. Fourier, ο οποίος είδαμε ότι αναλύει ένα σήμα σε ένα άπειρο άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων της μορφής $e^{j2\pi ft}$. Ας δούμε τι συμβαίνει στα συστήματα, όταν αυτά εξετάζονται από την οπτική της συχνότητας. Θα εξετάσουμε γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα (ΓΧΑ) αποκλειστικά.

8.3.1 Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ Συστήματος

Αν υποθέσουμε ότι στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$, εφαρμόζουμε ένα εκθετικό μιγαδικό σήμα $e^{j2\pi f_0 t}$, τότε η έξοδος του συστήματος δίδεται από την πράξη της συνέλιξης, και είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi f_0(t-\tau)} d\tau = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau = H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} \quad (8.4)$$

με το $H(f_0)$ να είναι η τιμή του μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ για $f = f_0$. Πώς ερμηνεύεται αυτή η σχέση; Παρατηρήστε ότι όταν φέρουμε ως είσοδο ένα οποιοδήποτε μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας f_0 σε ένα ΓΧΑ σύστημα, το αποτέλεσμα που θα πάρουμε στην έξοδό μας θα είναι το ίδιο σήμα της εισόδου, πολλαπλασιασμένο με το μετασχ. Fourier του συστήματος, στη συχνότητα f_0 .

Σε μαθηματική ορολογία, η μιγαδική εκθετική συνάρτηση συχνότητας f_0 αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** του ΓΧΑ συστήματος. Υπενθυμίζεται ότι η μαθηματική περιγραφή $h(t)$ του συστήματος λέγεται **κρουστική απόκριση**, και αποτελεί την έξοδο του συστήματος, όταν στην είσοδό του εμφανίζεται μια συνάρτηση Δέλτα.

8.3.2 Απόκριση σε Συχνότητα

Ο μετασχ. Fourier της, $H(f)$, όντας τόσο σημαντικός στην ανάλυση των συστημάτων, δε θα μπορούσε να μην έχει δικό του όνομα: λέγεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνοτική απόκριση**, ενώ η ανάλυσή της σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H(f)} \quad (8.5)$$

μας ονομάζει το φάσμα πλάτους της, $|H(f)|$, ως **απόκριση πλάτους** και το φάσμα φάσης της, $\phi_H(f)$, ως **απόκριση φάσης**.

Όμως ένα από τα σημαντικότερα πορίσματα της Ανάλυσης Fourier είναι ότι η *συνέλιξη στο χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα*, και το αντίστροφο (Πίνακας 6.1). Άρα η σχέση της συνέλιξης που περιγράφει την έξοδο ενός συστήματος στο πεδίο του χρόνου

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (8.6)$$

μπορεί να γραφεί στο πεδίο της συχνότητας ως:

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (8.7)$$

Τι σημαίνει η σχέση αυτή για το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης της εισόδου $X(f)$; Αν χρησιμοποιήσουμε την πολική μορφή, θα έχουμε

$$|Y(f)|e^{j\phi_Y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_X(f)}|H(f)|e^{j\phi_H(f)} \quad (8.8)$$

που οδηγεί στις σχέσεις

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)| \quad (8.9)$$

$$\phi_Y(f) = \phi_X(f) + \phi_H(f) \quad (8.10)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι **πολύ σημαντικές** διότι μας πληροφορούν ότι

- Το φάσμα πλάτους της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεν είναι άλλο από το *γινόμενο* των επιμέρους φασμάτων πλάτους, της εισόδου και του συστήματος. Άρα, η απόκριση πλάτους του συστήματος δρα *πολλαπλασιαστικά* στο φάσμα πλάτους της εισόδου.
- Το φάσμα φάσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεν είναι άλλο από το *άθροισμα* των επιμέρους φασμάτων φάσης, της εισόδου και του συστήματος. Άρα, η απόκριση φάσης του συστήματος δρα *αθροιστικά* στο φάσμα φάσης της εισόδου.

Τα παραπάνω δυο σημεία ισχύουν ανεξαρτήτως της φύσης του σήματος εισόδου (περιοδικό ή μη, ενέργειας ή ισχύος).

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα της απόκρισης σε συχνότητα των ΓΧΑ συστημάτων είναι ότι αν το $h(t)$ είναι πραγματικό, η απόκριση σε συχνότητα είναι *συζυγής συμμετρική* συνάρτηση της συχνότητας:

$$H(f) = H^*(-f) \quad (8.11)$$

που συνεπάγεται ότι το πραγματικό της μέρος είναι άρτια συνάρτηση του f , και το φανταστικό είναι περιττή συνάρτηση του f , δηλ.

$$H_R(f) = H_R(-f) \quad (8.12)$$

$$H_I(f) = -H_I(-f) \quad (8.13)$$

Όμοια, το πλάτος της απόκρισης σε συχνότητα είναι άρτια συνάρτηση του f και η φάση είναι περιττή συνάρτηση του f , δηλ.

$$|H(f)| = |H(-f)| \quad (8.14)$$

$$\phi(f) = -\phi(-f) \quad (8.15)$$

Τα παραπάνω δεν πρέπει να σας εκπλήσσουν καθώς είναι γνωστές ιδιότητες πραγματικών σημάτων στο χώρο της συχνότητας.

8.3.3 ΓΧΑ Συστήματα με Είσοδο Περιοδικά Σήματα

Ας αρχίσουμε τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων με περιοδική είσοδο. Το αποτέλεσμα της Σχέσης (8.4) είναι σημαντικό, γιατί αν φέρουμε ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$, με ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (8.16)$$

η έξοδος $y(t)$ του συστήματος είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (8.17)$$

Βλέπετε ότι το μόνο που αλλάζει είναι οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier: από X_k γίνονται $H(kf_0)X_k$, όπου, επαναλαμβάνουμε, το $H(kf_0)$ είναι η τιμή της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$ του συστήματος για $f = kf_0$. Αυτομάτως, η παραπάνω σχέση μας λέει ότι ένα άθροισμα ημιτόνων που θα εμφανιστεί στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος, θα παραμείνει άθροισμα ημιτόνων στην έξοδο, ίδιων συχνοτήτων αλλά με διαφορετικά πλάτη και φάσεις!

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.1:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με χρονική απόκριση

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) \quad (8.18)$$

και στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 4\cos(t + \pi/2) \quad (8.19)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$. Τι παρατηρείτε;

Λύση:

Θα είναι, από τον Πίνακα 6.2

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) \longleftrightarrow H(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} \quad (8.20)$$

Το σύστημα γράφεται ως

$$H(f) = |H(f)|e^{j \tan^{-1} \frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}}} \quad (8.21)$$

Άρα το πλάτος θα είναι

$$|H(f)| = \frac{2}{|1 + j2\pi f|} = \frac{2}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2}} \quad (8.22)$$

ενώ για τη φάση θα έχουμε

$$H(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} = \frac{2(1 - j2\pi f)}{(1 + j2\pi f)(1 - j2\pi f)} = \frac{2(1 - j2\pi f)}{|1 + j2\pi f|^2} = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2} - j \frac{4\pi f}{1 + (2\pi f)^2} \quad (8.23)$$

$$= \Re\{H(f)\} + j\Im\{H(f)\} \quad (8.24)$$

δηλαδή

$$\phi(f) = \tan^{-1} \frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}} = \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{4\pi f}{1 + (2\pi f)^2}}{\frac{2}{1 + (2\pi f)^2}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{2\pi f}{1} \right) = -\tan^{-1}(2\pi f) \quad (8.25)$$

λόγω του ότι η αντίστροφη εφαπτομένη είναι περιττή συνάρτηση. Όμως η είσοδος είναι της μορφής

$$x(t) = 4\cos(t + \pi/2) = 2e^{jt}e^{j\pi/2} + 2e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (8.26)$$

δηλ. έχει συχνότητες $\pm 1/2\pi$. Γνωρίζουμε ότι οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του ΓΧΑ συστήματος, και έτσι, δεδομένου ότι το σύστημα είναι πραγματικό (περιγράφεται από μια χρονική απόκριση

που αποτελεί πραγματικό σήμα), η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = 2H\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H\left(-\frac{1}{2\pi}\right)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (8.27)$$

$$= 2H\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H^*\left(\frac{1}{2\pi}\right)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (8.28)$$

$$= \left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{j\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}e^{jt}e^{j\pi/2} + \left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{-j\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}e^{-jt}e^{-j\pi/2} \quad (8.29)$$

$$= 2\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{j\left(t+\pi/2+\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right)} + 2\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|e^{-j\left(t+\pi/2+\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right)} \quad (8.30)$$

$$= 4\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|\cos\left(t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (8.31)$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (8.32)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος είναι πάλι ημιτονοειδής μορφή, όπως η είσοδος, και έχει επηρεαστεί από το σύστημα τόσο στο πλάτος της (πλάτος εισόδου 4, πλάτος εξόδου $4\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|$), όσο και στη φάση της (φάση εισόδου $\pi/2$, φάση εξόδου $\pi/2 + \phi\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$).

Γενικότερα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

Εύρεση εξόδου σε ΓΧΑ σύστημα με περιοδική είσοδο

1. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}e^{j(2\pi\mathbf{f}_0 t + \theta)}$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{H}(\mathbf{f}_0)e^{j(2\pi\mathbf{f}_0 t + \theta)}$, όπου $\mathbf{H}(\mathbf{f}) = |\mathbf{H}(\mathbf{f})|e^{j\phi(\mathbf{f})}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.
2. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\cos(2\pi\mathbf{f}_0 t + \theta)$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}|\mathbf{H}(\mathbf{f}_0)|\cos(2\pi\mathbf{f}_0 t + \theta + \phi(\mathbf{f}_0))$, όπου $\mathbf{H}(\mathbf{f}) = |\mathbf{H}(\mathbf{f})|e^{j\phi(\mathbf{f})}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

Προφανώς το παραπάνω μπορεί να γενικευτεί για αθροισμα ημιτόνων ή μιγαδικών εκθετικών ως:

3. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k e^{j(2\pi\mathbf{f}_k t + \theta_k)}$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k \mathbf{H}(\mathbf{f}_k) e^{j(2\pi\mathbf{f}_k t + \theta_k)}$, όπου $\mathbf{H}(\mathbf{f}) = |\mathbf{H}(\mathbf{f})|e^{j\phi(\mathbf{f})}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

4. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k \cos(2\pi\mathbf{f}_k t + \theta_k)$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k |\mathbf{H}(\mathbf{f}_k)| \cos(2\pi\mathbf{f}_k t + \theta_k + \phi(\mathbf{f}_k))$, όπου $\mathbf{H}(\mathbf{f}) = |\mathbf{H}(\mathbf{f})|e^{j\phi(\mathbf{f})}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

8.3.4 ΓΧΑ Συστήματα με Είσοδο Μη Περιοδικά Σήματα

Πιο γενικά όμως, και για οποιαδήποτε σήματα (όχι απαραίτητα περιοδικά), η σχέση που συνδέει την είσοδο $x(t)$ με την έξοδο $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος $h(t)$ εκφράζεται μέσω της πράξης της συνέλιξης:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (8.33)$$

η οποία μετατρέπεται στο χώρο της συχνότητας ως

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (8.34)$$

Μπορούμε λοιπόν πολύ εύκολα να βρούμε την έξοδο ενός συστήματος στο χώρο της συχνότητας, και να επιστρέψουμε στο χώρο του χρόνου με χρήση του αντίστροφου μετασχ. Fourier.

Επιπλέον, η παραπάνω σχέση επιτρέπει σε ένα σύστημα $h(t)$ με απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ να υπολογιστεί στο χώρο των συχνοτήτων, και μάλιστα πολύ πιο εύκολα απ' ό,τι στο χώρο του χρόνου! Πώς; Προφανώς από τη σχέση

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (8.35)$$

που έχουμε ήδη δει. Βλέπετε ότι, εν γένει, η απόκριση σε συχνότητα είναι μια ρητή συνάρτηση της συχνότητας f . Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{N(f)}{D(f)} \quad (8.36)$$

όπου $N(f), D(f)$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$, με όποιες απλοποιήσεις μπορεί να γίνουν στο κλάσμα. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μικρότερα κλάσματα μέσα από μια απλή διαδικασία που λέγεται “Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα”¹. Εν συντομία, το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μια τέτοια ρητή συνάρτηση, εν γένει, μπορεί να γραφεί ως

$$H(f) = \frac{N(f)}{D(f)} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} \quad (8.37)$$

στην απλή περίπτωση που οι ρίζες του παρονομαστή $D(f)$ είναι απλές. Έχοντας την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα και σύμφωνα με τον Πίνακα 6.2 των ζευγών μετασχ. Fourier, μπορούμε να βρούμε την κρουστική απόκριση $h(t)$, ως

$$H(f) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^M A_k e^{-\alpha_k t} u(t) \quad (8.38)$$

Φυσικά η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί και η είσοδος $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, αφού και το $X(f)$ εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση:

$$X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} \quad (8.39)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα πάνω σε αυτά, που είναι πολύ σημαντικά.

Παράδειγμα 8.2:

Έστω το σύστημα

$$h(t) = e^{-3t} u(t) \quad (8.40)$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{-t} u(t) + e^{-2t} u(t) \quad (8.41)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος $y(t)$.

Λύση:

Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον γνωστό τρόπο του ολοκληρώματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, συμβουλευόμενοι τον Πίνακα 6.2, έχουμε ότι

$$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(f) = X(f)H(f) = \left(\frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} \right) \frac{1}{3+j2\pi f} \quad (8.42)$$

$$= \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)} + \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)} \quad (8.43)$$

$$= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{3+j2\pi f} + \frac{C}{2+j2\pi f} + \frac{D}{3+j2\pi f} \quad (8.44)$$

και στο πεδίο του χρόνου θα είναι

$$y(t) = Ae^{-t} u(t) + (B+D)e^{-3t} u(t) + Ce^{-2t} u(t) \quad (8.45)$$

¹Η οποία περιγράφεται στην Παράγραφο 2.5 του Κεφαλαίου Υποβάθρου.

με

$$A = \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(1+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{2}{(3+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-1} = 1 \quad (8.46)$$

$$B = \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(3+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-3} = \frac{2}{(1+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-3} = -1 \quad (8.47)$$

$$C = \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(2+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-2} = \frac{1}{(3+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-2} = 1 \quad (8.48)$$

$$D = \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(3+j2\pi f) \Big|_{j2\pi f=-3} = \frac{1}{(2+j2\pi f)} \Big|_{j2\pi f=-3} = -1 \quad (8.49)$$

και άρα

$$y(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (8.50)$$

Ας υπολογίσουμε το ίδιο με εφαρμογή του ορισμού της συνέλιξης. Έτσι, θα έχουμε:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (8.51)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (2e^{-\tau}u(\tau) + e^{-2\tau}u(\tau))e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \quad (8.52)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \quad (8.53)$$

Ισχύει ότι

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (8.54)$$

Άρα

$$y(t) = \int_0^t 2e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau = \int_0^t 2e^{-\tau-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau-3(t-\tau)}d\tau \quad (8.55)$$

$$= \int_0^t 2e^{2\tau-3t}d\tau + \int_0^t e^{\tau-3t}d\tau = 2e^{-3t} \int_0^t e^{2\tau}d\tau + e^{-3t} \int_0^t e^{\tau}d\tau \quad (8.56)$$

$$= e^{-3t}e^{2\tau} \Big|_0^t + e^{-3t}e^{\tau} \Big|_0^t = e^{-3t}(e^{2t}-1) + e^{-3t}(e^t-1) \quad (8.57)$$

$$= e^{-t} - e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-3t} = e^{-t} - 2e^{-3t} + e^{-2t}, \quad 0 < t \quad (8.58)$$

$$= e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (8.59)$$

που είναι η ίδια ακριβώς σχέση με τη Σχέση (8.49)! Διαλέξτε τι προτιμάτε. ☺

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την είσοδο $x(t)$, αν μας δίνεται το σύστημα και η έξοδος του. Δείτε:

Παράδειγμα 8.3:

Έστω ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f} \quad (8.60)$$

Στην είσοδό του, βρίσκεται ένα σήμα $x(t)$, το οποίο δίνει έξοδο

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \quad (8.61)$$

Βρείτε την είσοδο, $x(t)$.

Λύση:

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$y(t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f} \quad (8.62)$$

Προφανώς ισχύει

$$Y(f) = H(f)X(f) \iff X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} = \frac{\frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}}{\frac{1}{3+j2\pi f}} = \frac{\frac{1}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}}{\frac{1}{3+j2\pi f}} \quad (8.63)$$

$$= \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)} = \frac{A}{2+j2\pi f} + \frac{B}{1+j2\pi f} \quad (8.64)$$

και το οποίο δίνει το σήμα στο χρόνο

$$x(t) = Ae^{-2t}u(t) + Be^{-t}u(t) \quad (8.65)$$

με

$$A = \left. \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}(2+j2\pi f) \right|_{j2\pi f=-2} = \left. \frac{3+j2\pi f}{(1+j2\pi f)} \right|_{j2\pi f=-2} = -1 \quad (8.66)$$

$$B = \left. \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}(1+j2\pi f) \right|_{j2\pi f=-1} = \left. \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)} \right|_{j2\pi f=-1} = 2 \quad (8.67)$$

και άρα τελικά η είσοδος θα είναι

$$x(t) = -e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) \quad (8.68)$$

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος για μη περιοδική είσοδο

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $\mathbf{h}(t) \longleftrightarrow \mathbf{H}(f)$ είναι της μορφής

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k e^{-\mathbf{a}_k t} u(t) \longleftrightarrow \mathbf{X}(f) = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_k \frac{1}{\mathbf{a}_k + j2\pi f}$$

τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως $\mathbf{Y}(f) = \mathbf{H}(f)\mathbf{X}(f)$, και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί η έξοδος $\mathbf{y}(t)$.

8.3.5 ΓΧΑ Συστήματα με Συναρτήσεις Δέλτα

Πολλά συστήματα (ή και σήματα) εκφράζονται ως ένα απλό άθροισμα Συναρτήσεων Δέλτα. Αυτή η περίπτωση είναι η πιο εύκολη, καθώς μπορούμε να δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, αντί αυτού της συχνότητας, εκμεταλλευόμενοι την παρακάτω ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα:

$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = x(t \pm t_0) \quad (8.69)$$

Επαναλαμβάνουμε, ερμηνεύοντας την παραπάνω σχέση, ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = \pm t_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x(t)$ μετατοπισμένο στη θέση $t = \pm t_0$!

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.4:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με χρονική απόκριση

$$h(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1) \quad (8.70)$$

Στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{2t}u(-t) \quad (8.71)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Λύση:

Ας δούμε και τις δυο λύσεις (χρόνος και συχνότητα).

- Θα έχουμε

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) = 2e^{2t}u(-t) * (2\delta(t) - \delta(t-1)) \quad (8.72)$$

$$= 2e^{2t}u(-t) * 2\delta(t) - 2e^{2t}u(-t) * \delta(t-1) \quad (8.73)$$

$$= 4e^{2t}u(-t) - 2e^{2(t-1)}u(-(t-1)) \quad (8.74)$$

$$= 4e^{2t}u(-t) - 2e^{2(t-1)}u(-t+1) \quad (8.75)$$

- Στο χώρο της συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο, και μέσω μετασχ. Fourier και ιδιοτήτων, θα είναι

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{2}{2-j2\pi f}(2 - e^{-j2\pi f}) \quad (8.76)$$

$$= \frac{4}{2-j2\pi f} - \frac{2}{2-j2\pi f}e^{-j2\pi f} \quad (8.77)$$

και από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier, η έξοδος στο χρόνο θα είναι

$$y(t) = 4e^{2t}u(-t) - 2e^{2(t-1)}u(-(t-1)) \quad (8.78)$$

$$= 4e^{2t}u(-t) - 2e^{2(t-1)}u(-t+1) \quad (8.79)$$

Παράδειγμα 8.5:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1) \quad (8.80)$$

Στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) \quad (8.81)$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Λύση:

- Από τους Πίνακες, έχουμε

$$H(f) = e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f} \quad (8.82)$$

και

$$x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f} \quad (8.83)$$

Είναι

$$Y(f) = H(f)X(f) = 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}(e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}) \quad (8.84)$$

$$= 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}e^{j2\pi f} - 2T\text{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}e^{-j2\pi f} \quad (8.85)$$

$$= 2T\text{sinc}(fT)e^{-j2\pi f} - 2T\text{sinc}(fT)e^{-j6\pi f} \quad (8.86)$$

και

$$y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-1}{T}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-3}{T}\right) \quad (8.87)$$

- Είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * (\delta(t+1) - \delta(t-1)) \quad (8.88)$$

$$= 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * \delta(t+1) - 2\text{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) * \delta(t-1) \quad (8.89)$$

$$= 2\text{rect}\left(\frac{t-2+1}{T}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-2-1}{T}\right) \quad (8.90)$$

$$= 2\text{rect}\left(\frac{t-1}{T}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-3}{T}\right) \quad (8.91)$$

από την ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (8.92)$$

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα δε θα άλλαζε τίποτα αν οι συναρτήσεις Δέλτα αποτελούσαν την είσοδο του συστήματος (αντί το ίδιο το σύστημα), και οι είσοδοι $x(t)$ αποτελούσαν τις χρονιστικές αποκρίσεις των συστημάτων.

Παρατηρήσεις

1. Για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, αν σας βολεύει. Το πώς θα καταλαβαίνετε ποιός τρόπος είναι πιο εύκολος ή σύντομος, απαιτεί εμπειρία. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι αρχικά εμφανές κάτι τέτοιο, και αναγκαστικά δουλεύετε όπως νομίζετε εσείς, μέχρι να επιβεβαιωθείτε ή να διαψευστείτε.
2. Υπενθυμίζεται ότι το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα εφαρμόζεται *μόνον* όταν η τάξη του πολωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερη από αυτή του παρονομαστή. Στα παραπάνω παραδείγματα, αυτό ήταν αληθές. Σε περίπτωση που δεν είναι, πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολωνύμων.
3. Στην ανάλυση των παραπάνω συστημάτων, υποθέσαμε ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει, αφού χρησιμοποιήσαμε τα σύμβολα και τις ιδιότητές του. Αυτό είναι αρκετά περιοριστικό, διότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να μην υπάρχει για κάποια σήματα ή συστήματα που εμφανίζονται στην πράξη. Θέλουμε λοιπόν έναν ακόμα πιο γενικό μετασχηματισμό που θα μπορεί να περιγράψει συχνοτικά και μη ευσταθή σήματα! Θα δούμε σύντομα έναν τέτοιο μετασχηματισμό που άρει αυτές τις δυσκολίες.

Κεφάλαιο 9

Ο Μετασχηματισμός Laplace

9.1 Εισαγωγή

Έχουμε ήδη δει ότι ο μετασχ. Fourier είναι ένα εργαλείο που μας επιτρέπει να αναπαριστούμε ένα σήμα $x(t)$ σαν ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) εκθετικών σημάτων της μορφής $e^{j2\pi ft}$, δηλ.

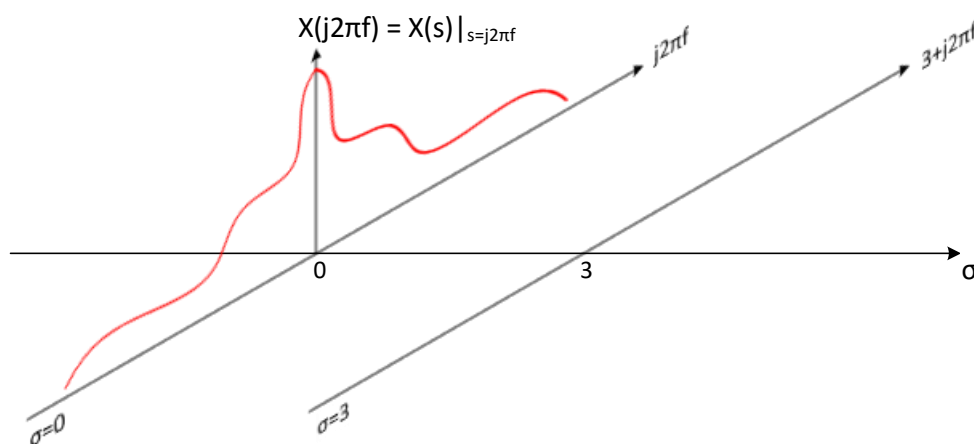
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (9.1)$$

που δεν είναι άλλη σχέση φυσικά εκτός από τον αντίστρ. μετασχ. Fourier.

Έστω λοιπόν ένα σήμα

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \quad (9.2)$$

Έστω, για λόγους ευκολίας, ότι το φάσμα του σήματος είναι πραγματικό και θετικό¹, δηλ. $X(f) \in \mathbb{R}$ και $X(f) > 0$. Έστω ότι αυτό το φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 9.1. Ο άξονας πάνω στον οποίο ορίζεται ο $X(f)$ είναι οι γνωστές μας συχνότητες, που έχουμε απλά αντικαταστήσει το f με το $j2\pi f$, μια αυτό είναι το όρισμα των εκθετικών μας στο μετασχ. Fourier². Σε αυτό το Σχήμα, απλά έχουμε ορίσει ένα χώρο, στον οποίο οι x, y διαστάσεις του είναι το μιγαδικό επίπεδο, έστω $\sigma, j2\pi f$ αυτές, και η τρίτη διάσταση είναι οι τιμές του μετασχ. Fourier - ξανά, έστω ότι οι τιμές αυτές είναι πραγματικές στο παράδειγμά μας, ώστε να μη χρειάζεται να συζητάμε ξεχωριστά για φάσμα πλάτους και φάσης. Δε σας το είχαμε πει ρητά (το κρατούσαμε για έκπληξη :-P), αλλά όσο δουλεύετε με το



Σχήμα 9.1: Ο μετασχ. Fourier στο μιγαδικό s -επίπεδο.

μετασχ. Fourier, ουσιαστικά ένα τέτοιο σήμα βλέπετε, υπό αυτή την οπτική, απλά προφανώς είναι πολύ πιο βολικό να το σχεδιάζουμε όπως έχουμε δει πολλές φορές, σε ένα διδιάστατο επίπεδο, παρά όπως στο Σχήμα 9.1. ©Ένα σήμα λοιπόν όπως το $x(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ δεν έχει μετασχ. Fourier, υπό την έννοια ότι η συνάρτηση του μετασχηματισμού δε συγκλίνει για κάθε f - πρακτικά, για κάποια συχνότητα ή εύρος συχνοτήτων, ο μετασχηματισμός

¹Όπως το φάσμα του τριγωνικού παλμού.

²Η προσθήκη του j δεν συνιστά κάποια αλλαγή στο φάσμα καθώς αποτελεί τη φανταστική μονάδα, ενώ η προσθήκη του 2π συντελεί σε μια διαστολή του άξονα των συχνοτήτων. Έτσι, το φάσμα ενός σήματος συναρτήσει της συχνότητας $2\pi f$ θα είναι μια διεσταλμένη “έκδοση” του φάσματος συναρτήσει της συχνότητας f που έχετε συνηθίσει να βλέπετε/σχεδιάζετε.

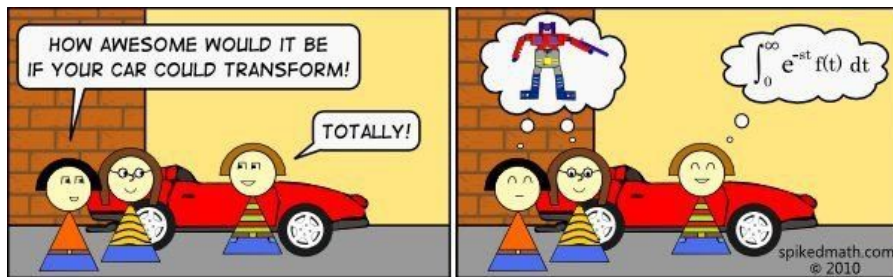
Fourier του σήματος αυτού απειρίζεται, πράγμα ανεπιθύμητο.

Βλέπετε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier $X(f)$ ορίζεται πάνω στον κατακόρυφο άξονα των φανταστικών συχνοτήτων $j2\pi f$ του μιγαδικού επιπέδου - *μόνον* εκεί όμως. Το βλέπετε άλλωστε, το σήμα είναι σαν μια “φέτα” που φεύγει μόνο προς τα “πάνω” από το φανταστικό άξονα. Όμως, το μιγαδικό επίπεδο έχει προφανώς κι άλλες ευθείες πάνω στις οποίες μπορούμε να ορίσουμε μετασχηματισμούς. Μια από αυτές φαίνεται στο Σχήμα 9.1, κι αυτή είναι η $\sigma = 3$. Πάνω σε αυτόν τον άξονα, θα είχαμε συχνότητες $s = \sigma + j2\pi f = 3 + j2\pi f$, και η προβολή του σήματος $x(t)$ θα γινόταν πάνω σε εκθετικά της μορφής $e^{-st} = e^{-(3+j2\pi f)t}$. Σταματάμε εδώ προσωρινά, αν και πρέπει ήδη να έχετε υποψιαστεί τι πρόκειται να συμβεί. ☺

Επιστρέφουμε στο μετασχ. Fourier λοιπόν. Μια τέτοια αναπαράσταση είναι πολύτιμη στην ανάλυση και επεξεργασία σημάτων. ΟΜΩΣ (παντού υπάρχει ένα “όμως” που μας χαλάει τη διάθεση ☹) είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει μόνο για μια περιορισμένη κατηγορία σημάτων, π.χ. ο μετασχ. Fourier δεν ορίζεται για σήματα της μορφής

$$x(t) = e^{at}u(t), a > 0 \quad (9.3)$$

δηλ. για αύξοντα εκθετικά σήματα.



Σχήμα 9.2: Δεν αντιλαμβάνονται τους μετασχηματισμούς όλοι με τον ίδιο τρόπο... ☺

9.2 Ο Μετασχηματισμός Laplace

Ο βασικός λόγος για τις δυσκολίες που μας προκύπτουν είναι ότι για μερικά σήματα, όπως το σήμα στη Σχέση (9.3), ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει, επειδή τα συνήθη ημίτονα ή εκθετικά σήματα της μορφής $X(f)e^{j2\pi ft}$ είναι ανίκανα να συνθέσουν αύξοντα εκθετικά σήματα, όπως το παραπάνω - πολύ λογικό, αν σκεφτείτε ότι έχουν φραγμένο πλάτος $X(f)$, όπως είδαμε στη Σχέση (9.1). Αν αφήσουμε τη φαντασία μας ελεύθερη (ΠΟΛΥ ελεύθερη ☺), θα δούμε ότι το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί. Πώς;

Αν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ως σήματα ανάλυσης και σύνθεσης εκθετικά της μορφής e^{st} , με το s να μην περιορίζεται μόνο πάνω στο φανταστικό άξονα (όπως γίνεται στον μετασχ. Fourier). Αυτό ακριβώς γίνεται στον περίφημο **μετασχηματισμό Laplace**. Εδώ, η συχνότητες είναι μιγαδικές, της μορφής $s = \sigma + j2\pi f$, και αυτή η γενίκευση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε αύξοντα εκθετικά μιγαδικά σήματα (και άρα ημίτονα με εκθετικά αυξανόμενο πλάτος, όταν αναλύουμε πραγματικά σήματα) για να συνθέσουμε ένα σήμα $x(t)$, που με τον κλασικό μετασχ. Fourier δε θα μπορούσαμε. Ποιά είναι αυτά τα εκθετικά; Μα φυσικά τα $e^{\sigma t}e^{j2\pi ft}$! ☺ Πριν πάμε στα μαθηματικά, ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε διαισθητικά και με ένα απλό παράδειγμα τι ακριβώς κερδίζουμε με το μετασχηματισμό αυτό.

9.2.1 Διαισθητική κατανόηση του μετασχ. Laplace

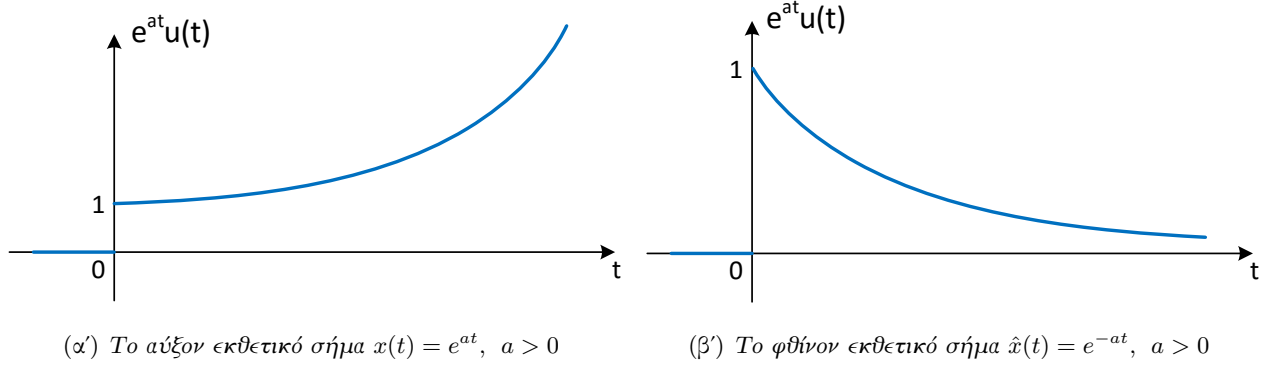
Αν ένα σήμα λοιπόν, όπως το $x(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$, στο Σχήμα 9.3α', δεν έχει μετασχ. Fourier, μπορούμε να το κάνουμε να έχει, πολλαπλασιάζοντάς το με ένα φθίνον εκθετικό σήμα, όπως το $e^{-\sigma t}$. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = e^{2t}u(t) \quad (9.4)$$

μπορεί να γίνει “μετασχηματίσιμο” (!!) κατά Fourier, απλά πολλαπλασιάζοντάς το με το $e^{-\sigma t}$, με $\sigma > 2$, ορίζοντας έτσι το

$$\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t} = e^{(2-\sigma)t}u(t) \quad (9.5)$$

Αυτό το νέο σήμα είναι σήμα ενέργειας πια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.3β' – πάντα για $\sigma > 2$. Άρα το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει πλέον μετασχ. Fourier, $\hat{X}(f)$, και οι συνιστώσες του είναι της μορφής $X(f)e^{j2\pi ft}$, με συχνότητες f που “τρέχουν” από $-\infty$ ως ∞ . Έστω μια συχνότητα Δf του συνεχούς φάσματος του σήματος $\hat{X}(f)$. Επειδή

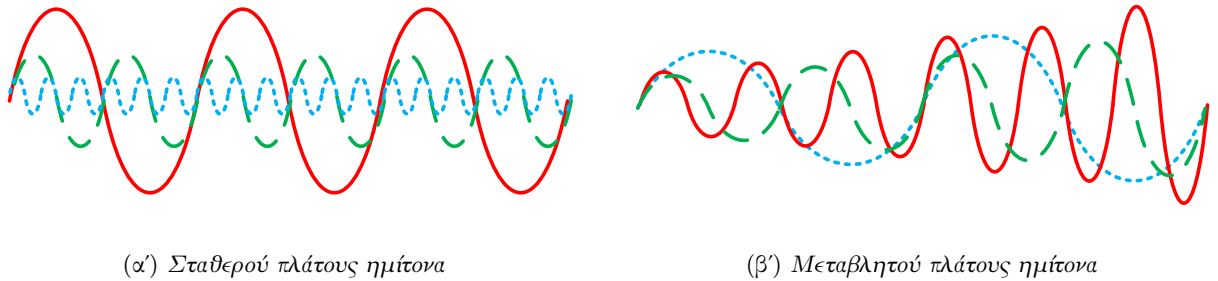


Σχήμα 9.3: Εκθετικά πραγματικά σήματα.

αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και η αντίστοιχη συχνότητα $-\Delta f$ και το πλάτος καθεμιάς θα είναι $\hat{X}(\Delta f)$ και $\hat{X}^*(\Delta f)$ αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier για πραγματικά σήματα. Άρα προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(\Delta f)e^{j2\pi\Delta ft} + \hat{X}^*(\Delta f)e^{-j2\pi\Delta ft} &= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + (|\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}})^*e^{-j2\pi\Delta ft} \\
 &= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + |\hat{X}(\Delta f)|e^{-j\phi_{\Delta f}}e^{-j2\pi\Delta ft} \\
 &= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} + |\hat{X}(\Delta f)|e^{-j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} \\
 &= 2|\hat{X}(\Delta f)|\cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους $2|\hat{X}(f)|$ και ανεξάρτητου του χρόνου t . Θα ήταν χρονοβόρο να σχεδιάσουμε όλα αυτά τα ημίτονα, έτσι στο Σχήμα 9.4α' δείχνουμε μόνο τρία από αυτά. Η πρόσθεση όλων αυτών των συνιστωσών (άπειρων σε αριθμό) θα μας δώσει το $\hat{x}(t)$. Είναι όμως προφανές ότι



Σχήμα 9.4: Ημίτονα των δυο μετασχηματισμών

το επιθυμητό σήμα $x(t)$ – μην ξεχνιόμαστε, το $x(t)$ θέλουμε να μετασχηματίσουμε! ☹– μπορεί να συντεθεί από τον πολλαπλασιασμό του $\hat{x}(t)$ με τα $e^{+\sigma t}$, έτσι δεν είναι; Αυτό τι σημαίνει; Σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε κάθε φασματική συνιστώσα $\hat{X}(f)$ του $\hat{x}(t)$ με $e^{+\sigma t}$, και μετά τις προσθέτουμε. Ιδού:

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t} \int \hat{X}(f)e^{j2\pi ft} df = \int (e^{+\sigma t} \hat{X}(f))e^{j2\pi ft} df = \int \hat{X}(f)(e^{+\sigma t}e^{j2\pi ft}) df \tag{9.7}$$

Αλλά μια τέτοια κίνηση σημαίνει επίσης ότι τα ημίτονα που προκύπτουν θα έχουν αύξοντα πλάτη! Η πρόσθεση όλων αυτών των αύξοντων ημιτόνων θα μας δώσει το $x(t)$! Γιατί; Ας κάνουμε το ίδιο με τη Σχέση (9.6), μόνο που τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε πλάτη $\hat{X}(\Delta f)e^{\sigma t}$:

$$e^{\sigma t} \hat{X}(\Delta f)e^{j2\pi\Delta ft} + e^{\sigma t} \hat{X}^*(\Delta f)e^{-j2\pi\Delta ft} = 2|\hat{X}(\Delta f)|e^{\sigma t} \cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f}) \tag{9.8}$$

Είναι φανερό εδώ ότι τα πλάτη των ημιτόνων ΔΕΝ είναι σταθερά συναρτήσεως του χρόνου, όπως στην περίπτωση του μετασχ. Fourier, αλλά μεταβάλλονται συναρτήσεως του χρόνου ως $2|\hat{X}(\Delta f)|e^{\sigma t}$, όπως στο Σχήμα 9.4β'!

Επίσης, από τη Σχέση (9.7) βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός των συνιστωσών του $\hat{x}(t)$ με το $e^{+\sigma t}$ θα μας δώσει συνιστώσες της μορφής $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$, προσθέτοντας τους εκθέτες μέσα στο ολοκλήρωμα! Άρα, κάθε συχνό-

τητα της μορφής $j2\pi f$ του $\hat{x}(t)$ μετασχηματίζεται σε μια άλλη συχνότητα $\sigma + j2\pi f$ στο φάσμα του $x(t)$. Άρα πού θα βρίσκονται αυτές οι νέες συχνότητες; Πού αλλού, εκτός από πάνω σε μια νέα ευθεία στο μιγαδικό s -επίπεδο, στην ευθεία που περιλαμβάνει τις συχνότητες $\sigma + j2\pi f$!

Πλέον είναι ξεκάθαρο ότι το σήμα $x(t)$ μπορεί να συντεθεί από μεταβαλλόμενου πλάτους συναρτήσεως του χρόνου t μιγαδικά εκθετικά σήματα που βρίσκονται στο “μονοπάτι” $\sigma + j2\pi f$ του μιγαδικού επιπέδου, με το f να κυμαίνεται από $-\infty$ έως ∞ . Η τιμή του σ είναι μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν $x(t) = e^{2t}u(t)$, τότε το $\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$ μπορεί να γίνει μετασχηματίσιμο κατά Fourier αν διαλέξουμε $\sigma > 2$. Άρα καταλαβαίνετε ότι έχουμε άπειρες επιλογές για την τιμή του σ . Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός του $x(t)$ όπως παρουσιάστηκε παραπάνω δεν είναι μοναδικός, και ότι υπάρχουν άπειροι τρόποι να συνθέσουμε το $x(t)$ από μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$. Όμως, το σ έχει μια ελάχιστη, συγκεκριμένη τιμή σ_0 για ένα δεδομένο $x(t)$ (όπως εδώ, $\sigma_0 = 2$, για $x(t) = e^{2t}u(t)$). Αυτή η περιοχή του μιγαδικού s -επιπέδου που ορίζονται άπειροι τρόποι σύνθεσης του $x(t)$ από τα αυξανόμενα εκθετικά σήματα λέγεται **Πεδίο ή Περιοχή Σύγκλισης** του νέου αυτού μετασχηματισμού του $x(t)$.

Αυτός ο νέος μετασχηματισμός λοιπόν, που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$ λέγεται **Μετασχηματισμός Laplace** και ορίζεται ως:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (9.9)$$

ενώ ο αντίστροφός του ως:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (9.10)$$

ο οποίος όμως δε θα χρησιμοποιηθεί για τους σκοπούς μας, μια και υπάρχουν πιο εύκολοι τρόποι να βρει κανείς το σήμα στο χρόνο $x(t)$ από το μετασχ. Laplace του, αποφεύγοντας την επίλυση ενός ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο... ☺

9.2.2 Ύπαρξη του μετασχ. Laplace

Μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχ. Laplace είναι η

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (9.11)$$

Όταν το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάποια τιμή σ , τότε υπάρχει ο μετασχ. Laplace. Αποδεικνύεται ότι κάθε σήμα που αυξάνει όχι γρηγορότερα από το εκθετικό σήμα $Me^{\sigma_0 t}$, για κάποια M, σ_0 , ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη (9.11). Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{t^2}$ αυξάνει πιο γρήγορα από το $e^{\sigma_0 t}$, και άρα δεν έχει μετασχ. Laplace. Ευτυχώς, τέτοια σήματα έχουν ελάχιστη θεωρητική ή πρακτική σημασία.

Βέβαια, όπως και στο μετασχ. Fourier, αυτή η συνθήκη δεν είναι και αναγκαία. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ απειρίζεται στο $t = 0$ και η σχέση (9.11) δεν ικανοποιείται, αλλά ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει και είναι ο $X(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$. Εμείς δεν ασχολούμαστε με τέτοια σήματα, και πάντα όταν ζητείται ο μετασχ. Laplace, υποθέτουμε ότι υπάρχει, δηλ. ότι το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace συγκλίνει.

9.2.3 Εν κατακλείδει...

Ο μετασχ. Laplace είναι γενικά μια “επέκταση” του μετασχ. Fourier, για σήματα των οποίων το συχνοτικό περιεχόμενο δεν μπορεί να υπολογιστεί απ’ την κλασική θεωρία Fourier. Ο μετασχ. Fourier προβάλλει το σήμα πάνω σε συχνότητες που ορίζονται στο φανταστικό άξονα ($e^{-j2\pi f t}$). Αλλάζοντας τις συναρτήσεις βάσης $e^{-j2\pi f t}$ σε $e^{-(\sigma+j2\pi f)t}$, προβάλλουμε το σήμα σε ευθείες παράλληλες με τον άξονα των φανταστικών. Οι νέες συχνότητες $\sigma + j2\pi f$ είναι, όπως είναι φανερό, μιγαδικές πλέον.

Ο μετασχ. Laplace ορίζεται ως:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (9.12)$$

με $s = \sigma + j2\pi f$, $\sigma, f \in \mathbb{R}$. Για αιτιατά σήματα, ορίζεται ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace ως:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (9.13)$$

που δε διαφέρει σε πολλά από τον δίπλευρο μετασχ. Laplace που συζητούσαμε ως τώρα, αλλά δε θα τον χρησιμοποιήσουμε παρά μόνο αργότερα, όταν συζητήσουμε για συστήματα στο χώρο του Laplace.

9.2.4 Αιτιατά Σήματα

Ας συζητήσουμε εδώ πώς μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε σήματα ανάλογα με τη θέση και τη διάρκεια τους στο χρόνο. Αυτή η διάκριση θα μας βοηθήσει πολύ στο να ορίζουμε εύκολα και γρήγορα την περίφημη *Περιοχή Σύγκλισης* του μετασχ. Laplace, στην οποία θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο. Πρώτα όμως, ας δούμε τα είδη σημάτων όσον αφορά την *πλευρικότητα* και την *αιτιατότητά* τους:

- *Αριστερόπλευρο* λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 9.5α')

$$f(t) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (9.14)$$

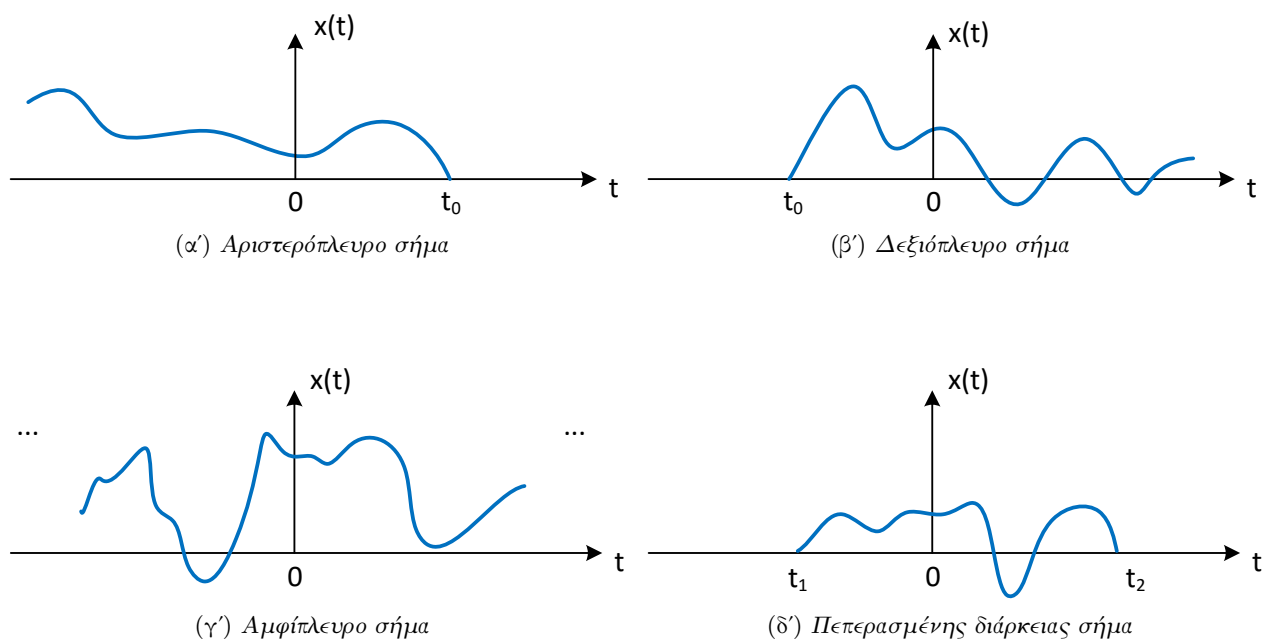
- *Δεξιόπλευρο* λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 9.5β')

$$f(t) = 0, \quad t \leq t_0 \quad (9.15)$$

- *Αμφίπλευρο* (ή *δίπλευρο*) λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 9.5γ') ότι είναι άπειρης διάρκειας αλλά ούτε δεξιόπλευρο ούτε αριστερόπλευρο.

- *Πεπερασμένης διάρκειας* λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 9.5δ')

$$f(t) \neq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (9.16)$$



Σχήμα 9.5: Είδη σημάτων

Η διάκριση των σημάτων όσον αφορά την πλευρικότητά τους είναι σχετικά εύκολη υπόθεση, είτε από τον ορισμό τους είτε από τη γραφική τους παράσταση. Ας γνωρίσουμε όμως εδώ και μια νέα κατηγοριοποίηση σημάτων, που αφορά την *αιτιατότητά* τους:

- *Αιτιατά* λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$f(t) = 0, \quad t < 0 \quad (9.17)$$

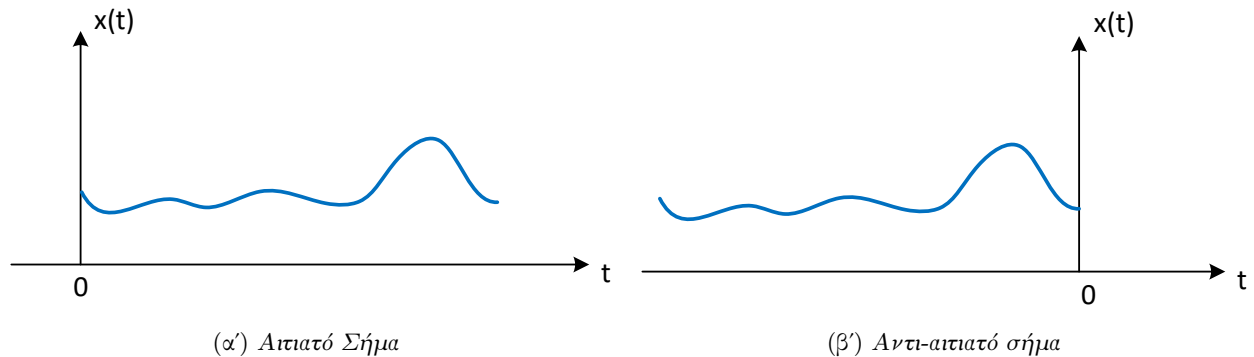
όπως στο Σχήμα 9.6α'.

- *Αντί-αιτιατά* λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$f(t) = 0, \quad t > 0 \quad (9.18)$$

όπως αυτό στο Σχήμα 9.6β'.

- Υπάρχουν και τα μη αιτιατά σήματα, για τα οποία η Σχέση (9.17) δεν ισχύει, όπως τα σήματα σε όλα τα Σχήματα 9.5(α-δ).



Σχήμα 9.6: Αιτιατό και αντι-αιτιατό σήμα



Σχήμα 9.7: Τα αντι-αιτιατά συστήματα μπορούν να γίνουν πραγματοποιήσιμα με χρονική καθυστέρηση!

9.2.5 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Τόσο ο μετασχ. Laplace όσο και η περίφημη Περιοχή Σύγκλισης (region of convergence - ROC) προκαλούν συχνά σύγχυση τόσο όσον αφορά την προέλευσή τους, όσο και τη χρήση τους και τη σημασία τους. Εδώ θα ξεκαθαρίσουμε όλα αυτά, χρησιμοποιώντας τέσσερα χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 9.1:

Ας πάρουμε ένα σήμα για το οποίο ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει, και ας προσπαθήσουμε να βρούμε το μετασχ. Laplace. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad a \in \mathbb{R} \quad (9.19)$$

Λύση:

Γι' αυτό το σήμα, δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier αν $a > 0$. Ας το δείξουμε, ελέγχοντας το κριτήριο σχετικά με την απόλυτη ολοκλήρωση. Ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \int_0^{+\infty} |e^{at}| dt = \int_0^{+\infty} e^{at} dt = \left[\frac{1}{a} e^{at} \right]_0^{+\infty} \quad (9.20)$$

Αν $a \in \mathbb{R}^+$, το ολοκλήρωμα για $t \rightarrow +\infty$ θα αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει. Φυσικά γνωρίζουμε ότι το κριτήριο αυτό είναι ικανό αλλά όχι και αναγκαίο, γιατί π.χ. και για τα ημιτονοειδή σήματα δεν ισχύει το κριτήριο της απόλυτης ολοκλήρωσης αλλά γνωρίζουμε ότι υπάρχει ο μετασχ. Fourier, με χρήση των

συναρτήσεων Δέλτα. Παρ' όλα αυτά, για το συγκεκριμένο σήμα, αυτό είναι αρκετό. Επίσης, αν κάποιος από εσάς μπήκε στον κόπο να σκεφτεί πώς είναι η γραφική παράσταση του σήματος αυτού, θα διαπίστωσε ότι πρόκειται για ένα μη φραγμένου πλάτους σήμα, άρα θα είχε μια υποψία για το ότι δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier, ούτε καν με χρήση συναρτήσεων Δέλτα. ☹

Απ' την άλλη, αν $a < 0$, τότε ο μετασχ. Fourier υπάρχει, μια και το σήμα μας είναι σήμα ενέργειας.

Ας θεωρήσουμε στο παράδειγμά μας, ότι $a \in \mathbb{R}$, για περισσότερη γενικότητα. Προσέξτε ότι το σήμα μας είναι δεξιόπλευρο. Ας δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε τον μετασχ. Laplace και να δούμε μερικά πράγματα:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-s}\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1\right) \quad (9.21)$$

Γνωρίζουμε όμως ³ ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a+jb)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at}e^{jbt} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \infty, & a > 0 \end{cases} \quad (9.22)$$

άρα ξέρουμε ότι η συνάρτηση $e^{-st} = e^{(a-s)t}e^{-j2\pi ft}$ φθίνει στο 0 όταν $t \rightarrow +\infty$, **αν και μόνο αν**

$$a - \sigma < 0 \iff a < \sigma \iff \Re\{s\} > a \quad (9.23)$$

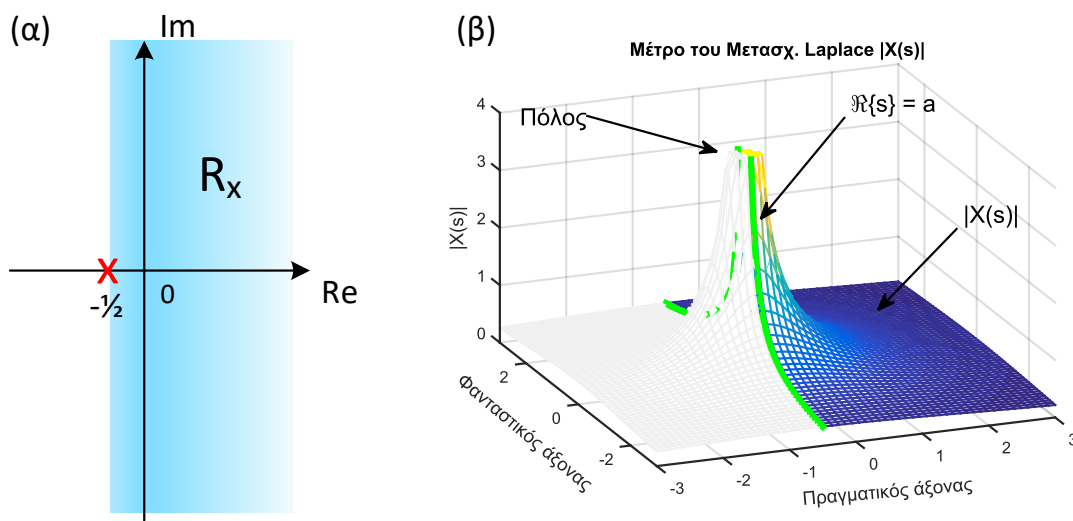
Αυτή η σχέση λέγεται **Πεδίο ή Περιοχή Σύγκλισης**, γιατί αποτελεί το χώρο πάνω στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο υπάρχει ο μετασχ. Laplace, δηλ. το σχετικό ολοκλήρωμα συγκλίνει⁴! Οπότε δείξαμε ότι η συνάρτηση $e^{(a-s)t}$ γράφεται ως γινόμενο δυο συναρτήσεων και το γινόμενό τους συγκλίνει στο μηδέν. Ας ολοκληρώσουμε τη λύση μας.

$$(9.21) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{a-s}\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1\right) = \frac{1}{a-s}(0 - 1) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (9.24)$$

Άρα ο μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t)$, $a \in \mathbb{R}$, είναι

$$x(t) = e^{at}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (9.25)$$

και το Πεδίο Σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα 9.8(α). Θα μπορούσε το a να βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, αφού $a \in \mathbb{R}$. Δε μας ενδιαφέρει τώρα η θέση του, όσο η περιοχή δεξιά του. Ο αριθμός a , που αποτελεί ρίζα



Σχήμα 9.8: (α) Πεδίο Σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο Μετασχ. Laplace.

³Πρέπει να έχετε καταλάβει τι πρόκειται να συμβεί από παρόμοια διαδικασία που είδαμε στο μετασχ. Fourier.

⁴Όμοια με το πεδίο ορισμού στις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

του παρονομαστή του μετασχηματισμού, λέγεται **πόλος** του μετασχ. Laplace, και το πεδίο σύγκλισης για το δεξιόπλευρο σήμα μας είναι το ημιεπίπεδο δεξιά της κατακόρυφης ευθείας $\sigma = a$, όπως βρήκαμε παραπάνω, χωρίς να την περιλαμβάνει. Φυσικά, στο ημιεπίπεδο $\Re\{s\} \leq a$, ο μετασχ. Laplace δε συγκλίνει!

Παρατηρήστε το Σχήμα 9.8(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace. Δείτε ότι στην ευθεία $\Re\{s\} = \sigma = a$ ανήκει το σημείο $s = a$ όπου ο μετασχηματισμός απειρίζεται. Επίσης παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης βρίσκεται δεξιά του πόλου a , και συμβολίζεται με R_x .

Παράδειγμα 9.2:

Έστω το σήμα $x(t) = -e^{at}u(-t)$, του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace.

Λύση:

Αν $a \in \mathbb{R}^+$, τότε το σήμα είναι σήμα ενέργειας, και ο μετασχ. Fourier του υπάρχει. Αν όμως $a \in \mathbb{R}^-$, τότε δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier, και το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier αποκλίνει στο ∞ . Ας θεωρήσουμε ότι $a \in \mathbb{R}$, χωρίς περιορισμούς. Προσέξτε ότι το σήμα μας είναι *αριστερόπλευρο*. Ο μετασχ. Laplace θα είναι:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{(a-s)t} dt = - \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_{-\infty}^0 = - \frac{1}{a-s} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \right) \quad (9.26)$$

Εχουμε ξανά την ίδια κατάσταση με το προηγούμενο παράδειγμα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \quad (9.27)$$

Σκεπτόμενοι ακριβώς όμοια, καταλήγουμε ότι το όριο αυτό φθίνει στο 0 **μόνο αν**

$$a - \sigma > 0 \iff a > \Re\{s\} \iff \Re\{s\} < a \quad (9.28)$$

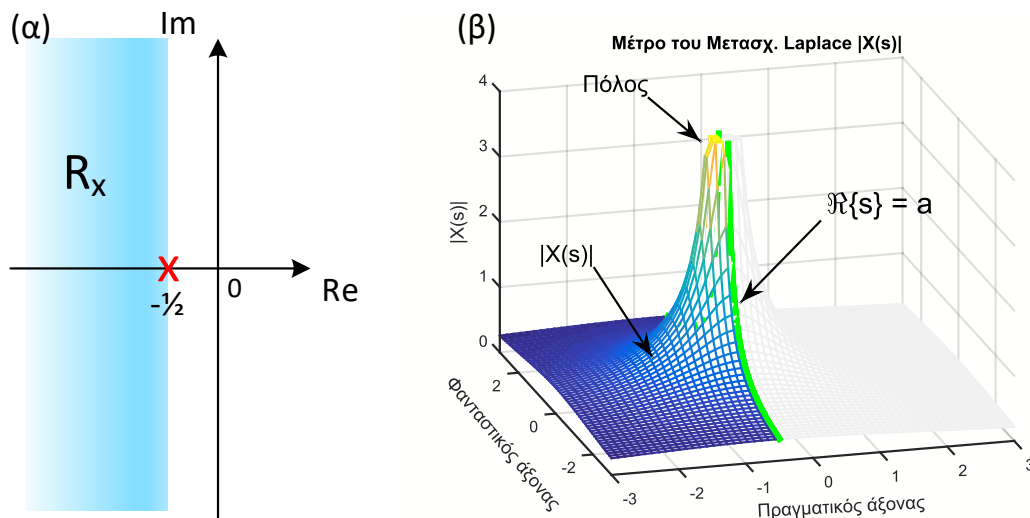
και αυτό είναι το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Στο πεδίο αυτό, το όριο φθίνει στο μηδέν, και άρα από τη σχέση (9.26) έχουμε:

$$(9.26) \Rightarrow X(s) = - \frac{1}{a-s} (1 - 0) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (9.29)$$

Άρα τελικά, έχουμε ότι

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (9.30)$$

με το Πεδίο Σύγκλισης για ένα $a = -1/2$ να φαίνεται στο Σχήμα 9.9(α). Θα μπορούσε το a να βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, δε μας ενδιαφέρει τώρα η θέση του, όσο η περιοχή αριστερά του. Παρατηρήστε ότι το πεδίο



Σχήμα 9.9: (α) Πεδίο Σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο Μετασχ. Laplace.

σύγκλισης για το *αριστερόπλευρο* σήμα μας είναι το ημιεπίπεδο *αριστερά* της κατακόρυφης ευθείας $\sigma = a$, όπως

βρήκαμε παραπάνω, χωρίς να την περιλαμβάνει.

Παρατηρήστε το Σχήμα 9.9(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace. Δείτε ότι στην ευθεία $\Re\{s\} = \sigma = a$ ανήκει το σημείο $s = a$ όπου ο μετασχηματισμός απειρίζεται. Επίσης παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης βρίσκεται αριστερά του πόλου a , και συμβολίζεται με R_x .

Παράδειγμα 9.3:

Ας ορίσουμε το σήμα

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{at}u(-t), \quad a \in \mathbb{R} \quad (9.31)$$

του οποίου ζητούμε το μετασχ. Laplace.

Λύση:

Δεν το αναφέραμε ως τώρα, αλλά δεν είναι και μυστικό, αφού αποδεικνύεται εύκολα - και θα το δούμε παρακάτω: ο μετασχ. Laplace είναι γραμμικός. Άρα το άθροισμα δυο σημάτων έχει μετασχ. Laplace το άθροισμα των επιμέρους μετασχηματισμών. Όσο για το πεδίο σύγκλισης, αυτό είναι - όπως θα δούμε σύντομα - ένα υπερσύνολο που περιλαμβάνει τουλάχιστον την **τομή** των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Άρα λοιπόν,

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-a} = \frac{2}{s-a}, \quad R_x = R_{x_1} \cap R_{x_2} = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < a\} = \emptyset \quad (9.32)$$

Άρα βλέπουμε ότι παρ' όλο που μπορούμε να προσθέσουμε τους επιμέρους μετασχηματισμούς, ο συνολικός μετασχηματισμός Laplace δεν υπάρχει, γιατί δεν υπάρχει πεδίο στο s -επίπεδο στο οποίο να συγκλίνει! Άρα βλέπουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει ο μετασχ. Laplace για όλα τα σήματα.

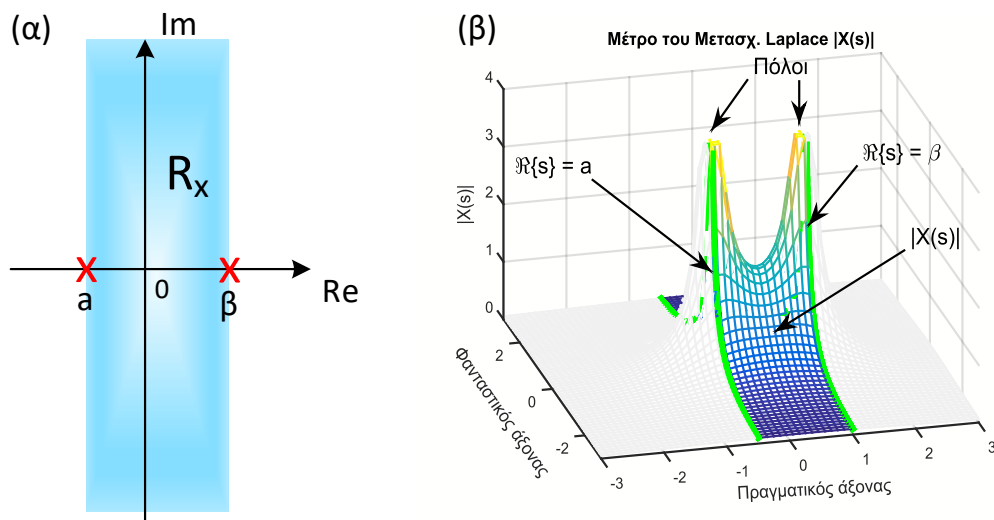
Ας δούμε όμως τι θα συνέβαινε αν είχαμε

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{\beta t}u(-t), \quad a, \beta \in \mathbb{R}, \quad a \neq \beta \quad (9.33)$$

Τότε

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-\beta} = \frac{2s - (a+\beta)}{(s-a)(s-\beta)}, \quad R_x = R_{x_1} \cap R_{x_2} = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < \beta\} \quad (9.34)$$

το οποίο δεν είναι απαραίτητα το κενό σύνολο. Εξαρτάται από τις σχετικές θέσεις των a, β . Π.χ. αν $a < \beta$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι μια “λωρίδα” στο s -επίπεδο, το $a < \Re\{s\} < \beta$, όπως στο Σχήμα 9.10, ενώ αν $a > \beta$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο. Προσέξτε ότι εδώ, το συνολικό μας σήμα $x(t)$ είναι **αμφίπλευρο**, και έτσι το



Σχήμα 9.10: (α) Πεδίο Σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο Μετασχ. Laplace.

πεδίο σύγκλισης δεν προέκυψε ούτε δεξιόπλευρο ούτε αριστερόπλευρο, αλλά μια “λωρίδα” στο μιγαδικό επίπεδο. Επίσης, στο παράδειγμα αυτό το πολυώνυμο του αριθμητή δεν είναι σταθερό όπως στα προηγούμενα παραδείγματα. Οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή ονομάζονται **μηδενικά**, κι εδώ η ρίζα είναι μια, η $s = (a + \beta)/2$. Οι ρίζες

του πολωνύμου του παρονομαστή είναι οι $s = a$, $s = \beta$ και είπαμε ότι ονομάζονται **πόλοι**. Θα μιλήσουμε για τους πόλους, τα μηδενικά, και τη σημασία τους εκτενέστερα στη συνέχεια.

Παρατηρήστε το Σχήμα 9.10(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace. Δείτε ότι στις ευθείες $\Re\{s\} = \sigma = a$ και $\Re\{s\} = \sigma = \beta$ ο μετασχηματισμός απειρίζεται. Επίσης παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης βρίσκεται ανάμεσα στον πόλο a και β , και συμβολίζεται με R_x , όπως στο Σχήμα 9.10(α).

Παράδειγμα 9.4:

Ας βρούμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = \delta(t) \quad (9.35)$$

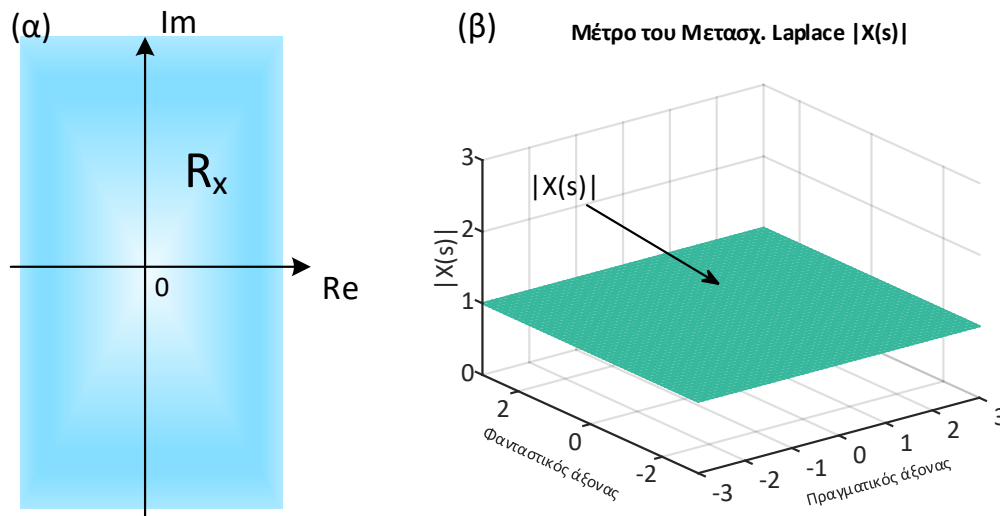
Λύση:
Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1 \quad (9.36)$$

από τη γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad (9.37)$$

Παρατηρήστε ότι δεν προέκυψε κανείς περιορισμός για το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης Δέλτα, οπότε αυτό είναι όλο το s -επίπεδο, όπως στο Σχήμα 9.11(α).



Σχήμα 9.11: (α) Πεδίο Σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο Μετασχ. Laplace.

Παρατηρήστε το Σχήμα 9.11(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace, το οποίο και είναι μοναδιαίο για κάθε s . Επίσης, δείτε ότι ο μετασχηματισμός δεν απειρίζεται σε κανένα σημείο.

Ας ξεκινήσουμε τις παρατηρήσεις μας.

Παρατηρήσεις

1. Η πιο σημαντική παρατήρηση έρχεται αν συγκρίνουμε τις Σχέσεις (9.25) και (9.30). Ας τις ξαναγράψουμε εδώ για ευκολία:

$$x(t) = e^{at}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (9.38)$$

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (9.39)$$

Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι “παρατηρούμε ότι δυο εντελώς διαφορετικά σήματα στο χρόνο, έχουν τον ίδιο μετασχ. Laplace.” Αυτό όμως είναι λάθος! Τα σήματα αυτά έχουν την ίδια αλγεβρική μορφή στο χώρο του μετασχ. Laplace. Ο μετασχηματισμός Laplace όμως περιλαμβάνει ΚΑΙ το πεδίο σύγκλισης! Αυτό είναι που ξεχωρίζει τους δυο, ίδιους κατά τα άλλα, μετασχηματισμούς. Χωρίς το πεδίο σύγκλισης, δε θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε σε ποιο σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ που έχουμε παραπάνω!

- Είδατε παραπάνω ότι το πεδίο σύγκλισης δεν είναι κάτι τυχαίο. Προκύπτει απ’ την ανάγκη να συγκλίνει το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace! Κάθε μετασχ. Laplace έρχεται “μαζί” με το πεδίο σύγκλισης. Χωρίς αυτό, ο μετασχ. Laplace είναι χωρίς νόημα! Συνηθίστε λοιπόν να γράφετε το μετασχηματισμό ΜΑΖΙ με το εκάστοτε πεδίο σύγκλισης.

- Προφανώς δε χρειάζεται σε κάθε άσκηση να αποδεικνύετε το πεδίο σύγκλισης, εκτός αν σας ζητείται ρητά, π.χ. σε εφαρμογή του ορισμού. Ακόμα και τότε, δε χρειάζεται να δείχνετε αναλυτικά ότι οι συναρτήσεις είναι φραγμένες, κλπ. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε έτοιμα τα αποτελέσματα της θεωρίας, ότι δηλαδή αρκεί το πραγματικό μέρος του εκθέτη να είναι θετικό ή αρνητικό, ανάλογα τι σας βολεύει για να συγκλίνει το όριο στο μηδέν.

- Ίσως παρατηρήσατε ότι όλοι οι μετασχ. Laplace που υπολογίσαμε μπορούν να γραφούν στη γενικότερη μορφή

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (9.40)$$

με $P(s)$, $Q(s)$ πολυώνυμα του s . Αναφέραμε νωρίτερα ότι οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή ονομάζονται *πόλοι* - απειρίζουν το μετασχ. Laplace - ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή ονομάζονται *μηδενικά* - προφανώς μηδενίζουν το μετασχ. Laplace.

- Ο πόλος a που είδαμε στα Παραδείγματα 9.1 και 9.2 θα μπορούσε να είναι μιγαδικός αριθμός. Γενικά, οι πόλοι δεν είναι απαραίτητο να είναι πάντα πραγματικοί. Δεν αλλάζει τίποτα σε όσα είπαμε παραπάνω, παρά μόνον ότι πλέον τα πεδία σύγκλισης θα είναι στη μορφή

$$\Re\{s\} \geq \Re\{a\} \quad (9.41)$$

ή

$$\Re\{a\} < \Re\{s\} < \Re\{\beta\} \quad (9.42)$$

δηλ. χρησιμοποιούμε το πραγματικό μέρος του, κατάλληλου κάθε φορά, μιγαδικού πόλου στην περιγραφή του πεδίου σύγκλισης. Αυτό προκύπτει αναλυτικά από την εφαρμογή του ορισμού.

- Τα πεδία σύγκλισης δεν περιέχουν **ποτέ** πόλους, αφού εξ’ ορισμού ένας πόλος είναι σημείο του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζεται ο μετασχ. Laplace, οπότε η συμπερίληψή ενός πόλου του στο πεδίο σύγκλισης δεν έχει νόημα!

- Από τη στιγμή που οι συναρτήσεις $\sigma = \lambda$ ορίζουν κατακόρυφες ευθείες στο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών (το λεγόμενο s -επίπεδο), τα πεδία σύγκλισης οποιουδήποτε μετασχηματισμού Laplace θα είναι είτε

(α') μια περιοχή του επιπέδου αριστερά μιας κατακόρυφης γραμμής, όπου θα ορίζεται από τον αριστερότερο πόλο, είτε

(β') μια περιοχή του επιπέδου δεξιά μιας κατακόρυφης γραμμής, όπου θα ορίζεται από το δεξιότερο πόλο, είτε

(γ') μια “λωρίδα” μεταξύ δυο κατακόρυφων γραμμών, όπου ορίζονται από δυο πόλους.

- Ένας μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους.

- Αποδεικνύεται ότι αν το $x(t)$ είναι δεξιόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι “δεξιόπλευρο”, δηλ. μια περιοχή του επιπέδου δεξιά μιας κατακόρυφης γραμμής, όπου θα ορίζεται από το δεξιότερο πόλο. Για παράδειγμα, $\Re\{s\} > \Re\{a\}$ με $a =$ δεξιότερος πόλος.

10. Αποδεικνύεται ότι αν το $x(t)$ είναι αριστερόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι “αριστερόπλευρο”, δηλ. μια περιοχή του επιπέδου αριστερά μιας κατακόρυφης γραμμής, όπου θα ορίζεται από τον αριστερότερο πόλο. Για παράδειγμα, $\Re\{s\} < \Re\{a\}$ με $a =$ αριστερότερος πόλος.
11. Αποδεικνύεται ότι αν το $x(t)$ είναι αμφίπλευρο, δηλ. άθροισμα δεξιόπλευρων και αριστερόπλευρων σημάτων, το πεδίο σύγκλισης είναι είτε μια “λωρίδα” στο ημιεπίπεδο μεταξύ δυο πόλων (π.χ. $\Re\{a\} < \Re\{s\} < \Re\{b\}$), είτε το κενό σύνολο (γιατί τα επιμέρους πεδία σύγκλισης δε θα επικαλύπτονται). Στην περίπτωση που το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο, προφανώς ο μετασχ. Laplace δεν ορίζεται.
12. Αν το $x(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, το πεδίο σύγκλισης είναι ΟΛΟ το s -επίπεδο. Αυτό μπορείτε εύκολα να το κατανοήσετε μια και το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace θα έχει άκρα δυο συγκεκριμένες χρονικές τιμές, οπότε δε θα προκύψει κάποιος περιορισμός λόγω κάποιου ορίου στο $\pm\infty$ - τέτοια όρια δεν υπάρχουν στην περίπτωση αυτή.
13. Συχνά, το πεδίο σύγκλισης γράφεται σύντομα ως ROC, από τα αρχικά της αγγλικής μετάφρασης του πεδίου σύγκλισης: Region Of Convergence.
14. Ξαναδιαβάστε τις παραπάνω παρατηρήσεις! (το loop τερματίζει όταν τις κατανοήσετε) ☺

9.3 Σύνδεση με το μετασχηματισμό Fourier

Όταν θέτουμε $\sigma = 0$ στο ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace, αυτό που κάνουμε “σιωπηλά” είναι ότι εκτιμούμε το μετασχ. Laplace σε συχνότητες που βρίσκονται πάνω στην κατακόρυφη ευθεία $\sigma = 0$ του μιγαδικού επιπέδου, που δεν είναι άλλη απ’ τον άξονα των φανταστικών αριθμών $j2\pi f$!

Για να μπορούμε όμως να το κάνουμε αυτό, ΠΡΕΠΕΙ ο κατακόρυφος άξονας των φανταστικών $j2\pi f$, δηλ. η κατακόρυφη ευθεία $\sigma = 0$, να περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace! Αλλιώς δεν έχει κανένα νόημα ο υπολογισμός του $X(s)|_{\sigma=0}$! Γι’ αυτό λοιπόν, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace, πρέπει να προσέχουμε πρώτα αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Αν περιέχεται, καλώς, αντικαθιστούμε $\sigma = 0$ στον τύπο του μετασχ. Laplace και έχουμε το μετασχ. Fourier. Αν όχι, τότε ο μετασχ. Fourier ΔΕΝ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace! Ας μιλήσουμε όμως με λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια σχετικά με αυτά...

Ο ορισμός του μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (9.43)$$

είναι ταυτόσημος με τον ορισμό του μετασχ. Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (9.44)$$

αν στη Σχέση (9.44) θέσουμε όπου f το $s = \sigma + j2\pi f$. Είναι εύλογο να περιμένει κανείς ότι ο μετασχ. Laplace, $X(s)$, ενός σήματος $x(t)$, να είναι ίδιος με τον μετασχ. Fourier, $X(f)$, του ίδιου σήματος, με το $j2\pi f$ να έχει αντικατασταθεί από το s . Για παράδειγμα, μάθαμε πριν λίγο ότι

$$e^{-at}u(t), a > 0 \xrightarrow{L} \frac{1}{a+s} \quad (9.45)$$

Αντικαθιστώντας το s με το $j2\pi f$, έχουμε ότι

$$X(s) \Big|_{s=j2\pi f} = \frac{1}{a+j2\pi f} = X(f) \quad (9.46)$$

που είναι ο μετασχ. Fourier, όπως είδαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο. Δυστυχώς αυτή η διαδικασία δεν ισχύει για κάθε σήμα $x(t)$. Μπορούμε να την χρησιμοποιούμε μόνο όταν η περιοχή σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιέχει το φανταστικό ($j2\pi f$) άξονα.

Για παράδειγμα, ο μετασχ. Fourier της βηματικής συνάρτησης $x(t) = u(t)$ είναι ο

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (9.47)$$

Ο αντίστοιχος μετασχ. Laplace είναι ο

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s}, \Re\{s\} > 0 \quad (9.48)$$

και όπως βλέπουμε από την περιοχή σύγκλισης, δεν περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας $\sigma = \Re\{s\} = 0$. Άρα, ο μετασχ. Laplace ΔΕΝ μπορεί να μας δώσει το μετασχ. Fourier, αλλά ούτε και το αντίστροφο! Σε αυτές τις περιπτώσεις, η σχέση μεταξύ των δυο μετασχηματισμών δεν είναι τόσο απλή. Ο λόγος για αυτήν την περιπλοκή σχετίζεται με τη σύγκλιση του ολοκληρώματος του μετασχ. Fourier, όπου η ολοκλήρωση περιορίζεται πάνω στον φανταστικό άξονα. Λόγω αυτού του περιορισμού, το ολοκλήρωμα Fourier για τη βηματική συνάρτηση δε συγκλίνει. Χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια γενικευμένη συνάρτηση $(\delta(f))$ για τη σύγκλιση.

Αντιθέτως, το ολοκλήρωμα Laplace για τη βηματική συνάρτηση συγκλίνει αλλά μόνο για $\Re\{s\} > 0$, μια περιοχή που είναι “απαγορευμένη” για το μετασχ. Fourier! ☹

Ένα ακόμα ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι παρ’ όλο που ο μετασχ. Laplace είναι μια γενίκευση του μετασχ. Fourier, υπάρχουν σήματα (π.χ. περιοδικά σήματα), για τα οποία ο μετασχ. Laplace δεν υπάρχει, ενώ ο μετασχ. Fourier υπάρχει! ☹ (αλλά δεν προκύπτει από απλή σύγκλιση του ολοκληρώματος).



Σχήμα 9.12: Ο μετασχ. Fourier είναι παντού... ☺

Οπότε για ένα οποιοδήποτε σήμα

Σχέση Μετασχ. Laplace και Μετασχ. Fourier

Ο μετασχ. Fourier $X(f)$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace $X(s)$ θέτοντας $\Re\{s\} = \sigma = 0$, δηλ. $X(f) = X(s) \Big|_{s=j2\pi f}$, μόνον αν το Πεδίο Σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα $j2\pi f$.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα που θα επιβεβαιώσουν την παραπάνω συζήτηση.

Παράδειγμα 9.5:

Βρείτε το μετασχ. Laplace και το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad (9.49)$$

με $a = -4$ και $a = -2$.

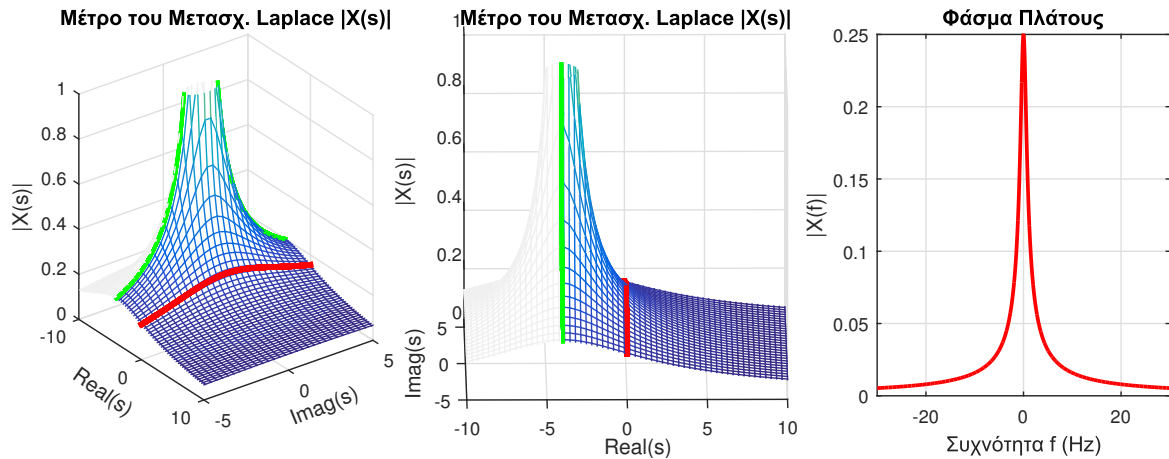
Λύση:

Είδαμε νωρίτερα ότι αυτό το σήμα έχει μετασχ. Laplace ως

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \Re\{s\} > \Re\{a\} \quad (9.50)$$

και γνωρίζουμε ότι έχει μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f + a} \quad (9.51)$$

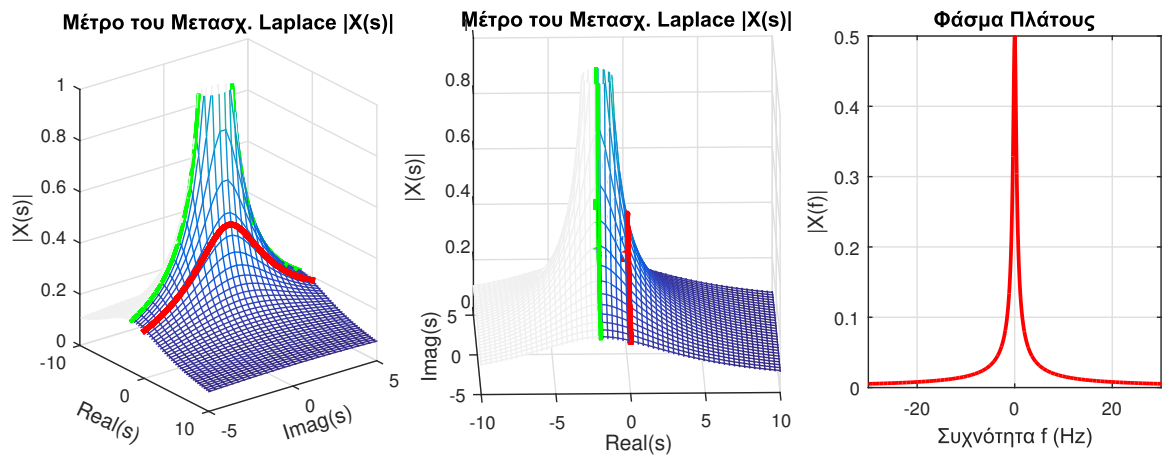


Σχήμα 9.13: Μέτρο μετασχ. Laplace $|X(s)|$ και φανταστικός άξονας (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(f)|$, για $a = -4$.

Στα Σχήματα 9.13, 9.14 βλέπετε το μέτρο του μετασχ. Laplace $|X(s)|$ για μερικές τιμές του s από δυο οπτικές γωνίες, και για $a = -4$ και $a = -2$ αντίστοιχα, καθώς και το μέτρο του Μετασχ. Fourier του ίδιου σήματος, το οποίο θυμίζεται ότι είναι

$$|X(f)| = \left| \frac{1}{j2\pi f + a} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (9.52)$$

Παρατηρήστε στα τρισδιάστατα γραφήματα τις τιμές του μετασχηματισμού επάνω στο φανταστικό άξονα που έχουν



Σχήμα 9.14: Μέτρο μετασχ. Laplace $|X(s)|$ και φανταστικός άξονας (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(f)|$, για $a = -2$.

σχεδιαστεί επάνω στο $|X(s)|$ - εκεί ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier, και ο άξονας αυτός έχει “απλωθεί” επάνω στο τρισδιάστατο γράφημα για να μας δώσει τις τιμές του $|X(f)|$! Είναι σχεδόν οι ίδιες τιμές με το $|X(f)|$ που είναι σχεδιασμένο ως διδιάστατο σήμα και στα δύο Σχήματα: η μόνη διαφορά είναι ότι η κόκκινη χαμπύλη επάνω στις τριδιάστατες επιφάνειες αποτελεί συνάρτηση του $\omega = 2\pi f$ αντί του f . Ακολουθήστε τις τιμές του φανταστικού άξονα από $-\infty$ ως $+\infty$ επάνω στο $|X(s)|$ και δείτε ότι ακολουθούν ακριβώς την ίδια μονοτονία με το $|X(f)|$, με τη μόνη διαφορά της κλιμάκωσης κατά 2π . Το τελευταίο σημαίνει ότι η κόκκινη γραμμή επάνω στην επιφάνεια του $|X(s)|$ αποτελεί το $|X(j2\pi f)|$ και όχι το $|X(f)|$ - όμως εύκολα μπορεί κανείς να πάρει το $|X(f)|$ από το $|X(j2\pi f)|$ απλώς κάνοντας μια κλιμάκωση της μεταβλητής $2\pi f$ κατά $1/(2\pi)$.

Επίσης, προσέξτε τον πόλο στη θέση $s = -4$ και $s = -2$, ο οποίος απειρίζεται το $|X(s)|$. Τέλος, το $|X(s)|$ μηδενίζεται για $s \rightarrow \infty$, οπότε καταλαβαίνετε γιατί η γραφική παράσταση έχει αυτή τη μορφή όσο μεγαλώνουν οι συχνότητες κατά απόλυτη τιμή.

Συγκρίνετε το Σχήμα 9.13 με το Σχήμα 9.14. Καταλαβαίνετε γιατί άλλαξε το μέτρο του μετασχ. Fourier κατ’ αυτόν τον τρόπο; Πώς επηρεάστηκε το μέτρο του φάσματος πλάτους όταν ο πόλος πλησίασε το φανταστικό άξονα;

Μπορείτε να αντιληφθείτε τι θα συμβεί αν ο πόλος βρεθεί ακριβώς επάνω στο φανταστικό άξονα, δηλ. στη θέση $s = 0$;

Παράδειγμα 9.6:

Βρείτε το μετασχ. Laplace και Fourier της συνάρτησης Δέλτα, $x(t) = \delta(t)$.

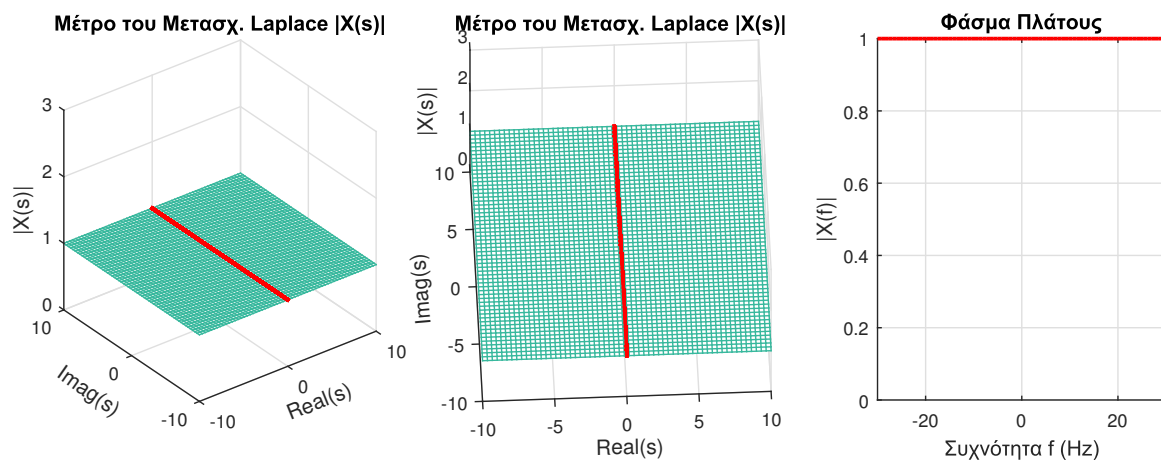
Λύση:
Νωρίτερα δείξαμε ότι

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(s) = 1, \quad \forall s \quad (9.53)$$

και γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(f) = 1 \quad (9.54)$$

Στο Σχήμα 9.15, βλέπουμε ακριβώς αυτό που περιμέναμε. Για κάθε τιμή του s , ο μετασχ. Laplace είναι σταθερός



Σχήμα 9.15: Μέτρο μετασχ. Laplace $|X(s)|$ και φανταστικός άξονας (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(f)|$, της συνάρτησης $x(t) = \delta(t)$.

και ίσος με 1, το ίδιο και ο μετασχ. Fourier που ορίζεται επάνω στο φανταστικό άξονα.

9.4 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Οι ιδιότητες του μετασχ. Laplace είναι πολύ όμοιες με αυτές των σειρών και του μετασχ. Fourier. Οι κυριότερες βρίσκονται στον πίνακα 9.1, όπου ξεχωριστά εμφανίζονται μόνο οι ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχ. Laplace που είναι διαφορετικές από αυτές του δίπλευρου - υπενθυμίζεται ότι ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace θα μας απασχολήσει αργότερα στη μελέτη των συστημάτων.

9.4.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Παρακάτω ακολουθούν αποδείξεις των ιδιοτήτων του Πίνακα 9.1, μαζί με παραδείγματα εφαρμογής τους. Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Laplace $X(s)$ με πεδίο σύγκλισης R_x , και - όπου χρειάζεται - ένα σήμα $y(t)$ έχει μετασχ. Laplace $Y(s)$ με πεδίο σύγκλισης R_y .

9.4.1.1 Γραμμικότητα

Για ένα σήμα $z(t) = Ax(t) + By(t)$, με A, B σταθερές, ο μετασχ. Laplace του δίνεται ως

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax(t) + By(t))e^{-st}dt \quad (9.55)$$

$$= A \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt + B \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt \quad (9.56)$$

$$= AX(s) + BY(s) \quad (9.57)$$

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x}(t)$ $\mathbf{y}(t)$	$\mathbf{X}(s)$ $\mathbf{Y}(s)$	$\mathbf{R}_x$ $\mathbf{R}_y$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στο χώρο του s	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-s)$,	$-R_x$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
n -οστή παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγωγή στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n -οστή παραγωγή στη συχνότητα	$(-1)^n t^n x(t)$	$\frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \supseteq (R_x \cap \{\Re\{s\} > 0\})$

Πίνακας Ιδιοτήτων Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R \supseteq R_x$
n -οστή παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big _{t=0}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$	$R \supseteq (R_x \cap \{\Re\{s\} > 0\})$

Πίνακας 9.1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Laplace

με $R_z \supseteq R_x \cap R_y$.

Άρα

$$Ax(t) + By(t) \longleftrightarrow AX(s) + BY(s), \quad R \supseteq R_x \cap R_y \quad (9.58)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η εφαρμογή της γραμμικότητας είναι εύκολη και το πεδίο σύγκλισης αποτελείται από την τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Θα ήταν πιο ενδιαφέρον να δούμε ένα παράδειγμα όπου το πεδίο σύγκλισης του αθροίσματος είναι υπερσύνολο της τομής των επιμέρους πεδίων.

Παράδειγμα 9.7:

Έστω οι μετασχ. Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s-2} \quad (9.59)$$

και

$$Y(s) = -\frac{1}{(s-1)(s-2)} \quad (9.60)$$

των οποίων τα επιμέρους πεδία σύγκλισης είναι $R_x = \{\sigma > 2\}$ και $R_y = \{\sigma > 2\}$. Ζητείται ο μετασχ. Laplace του αθροίσματος των δυο μετασχηματισμών.

Λύση:

Η τομή των δυο πεδίων είναι $R = \{\sigma > 2\}$. Όμως ο μετασχ. Laplace του αθροίσματος $x(t) + y(t)$ είναι

$$X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)(s-1)} = \frac{s-1}{(s-1)(s-2)} - \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{s-2}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-1} \quad (9.61)$$

το οποίο έχει πεδίο σύγκλισης το $R_{x+y} = \{\sigma > 1\}$, που είναι υπερσύνολο του $\{\sigma > 2\}$.

9.4.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Για το σήμα $y(t) = x(t - t_0)$, με $t_0 \in \mathbb{R}$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-s(u+t_0)}du = e^{-st_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-su}du \\ &= e^{-st_0} X(s) \end{aligned}$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει το $R_y = R_x$.

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow X(s)e^{-st_0}, \quad R = R_x \quad (9.62)$$

Παράδειγμα 9.8:

Έστω το σήμα $y(t) = 3e^{-3t+6}u(t-2)$. Ας βρούμε το μετασχ. Laplace του.

Λύση:

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να γράψουμε το σήμα ως

$$y(t) = 3e^{-3t+6}u(t-2) = 3e^{-3(t-2)}u(t-2) = x(t-2) \quad (9.63)$$

με

$$x(t) = 3e^{-3t}u(t) \quad (9.64)$$

του οποίου ο μετασχ. Laplace είναι γνωστός ως

$$X(s) = 3\frac{1}{s+3}, \quad R_x = \{\sigma > -3\} \quad (9.65)$$

Άρα για το $y(t) = x(t-2)$ θα έχουμε

$$Y(s) = 3e^{-2s} \frac{1}{s+3}, \quad R_y = \{\sigma > -3\} \quad (9.66)$$

9.4.1.3 Μετατόπιση στο χώρο του s

Για το σήμα $Y(s) = X(s-s_0)$, με $s_0 \in \mathcal{C}$, ο αντίστροφος μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s-s_0)e^{st} ds \quad (9.67)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-\Re\{s_0\}-j\infty}^{\sigma-\Re\{s_0\}+j\infty} X(u)e^{(u+s_0)t} du = e^{s_0 t} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-\Re\{s_0\}-j\infty}^{\sigma-\Re\{s_0\}+j\infty} X(u)e^{ut} du \quad (9.68)$$

$$= e^{s_0 t} x(t) \quad (9.69)$$

με το πεδίο σύγκλισης να είναι το πεδίο R_x μετατοπισμένο κατά $\Re\{s_0\}$ στο μιγαδικό επίπεδο.
Άρα

$$e^{s_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(s-s_0), \quad R = \text{μετατοπισμένο } R_x \quad (9.70)$$

Παράδειγμα 9.9:

Για το αιτιατό σήμα με μετασχ. Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad R_x = \{\sigma > -2\} \quad (9.71)$$

μπορούμε να ορίσουμε το ακόλουθο μετατοπισμένο σήμα στο χώρο του s

$$Y(s) = X(s-2) = \frac{1}{(s-2)+2} = \frac{1}{s} \quad (9.72)$$

Αναζητούμε το πεδίο σύγκλισης του τελευταίου.

Λύση:

Το πεδίο σύγκλισης $R_x = \{\sigma > -2\}$ γίνεται $R_y = \{(\sigma-2) > -2\} = \{\sigma > 0\}$, που συμφωνεί με το αναμενόμενο πεδίο σύγκλισης του $Y(s)$.

9.4.1.4 Συζυγές σήμα στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = x^*(t)$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-st} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-s^*t} dt \right)^* = X^*(s^*) \quad (9.73)$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει ίδιο, $R_y = R_x$.
Άρα

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(s^*), \quad R = R_x \quad (9.74)$$

Παράδειγμα 9.10:

Έστω ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ με μετασχ. Laplace $X(s)$. Σας δίνεται ότι το σήμα αυτό έχει έναν πόλο στη θέση $s = \frac{1}{2}e^{j\pi/3}$ κι ένα μηδενικό στη θέση $s = -1$. Ο μετασχηματισμός δεν έχει άλλους πόλους ή μηδενικά στο s -επίπεδο. Επίσης σας δίνεται ότι $X(0) = 2$. Βρείτε όσα περισσότερα μπορείτε στοιχεία μπορείτε για το μετασχ. Laplace $X(s)$.

Λύση:

Αφού το σήμα είναι πραγματικό στο πεδίο του χρόνου, θα ισχύει $x(t) = x^*(t)$, και από την ιδιότητα της συζυγίας θα ισχύει

$$X(s) = X^*(s^*) \quad (9.75)$$

Αυτό σημαίνει ότι αν το $X(s)$ έχει πόλο στο $s = s_0$, υποχρεωτικά θα έχει πόλο και στο $s = s_0^*$! Άρα μια έκφραση για το μετασχηματισμό θα είναι

$$X(s) = \frac{A(s - s_1)}{(s - s_0)(s - s_0^*)} = \frac{A(s + 1)}{\left(s - \frac{1}{2}e^{j\pi/3}\right)\left(s - \frac{1}{2}e^{-j\pi/3}\right)} = \frac{A(s + 1)}{s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}} \quad (9.76)$$

Η τιμή της σταθεράς A μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $X(0) = 2$, αφού

$$X(0) = \left. \frac{A(s + 1)}{s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}} \right]_{s=0} = \frac{A}{\frac{1}{4}} = 2 \iff A = \frac{1}{2} \quad (9.77)$$

Για το πεδίο σύγκλισης δεν έχουμε αρκετά στοιχεία αλλά εφ'όσον γνωρίζουμε τους πόλους, τα πιθανά πεδία σύγκλισης θα είναι

- $\Re\{s\} > \Re\{s_0\} = \frac{1}{4}$
- $\Re\{s\} < \Re\{s_0\} = \frac{1}{4}$

Η παραπάνω ιδιότητα μας αποκαλύπτει κάτι πολύ σημαντικό: ότι ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ στο πεδίο του χρόνου θα έχει:

- πραγματικούς πόλους και μηδενικά ή/και
- συζυγείς μιγαδικούς πόλους και μηδενικά

9.4.1.5 Αντιστροφή στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = x(-t)$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-st}dt \quad (9.78)$$

$$= - \int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{su}du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-(-s)u}du \quad (9.79)$$

$$= X(-s) \quad (9.80)$$

με το πεδίο σύγκλισης να αντιστρέφεται, δηλ. $R_y = -R_x$.

Άρα

$$\boxed{x(-t) \longleftrightarrow X(-s), \quad R = -R_x} \quad (9.81)$$

Παράδειγμα 9.11:

Για το σήμα $x(t) = e^{at}u(t)$, ο μετασχ. Laplace είναι

$$X(s) = \frac{1}{s - a}, \quad R_x = \{\sigma > a\} \quad (9.82)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(-t)$.

Λύση:

Σύμφωνα με την ιδιότητα, για το σήμα $y(t) = x(-t) = e^{-at}u(-t)$, ο μετασχ. Laplace είναι

$$Y(s) = \frac{1}{-s - a} = -\frac{1}{s + a}, \quad R_y = \{\sigma < -a\} \quad (9.83)$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με το Παράδειγμα 9.2 που είδαμε νωρίτερα.

9.4.1.6 Στάθμιση στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = x(at)$ με $a > 0$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-st}dt \quad (9.84)$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-s \frac{u}{a}} du = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-\frac{s}{a} u} du \quad (9.85)$$

$$= \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (9.86)$$

ενώ για $a < 0$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-st} dt \quad (9.87)$$

$$= \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(u) e^{-s \frac{u}{a}} du = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-\frac{s}{a} u} du \quad (9.88)$$

$$= -\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (9.89)$$

Άρα σε κάθε περίπτωση,

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad R = aR_x \quad (9.90)$$

Παράδειγμα 9.12:

Αν το σήμα $x(t) = e^{at}u(t)$ έχει μετασχ. Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad R_x = \{\sigma > a\} \quad (9.91)$$

τότε βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $y(t) = e^{2at}u(2t)$.

Λύση:

Το σήμα $y(t) = e^{2at}u(2t)$ θα έχει μετασχ. Laplace

$$Y(s) = \frac{1}{2} X\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{s}{2} - a} = \frac{1}{s - 2a}, \quad R_y = \{\sigma > 2a\} \quad (9.92)$$

Ο αναγνώστης καλείται να το επιβεβαιώσει αναλυτικά.

9.4.1.7 Συνέλιξη στο χρόνο

Για τα σήματα $x(t), y(t)$, που το καθένα έχει πεδίο σύγκλισης R_x, R_y αντίστοιχα, το σήμα $z(t) = x(t) * y(t)$ έχει μετασχ. Laplace ως

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t)) e^{-st} dt \quad (9.93)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau) e^{-st} dt \right) d\tau \quad (9.94)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(e^{-s\tau} Y(s) \right) d\tau = Y(s) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (9.95)$$

$$= Y(s) X(s) \quad (9.96)$$

με πεδίο σύγκλισης $R_z \supseteq R_x \cap R_y$.

Άρα

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(s) Y(s), \quad R \supseteq R_x \cap R_y \quad (9.97)$$

Παράδειγμα 9.13:

Ας θεωρήσουμε δυο αιτιατά σήματα

$$x(t) = e^{at}u(t) \quad (9.98)$$

$$y(t) = e^{2at}u(t) \quad (9.99)$$

με $a > 0$. Βρείτε το μετασχ. Laplace της συνέλιξής τους.

Λύση:
Η συνέλιξή τους μας δίνει (δείξτε το!)

$$x(t) * y(t) = \frac{1}{a}(e^{2at} - e^{at})u(t) \quad (9.100)$$

Οι μετασχ. Laplace των δυο σημάτων είναι

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad R_x = \{\sigma > a\} \quad (9.101)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-2a}, \quad R_y = \{\sigma > 2a\} \quad (9.102)$$

Το γινόμενο $X(s)Y(s)$ δίνει

$$X(s)Y(s) = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \quad (9.103)$$

και μπορούμε αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα να βρούμε το αποτέλεσμα της συνέλιξης ως

$$x(t) * y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-2a)}\right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \quad (9.104)$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-2a)}\right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \quad (9.105)$$

με

$$A = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}(s-a)\Big|_{s=a} = -\frac{1}{a} \quad (9.106)$$

$$B = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}(s-2a)\Big|_{s=2a} = \frac{1}{a} \quad (9.107)$$

οπότε

$$x(t) * y(t) = L^{-1}\left\{\frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-2a)}\right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \quad (9.108)$$

$$= L^{-1}\left\{-\frac{1/a}{(s-a)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1/a}{(s-2a)}\right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \cap \{\sigma > a\} \quad (9.109)$$

$$= -\frac{1}{a}e^{at}u(t) + \frac{1}{a}e^{2at}u(t) \quad (9.110)$$

$$= \frac{1}{a}(e^{2at} - e^{at})u(t) \quad (9.111)$$

που είναι και το ίδιο αποτέλεσμα που καταλήγουμε στο πεδίο του χρόνου.

9.4.1.8 Παραγωγήιση στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, ο μετασχ. Laplace έχει ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt \quad (9.112)$$

$$= x(t)e^{-st}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{d}{dt}e^{-st}dt \quad (9.113)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)e^{-st} - \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-st} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-s)e^{-st}dt \quad (9.114)$$

$$= 0 - 0 + s \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (9.115)$$

$$= sX(s) \quad (9.116)$$

με πεδίο σύγκλισης το $R_y \supseteq R_x$, διότι ο όρος s μπορεί να απαλείφει κάποιον πόλο στον παρονομαστή του $X(s)$, με αποτέλεσμα το πεδίο σύγκλισης που θα προκύψει να είναι υπερσύνολο του αρχικού πεδίου σύγκλισης. Άρα

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow sX(s), \quad R \supseteq R_x} \quad (9.117)$$

Παράδειγμα 9.14:

Η παράγωγος του σήματος $x(t) = e^{4at}u(t)$ είναι

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = u(t)\frac{d}{dt}e^{4at} + e^{4at}\frac{d}{dt}u(t) = 4ae^{4at}u(t) + e^{4at}\delta(t) = 4ae^{4at}u(t) + \delta(t) \quad (9.118)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $y(t)$.

Λύση:

Ο μετασχ. Laplace του σήματος $y(t)$ είναι

$$Y(s) = L\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = 4a\frac{1}{s-4a} + 1, \quad R_y = \{\sigma > 4a\} \quad (9.119)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγωγισής στο χρόνο, έχουμε

$$Y(s) = sX(s) = s\frac{1}{s-4a} = \frac{s-4a+4a}{s-4a} = 4a\frac{1}{s-4a} + 1, \quad R_y = \{\sigma > 4a\} \quad (9.120)$$

που επιβεβαιώνει το προηγούμενο αποτέλεσμα.

9.4.1.9 n -οστή παραγωγή στο χρόνο

Επαναλαμβάνοντας n φορές τη διαδικασία της Παραγράφου 9.4.1.8, έχουμε ότι

$$y(t) = \frac{d^n}{dt^n}x(t) \longleftrightarrow s^n X(s) \quad (9.121)$$

με πεδίο σύγκλισης το $R_y \supseteq R_x$, διότι ο όρος s^n μπορεί να απαλείφει κάποιον/ους πόλο/ους στον παρονομαστή του $X(s)$, με αποτέλεσμα το πεδίο σύγκλισης που θα προκύψει να είναι υπερσύνολο του αρχικού πεδίου σύγκλισης. Άρα

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n}x(t) \longleftrightarrow s^n X(s), \quad R \supseteq R_x} \quad (9.122)$$

Παράδειγμα 9.15:

Ας δούμε εδώ ένα παράδειγμα όπου το πεδίο σύγκλισης της παραγώγου είναι υπερσύνολο του πεδίου σύγκλισης του σήματος. Έστω το αιτιατό σήμα

$$x(t) = \left(-\frac{5}{36} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{9}e^{-3t}\right)u(t) \quad (9.123)$$

το οποίο έχει μετασχ. Laplace

$$X(s) = -\frac{5}{36}\frac{1}{s} + \frac{1}{6}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{9}\frac{1}{s+3} \quad (9.124)$$

$$= \frac{1}{s^2(s+2)(s+3)}, \quad R_x = \{\sigma > 0\} \quad (9.125)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace της δεύτερης παραγώγου του σήματος $x(t)$.

Λύση:

Η δεύτερη παράγωγος του σήματος $x(t)$ είναι (δείξτε το αναλυτικά)

$$y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t) \quad (9.126)$$

και ο μετασχ. Laplace της είναι

$$Y(s) = L\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad R_y = \{\sigma > -2\} \quad (9.127)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της n -οστής παραγωγίσης καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα και έχουμε

$$Y(s) = s^2 X(s) = s^2 \frac{1}{s^2(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad R_y = \{\sigma > -2\} \quad (9.128)$$

Παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace της δευτέρας παραγώγου του σήματος είναι υπερσύνολο του πεδίου σύγκλισης του μετασχ. Laplace του σήματος.

9.4.1.10 Παραγωγή στη συχνότητα

Αν παραγωγίσουμε τον ορισμό του μετασχ. Laplace, έχουμε

$$\frac{d}{ds}X(s) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt \quad (9.129)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-tx(t))e^{-st} dt \quad (9.130)$$

$$= L\{-tx(t)\} \quad (9.131)$$

Άρα η ιδιότητα της παραγωγίσης στη συχνότητα είναι η ακόλουθη

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s) \quad (9.132)$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει R_x .

Άρα

$$\boxed{-tx(t) \longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s), \quad R = R_x} \quad (9.133)$$

Παράδειγμα 9.16:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = tu(t) \quad (9.134)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > a \quad (9.135)$$

και για $a = 0$ έχουμε

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0 \quad (9.136)$$

Με την ιδιότητα της παραγωγίσης στη συχνότητα, θα έχουμε

$$x(t) = tu(t) \longleftrightarrow X(s) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}, \quad R_x = \{\sigma > 0\} \quad (9.137)$$

9.4.1.11 n -οστή παραγωγή στη συχνότητα

Επαναλαμβάνοντας n φορές τη διαδικασία της Παραγράφου 9.4.1.10, έχουμε ότι

$$(-1)^n t^n x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n}{ds^n} X(s) \quad (9.138)$$

με πεδίο σύγκλισης το R_x .

Άρα

$$(-1)^n t^n x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n}{ds^n} X(s), \quad R = R_x \quad (9.139)$$

Παράδειγμα 9.17:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = t^4 u(t) \quad (9.140)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε από το προηγούμενο παράδειγμα ότι

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0 \quad (9.141)$$

Με την ιδιότητα της n -οστής παραγωγίσης στη συχνότητα, θα έχουμε

$$x(t) = t^4 u(t) \longleftrightarrow X(s) = (-1)^4 \frac{d^4}{ds^4} \frac{1}{s} = \frac{24}{s^5}, \quad R_x = \{\sigma > 0\} \quad (9.142)$$

9.4.1.12 Ολοκλήρωση στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, το οποίο γράφεται ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = x(t) * u(t) \quad (9.143)$$

θα έχουμε τον ακόλουθο μετασχ. Laplace

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * u(t)) e^{-st} dt \quad (9.144)$$

$$= X(s)U(s) = \frac{X(s)}{s} \quad (9.145)$$

λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο, η οποία και ορίζει το πεδίο σύγκλισης ως $R_y \supseteq \{R_x \cap \{\sigma > 0\}\}$.

Άρα

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{X(s)}{s}, \quad R \supseteq R_x \cap \{\sigma > 0\} \quad (9.146)$$

Παράδειγμα 9.18:

Ας βρούμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{\tau} \sin(\tau) u(-\tau) d\tau \quad (9.147)$$

Λύση:

Το σήμα

$$y(t) = e^t \sin(t) u(-t) \quad (9.148)$$

έχει μετασχ. Laplace

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^t \sin(t)e^{-st} dt \quad (9.149)$$

$$= \int_{-\infty}^0 \sin(t)e^{(1-s)t} dt = \frac{e^{(1-s)t}}{(1-s)^2 + 1} ((1-s)\sin(t) - \cos(t)) \Big|_{-\infty}^0 \quad (9.150)$$

$$= -\frac{1}{(1-s)^2 + 1} \quad (9.151)$$

με $R_y = \{\sigma < 1\}$, ώστε τα όρια στο $-\infty$ στο ολοκλήρωμα να τείνουν στο μηδέν. Άρα ο μετασχ. Laplace του $x(t)$ θα είναι

$$X(s) = -\frac{1}{s((1-s)^2 + 1)} \quad (9.152)$$

με το πεδίο σύγκλισης να είναι

$$R_x = \{\sigma > 0\} \cap \{\sigma < 1\} = \{0 < \sigma < 1\} \quad (9.153)$$

Οι αποδείξεις των τεσσάρων ιδιοτήτων του μονόπλευρου μετασχ. Laplace που διαφέρουν από αυτές του δίπλευρου αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη (Άσκησης XXXX, XXXX, XXXX, XXXX).

9.5 Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Ο πίνακας 9.2 παραθέτει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που μπορείτε να χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη.

9.6 Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχ. Laplace διαφέρει ελάχιστα στον τρόπο υπολογισμού του σε σχέση με το μετασχ. Fourier - είναι παρόμοια ολοκληρώματα και ως εκ τούτου χρησιμοποιούνται παρόμοιες τεχνικές για την εύρεση των μετασχηματισμών. Αντίθετα, ο αντίστροφος μετασχ. Laplace, ο οποίος υπενθυμίζεται ότι ορίζεται ως

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (9.154)$$

είναι λίγο περισσότερο περίπλοκος σε σχέση με τον αντίστροφο μετασχ. Fourier.

Ο λόγος αυτής της διαφοράς βρίσκεται στο γεγονός ότι ο μετασχ. Laplace ορίζεται σε ένα τμήμα (ημιέπειδο ή λωρίδα) του μιγαδικού επιπέδου. Η αντιστροφή του μετασχηματισμού συνίσταται στην ολοκλήρωση πάνω στις ευθείες του μιγαδικού επιπέδου όπου ορίζεται ο μετασχ. Laplace. Παρατηρήστε το ολοκλήρωμα της Σχέσης (9.154): η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος της γραμμής $\Re\{s\} = \sigma$ στο μιγαδικό επίπεδο. Η ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο είναι εκτός των σκοπών αυτού του βιβλίου - μπορείτε να συμβουλευτείτε σχετικά ξαιρετικά συγγράμματα [1,2,3,4,5] για το θέμα αυτό. Αντίθετα, θα χρησιμοποιήσουμε τα ζεύγη του Πίνακα 9.2, τις ιδιότητες του Πίνακα 9.1, και τη γνωστή μέθοδο του Αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα εύρεσης του αντίστροφου μετασχ. Laplace.

Παράδειγμα 9.19:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10} \quad (9.155)$$

με ROC: $\Re\{s\} < -2$.

Λύση:

Μπορούμε να αναπτύξουμε το $X(s)$ σε Μερικά Κλάσματα ως

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10} = \frac{s+7}{(s+2)(s-5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-5} \quad (9.156)$$

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Όλο το s -επίπεδο
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	Όλο το s -επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2} - e^{-sT/2})$	Όλο το s -επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} < 0$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 - s^2}$	$a > \Re\{s\} > -a$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s + a}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s + a}$	$\Re\{s\} < -\Re\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s + a)^n}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s + a)^n}$	$\Re\{s\} < -\Re\{a\}$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s + a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$t \cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s^2 - (2\pi f_0)^2}{(s^2 + (2\pi f_0)^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$t \sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2s2\pi f_0}{(s^2 + (2\pi f_0)^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$

Πίνακας 9.2: Πίνακας ζευγών μετασχ. Laplace

με

$$A = X(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{s+7}{s-5}\Big|_{s=-2} = -\frac{5}{7} \quad (9.157)$$

$$B = X(s)(s-5)\Big|_{s=5} = \frac{s+7}{s+2}\Big|_{s=5} = \frac{12}{7} \quad (9.158)$$

και άρα

$$X(s) = \frac{s+7}{(s+2)(s-5)} = -\frac{5}{7} \frac{1}{s+2} + \frac{12}{7} \frac{1}{s-5} \quad (9.159)$$

Από τα δεδομένα μας, το πεδίο σύγκλισης είναι το ROC: $\Re\{s\} < -2$, που αντιστοιχεί σε αριστερόπλευρο σήμα στο χρόνο. Δεδομένου ότι οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $s = -2$, $s = 5$, το πεδίο σύγκλισης μπορεί να γραφεί ως

$$\{\Re\{s\} < -2\} = \{\Re\{s\} < 5\} \cap \{\Re\{s\} < -2\} \quad (9.160)$$

Τα σύνολα της παραπάνω τομής αποτελούν τα πεδία σύγκλισης των όρων του αθροίσματος της Σχέσης (9.159). Οπότε από τον Πίνακα 9.2

$$x(t) = \frac{5}{7}e^{-2t}u(-t) - \frac{12}{7}e^{5t}u(-t) \quad (9.161)$$

Παράδειγμα 9.20:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{3s}{(s^2+1)^2} \quad (9.162)$$

με ROC: $\Re\{s\} > 0$.

Λύση:

Μπορούμε κι εδώ να αναπτύξουμε σε Μερικά Κλάσματα αλλά υπάρχει και διαφορετικός τρόπος. Προσέξτε ότι από τον Πίνακα 9.2 το ζεύγος

$$t \sin(2\pi f_0 t)u(t) \longleftrightarrow \frac{2s2\pi f_0}{(s^2 + (2\pi f_0)^2)^2}, \quad \Re\{s\} > 0 \quad (9.163)$$

μετατρέπεται σε

$$t \sin(t)u(t) \longleftrightarrow \frac{2s}{(s^2+1)^2}, \quad \Re\{s\} > 0 \quad (9.164)$$

για $2\pi f_0 = 1$. Οπότε εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$x(t) = \frac{3}{2}t \sin(t)u(t) \quad (9.165)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει την παραπάνω λύση με χρήση αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα (Άσκηση XXXX).

Παράδειγμα 9.21:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} \quad (9.166)$$

με ROC: $\Re\{s\} > 0$.

Λύση:

Ο αναγνώστης μπορεί να εφαρμόσει Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για να επιβεβαιώσει την παρακάτω λύση (Άσκηση XXXX). Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης στο χρόνο έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s^2+4} = \frac{X_1(s)}{s} \longleftrightarrow x(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau, \quad R = \{R_x \cap \{\Re\{s\} > 0\}\} \quad (9.167)$$

και από τον Πίνακα 9.2 έχουμε

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2 + 4}, \quad \Re\{s\} > 0 \longleftrightarrow x_1(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)u(t) \quad (9.168)$$

Οπότε

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \sin(2\tau)u(\tau)d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2\tau)d\tau = \frac{1}{4}(1 - \cos(2t))u(t) \quad (9.169)$$

Παράδειγμα 9.22:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 - s} \quad (9.170)$$

με ROC: $0 < \Re\{s\} < 1$.

Λύση:

Εκφράζουμε το μετασχηματισμό ως

$$X(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 - s} = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 - 1)} = \frac{s^2 + 2}{s(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1} \quad (9.171)$$

με

$$A = X(s)s \Big|_{s=0} = \frac{s^2 + 2}{(s-1)(s+1)} \Big|_{s=0} = -2 \quad (9.172)$$

$$B = X(s)(s-1) \Big|_{s=1} = \frac{s^2 + 2}{s(s+1)} \Big|_{s=1} = \frac{3}{2} \quad (9.173)$$

$$C = X(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{s^2 + 2}{s(s-1)} \Big|_{s=-1} = \frac{3}{2} \quad (9.174)$$

Άρα

$$X(s) = -2\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} \quad (9.175)$$

Το πεδίο σύγκλισης μπορεί να γραφεί ως

$$\{0 < \Re\{s\} < 1\} = \{\Re\{s\} > 0\} \cap \{\Re\{s\} < 1\} \cap \{\Re\{s\} > -1\} \quad (9.176)$$

με τα επιμέρους πεδία σύγκλισης να αντιστοιχούν στους όρους του αθροίσματος της Σχέσης (9.175). Οπότε από τον Πίνακα 9.2

$$x(t) = -2u(t) - \frac{3}{2}e^t u(-t) + \frac{3}{2}e^{-t} u(t) \quad (9.177)$$

Το σήμα είναι πράγματι αμφίπλευρο, όπως υποδηλώνεται από το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού.

9.7 Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Σε κάποιες εφαρμογές είναι επιθυμητό να γνωρίζουμε τις τιμές ενός σήματος $x(t)$ όταν αυτό τείνει στο 0 και στο ∞ , μέσω του μετασχ. Laplace του. Τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής μας βοηθούν σε αυτό.

Το *θεώρημα της αρχικής τιμής - Θ.Α.Τ.* δηλώνει ότι αν το $x(t)$ είναι αιτιατό, και αυτό κι η παράγωγός του, $dx(t)/dt$, έχουν μετασχ. Laplace, τότε

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (9.178)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει.

Το *θεώρημα της τελικής τιμής - Θ.Τ.Τ.* δηλώνει ότι αν το $x(t)$ είναι αιτιατό, και αυτό κι η παράγωγός του, $dx(t)/dt$, έχουν μετασχ. Laplace, τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (9.179)$$

δεδομένου ότι το $sX(s)$ δεν έχει πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή πάνω στον φανταστικό άξονα.

Επίσης, το Θ.Α.Τ. πρέπει να εφαρμόζεται μόνον αν το $X(s)$ έχει αυστηρά μεγαλύτερη τάξη παρονομαστή απ' ότι αριθμητή, αλλιώς το όριο δεν υπάρχει, και το θεώρημα δεν εφαρμόζεται.

Αντίστοιχα, το Θ.Τ.Τ. εφαρμόζεται μόνον αν οι πόλοι του $sX(s)$ είναι όλοι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αν υπάρχει πόλος στο φανταστικό άξονα, το $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ δεν υπάρχει, ενώ αν υπάρχει πόλος στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ δεν υπάρχει.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 9.23:

Έστω το σήμα

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t} \cos(3t)u(t) \quad (9.180)$$

(α') Να βρεθεί ο μετασχ. Laplace.

(β') Να βρεθεί η αρχική συνθήκη $x(0^+)$ μέσω του μετασχ. Laplace.

(γ') Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ μέσω του μετασχ. Laplace.

(δ') Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα των παραπάνω δυο ερωτημάτων υπολογίζοντας αναλυτικά τα όρια.

Λύση:

(α')

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} + \mathcal{L}\{e^{-t} \cos(3t)u(t)\} = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+9}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.181)$$

και κάνοντας λίγες πράξεις, έχουμε

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \quad (9.182)$$

(β')

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \quad (9.183)$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12s}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \quad (9.184)$$

$$(\text{De L' Hospital}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{6s^2 + 10s + 12}{3s^2 + 10s + 14} \quad (9.185)$$

$$(\text{De L' Hospital}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{12s + 10}{6s + 10} \quad (9.186)$$

$$(\text{De L' Hospital}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{12}{6} = 2 \quad (9.187)$$

$$x(0^+) = 2 \quad (9.188)$$

(γ')

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12s}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (9.189)$$

(δ') Δικό σας. ☺

Κεφάλαιο 10

Συστήματα στο χώρο του Laplace

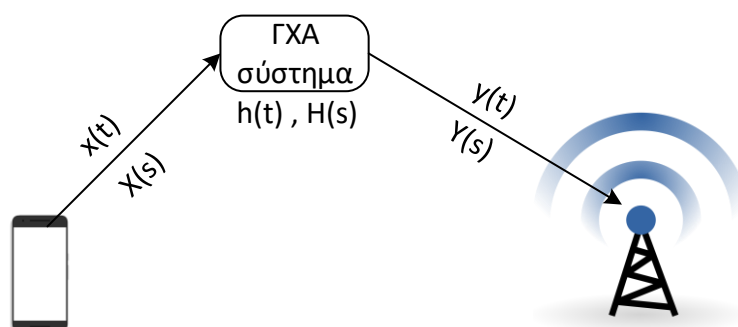
Ο μετασχ. Laplace είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την ανάλυση συστημάτων. Η ικανότητά του να ερμηνεύει συχνοτικά πλήθος σημάτων, σημαντικά περισσότερων από το μετασχ. Fourier, τον κάνει ιδανικό για τη μελέτη συστημάτων.

Έχουμε δει αρκετά πράγματα για τα συστήματα σε προηγούμενο κεφάλαιο, καθώς και σχετικά με την αιτιαιότητα και την ευστάθεια ενός συστήματος. Υπάρχουν δεξιόπλευρα, αριστερόπλευρα, αμφίπλευρα, αιτιατά και μη συστήματα που ορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε στην Παράγραφο 9.2.4. Μάλιστα, την αιτιατότητα και την ευστάθεια την είχαμε ορίσει και στις πρώτες μας συζητήσεις για συστήματα, ως την ικανότητα του συστήματος να εξαρτά την έξοδό του μόνο από τωρινές ή παρελθοντικές τιμές της εισόδου (αιτιατότητα) και την ιδιότητα του συστήματος να παράγει φραγμένες εξόδους για φραγμένες εισόδους (ευστάθεια).

Ας δούμε σε αυτό το κεφάλαιο πως όλα αυτά εκφράζονται στον χώρο του μετασχ. Laplace, πόσο απλοποιούνται, και πως μας βοηθά ο μετασχ. Laplace να λύνουμε πρακτικά προβλήματα.

10.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Ας υποθέσουμε ότι επικοινωνείτε με ένα φίλο σας τηλεφωνικά μέσω ενός smartphone. Το σήμα φωνής σας κωδικοποιείται ψηφιακά και αποστέλλεται μέσω του τηλεπικοινωνιακού καναλιού - που στο παράδειγμα αυτό πρόκειται για τον ελεύθερο χώρο (αέρα) - στο σταθμό βάσης της υπηρεσίας κινητής τηλεφωνίας σας. Προτού παραδωθεί στο smartphone του συνομιλητή σας, πρέπει να “καθαριστεί” από τις παρεμβολές του τηλεπικοινωνιακού καναλιού. Ας θεωρήσουμε το τηλεπικοινωνιακό κανάλι ως ΓΧΑ σύστημα, με είσοδο το ψηφιοποιημένο σήμα φωνής σας και έξοδο μια τροποποιημένη έκδοσή του λόγω των παρεμβολών που εισήχθησαν από το κανάλι, όπως στο Σχήμα 10.1. Ο σταθμός βάσης αναλαμβάνει περιοδικά να εκτιμά το κανάλι στο χώρο που βρίσκεστε, δηλ. να υπολογίζει την



Σχήμα 10.1: Ασύρματο τηλεπικοινωνιακό κανάλι.

χρονστική απόκριση $h[n]$ του καναλιού. Σκοπός του σταθμού βάσης είναι να προσπαθήσει να ακυρώσει την επίδραση του καναλιού στο σήμα εισόδου, ώστε να παραδώσει στο φίλο σας ένα όσο το δυνατόν πιστότερο αντίγραφο του σήματος φωνής που εστάλη από το τηλέφωνό σας.

Αν υποθέσετε ότι το κανάλι με ευσταθή και αιτιατή χρονστική απόκριση $h(t)$ έχει μετασχ. Laplace $H(s)$, τότε ο σταθμός βάσης θα ήθελε να αντιστρέψει την επίδραση του συστήματος επάνω στο σήμα εισόδου. Από την ιδιότητα της συνέλιξης γνωρίζετε ότι

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (10.1)$$

και θα θέλατε να βρείτε ένα σύστημα $H_i(s) = \frac{1}{H(s)}$ έτσι ώστε

$$H_i(s)Y(s) = H_i(s)H(s)X(s) = X(s) \quad (10.2)$$

δηλ.

$$H_i(s)H(s) = 1, \quad R_{H_i} \cap R_H \neq \emptyset \quad (10.3)$$

Το σύστημα $H_i(s)$ θα δείτε ότι ονομάζεται *αντίστροφο σύστημα* και θα μελετήσετε τις ιδιότητές του. Όμως, πολλές φορές το αντίστροφο σύστημα δεν είναι ευσταθές και αιτιατό όπως απαιτείται για την υλοποίησή του. Γιατί συμβαίνει αυτό; Τι εναλλακτικές επιλογές υπάρχουν σε αυτήν την περίπτωση; Μπορούμε με κάποιο τρόπο να ακυρώσουμε ολικά ή μερικά την επίδραση του καναλιού, και με τι κόστος; Τέτοια ερωτήματα θα είστε σε θέση να απαντήσετε με την ολοκλήρωση του κεφαλαίου αυτού.

10.2 Η Συνάρτηση Μεταφοράς

Ας θεωρήσουμε τώρα μια είσοδο της μορφής

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j2\pi f)t} \quad (10.4)$$

σε ένα ΓΧΑ σύστημα με χρουστική απόκριση $h(t)$. Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = T\{x(t)\} = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (10.5)$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (10.6)$$

Ορίζουμε ως **Συνάρτηση Μεταφοράς** το

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \quad (10.7)$$

που δεν είναι άλλο από το μετασχ. Laplace της χρουστικής απόκρισης του συστήματος, και έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$y(t) = H\{e^{st}\} = H(s)e^{st} \quad (10.8)$$

Σας θυμίζει κάτι; ☺Βλέπουμε ότι η επίδραση της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος $H(s)$ επάνω σε μια είσοδο της μορφής e^{st} είναι ο πολλαπλασιασμός της με τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$! Θυμηθείτε ότι *ιδιοσυνάρτηση* ενός συστήματος λέγεται το σήμα που περνάει από το σύστημα χωρίς καμιά τροποποίηση πλὴν του πολλαπλασιασμού του με μια συνήθως μιγαδική σταθερά, όπως είδαμε στο μετασχ. Fourier. Έτσι, αναγνωρίζουμε το e^{st} ως ιδιοσυνάρτηση του ΓΧΑ συστήματος και το $H(s)$ ως η αντίστοιχη *ιδιοτιμή*.

Τώρα, ας εκφράσουμε την μιγαδική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ σε πολική μορφή, ως

$$H(s) = |H(s)|e^{j\phi(s)} \quad (10.9)$$

όπου $|H(s)|$ και $\phi(s)$ είναι το μέτρο και η φάση του $H(s)$, αντίστοιχα. Τώρα, ξαναγράφοντας την έξοδο του συστήματος, θα έχουμε

$$y(t) = |H(s)|e^{j\phi(s)}e^{st} \quad (10.10)$$

Με χρήση του $s = \sigma + j2\pi f$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t}e^{j(2\pi ft + \phi(\sigma + j2\pi f))} \\ &= |H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t} \cos(2\pi ft + \phi(\sigma + j2\pi f)) + j|H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t} \sin(2\pi ft + \phi(\sigma + j2\pi f)) \end{aligned} \quad (10.11)$$

Μπορούμε εδώ να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα, δεδομένης της εισόδου της μορφής $x(t) = e^{st}$, αλλάζει το πλάτος της εισόδου κατά παράγοντα $|H(\sigma + j2\pi f)|$ και μετατοπίζει τη φάση των ημιτονοειδών συνιστωσών κατά $\phi(\sigma + j2\pi f)$. Το σύστημα δεν αλλάζει ούτε τον παράγοντα σ , ούτε τη συχνότητα f της εισόδου. Ενδιαφέρον! ☺

10.3 Μετασχ. Laplace και Διαφορικές Εξισώσεις Συστημάτων

Τώρα που έχουμε ένα τόσο δυνατό εργαλείο ανάλυσης σημάτων και συστημάτων, μπορούμε να μιλήσουμε ακόμα πιο γενικά για τα συστήματα, θεωρώντας ότι αυτά περιγράφονται από μια διαφορική εξίσωση. Όπως έχουμε πει, πολλά φυσικά και μηχανικά συστήματα μπορούν να αναχθούν σε διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, τα ηλεκτρικά κυκλώματα συνεχούς ρεύματος περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, και η απλοποίηση που συνεπάγεται με την ανάλυσή τους στο χώρο του Laplace είναι σημαντική. Εν γένει λοιπόν, ο μετασχ. Laplace μας επιτρέπει να λύνουμε τέτοιες διαφορικές εξισώσεις πολύ εύκολα, μετατρέποντάς τις σε απλές αλγεβρικές!

Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, έστω το σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές a_k, b_l ,

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l x(t)}{dt^l} \quad (10.12)$$

Για τη μοναδική λύση της εξίσωσης απαιτούνται οι περίφημες *βοηθητικές ή αρχικές συνθήκες*. Στην πράξη, οι αρχικές συνθήκες αφορούν την κατάσταση του συστήματος πριν την εφαρμογή της εισόδου. Αν υποθέσουμε ότι η είσοδος εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε οι αρχικές συνθήκες περιγράφουν την κατάσταση του συστήματος για $t = 0^-$, δηλ. ακριβώς πριν την εφαρμογή της εισόδου. Πολλές φορές στη βιβλιογραφία, οι αρχικές συνθήκες χρησιμοποιούν το συμβολισμό $t = 0^-$ για τη χρονική στιγμή των αρχικών συνθηκών. Στο εξής, θα υιοθετήσουμε αυτήν την πρακτική στο συμβολισμό. Ο ρόλος των αρχικών συνθηκών μας παρέχει μοναδική λύση για το σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση. Γιατί αυτό; Σκεφτείτε την πιο απλή διαφορική εξίσωση που ξέρετε: $f'(x) = f(x)$. Ξέρετε ότι η λύση της είναι $f(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$, η οποία δεν είναι μοναδική. Για να την κάνετε τέτοια, θα πρέπει να σας δίνεται κάποια συνθήκη για να βρείτε το c , π.χ.

$$f(0) = 2$$

που οδηγεί σε $c = 2$. Άρα μπορείτε να καταλάβετε ότι μια διαφορική εξίσωση, και γενικότερα η παραγωγήιση, είναι μια *μη αντιστρέψιμη* διαδικασία. Χρειαζόμαστε επιπλέον πληροφορία για να την αντιστρέψουμε με μοναδικό τρόπο, η οποία μας δίνεται με τη μορφή αρχικών συνθηκών.

Τα προβλήματα που συναντάμε είναι τα ακόλουθα:

- (α') Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που είναι ΓΧΑ, δηλ. έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες. Σε αυτά τα συστήματα, η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης. Αφού οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) \quad (10.13)$$

για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Laplace της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Τότε η Σχέση (10.12) γίνεται

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{l=0}^M b_l s^l X(s) \quad (10.14)$$

$$Y(s) \sum_{k=0}^N a_k s^k = X(s) \sum_{l=0}^M b_l s^l \quad (10.15)$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} X(s) \quad (10.16)$$

Η έξοδος στο πεδίο του χρόνου $y(t)$ υπολογίζεται από γνωστές ιδιότητες και πίνακες ή/και από το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα.

- (β') Η εύρεση της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος. Στο χώρο του Laplace αυτό γίνεται μέσω της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ που χαρακτηρίζει το σύστημα. Τότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και χρησιμοποιούμε ξανά τη σχέση

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) \quad (10.17)$$

για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική και να κατασκευάσουμε το λόγο $Y(s)/X(s)$ που θα

μας δώσει τη συνάρτηση μεταφοράς. Από τη Σχέση (10.16), θα έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (10.18)$$

Η ίδια σχέση λαμβάνεται απ' ευθείας και από τη Σχέση (10.16), αφού γνωρίζουμε ότι η απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος αποτελείται από τη συνέλιξη της εισόδου και της χρουστικής απόκρισης του συστήματος. Στο χώρο του Laplace, η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ και του μετασχ. Laplace της εισόδου $X(s)$. Παρατηρήστε ότι για ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή συνάρτηση πολυωνύμων του s . Αυτό είναι χαρακτηριστικό των ΓΧΑ συστημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

(γ') Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που δεν είναι ΓΧΑ, δηλ. που έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες. Όμως ο δίπλευρος μετασχ. Laplace δεν περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του. Αυτό όμως μπορεί να το κάνει ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace, ο οποίος (δείτε τον Πίνακα 9.1) περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του! Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη σχέση

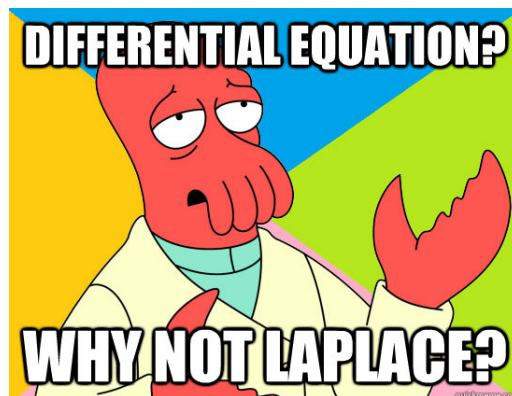
$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big|_{t=0} \quad (10.19)$$

από το μονόπλευρο μετασχ. Laplace, για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Laplace της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει (Άσκηση XXXX) ότι ο μετασχ. Laplace της εξόδου $Y(s)$ δίνεται σε αυτήν την περίπτωση ως

$$Y(s) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} X(s) + \frac{\sum_{k=0}^N \sum_{i=1}^k s^{k-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} y(t) \Big|_{t=0^-} + \sum_{l=0}^M \sum_{i=1}^l s^{l-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big|_{t=0^-}}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (10.20)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} X(s) + \frac{\sum_{k=0}^N \sum_{i=1}^k s^{k-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} y(t) \Big|_{t=0^-}}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (10.21)$$

αφού η είσοδος εφαρμόζεται πάντα σε χρονικές στιγμές $t \geq 0$. Παρατηρήστε ότι ο πρώτος όρος εξαρτάται από την είσοδο ενώ ο δεύτερος από τις αρχικές συνθήκες!



Σχήμα 10.2: Εύκολη λύση διαφορικών εξισώσεων με μετασχ. Laplace!!

Ας δούμε δυο παραδείγματα που δείχνουν χαρακτηριστικά πώς ο μετασχ. Laplace μπορεί να μας διευκολύνει όταν έχουμε να κάνουμε με συστήματα. Ας υποθέσουμε ότι οι λύσεις μας θα είναι αιτιατές.

Παράδειγμα 10.1:

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \quad (10.22)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 1$ και είσοδο $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

Λύση:

Προφανώς θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγωγίσιμης του μονόπλευρου μετασχ. Laplace. Εφαρμόζοντας την και στα δυο μέλη, έχουμε:

$$L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + L\left\{5\frac{dy(t)}{dt}\right\} + L\{6y(t)\} = L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + L\{x(t)\} \quad (10.23)$$

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) = sX(s) - x(0^-) + X(s) \quad (10.24)$$

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) = sX(s) - 0 + X(s) \quad (10.25)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = X(s)(s + 1) \quad (10.26)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = \frac{s + 1}{s + 4} \quad (10.27)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = \frac{s + 1}{s + 4} + 2s + 11 \quad (10.28)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} \quad (10.29)$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)} \quad (10.30)$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, μια και η τάξη του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μεγαλύτερη της τάξης του αριθμητή. Οπότε

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3} + \frac{C}{s + 4} \quad (10.31)$$

με

$$A = Y(s)(s + 2) \Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 3)(s + 4)} \Big|_{s=-2} = \frac{13}{2} \quad (10.32)$$

$$B = Y(s)(s + 3) \Big|_{s=-3} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 4)} \Big|_{s=-3} = -3 \quad (10.33)$$

$$C = Y(s)(s + 4) \Big|_{s=-4} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 3)} \Big|_{s=-4} = -\frac{3}{2} \quad (10.34)$$

Για να είναι αιτιατή η έξοδος, θα πρέπει $R_y \supseteq R_1 \cap R_2 \cap R_3$ με

$$R_1 = \{\Re\{s\} > -2\} \quad (10.35)$$

$$R_2 = \{\Re\{s\} > -3\} \quad (10.36)$$

$$R_3 = \{\Re\{s\} > -4\} \quad (10.37)$$

Άρα τελικά θα είναι $R_y = \{\sigma > -2\}$ και

$$Y(s) = \frac{13}{2} \frac{1}{s + 2} - 3 \frac{1}{s + 3} - \frac{3}{2} \frac{1}{s + 4}, \quad \Re\{s\} > -2 \quad (10.38)$$

Οπότε πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο, θα είναι

$$y(t) = \frac{13}{2} e^{-2t} u(t) - 3 e^{-3t} u(t) - \frac{3}{2} e^{-4t} u(t) \quad (10.39)$$

που είναι και το ζητούμενο. ■

Παράδειγμα 10.2:

Έστω ότι ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα $H(s)$ περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t) \quad (10.40)$$

1. Υπολογίστε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.
2. Βρείτε την έξοδο, $y(t)$, του συστήματος όταν η είσοδος είναι της μορφής

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \quad (10.41)$$

Λύση:

1. Μετασχηματίζοντας τη διαφορική εξίσωση στο χώρο του Laplace, έχουμε

$$s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s) \quad (10.42)$$

$$Y(s)(s^2 - s - 2) = X(s) \quad (10.43)$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} \quad (10.44)$$

Άρα

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1}$$

με

$$A = H(s)(s - 2) \Big|_{s=2} = \frac{1}{s + 1} \Big|_{s=2} = \frac{1}{3} \quad (10.45)$$

$$B = H(s)(s + 1) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s - 2} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3} \quad (10.46)$$

και το πεδίο σύγκλισης θα είναι το $\{\Re\{s\} > 2\} = \{\Re\{s\} > 2\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$. Άρα

$$H(s) = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{s - 2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s + 1}, \quad \Re\{s\} > 2 \quad (10.47)$$

και τότε

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) \quad (10.48)$$

2. Η έξοδος θα είναι της μορφής

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s - 2)(s + 1)}X(s) = \frac{1}{(s - 2)(s + 1)} \frac{1}{(s + 2)} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2} \quad (10.49)$$

με

$$A = Y(s)(s - 2) \Big|_{s=2} = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} \Big|_{s=2} = \frac{1}{12} \quad (10.50)$$

$$B = Y(s)(s + 1) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s - 2)(s + 2)} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3} \quad (10.51)$$

$$C = Y(s)(s + 2) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{(s - 2)(s + 1)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{4} \quad (10.52)$$

και άρα

$$Y(s) = \frac{1}{12} \frac{1}{s - 2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{s + 2} \quad (10.53)$$

Επειδή το σύστημα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_H = \{\Re\{s\} > 2\} \quad (10.54)$$

και η είσοδος

$$R_X = \{\Re\{s\} > -2\} \quad (10.55)$$

η έξοδος θα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_Y = \{\Re\{s\} > 2\} \cap \{\Re\{s\} > -2\} = \{\Re\{s\} > 2\} \quad (10.56)$$

Άρα

$$Y(s) = \frac{1}{12} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} \quad (10.57)$$

και στο πεδίο του χρόνου, λαμβάνοντας υπόψη ότι το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο

$$y(t) = \frac{1}{12} e^{2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t) + \frac{1}{4} e^{-2t} u(t) \quad (10.58)$$

■

Παράδειγμα 10.3: Παρ' όλου που οι διαφορικές εξισώσεις δημιουργήθηκαν για να αναπαραστήσουν φυσικά συστήματα (και άρα αιτιατά), από μαθηματικής πλευράς μια διαφορική εξίσωση μπορεί να έχει και αντι-αιτιατή χρονική απόκριση! Για παράδειγμα, η συνάρτηση μεταφοράς

$$H_1(s) = \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} > 0 \quad (10.59)$$

περιγράφει τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t) \quad (10.60)$$

αφού

$$H_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s} \iff sY(s) = X(s) \quad (10.61)$$

και στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t) \quad (10.62)$$

Το ίδιο όμως και η συνάρτηση μεταφοράς

$$H_2(s) = \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} < 0 \quad (!!!) \quad (10.63)$$

αφού ξανά ισχύουν τα παραπάνω! Οι αντίστοιχες χρονικές αποκρίσεις των δυο αυτών συστημάτων δίνονται - όπως ξέρετε - ως

$$h_1(t) = u(t) \quad (10.64)$$

$$h_2(t) = -u(-t) \quad (10.65)$$

και είναι αιτιατό και αντι-αιτιατό σήμα, αντίστοιχα.

Όπως ήδη γνωρίζετε, για την αιτιατότητα ενός συστήματος απαιτείται επιπλέον πληροφορία (αυτή της αρχικής ηρεμίας του συστήματος). Σε κάθε περίπτωση, όταν αναφερόμαστε σε διαφορικές εξισώσεις (στην χρονική τους απόκριση, ή στην έξοδό τους) θα υποθέτουμε πάντα ότι όλα αυτά είναι αιτιατά.

Εν γένει όμως, ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να έχει αιτιατή, μη-αιτιατή, ή αντι-αιτιατή χρονική απόκριση, καθώς η αιτιατότητα δεν είναι απαραίτητη για την υλοποίηση του συστήματος off-line, όπως π.χ. σε λογισμικό ενός υπολογιστή, όπου όλες οι τιμές ενός σήματος έχουν αποθηκευτεί εκ των προτέρων. Ας δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα συστήματος.

Παράδειγμα 10.3:

Έστω το μη-αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+s-2} \quad (10.66)$$

Βρείτε την έξοδο του $y(t)$ όταν στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα $x(t) = -e^{2t}u(-t)$.

Λύση:

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} \quad (10.67)$$

δηλ. έχει δυο πόλους στις θέσεις $s = -2$ και $s = 1$. Ως μη-αιτιατό, θα είναι αμφίπλευρο σήμα. Τα αμφίπλευρα σήματα έχουν πεδίο σύγκλισης που αναπαρίσταται ως μια “λωρίδα” στο μιγαδικό επίπεδο. Άρα το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς θα είναι το $R_H : \{-2 < \Re\{s\} < 1\}$, το οποίο μπορεί να γραφεί και ως

$$R_H = \{-2 < \Re\{s\}\} \cap \{\Re\{s\} < 1\} \quad (10.68)$$

Η είσοδος έχει μετασχ. Laplace

$$x(t) = -e^{2t}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \Re\{s\} < 2 \quad (10.69)$$

Οπότε η έξοδος θα δίνεται ως

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-2)(s-1)} \quad (10.70)$$

$$= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1} \quad (10.71)$$

με A, B, C να δίνονται από το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα ως

$$Y(s) = -\frac{1}{12} \frac{1}{s+2} + \frac{3}{4} \frac{1}{s-2} - \frac{2}{3} \frac{1}{s-1} \quad (10.72)$$

Οι πόλοι του $Y(s)$ βρίσκονται στις θέσεις $s = -2$, $s = 2$, και $s = 1$, άρα το πεδίο σύγκλισης της εξόδου θα είναι

$$R_Y \supseteq R_H \cap R_X = \{-2 < \Re\{s\} < 1\} \cap \{\Re\{s\} < 2\} = \{-2 < \Re\{s\} < 1\} \quad (10.73)$$

Αν γράψουμε το πεδίο σύγκλισης ως τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης που αντιστοιχούν στους πόλους της εξόδου, θα είναι $R_Y = \{-2 < \Re\{s\} < 1\} = \{\Re\{s\} < 2\} \cap \{\Re\{s\} < 1\} \cap \{\Re\{s\} > -2\}$, και έτσι το σήμα εξόδου στο χρόνο θα είναι αμφίπλευρο σήμα. Πράγματι,

$$y(t) = -\frac{1}{12}e^{-2t}u(t) - \frac{3}{2}e^{2t}u(-t) + \frac{2}{3}e^t u(-t) \quad (10.74)$$

με χρήση των ζευγών του Πίνακα 9.2.

10.4 ΓΧΑ Συστήματα στο χώρο του Laplace

Ας επικεντρώσουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στα ΓΧΑ συστήματα, αυτή τη φορά από τη σκοπιά του μετασχηματισμού Laplace, όπως κάναμε και για τον μετασχ. Fourier. Τα ΓΧΑ συστήματα, όπως έχουμε δει, περιγράφονται με τρεις τρόπους:

1. με μια διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N \frac{d}{dt} a_k y(t) = \sum_{l=0}^M \frac{d}{dt} b_l x(t) \quad (10.75)$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες

2. με την χρονική απόκρισή τους, $h(t)$
3. με την απόκριση σε συχνότητά τους, $H(f)$
4. πλέον, και με τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$

Εδώ, θα δούμε τα συστήματα από τη σκοπιά του Laplace και θα δούμε πόσο πιο απλά γίνονται τα πράγματα μερικές φορές στο χώρο αυτό. Στην ανάλυση που ακολουθεί, θα διαπιστώσετε μεγάλη ομοιότητα με τη αντίστοιχη που κάναμε για το μετασχ. Fourier, γι' αυτό και θα ακολουθήσουμε το ίδιο μοτίβο.

Ας συζητήσουμε για λίγο τη χρησιμότητα αναπαράστασης συστημάτων στο χώρο του Laplace. Ο κυριότερος λόγος μιας τέτοιας προσέγγισης είναι η ευελιξία σχεδίασης ΓΧΑ συστημάτων. Θυμίζουμε ότι τα συστήματα έχουν ως σκοπό την επεξεργασία (με οποιονδήποτε τρόπο) των σημάτων που παρουσιάζονται στην είσοδό τους. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα που θα εκτελεί μια συγκεκριμένη τροποποίηση στο σήμα εισόδου του. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να το κατασκευάσουμε με βάση τα επιθυμητά για εμάς χαρακτηριστικά της απόκρισης σε συχνότητα του, $H(f)$ - προφανώς θα επεξεργαστούμε πραγματικό σήμα εισόδου, το οποίο θα αναλύεται σε πραγματικές συχνότητες μέσω του μετασχ. Fourier. Είδαμε νωρίτερα, και μέσω παραδειγμάτων, ότι η θέση των πόλων και των μηδενικών καθορίζει σχεδόν απόλυτα τη συμπεριφορά ενός σήματος στο χώρο του Laplace, και κατά συνέπεια τη μορφή του μετασχ. Fourier του μέσω της μορφής του μετασχηματισμού Laplace επάνω από το φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου. Αν λοιπόν τοποθετήσουμε κατάλληλα τους πόλους ή/και τα μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο, μπορούμε να κατασκευάσουμε συστήματα με επιθυμητές αποκρίσεις σε συχνότητα. Αυτές οι αποκρίσεις μπορούν να υπολογιστούν από το μετασχ. Laplace θέτοντας $s = j\omega = j2\pi f$, και με τις τεχνικές υπολογισμού αντιστρόφου μετασχηματισμού που γνωρίζουμε, να βρούμε την χρονική απόκρισή τους. Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι παρ'όλο που τέτοιες τεχνικές σχεδιάστηκαν με σκοπό την επεξεργασία σημάτων συνεχούς χρόνου, μπορεί κανείς με απλές σχετικά μεθόδους να μεταφέρει την τεχνογνωσία σχεδίασης τέτοιων συστημάτων γρήγορα και απλά στον "ψηφιακό" κόσμο, καθιστώντας τες δυνατές να επεξεργαστούν και σήματα διακριτού χρόνου!

Παρ' όλο που ως τώρα συζητάμε την επιρροή του μετασχ. Laplace στο φάσμα πλάτους ενός σήματος, στην πραγματικότητα με όμοιο τρόπο επηρεάζεται και το φάσμα φάσης από την παρουσία των πόλων και των μηδενικών. Γνωρίζουμε ότι η φάση συνδέεται με τη θέση των επιμέρους συνιστωσών, ή αλλιώς τη χρονική δομή του σήματος ή του συστήματος στο χρόνο. Σύντομα, θα αναπτύξουμε έννοιες και εργαλεία για τον κατάλληλο έλεγχο της φάσης μέσω της θέσης των πόλων και των μηδενικών.

Ένας άλλος λόγος είναι ότι μέσω του μετασχ. Laplace μπορούμε να αναλύσουμε σήματα και συστήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier. Με άλλα λόγια, μπορούμε να αναλύσουμε συστήματα που είναι ασταθή. Σίγουρα θα σκεφτήκατε ότι ασταθή συστήματα δεν έχουν κάποια πρακτική χρησιμότητα. Κι όμως, ασταθή συστήματα παρουσιάζονται πολύ συχνά στη μηχανική, και για να μπορούμε να χειριστούμε την αστάθειά τους, πρέπει να μπορούμε να τα μελετήσουμε. Περισσότερα για αυτό θα δούμε σύντομα.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα για το πως δουλεύουμε στο χώρο του μετασχ. Laplace.

Παράδειγμα 10.4:

Έστω το αιτιατό σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) \quad (10.76)$$

του οποίου ζητούμε:

- (α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$
- (β') την χρονική απόκριση $h(t)$
- (γ') την έξοδό του για είσοδο $x(t) = -e^{2t}u(-t)$

Λύση:

(α') Κάνουμε μετασχ. Laplace στη διαφορική εξίσωση, έχουμε

$$sY(s) + 2Y(s) = X(s) \quad (10.77)$$

$$Y(s)(s + 2) = X(s) \quad (10.78)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s + 2} \quad (10.79)$$

$$H(s) = \frac{1}{s + 2} \quad (10.80)$$

με πεδίο σύγκλισης $\Re\{s\} > -2$, λόγω αιτιατότητας, αφού η ρίζα του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι η $s = -2$. Έτσι, η συχνότητα $\omega = f = 0$ έχει μέγιστο, λόγω της παρουσίας του πραγματικού πόλου στη θέση $s = -2$. Παρατηρήστε επίσης ότι $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$.

(β') Θα είναι

$$H(s) = \frac{1}{s+2} \longleftrightarrow h(t) = e^{-2t}u(t) \quad (10.81)$$

αφού το σύστημά μας είναι αιτιατό από εκφώνηση.

(γ') Η είσοδος έχει μετασχ. Laplace

$$x(t) = -e^{2t}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \Re\{s\} < 2 \quad (10.82)$$

οπότε

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s+2} \frac{1}{s-2} = \frac{1}{(s+2)(s-2)} = \frac{1}{s^2-4}, \quad -2 < \Re\{s\} < 2 \quad (10.83)$$

το οποίο, με βάση τον Πίνακα 9.1, έχει αντίστροφο μετασχ. Laplace

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{-2|t|} \quad (10.84)$$

■

Παράδειγμα 10.5:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2-3s+2} \quad (10.85)$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης.

Λύση:

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, έχουμε

$$H(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} \quad (10.86)$$

με

$$A = H(s)(s-2) \Big|_{s=2} = \frac{s+1}{s-1} \Big|_{s=2} = 3 \quad (10.87)$$

$$B = H(s)(s-1) \Big|_{s=1} = \frac{s+1}{s-2} \Big|_{s=1} = -1 \quad (10.88)$$

οπότε

$$H(s) = \frac{3}{s-2} - \frac{1}{s-1} \quad (10.89)$$

Από τους πίνακές μας, έχουμε κατ' ευθείαν ότι αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε

$$h(t) = 3e^{2t}u(t) - e^t u(t) \quad (10.90)$$

με $\Re\{s\} > 2$, ενώ αν το σύστημα είναι αντι-αιτιατό, τότε

$$h(t) = -3e^{2t}u(-t) + e^t u(-t) \quad (10.91)$$

με $\Re\{s\} < 1$. Τέλος, αν το σύστημα είναι μη αιτιατό, τότε

$$h(t) = -3e^{2t}u(-t) - e^t u(t) \quad (10.92)$$

με $1 < \Re\{s\} < 2$.

Παράδειγμα 10.6:

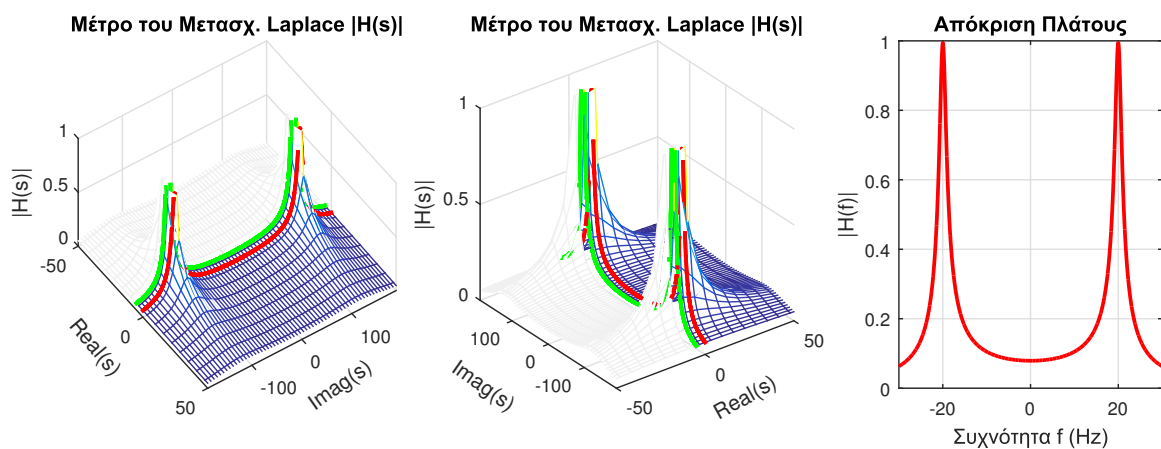
Έστω το αιτιατό σύστημα $H(s)$ που δίνεται ως

$$H(s) = \frac{1250}{(s - (\sigma_0 + j2\pi 20))(s - (\sigma_0 - j2\pi 20))} \quad (10.93)$$

Μελετήστε ποιοτικά τη συμπεριφορά της απόκρισης πλάτους του συστήματος για $\sigma_0 = -5$ και $\sigma_0 = -\frac{1}{2}$ και βρείτε την χρονική του απόκριση $h(t)$.

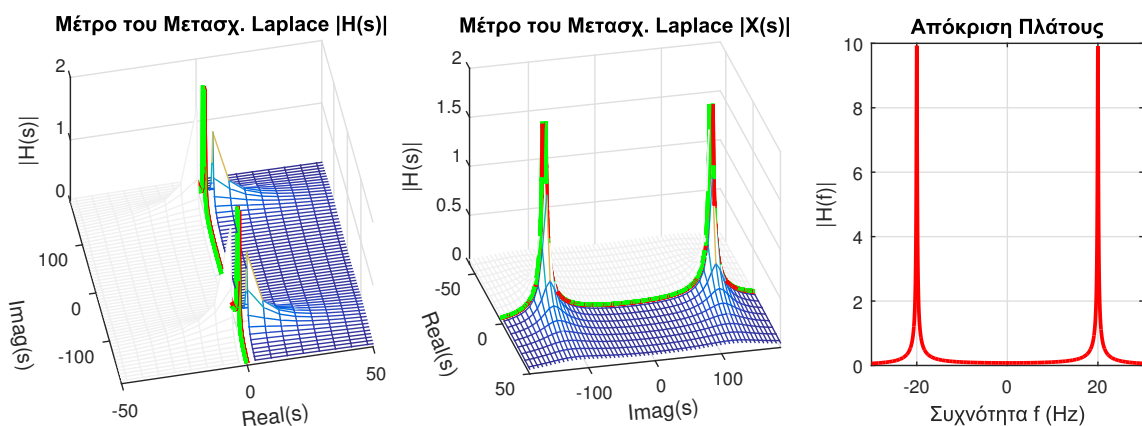
Λύση:

Δείτε το Σχήμα 10.3, που παρουσιάζει το σύστημα για την τιμή $\sigma_0 = -5$, και εμφανώς έχει δυο πόλους στις θέσεις



Σχήμα 10.3: Μέτρο μετασχ. Laplace συστήματος Παραδείγματος 6 και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για $\sigma_0 = -5$.

$s = -5 \pm j2\pi 20$. Η παρουσία πόλων για $\omega = \pm 2\pi 20$ θα αυξήσει τις τιμές της απόκρισης πλάτους γύρω από αυτές τις συχνότητες. Στην περίπτωση που $\sigma_0 = -5$, η αύξηση θα είναι μικρή και πιο ομαλή, αφού οι πόλοι βρίσκονται “μακριά” από το φανταστικό άξονα, ενώ για $\sigma_0 = -1/2$, η αύξηση θα είναι μεγαλύτερη και πιο απότομη, αφού οι πόλοι βρίσκονται κοντά στο φανταστικό άξονα. Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνονται από τα Σχήματα 10.3 και 10.4. Η χρονική απόκριση δίνεται αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα τη ρητή συνάρτηση μεταφοράς. Είναι



Σχήμα 10.4: Μέτρο μετασχ. Laplace συστήματος Παραδείγματος 6 και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για $\sigma = -1/2$.

$$H(s) = \frac{A}{s - (\sigma_0 + j2\pi 20)} + \frac{B}{s - (\sigma_0 - j2\pi 20)} \quad (10.94)$$

με

$$A = H(s)(s - (\sigma_0 + j2\pi 20)) \Big|_{s=\sigma_0+j2\pi 20} = \frac{1250}{2\pi 40} e^{-j\pi/2} \quad (10.95)$$

$$B = H(s)(s - (\sigma_0 - j2\pi 20)) \Big|_{s=\sigma_0-j2\pi 20} = \frac{1250}{2\pi 40} e^{j\pi/2} \quad (10.96)$$

Άρα μέσω αντιστρόφου μετασχ. Laplace θα έχουμε

$$H(s) = \frac{1250}{2\pi 40} e^{-j\pi/2} \frac{1}{s - (\sigma_0 + j2\pi 20)} + \frac{1250}{2\pi 40} e^{j\pi/2} \frac{1}{s - (\sigma_0 - j2\pi 20)} \quad (10.97)$$

το οποίο, λόγω αιτιατότητας, δίνει την κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{125}{8\pi} e^{-j\pi/2} e^{(\sigma_0 + j2\pi 20)t} u(t) + \frac{125}{8\pi} e^{j\pi/2} e^{(\sigma_0 - j2\pi 20)t} u(t) \quad (10.98)$$

$$= \left[\frac{125}{8\pi} e^{\sigma_0 t} e^{j(2\pi 20t - \pi/2)} + \frac{125}{8\pi} e^{\sigma_0 t} e^{-j(2\pi 20t - \pi/2)} \right] u(t) \quad (10.99)$$

$$= \frac{250}{8\pi} e^{\sigma_0 t} \cos \left(2\pi 20t - \frac{\pi}{2} \right) u(t) \quad (10.100)$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε εν γένει ότι

Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος στο Χώρο του Μετασχ. Laplace - I

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος

$$h(t) \longleftrightarrow H(s)$$

είναι της μορφής

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{a_k t} u(t) - \sum_{l=1}^M B_l e^{b_l t} u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{s - a_k} + \sum_{l=1}^M B_l \frac{1}{s - b_l}$$

με $\text{ROC}_k : \Re\{s\} > \Re\{a_k\}$ και $\text{ROC}_l : \Re\{s\} < \Re\{b_l\}$ και $\max_k \{\Re\{a_k\}\} < \Re\{s\} < \min_l \{\Re\{b_l\}\}$ τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

και εφαρμόζοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $y(t)$.

και

Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος στο Χώρο του Μετασχ. Laplace - II

Αν ένα σύστημα περιγράφεται με διαφορικές εξισώσεις ως

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t) \longleftrightarrow H(s) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

τότε χρησιμοποιούμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για να αναλύσουμε τη Συνάρτηση Μεταφοράς $H(s)$ σε απλά κλάσματα και να βρούμε με χρήση Πινάκων την κρουστική απόκριση $h(t)$.

10.4.1 Διατάξεις Συστημάτων

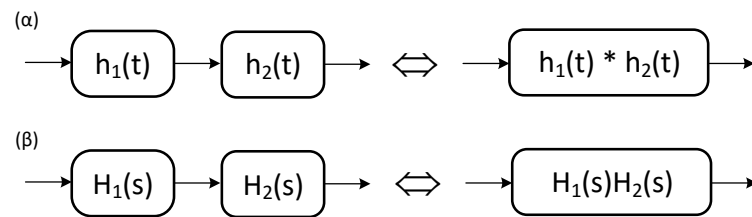
Ας δούμε μερικές γνωστές διατάξεις συστημάτων και πως αυτές αναπαρίστανται στο χώρο του Laplace.

10.4.1.1 Συστήματα σε Σειρά

Πολλές φορές, μας βολεύει να βάζουμε πολλά συστήματα σε σειρά μεταξύ τους, δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο σύστημα που εκτελεί επεξεργασία στην είσοδό του. Όταν έχουμε τέτοια συστήματα σε σειρά, όπως στο Σχήμα 10.5(α), η έξοδος του $h_1(t)$ περνάει ως είσοδος στο $h_2(t)$. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα

αυτά αποτελούν ένα μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί τη συνέλιξη των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του χρόνου.

Όμως ξέρουμε πολύ καλά ότι η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στη συχνότητα (δηλ. στο χώρο s , των

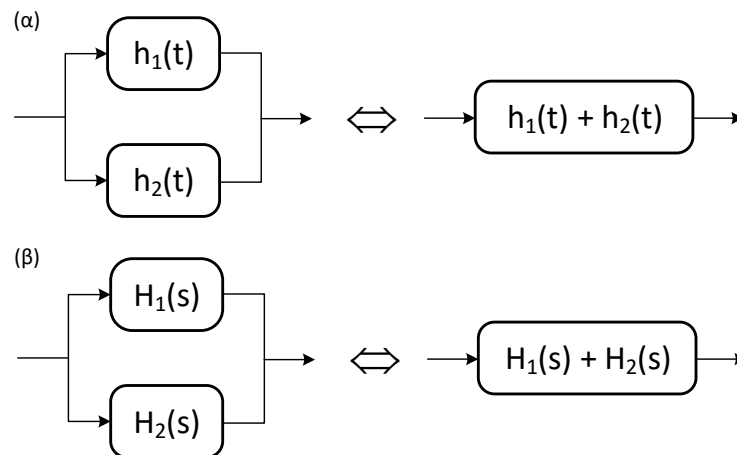


Σχήμα 10.5: Συστήματα σε Σειρά: (α) δυο συστήματα σε σειρά στο χώρο του χρόνου και το ισοδύναμο σύστημα, (β) δυο συστήματα σε σειρά στο χώρο του Laplace και το ισοδύναμο σύστημα.

μικραδικών συχνοτήτων, του Μετασχ. Laplace). Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο συστήματα σε σειρά στο χρόνο ισούνται με ένα σύστημα στη συχνότητα, όπου περιγράφεται από το γινόμενο των μετασχηματισμών τους, όπως στο Σχήμα 10.5(β).

10.4.1.2 Συστήματα σε Παράλληλια

Άλλες φορές, μας βολεύει να βάζουμε πολλά συστήματα παράλληλα μεταξύ τους, δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο σύστημα που εκτελεί επεξεργασία στην είσοδό του. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως στο Σχήμα 10.6(α), η αρχική είσοδος περνάει και στο $h_1(t)$ και στο $h_2(t)$. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα αυτά αποτελούν ένα μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί το άθροισμα των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του χρόνου. Περνώντας στο χώρο της συχνότητας, ξέρουμε πολύ καλά ότι οι μετασχηματισμοί που έχουμε ορίσει είναι



Σχήμα 10.6: Συστήματα σε Παράλληλια: (α) δυο συστήματα σε παράλληλια στο χώρο του χρόνου και το ισοδύναμο σύστημα, (β) δυο συστήματα σε παράλληλια στο χώρο του Laplace και το ισοδύναμο σύστημα.

γραμμικοί. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο συστήματα παράλληλα στο χρόνο ισούνται με ένα σύστημα στη συχνότητα, όπου περιγράφεται επίσης από το άθροισμα των μετασχηματισμών τους, όπως στο Σχήμα 10.6(β). Φυσικά υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί συστημάτων σε σειρά και παράλληλα, αλλά η βασική αρχή ανάλυσης ακολουθεί την παραπάνω διαδικασία.

10.4.2 Πόλοι και Μηδενικά στο s -επίπεδο

Έχουμε ήδη ορίσει ένα όνομα για το μετασχ. Laplace της χρονικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος: συμφωνήσαμε να τον λέμε **Συνάρτηση Μεταφοράς**. Για να λάβουμε περισσότερη πληροφορία για τη συνάρτηση μεταφοράς, θα ήταν πολύ βολικό να τη γράψουμε σε μορφή παραγόντων, ως

$$H(s) = A \frac{\prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} \quad (10.101)$$

με A μια σταθερά. Οι αριθμοί c_k, d_k λέγονται **μηδενικά** και **πόλοι**, αντίστοιχα. Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή αντίστοιχα. Εν γένει, ονομάζουμε **πολούς** τα σημεία του s -επιπέδου που απειρίζουν το $H(s)$. Αντίστοιχα, ονομάζουμε **μηδενικά** τα σημεία του s -επιπέδου που μηδενίζουν το $H(s)$. Σίγουρα τέτοια σημεία είναι οι ρίζες του παρονομαστή και οι ρίζες του αριθμητή αντίστοιχα, δηλ. τα σημεία c_k, d_k . Όμως, σε περιπτώσεις που η τάξη του αριθμητή είναι διαφορετική από του παρονομαστή, μπορεί να υπάρχουν κι άλλα μηδενικά ή πόλοι. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 10.7:

Θεωρήστε τις απλές αιτιατές συναρτήσεις μεταφοράς

$$H_1(s) = \frac{s-2}{s-3}, \quad \Re\{s\} > 3 \quad (10.102)$$

$$H_2(s) = \frac{s-2}{s^2}, \quad \Re\{s\} > 0 \quad (10.103)$$

$$H_3(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+1)}, \quad \Re\{s\} > 3 \quad (10.104)$$

$$H_4(s) = \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} > 0 \quad (10.105)$$

Βρείτε και σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά τους.

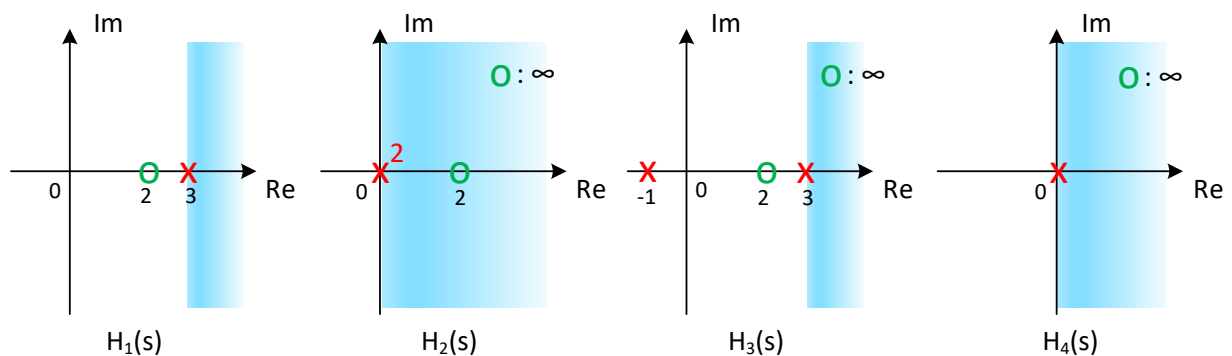
Λύση:

Το $H_1(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = 3$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$.

Το $H_2(s)$ έχει έναν πόλο τάξης 2 στο $s = 0$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$. Όμως, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει ακόμα ένα μηδενικό στο άπειρο.

Το $H_3(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = 3$, έναν πόλο στο $s = -1$, και ένα μηδενικό στο $s = 2$. Όμως, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει κι ένα ακόμη μηδενικό στο άπειρο.

Το $H_4(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = 0$. Όμως, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει ένα μηδενικό στο άπειρο. Το Σχήμα 10.7 δείχνει τη θέση των πόλων και των μηδενικών για κάθε σύστημα, καθώς και το πεδίο σύγκλισης.



Σχήμα 10.7: Πόλοι, μηδενικά, και πεδία σύγκλισης των συστημάτων του Παραδείγματος 10.7.

Τα παραπάνω παραδείγματα μας προδίδουν ένα γενικό κανόνα: **σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, υπάρχουν τόσοι πόλοι, οσα και μηδενικά**. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ως εξής:

Έστω μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ως

$$H(s) = A \frac{\prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} \quad (10.106)$$

Τότε

$$H(s) = A \frac{s^M \prod_{k=1}^M (1 - \frac{c_k}{s})}{s^N \prod_{k=1}^N (1 - \frac{d_k}{s})} = A s^{M-N} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - \frac{c_k}{s})}{\prod_{k=1}^N (1 - \frac{d_k}{s})} \quad (10.107)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Έστω ότι $M > N$, άρα συνεπάγεται ότι έχουμε θετική δύναμη του s στον όρο μπροστά από το κλάσμα, άρα θα έχουμε $M - N$ πόλους στο άπειρο.
- Αν $M < N$, τότε ο όρος s^{M-N} γράφεται ως $1/s^{M-N}$, με $M - N > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, το σύστημα θα έχει $M - N$ μηδενικά στο άπειρο.
- Στην τετριμμένη περίπτωση όπου $M = N$, δεν υπάρχουν πόλοι ή μηδενικά στο άπειρο, και οι πόλοι και τα μηδενικά δίνονται μόνο από τις ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή και του αριθμητή αντίστοιχα.

Είναι ενδιαφέρον και σημαντικό να παρατηρήσει κανείς το εξής: αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή συνάρτηση του s , τότε εγγυημένα το σύστημα μπορεί να είναι

(α') αιτιατό, αν το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο,

(β') αντι-αιτιατό, αν το πεδίο σύγκλισης είναι αριστερόπλευρο,

(γ') μη-αιτιατό, αν το πεδίο σύγκλισης είναι αμφίπλευρο.

Γνωρίζετε ότι εν γένει η πλευρικότητα ενός πεδίου σύγκλισης δεν καθορίζει την αιτιατότητά του (όμως το αντίστροφο ισχύει). Θυμηθείτε, για παράδειγμα, ότι ένα δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης αντιστοιχεί σε ένα δεξιόπλευρο σήμα, αλλά όχι απαραίτητα σε ένα αιτιατό σήμα. Όμως μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς εγγυάται ότι το πεδίο σύγκλισης καθορίζει και την αιτιατότητα (ή μη) του συστήματος. Διαισθητικά, μπορείτε να το καταλάβετε ως εξής: για παράδειγμα, αν ένα σύστημα είναι δεξιόπλευρο αλλά όχι αιτιατό, τότε μπορεί κάποιες τιμές της χρονικής απόκρισής του $h(t)$ να βρίσκονται αριστερά του μηδενός στον άξονα του χρόνου, όπως π.χ. το

$$h(t) = e^{-(t+2)}u(t+2) \longleftrightarrow H(s) = \frac{1}{s+1}e^{2s}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (10.108)$$

Ξεκάθαρα, το σύστημα αυτό είναι δεξιόπλευρο αλλά όχι αιτιατό. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του δεν είναι ρητή συνάρτηση του s , αλλά ο αριθμητής εμπεριέχει και μια εκθετική συνάρτηση με θετικό παράγοντα του s (τον αριθμό 2). Φυσικά, η ύπαρξη εκθετικής συνάρτησης του s δε σημαίνει πάντα ότι το σύστημα δεν είναι αιτιατό, αφού π.χ. το σύστημα

$$h(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) \longleftrightarrow H(s) = \frac{1}{s+1}e^{-2s}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (10.109)$$

είναι αιτιατό, παρ' όλο που έχει στον αριθμητή μια εκθετική συνάρτηση - η οποία όμως έχει αρνητικό παράγοντα του s στον εκθέτη (τον αριθμό -2).

Καταλαβαίνετε λοιπόν ότι μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ δεν είναι αναγκαία συνθήκη για την μονοσήμαντη αντιστοίχιση της πλευρικότητας του πεδίου σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς με την αιτιατότητα του συστήματος, αλλά είναι σίγουρα ικανή συνθήκη. Τέλος, παρατηρήστε ότι όταν η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή και το σύστημα αιτιατό, η χρονική απόκριση έχει πάντα μη μηδενικές τιμές στον χρονικό άξονα $(0^+, +\infty)$. Αντίστοιχα, για αντι-αιτιατά συστήματα, η χρονική απόκριση θα πάρει μη μηδενικές τιμές στο χρονικό άξονα $(-\infty, 0^-)$.

10.5 Ευστάθεια Συστήματος

Ένα νέο στοιχείο που θα εισάγουμε τώρα είναι η έννοια της *ευστάθειας*, με όρους μετασχ. Laplace. Θυμίζουμε ότι ένα σύστημα λέγεται ευσταθές όταν παράγει φραγμένη έξοδο για μια οποιαδήποτε φραγμένη είσοδο. Δηλ.

$$\text{Αν } |x(t)| < M_x \Rightarrow |y(t)| < M_y \quad (10.110)$$

όπου M_x, M_y πραγματικοί αριθμοί. Ας θυμηθούμε πως “μετραφράζεται” η ευστάθεια με όρους χρονικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος. Είναι

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau < M_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau \quad (10.111)$$

Αυτό σημαίνει ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος $y(t)$, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau < M_h < \infty \quad (10.112)$$

με $M_h \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το $h(t)$ πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Όμως αυτό το ολοκλήρωμα μας θυμίζει ακριβώς τη συνθήκη ύπαρξης του Μετασχ. Fourier του $h(t)$ μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματός του!! Άρα μπορούμε να πούμε γενικότερα ότι

Ευστάθεια Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Κριτήριο ευστάθειας (και άρα ύπαρξης του μετασχ. Fourier μέσω του ολοκληρώματός του) για οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα είναι η συμπερίληψη του φανταστικού άξονα $j2\pi f$ ($\Re\{s\} = \sigma = 0$) μέσα στο πεδίο σύγκλισης της συναρτησης μεταφοράς $H(s)$ που το περιγράφει.

Ας δούμε λίγο περισσότερο τι συμβαίνει σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις.

Έστω ότι η χρουστική απόκριση $h(t)$ για ένα αιτιατό σύστημα (χωρίς βλάβη της γενικότητας) εκφράζεται με χρήση του αντιστρόφου μετασχ. Laplace ως

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t), \quad \Re\{s\} > \max\{\Re\{s_k\}\} \quad (10.113)$$

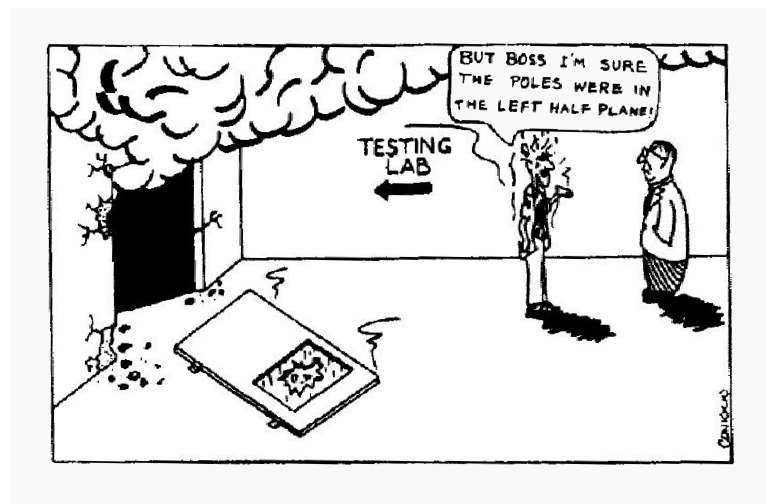
όπου s_k οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, οι οποίοι είναι απλοί (χωρίς πολλαπλότητα), χάριν απλούστευσης. Τότε θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N |A_k| |e^{s_k t} u(t)| dt = \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}| |e^{j2\pi f t}| dt = \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}| dt \quad (10.114)$$

Καταλήξαμε πλέον ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος, και άρα το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει να ισχύει ότι η συνάρτηση $e^{-\sigma_k t}$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Αυτό προφανώς συμβαίνει *μόνον* όταν $\Re\{s_k\} = \sigma_k < 0$! Πότε ισχύει όμως αυτό; Φυσικά όταν **όλοι** οι πόλοι s_k του $H(s)$ βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο! Άρα

Ευστάθεια Αιτιατού Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα ορίζεται ο μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.



Σχήμα 10.8: Προσοχή στην ευστάθεια των συστημάτων!!

Με αντίστοιχη ανάλυση προκύπτει ότι

Ευστάθεια Αντι-αιτιατού Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Ένα αντι-αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα ορίζεται ο μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Φυσικά οι δυο τελευταίες συνθήκες ευστάθειας είναι υποπεριπτώσεις - εύκολα μπορείτε να συμπεράνετε ότι και για τις δυο αυτές υποπεριπτώσεις, ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισής τους.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 10.8:

Ένα ευσταθές ΓΧΑ σύστημα έχει τις παρακάτω εισόδους και εξόδους, $x(t)$ και $y(t)$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιήστε το μετασχ. Laplace για να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος.

$$(\alpha') \quad x(t) = e^{-t}u(t), \quad y(t) = e^{-2t} \cos(t)u(t)$$

$$(\beta') \quad x(t) = e^{-2t}u(t), \quad y(t) = -2e^{-t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$$

$$(\gamma') \quad x(t) = e^{2t}u(-t), \quad y(t) = e^{-t}u(t)$$

Λύση:
Είναι

(α') Προφανώς

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (10.115)$$

άρα αρκεί να βρούμε τα $X(s), Y(s)$. Έχουμε

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (10.116)$$

αφού το σήμα είναι δεξιόπλευρο. Επίσης

$$y(t) = e^{-2t} \cos(t)u(t) \longleftrightarrow Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1}, \quad \Re\{s\} > -2 \quad (10.117)$$

και άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}}{\frac{1}{s+1}} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)^2+1} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5} \quad (10.118)$$

Η τάξη του αριθμητή είναι ίδια με του παρονομαστή, άρα πρέπει πριν κάνουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να κάνουμε διαίρεση των πολυωνύμων. Κάνοντας διαίρεση πολυωνύμων, θα έχουμε

$$H(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5} = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2+1} \quad (10.119)$$

Εδώ μπορούμε να ακολουθήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση αντι της Ανάπτυξης σε Μερικά Κλάσματα. Βλέπουμε ότι ο παρονομαστής μας θυμίζει δυο πολύ γνωστά ζεύγη μετ. Laplace, τα

$$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t) \longleftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}, \quad \Re\{s\} > -\Re\{a\} \quad (10.120)$$

$$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)u(t) \longleftrightarrow \frac{2\pi f_0}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}, \quad \Re\{s\} > -\Re\{a\} \quad (10.121)$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε τον αριθμητή με τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιήσουμε τους παραπάνω τύπους. Δηλ.

$$H(s) = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2+1} = 1 - \frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{(s+2)^2+1} \quad (10.122)$$

Επίσης, το πεδίο σύγκλισης για αυτά τα δυο σήματα είναι το $\Re\{s\} > -2$, το οποίο συμφωνεί με το χαρακτη-

ριστικό της ευστάθειας του συστήματος που μας λέει η εκφώνηση, άρα

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t} \cos(t)u(t) - e^{-2t} \sin(t)u(t) \quad (10.123)$$

(β') Όμοια, έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2, \quad Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+3}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (10.124)$$

άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \quad (10.125)$$

με

$$A = H(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{-4(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=-1} = -2 \quad (10.126)$$

και

$$B = H(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)} \Big|_{s=-3} = -2 \quad (10.127)$$

Το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς θα είναι τέτοιο ώστε

$$\{\Re\{s\} > -1\} \supseteq R_H \cap \{\Re\{s\} > -2\} \quad (10.128)$$

και δεδομένου ότι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στις θέσεις $s = -1$, $s = -3$, το μόνο πιθανό πεδίο σύγκλισης είναι το

$$R_H = \{\Re\{s\} > -1\} \quad (10.129)$$

Οπότε

$$H(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{-2}{s+3} \longleftrightarrow h(t) = -2e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) \quad (10.130)$$

που είναι και το ζητούμενο.

(γ') Έχουμε

$$X(s) = -\frac{1}{s-2}, \quad \Re\{s\} < 2 \quad (10.131)$$

και

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (10.132)$$

Άρα

$$H(s) = -\frac{s-2}{s+1} \quad (10.133)$$

Εδώ ο βαθμός του πολωνύμου του αριθμητή ισούται με τον αντίστοιχο του παρονομαστή, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα αν πρώτα δεν κάνουμε διαίρεση των πολωνύμων. Παρ' όλο που η διαίρεση είναι απλή, ας δούμε έναν διαφορετικό τρόπο. Έχουμε

$$H(s) = -\frac{s-2}{s+1} = -s \frac{1}{s+1} + 2 \frac{1}{s+1} \quad (10.134)$$

Ο μοναδικός πόλος του συστήματος βρίσκεται στη θέση $s = -1$, άρα η μόνη επιλογή πεδίου σύγκλισης για να είναι το σύστημα ευσταθές είναι το $R_H = \{\Re\{s\} > -1\}$. Οπότε, σύμφωνα με τους πίνακες ιδιοτήτων και ζευγών μετασχη. Laplace, θα έχουμε

$$h(t) = -\frac{d}{dt}e^{-t}u(t) + 2e^{-t}u(t) = -(-e^{-t}u(t) + e^{-t}\delta(t)) + 2e^{-t}u(t) = 3e^{-t}u(t) - \delta(t) \quad (10.135)$$

Επιβεβαιώστε την παραπάνω απάντηση κάνοντας διαίρεση των πολωνύμων και ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα.

■

Παράδειγμα 10.9:

Ένα ΓΧΑ σύστημα με απολύτως ολοκληρώσιμη χρουστική απόκριση $h(t)$ έχει έναν πόλο στη θέση $s = 3$. Απαντήστε αναλυτικά τις παρακάτω ερωτήσεις:

- (α') Μπορεί η $h(t)$ να είναι πεπερασμένης διάρκειας;
- (β') Μπορεί η $h(t)$ να είναι αριστερόπλευρη;
- (γ') Μπορεί η $h(t)$ να είναι αμφίπλευρη;
- (δ') Μπορεί η $h(t)$ να είναι δεξιόπλευρη;

Λύση:

Ένα απολύτως ολοκληρώσιμο σήμα σημαίνει ότι έχει μετασχ. Fourier ο οποίος μπορεί να υπολογιστεί μέσω του ορισμού του. Αν αυτό το σήμα αποτελεί την χρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος, συνεπάγεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές.

- (α') Όχι, γιατί ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας έχει πεδίο σύγκλισης όλο το μιγαδικό επίπεδο, και άρα δεν μπορεί να έχει πόλους.
- (β') Ναι, μπορεί να είναι αριστερόπλευρη αν ο πόλος είναι μοναδικός και το πεδίο σύγκλισης είναι το $\Re\{s\} < 3$, που περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Αν υπάρχουν περισσότεροι πόλοι, πρέπει όλοι να βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.
- (γ') Ναι, μπορεί να είναι αμφίπλευρη, αρκεί να υπάρχει ένας τουλάχιστον πόλος στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, έτσι ώστε το πεδίο σύγκλισης να αποτελεί μια λωρίδα που περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Αν ο πόλος είναι μοναδικός, τότε προφανώς όχι.
- (δ') Όχι, δεν μπορεί να είναι δεξιόπλευρη γιατί ένα δεξιόπλευρο σήμα έχει δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης, το οποίο στην περίπτωσή μας είναι $R \subseteq \{\Re\{s\} > 3\}$. Ένα τέτοιο πεδίο δεν μπορεί να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

10.6 Αντίστροφα Συστήματα

Ας θεωρήσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα, με χρουστική απόκριση $h(t)$. Η χρουστική απόκριση του **αντίστροφου συστήματος**, $h^{inv}(t)$, ικανοποιεί τη συνθήκη

$$h^{inv}(t) * h(t) = \delta(t) \quad (10.136)$$

Αν εφαρμόσουμε μετασχ. Laplace και στα δυο μέλη, έχουμε ότι

$$H^{inv}(s)H(s) = 1 \Leftrightarrow H^{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} \quad (10.137)$$

Άρα βλέπουμε ότι η Συνάρτηση Μεταφοράς $H^{inv}(s)$ του αντίστροφου συστήματος δεν είναι άλλη από την αντίστροφη της Συνάρτησης Μεταφοράς, $1/H(s)$, του αρχικού συστήματος. Με όρους πόλων-μηδενικών, αυτή η σχέση γράφεται

$$H^{inv}(s) = \frac{1}{A} \frac{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}{\prod_{k=1}^M (s - c_k)} \quad (10.138)$$

όπου c_k, d_k τα μηδενικά και οι πόλοι του αρχικού συστήματος, που εδώ βλέπετε ότι έχουν γίνει πόλοι (c_k) και μηδενικά (d_k), για το αντίστροφο σύστημα. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι κάθε σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς έχει αντίστροφο σύστημα.

Παράδειγμα 10.10:

Θεωρήστε το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t) \quad (10.139)$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του αντιστρόφου συστήματος. Είναι αυτό ευσταθές και αιτιατό;

Λύση:

Πρώτα, ας βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς του ίδιου του συστήματος. Θα είναι, με εφαρμογή της ιδιότητας της παραγώγισης

$$sY(s) + 3Y(s) = s^2X(s) + sX(s) - 2X(s) \Leftrightarrow Y(s)(s+3) = X(s)(s^2 + s - 2) \quad (10.140)$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + s - 2}{s + 3} \quad (10.141)$$

και το αντίστροφο σύστημα θα είναι το

$$H^{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + s - 2} = \frac{s + 3}{(s - 1)(s + 2)} \quad (10.142)$$

Το αντίστροφο σύστημα έχει πόλους στις θέσεις $s = 1, s = -2$. Ο πόλος στη θέση $s = 1$ είναι στο δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου. Έτσι, το αντίστροφο σύστημα δεν μπορεί να είναι και αιτιατό και ευσταθές.

10.6.1 Πεδίο Σύγκλισης Αντιστρόφου Συστήματος

Ένα ερώτημα που μπορεί να θέσει κάποιος είναι τι συμβαίνει με το πεδίο σύγκλισης του αντίστροφου συστήματος. Αν $ROC_{H(s)} = R_H$, τότε ποιο είναι το πεδίο σύγκλισης του αντίστροφου συστήματος, R_H^{inv} ; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα μας τη δίνει το θεώρημα της συνέλιξης, το οποίο, όπως ξέρετε ήδη, μας λέει ότι τα $H(s)$ και $G(s) = H^{inv}(s)$ πρέπει να έχουν επικαλυπτόμενα πεδία σύγκλισης, δηλ.

$$R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset \quad (10.143)$$

Παράδειγμα 10.11:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s - \frac{4}{5}}, \quad ROC = \Re\{s\} > \frac{4}{5} \quad (10.144)$$

Βρείτε το αντίστροφο σύστημα, αν υπάρχει.

Λύση:

Το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$H^{inv}(s) = \frac{s - \frac{4}{5}}{s - \frac{1}{2}} \quad (10.145)$$

Όμως για το πεδίο σύγκλισης έχουμε δυο επιλογές: i) $\Re\{s\} > \frac{1}{2}$, ii) $\Re\{s\} < \frac{1}{2}$. Από αυτά τα δυο πεδία, αυτό που επικαλύπτεται με το πεδίο σύγκλισης του $H(s)$ είναι το $\Re\{s\} > \frac{1}{2}$. Άρα μόνο το σύστημα με αυτό το πεδίο σύγκλισης είναι έγκυρο αντίστροφο σύστημα! Έτσι, μπορούμε να βρούμε και την χρονική απόκριση του αντιστρόφου συστήματος, $h^{inv}(t)$, η οποία είναι

$$h^{inv}(t) = L^{-1}\left\{\frac{s}{s - \frac{1}{2}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{5}}{s - \frac{1}{2}}\right\} = L^{-1}\left\{s \frac{1}{s - \frac{1}{2}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{5}}{s - \frac{1}{2}}\right\} \quad (10.146)$$

$$= \frac{d}{dt}e^{t/2}u(t) - \frac{4}{5}e^{t/2}u(t) \quad (10.147)$$

$$= \delta(t) + \frac{1}{2}e^{t/2}u(t) - \frac{4}{5}e^{t/2}u(t) \quad (10.148)$$

$$= \delta(t) - \frac{3}{10}e^{t/2}u(t) \quad (10.149)$$

Παράδειγμα 10.12:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s - \frac{3}{10}}, \quad ROC = \Re\{s\} > \frac{3}{10} \quad (10.150)$$

Βρείτε το αντίστροφο σύστημα, αν υπάρχει.

Λύση:

Το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$H^{inv}(s) = \frac{s - \frac{3}{10}}{s - \frac{1}{2}} \quad (10.151)$$

Όμως για το πεδίο σύγκλισης έχουμε δυο επιλογές: i) $\Re\{s\} > \frac{1}{2}$, ii) $\Re\{s\} < \frac{1}{2}$. Παρατηρήστε ότι και τα δυο πεδία σύγκλισης επικαλύπτονται με το πεδίο σύγκλισης του $H(s)$. Άρα και τα δυο συστήματα είναι έγκυρα αντίστροφα σύστημα! Έτσι, μπορούμε να βρούμε και την χρονική απόκριση του αντιστρόφου συστήματος, $h_1^{inv}(t)$, η οποία είναι

$$h_1^{inv}(t) = L^{-1}\left\{\frac{s}{s - \frac{1}{2}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{10}}{s - \frac{1}{2}}\right\} = L^{-1}\left\{s \frac{1}{s - \frac{1}{2}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{10}}{s - \frac{1}{2}}\right\} \quad (10.152)$$

$$= \frac{d}{dt}e^{t/2}u(t) - \frac{3}{10}e^{t/2}u(t) \quad (10.153)$$

$$= \delta(t) + \frac{1}{2}e^{t/2}u(t) - \frac{3}{10}e^{t/2}u(t) \quad (10.154)$$

$$= \delta(t) + \frac{1}{5}e^{t/2}u(t) \quad (10.155)$$

και

$$h_2^{inv}(t) = L^{-1}\left\{\frac{s}{s - \frac{1}{2}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{10}}{s - \frac{1}{2}}\right\} = L^{-1}\left\{s \frac{1}{s - \frac{1}{2}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{10}}{s - \frac{1}{2}}\right\} \quad (10.156)$$

$$= -\frac{d}{dt}e^{t/2}u(-t) + \frac{3}{10}e^{t/2}u(-t) \quad (10.157)$$

$$= -\delta(t) - \frac{1}{2}e^{t/2}u(-t) + \frac{3}{10}e^{t/2}u(-t) \quad (10.158)$$

$$= -\delta(t) - \frac{1}{5}e^{t/2}u(-t) \quad (10.158)$$

Παρατηρήστε ότι το $h_1^{inv}(t)$ είναι αιτιατό αλλά ασταθές, ενώ το $h_2^{inv}(t)$ είναι αντι-αιτιατό αλλά ευσταθές.

10.7 Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

Συχνά στην πράξη, μας ενδιαφέρουν συστήματα που έχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα. Θυμηθείτε το παράδειγμα στην εισαγωγή του κεφαλαίου: στην κινητή τηλεφωνία, θέλουμε να ακυρώσουμε την επίδραση του καναλιού μετάδοσης επάνω στο σήμα που μεταδίδεται. Έστω $H(s)$ το σύστημα που μοντελοποιεί το κανάλι επικοινωνίας, έστω $X(s)$ η είσοδος, και $Y(s)$ η έξοδος, δηλ. το σήμα στο σταθμό βάσης. Για να ακυρώσουμε την επίδραση του καναλιού $H(s)$ στο σήμα εισόδου $X(s)$, θα πρέπει να υπολογίσουμε το αντίστροφο σύστημα $1/H(s)$, ώστε ο παραλήπτης να λάβει το

$$Y(s) = H(s)\left(\frac{1}{H(s)}\right)X(s) = X(s) \quad (10.159)$$

δηλ. το σήμα που θέλουμε να στείλουμε. Επιθυμούμε αυτό το αντίστροφο σύστημα να είναι ευσταθές, για προφανείς λόγους, και αιτιατό, ώστε να είναι πραγματοποιήσιμο.

Προφανώς για να είναι ένα σύστημα ευσταθές και αιτιατό, πρέπει να έχει όλους τους πόλους του στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου. Γιατί; Γιατι τότε θα έχει δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης (ως αιτιατό, είναι και δεξιόπλευρο σήμα, και τα δεξιόπλευρα σήματα ξέρουμε ότι έχουν δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης), και αυτό θα είναι

της μορφής $\Re\{s\} > \max_{k=1,\dots,N}\{\Re\{d_k\}\}$, όπου d_k οι πόλοι του συστήματος. Αφού λοιπόν το πεδίο σύγκλισης είναι έτσι, ο μεγαλύτερος πόλος θα είναι κι αυτός στο αριστερό ημιεπίπεδο, και έτσι το πεδίο σύγκλισης σίγουρα θα περιλαμβάνει τον κατακόρυφο άξονα $j\omega$, αρα θα είναι και ευσταθές.

Για ένα τέτοιο σύστημα $H(s)$, το αντίστροφό του, $H^{inv}(s)$, θα έχει για πόλους τα μηδενικά του $H(s)$ και για μηδενικά τους πόλους του $H(s)$. Ένα ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα υπάρχει μόνον όταν όλα τα μηδενικά και όλοι οι πόλοι του $H(s)$ είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο του s -επιπέδου. Ένα σύστημα που έχει όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά στο αριστερό του ημιεπίπεδο λέγεται **Σύστημα Ελάχιστης Φάσης**. Μόνο συστήματα ελάχιστης φάσης μπορούν να δώσουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα! :-)

Μια σημαντική ιδιότητα των συστημάτων ελάχιστης φάσης είναι η μοναδική σχέση μεταξύ του φάσματος πλάτους και του φάσματος φάσης. Δηλαδή, η απόκριση φάσης ενός συστήματος ελάχιστης φάσης μπορεί να ευρεθεί μοναδικά¹ από την απόκριση πλάτους, και αντίστροφα.

Ο όρος *ελάχιστης φάσης* είναι περισσότερο ιστορικός, και ένας πιο κατάλληλος όρος θα ήταν *ελάχιστης καθυστέρησης φάσης*, για λόγους που δε θα συζητήσουμε.

Οπότε θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να γνωρίσουμε μια ακόμα κατηγορία συστημάτων, τα οποία λέγονται all-pass² συστήματα.

10.8 All-pass Συστήματα

Ένα all-pass σύστημα είναι ένα ευσταθές σύστημα του οποίου η απόκριση πλάτους είναι σταθερή και ανεξάρτητη της συχνότητας, δηλ. η απόκριση σε συχνότητα γράφεται ως

$$H_{ap}(f) = e^{j\phi_{ap}(f)} \quad (10.160)$$

και άρα η απόκριση πλάτους είναι

$$|H_{ap}(f)| = 1 \quad (10.161)$$

Αντίστοιχα, αν η σχετική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι ρητή, θα είναι της μορφής

$$H_{ap}(s) = \prod_{k=1}^M \frac{s + a_k^*}{s - a_k} \quad (10.162)$$

Παρατηρήστε ότι αν το a_k είναι πραγματικό, τότε ο πόλος και το μηδενικό κάθε όρου στην παραπάνω σχέση θα βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις επάνω στον πραγματικό άξονα. Αν το a_k είναι μιγαδικό, τότε ο πόλος και το μηδενικό κάθε όρου στην παραπάνω σχέση θα βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν του άξονα των φανταστικών.

Παρατηρήστε ότι

$$|H_{ap}(s)|_{s=j2\pi f} = |H_{ap}(f)| = \left| \prod_{k=1}^M \frac{j2\pi f + a_k^*}{j2\pi f - a_k} \right| = \prod_{k=1}^M \frac{|j2\pi f + a_k^*|}{|j2\pi f - a_k|} = 1 \quad (10.163)$$

10.9 Παραγοντοποίηση συστήματος σε All-pass και Ελάχιστης Φάσης

Επιστρέφοντας τώρα στα συστήματα ελάχιστης φάσης, μπορεί ναδειχθεί ότι οποιοδήποτε αιτιατό και ευσταθές σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, η οποία δεν έχει μηδενικά στον φανταστικό άξονα, μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης και ενός συστήματος all-pass:

$$H(s) = H_{min}(s)H_{ap}(s) \quad (10.164)$$

με $H_{min}(s)$ και $H_{ap}(s)$ τα συστήματα ελάχιστης φάσης και all-pass αντίστοιχα. Με βάση αυτή τη σχέση, δείτε ότι

$$|H(s)|_{s=j2\pi f} = |H(f)| = |H_{min}(f)||H_{ap}(f)| = |H_{min}(f)| \quad (10.165)$$

¹Με την εξαίρεση μιας πραγματικής σταθεράς που πολλαπλασιάζεται με την απόκριση πλάτους.

²ή ολοδιαβατά, αλλά θα κρατήσουμε την αγγλική ορολογία για αυτήν την κατηγορία.

αφού το $|H_{ap}(f)| = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει το ίδιο μέτρο με το αρχικό σύστημα. Τι διαφορετικό έχει; Προφανώς διαφορετική φάση!

$$\angle H(s) \Big|_{s=j2\pi f} = \angle H(f) = \angle H_{min}(f) + \angle H_{ap}(f) \quad (10.166)$$

Τι χρησιμότητα μπορεί να έχει το σύστημα ελάχιστης φάσης; Ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα της εκτίμησης του καναλιού $H(s)$ στο παράδειγμα της κινητής τηλεφωνίας. Αν το $H(s)$ είναι ευσταθές και αιτιατό αλλά έχει ένα μηδενικό στο δεξιό ημιεπίπεδο, τότε το αντίστροφο σύστημα θα έχει έναν πόλο στο δεξιό ημιεπίπεδο, οπότε δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό! Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί μερικώς βρίσκοντας το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο $H(s)$. Έτσι θα έχουμε

$$Y(f) = H(f) \frac{1}{H_{min}(f)} X(f) \quad (10.167)$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$|Y(f)| = |H(f)| \frac{1}{|H_{min}(f)|} |X(f)| = |X(f)| \quad (10.168)$$

δηλ. μπορούμε να ακυρώσουμε πλήρως την επίδραση του καναλιού στο φάσμα πλάτους, αλλά φυσικά δε θα συμβαίνει το ίδιο και για τη φάση, αφού

$$\angle Y(f) = \angle H(f) - \angle H_{min}(f) + \angle X(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle X(f) \quad (10.169)$$

και $\angle H_{ap}(f)$ είναι πάντα διάφορο του μηδενός. Άρα δείξαμε ότι το λαμβανόμενο σήμα έχει φάση η οποία είναι το άθροισμα της φάσης της εισόδου και της φάσης του all-pass συστήματος.

Ας δούμε πως γίνεται αυτή η παραγοντοποίηση στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 10.13:

Έστω το αιτιατό και ευσταθές σύστημα $H(s)$ με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \quad (10.170)$$

Παραγοντοποιήστε το σε δυο συστήματα, ένα ελάχιστης φάσης και ένα all-pass.

Λύση:

Βλέπουμε πως υπάρχει ένα μηδενικό στο $s = 1$ και δυο πόλοι στο $s = -2$ και $s = -3$. Το σύστημα ελάχιστης φάσης πρέπει να έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά του στο αριστερό ημιεπίπεδο. Από το παραπάνω σύστημα, στο αριστερό ημιεπίπεδο βρίσκονται μόνο οι πόλοι. Άρα το μηδενικό $s = 1$ δε θα πρέπει να ανήκει στο σύστημα ελάχιστης φάσης, αλλά στο all-pass σύστημα. Όμως ένα all-pass σύστημα έχει τους πόλους και τα μηδενικά του σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν του άξονα των φανταστικών. Άρα θα υπάρχει κι ένας πόλος στη θέση $s = -1$.

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1} \quad (10.171)$$

Οι δυο πόλοι του αρχικού συστήματος θα ανήκουν στο σύστημα ελάχιστης φάσης, όμως θα πρέπει να ακυρώσουμε και τον πόλο που εισάγαμε στο all-pass σύστημα, ειδάλλως η παραγοντοποίηση δε θα είναι σωστή! Άρα το σύστημα ελάχιστης φάσης θα είναι

$$H_{min}(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad (10.172)$$

Δείξτε ότι το $H_{min}(s)$ και το $H(s)$ έχουν την ίδια απόκριση πλάτους.

■

Παράδειγμα 10.14:

Θεωρήστε το αιτιατό και ευσταθές σύστημα

$$H(s) = \frac{(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \quad (10.173)$$

- (α') Έχει το παραπάνω σύστημα ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα;
- (β') Εκφράστε το $H(s)$ ως το γινόμενο δυο συστημάτων: ενός συστήματος Ελάχιστης Φάσης, $H_{min}(s)$, και ενός συστήματος All-pass, $H_{ap}(s)$, το οποίο θα πρέπει να έχει έναν πόλο και ένα μηδενικό.
- (γ') Θεωρήστε το αντίστροφο σύστημα του συστήματος Ελάχιστης Φάσης που βρήκατε παραπάνω, $H_{min}^{inv}(s)$. Μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό;
- (δ') Σχεδιάστε την απόκριση πλάτους του νέου συστήματος, $G(s) = H(s)H_{min}^{inv}(s)$.

Λύση:

- (α') Τα μηδενικά του $H(s)$ βρίσκονται στις θέσεις $s = -2, 1$. Αφού ένα μηδενικό από αυτά είναι στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το αντίστροφο σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό.
- (β') Τα συστήματα Ελάχιστης Φάσης έχουμε δει ότι έχουν όλους τους πόλους και τα μηδενικά στο αριστερό ημιεπίπεδο. Τα συστήματα All-pass έχουν τους πόλους και τα μηδενικά σε συμμετρία γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $j\omega$, δηλ. αν ένας πόλος βρίσκεται στη θέση $s = s_p + j\omega_p$, τότε πρέπει να υπάρχει κι ένα μηδενικό στη θέση $s = -s_p + j\omega_p$. Οπότε, στη δική μας παραγοντοποίηση, το σύστημα Ελάχιστης Φάσης θα πάρει όλους τους πόλους και τα μηδενικά του $H(s)$ που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Το σύστημα All-pass θα πρέπει έπειτα να είναι τέτοιο ώστε να έχει όλα τα υπόλοιπα μηδενικά του $H(s)$, αλλά επειδή θα πρέπει να έχει αναγκαστικά και πόλους στις συμμετρικές θέσεις ως προς $j\omega$, που προφανώς το αρχικό $H(s)$ δεν έχει, θα πρέπει αυτά να τα “ακυρώσουμε”, βάζοντας κατάλληλα μηδενικά στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης, προσέχοντας βέβαια να μην πέφτουν στο δεξιό ημιεπίπεδο. Δηλαδή:
- Οι πόλοι και τα μηδενικά του $H(s)$ που είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο είναι οι $p = -3, -4, -5$ (όλοι δλδ) και $z = -2$ (το ένα από τα δυο μηδενικά), αντίστοιχα. Άρα το σύστημα Ελάχιστης Φάσης θα είναι το

$$H_{min}(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)(s+5)}$$

Το σύστημα All-pass θα πάρει το εναπομείναν μηδενικό, $z = 1$, αλλά επειδή είπαμε ότι στα All-pass συστήματα, οι πόλοι και τα μηδενικά έρχονται σε συμμετρία γύρω από τον $j\omega$, θα πρέπει το σύστημα να έχει και έναν πόλο στη θέση $p = -1$. Άρα

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

Όμως έτσι όπως είναι τώρα κατασκευασμένα τα συστήματα, το γινόμενο $H_{min}(s)H_{ap}(s)$ δεν είναι το ίδιο με το $H(s)$, γιατί υπάρχει ο πόλος στη θέση $p = -1$ που εισήχθη στο All-pass σύστημα. Δείτε:

$$H_{dec}(s) = H_{min}(s)H_{ap}(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)(s+5)} \frac{s-1}{s+1} \quad (10.174)$$

$$= \frac{(s+2)(s-1)}{(s+1)(s+3)(s+4)(s+5)} \quad (10.175)$$

$$\neq \frac{(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+4)(s+5)} = H(s) \quad (10.176)$$

Το πρόβλημα, όπως είπαμε και βλέπετε και παραπάνω, είναι ο πόλος στο $p = -1$, που μπήκε υποχρεωτικά στο All-pass σύστημα. Όμως, ο πόλος αυτός βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο, άρα μπορούμε να τον “ακυρώσουμε”, βάζοντας στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης ένα μηδενικό εκεί, έτσι ώστε στο γινόμενο των δυο, να απαλειφθούν. Μια τέτοια ενέργεια διατηρεί το σύστημα Ελάχιστης Φάσης ως τέτοιο, ενώ πλέον το γινόμενό μας είναι σωστό. Βέβαια, το σύστημα Ελάχιστης Φάσης έχει τώρα ένα μηδενικό που δεν υπήρχε στο αρχικό σύστημα $H(s)$. Αυτό δεν έχει σημασία, άλλωστε και το All-pass σύστημα έχει έναν πόλο που δεν υπήρχε στο αρχικό σύστημα $H(s)$. Εμάς μας ενδιαφέρει το γινόμενο των δυο συστημάτων $H_{min}(s)H_{ap}(s)$

να δίνει το αρχικό σύστημα $H(s)$, και κάθε ένα σύστημα να έχει τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει. Άρα

$$H_{min}(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \quad (10.177)$$

$$H_{ap}(s) = \frac{s-1}{s+1} \quad (10.178)$$

Βλέπετε ότι το γινόμενο των παραπάνω είναι ίσο με το $H(s)$. Άρα αυτά είναι τα συστήματα που ζητούνται.

(γ') Το αντίστροφο σύστημα του $H_{min}(s)$ είναι το $H_{min}^{inv}(s)$ και είναι

$$H_{min}^{inv}(s) = \frac{(s+3)(s+4)(s+5)}{(s+2)(s+1)} \quad (10.179)$$

Οι πόλοι είναι στις θέσεις $s = -1, -2$, και βρίσκονται στο αριστερο ημιεπίπεδο, και έτσι το σύστημα μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό, επιλέγοντας $\Re\{s\} > -1$.

(δ') Είναι

$$G(s) = H(s)H_{min}^{inv}(s) = \frac{s-1}{s+1} = H_{ap}(s) \quad (10.180)$$

άρα η απόκριση πλάτους είναι σταθερή και ίση με τη μονάδα.

Κεφάλαιο 11

Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

Στα προηγούμενα Κεφάλαια, γνωρίσαμε τους Μετασχηματισμούς Fourier και Laplace, καθώς και τις σπουδαίες ιδιότητές τους και τη χρησιμότητά τους στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων. Όπως είδαμε, ο Μετασχ. Fourier μας αποκαλύπτει τις *φασματικές* συνιστώσες ενός σήματος, ενέργειας ή ισχύος. Όμως και οι σχέσεις μεταξύ σημάτων είναι το ίδιο σημαντικές με τα σήματα αυτά καθ' αυτά. Στο πεδίο του χρόνου, οι σχέσεις αυτές αποκαλύπτονται από τη μελέτη των περιήρημων *Συναρτήσεων Συσχέτισης - Correlation Functions*, ενώ στο πεδίο της συχνότητας, οι μετασχηματισμοί Fourier τους, οι λεγόμενες *Φασματικές Πυκνότητες - Spectral Densities* αναλαμβάνουν να μας πληροφορήσουν για την *κατανομή* της ενέργειας ή της ισχύος ενός σήματος ανά συχνότητες.

11.1 Μια μικρή εφαρμογή - κίνητρο

Ας θεωρήσουμε ένα μηχανισμό ανίχνευσης στόχου (radar), όπου σκοπός του είναι να ανιχνεύσει έναν πιθανό στόχο στέλνοντας προς αυτόν ένα σήμα. Αν ο στόχος είναι παρών, το σήμα αντανακλάται σε αυτόν και επιστρέφει στον πομπό, ενώ αν όχι, ο πομπός λαμβάνει μόνο θόρυβο. Η παρουσία ή η απουσία του ανακλώμενου σήματος επιβεβαιώνει την παρουσία ή την απουσία του στόχου. Το κρίσιμο πρόβλημα σε αυτή τη διαδικασία είναι η ανίχνευση του ανακλώμενου σήματος. Φυσικά, το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνεται έχει αλλοιωθεί και εξασθενήσει σοβαρά λόγω απόστασης και θορύβου του περιβάλλοντος. Σε μια τέτοια περίπτωση, η πράξη της συσχέτισης του ληφθέντος σήματος με το αρχικό μπορεί να μας βοηθήσει σημαντικά!

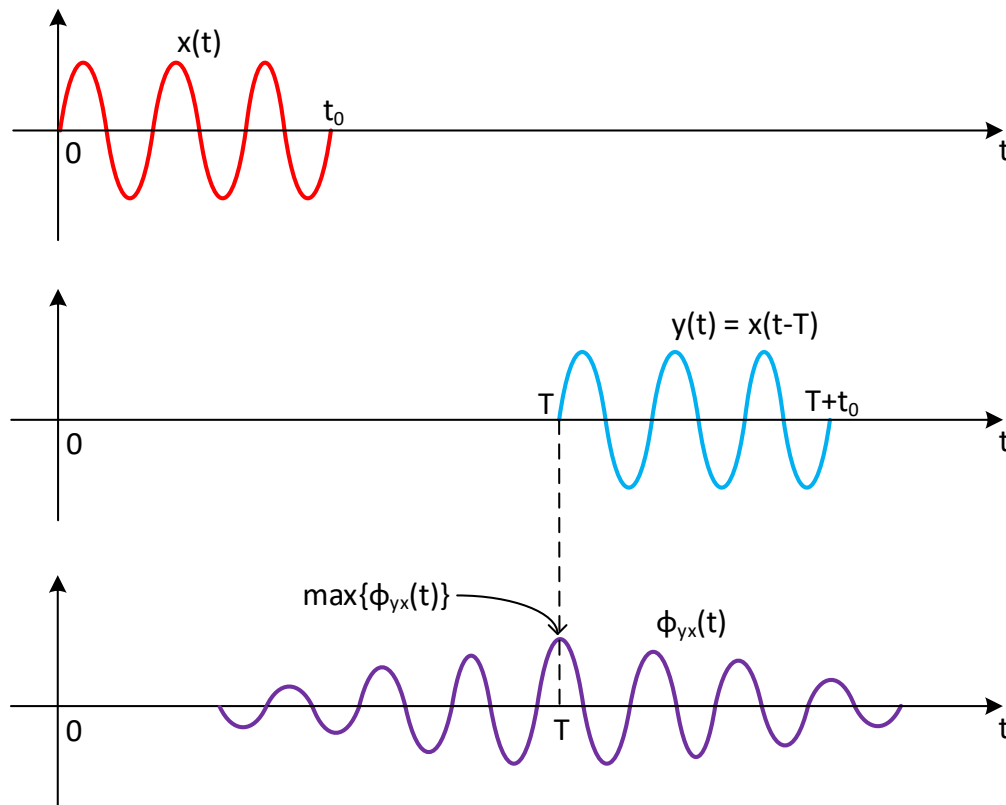
Αρχικά, ας εξηγήσουμε *διαισθητικά* πώς γίνεται η ανίχνευση του σήματος με χρήση της συσχέτισης. Μετρώντας τη χρονική καθυστέρηση μεταξύ του σήματος που στάλθηκε και αυτού που ελήφθη, μπορούμε να προσδιορίσουμε την απόσταση του στόχου. Έστω ότι το σήμα που στάλθηκε είναι το $x(t)$ και αυτό που ελήφθη είναι το $y(t)$, όπως περιγράφονται στο Σχήμα 11.1, όπου για λόγους απλότητας έχουμε θεωρήσει ότι το ληφθέν σήμα δεν έχει εξασθενήσει ή αλλοιωθεί λόγω της διέλευσής του μέσα από το κανάλι μετάδοσης. Πώς θα μπορούσαμε να συγκρίνουμε τα δυο σήματα; Θα μπορούσε να προτείνει κανείς να εφαρμόσουμε μια σχέση *προβολής* του ενός σήματος στο άλλο, όπως στους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς. Ας προβάλλουμε το ληφθέν σήμα επάνω στο εκπεμπθέν, ως

$$c_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t)dt \quad (11.1)$$

τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μηδέν, λόγω του ότι τα δυο σήματα είναι μη μηδενικά σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε μια διαφορετική σχέση, αυτή της *συνάρτησης συσχέτισης* του σήματος $y(t)$ με το σήμα $x(t)$, η οποία ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t+\tau)dt \quad (11.2)$$

όπου βλέπετε ότι μετακινούμε το εκπεμπόμενο σήμα $x(t)$ για κάθε δυνατή χρονική μετατόπιση τ . Βλέπετε ότι η συσχέτιση είναι συνάρτηση του χρόνου τ . Αν για κάποιο τ (που είναι οι διάφορες καθυστερήσεις του σήματος $x(t)$) παρατηρηθεί ισχυρή συσχέτιση (που σημαίνει μεγάλη τιμή ως αποτέλεσμα του ολοκληρώματος), δεν ανιχνεύεται μόνο η παρουσία του σήματος αλλά και η σχετική χρονική μετατόπιση του $x(t)$ σε σχέση με το $y(t)$. Έτσι, όχι μόνο μετράμε την παρουσία ενός στόχου αλλά και την απόστασή του από τη θέση αναφοράς. Το τελευταίο γράφημα του Σχήματος 11.1 δείχνει το αποτέλεσμα της συσχέτισης.



Σχήμα 11.1: Εκπεμπόμενο και ληφθέν σήμα σε ένα radar.

11.2 Συσχετίσεις

Οι συσχετίσεις μπορούν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες: την **αυτοσυσχέτιση** και την **ετεροσυσχέτιση** σημάτων. Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των συσχετίσεων στο πεδίο του χρόνου, εξετάζοντας αρχικά τη συσχέτιση περιοδικών σημάτων, γενικεύοντας στη συνέχεια για σήματα ισχύος, και ολοκληρώνοντας με σήματα ενέργειας.

11.2.1 Αυτοσυσχέτιση

Η αυτοσυσχέτιση ορίζεται ως η πράξη συσχέτισης ενός σήματος $x(t)$ με τον εαυτό του, και μας δίνει πληροφορία που σχετίζεται με τη μεταβολή της *αυτο-ομοιότητας* του σήματος συναρτήσει του χρόνου.

11.2.1.1 Περιοδική Αυτοσυσχέτιση

Για περιοδικά σήματα με περίοδο T_0 , η αυτοσυσχέτιση ορίζεται ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (11.3)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι ένα περιοδικό σήμα μπορεί να αναπτυχθεί σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (11.4)$$

με $f_0 = \frac{1}{T_0}$ η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος. Αν αντικαταστήσουμε τη Σχέση (11.4) στη Σχέση (11.3) έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right)^* \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 (t+\tau)} \right) dt \quad (11.5)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 t} e^{j2\pi l f_0 \tau} \right) dt \quad (11.6)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_k e^{j2\pi k f_0 \tau} + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} \right) dt \quad (11.7)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \int_{T_0} dt + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau} \int_{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt \right) \quad (11.8)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau} \int_{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt \right) \quad (11.9)$$

Ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης ισούται με μηδέν, λόγω της γνωστής (πλέον) σχέσης της ορθογωνιότητας των σημάτων $\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$:

$$\int_{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ T_0, & l = k \end{cases} \quad (11.10)$$

Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad (11.11)$$

Η παραπάνω σχέση μας πληροφορεί ότι αν το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T_0 έχει συντελεστές Fourier X_k , τότε η περιοδική αυτοσυσχέτιση του σήματος είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο και μπορεί να αναπτυχθεί σε Σειρά Fourier με συντελεστές $|X_k|^2$. Μετατρέποντας αυτή τη σχέση σε τριγωνομετρική Σειρά Fourier, έχουμε ότι

$$\phi_x(\tau) = |X_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2 \cos(2\pi k f_0 \tau) \quad (11.12)$$

Παρατηρήστε ότι αν οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος (και άρα και το αρχικό περιοδικό σήμα) είχαν κάποια φάση ϕ_k , δηλ.

$$X_k = |X_k| e^{j\phi_k} \quad (11.13)$$

η περιοδική αυτοσυσχέτιση του σήματος δεν περιλαμβάνει αυτή τη φάση στους συντελεστές Fourier της. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η αυτοσυσχέτιση είναι “τυφλή” (phase-blind) όσον αφορά τη φάση του περιοδικού σήματος, αφού η πληροφορία φάσης του περιοδικού σήματος χάνεται δια παντός.

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού της περιοδικής αυτοσυσχέτισης, όπου φαίνεται ξεκάθαρα και η παραπάνω ιδιότητα.

Παράδειγμα 11.1:

Βρείτε την περιοδική αυτοσυσχέτιση του σήματος

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \theta) \quad (11.14)$$

Λύση:

Από τον ορισμό, έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} A \cos(2\pi f_0 t - \theta) A \cos(2\pi f_0(t+\tau) - \theta)dt \quad (11.15)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \int_{T_0} \cos(2\pi f_0 t - \theta) \cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau - \theta)dt \quad (11.16)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \int_{T_0} \left(\frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau - 2\theta) + \frac{1}{2} \cos(-2\pi f_0 \tau) \right) dt \quad (11.17)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \left(\int_{T_0} \left(\frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau - 2\theta) dt + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \int_{T_0} dt \right) \right) \quad (11.18)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \left(\int_{T_0} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau - 2\theta) dt + \frac{1}{2} T_0 \cos(2\pi f_0 \tau) \right) \quad (11.19)$$

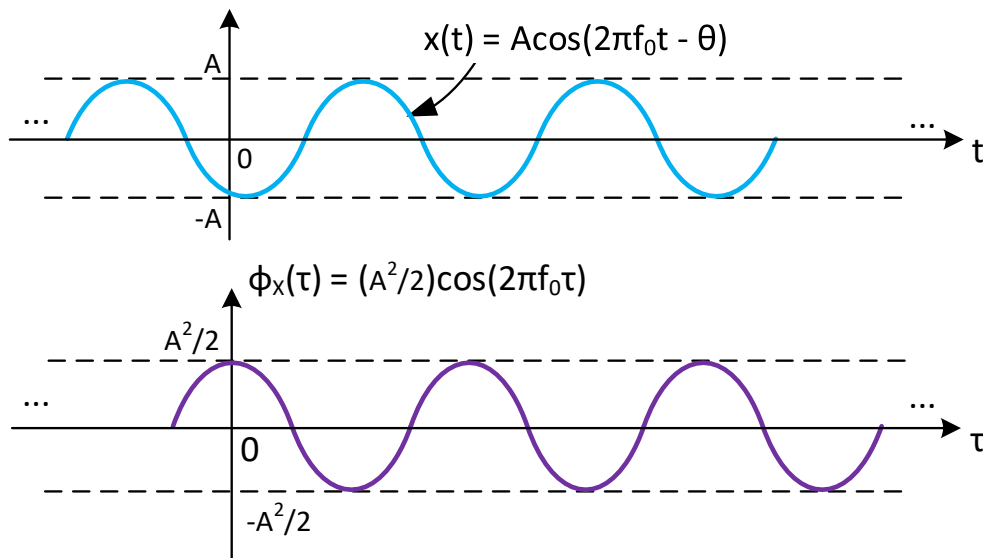
όπο χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b) \quad (11.20)$$

Ο πρώτος όρος της Σχέσης (11.19) ισούται με μηδέν, ως ολοκλήρωμα ημιτόνου σε μια περίοδο. Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (11.21)$$

Τα δυο σήματα φαίνονται στο Σχήμα 11.2. Παρατηρήστε ότι η αρχική φάση $-\theta$ δε διατηρείται στο αποτέλεσμα



Σχήμα 11.2: Περιοδική αυτοσυσχέτιση Παραδείγματος 11.1.

της αυτοσυσχέτισης. Προσέξτε ότι η περιοδική αυτοσυσχέτιση παρουσιάζει περιοδικά μέγιστα και ελάχιστα, όπως ακριβώς η μορφή του $\cos(2\pi f_0 \tau)$. Αυτό σημαίνει ότι το περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει μέγιστη ομοιότητα με τον “μετατοπισμένο” κατά $t = \tau$ εαυτό του τις χρονικές στιγμές $t = kT_0$, $k \in \mathbb{Z}$. Αντίθετα, το περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει ελάχιστη ομοιότητα ή εντελώς αντίθετη μορφή με το “μετατοπισμένο” κατά $t = \tau$ εαυτό του τις χρονικές στιγμές $t = k\frac{T_0}{2}$. Αυτό επιβεβαιώνεται ακριβώς από τη διαίσθησή μας.

Επίσης, το αρχικό περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \theta) = \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{-j2\pi f_0 t} = X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_1^* e^{-j2\pi f_0 t} \quad (11.22)$$

και άρα οι συντελεστές του είναι

$$X_1 = \frac{A}{2} e^{-j\theta} \quad (11.23)$$

$$X_1^* = \frac{A}{2} e^{j\theta} \quad (11.24)$$

Η αυτοσυσχέτιση αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) = \frac{A^2}{4} e^{j2\pi f_0 \tau} + \frac{A^2}{4} e^{-j2\pi f_0 \tau} = X_{\phi_1} e^{j2\pi f_0 \tau} + X_{\phi_1}^* e^{-j2\pi f_0 \tau} \quad (11.25)$$

Παρατηρήστε ότι πράγματι

$$X_{\phi_1} = |X_1|^2 \quad (11.26)$$

$$X_{\phi_1}^* = |X_1^*|^2 \quad (11.27)$$

■

11.2.1.2 Αυτοσυσχέτιση Σημάτων Ισχύος

Η έννοια της αυτοσυσχέτισης μπορεί να γενικευθεί για σήματα ισχύος ως

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (11.28)$$

με T μια οποιαδήποτε τιμή χρονικού διαστήματος, για $x(t)$ μιγαδικό, ενώ για πραγματικά σήματα ο ορισμός τροποποιείται ως

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (11.29)$$

Η διαδικασία υπολογισμού της αυτοσυσχέτισης σημάτων ισχύος έχει μεγάλες ομοιότητες με τον υπολογισμό της συνέλιξης - όχι τυχαία, αφού τα δυο ολοκληρώματα μοιάζουν. Ας υπολογίσουμε την αυτοσυσχέτιση δυο πολύ γνωστών μας σημάτων ισχύος.

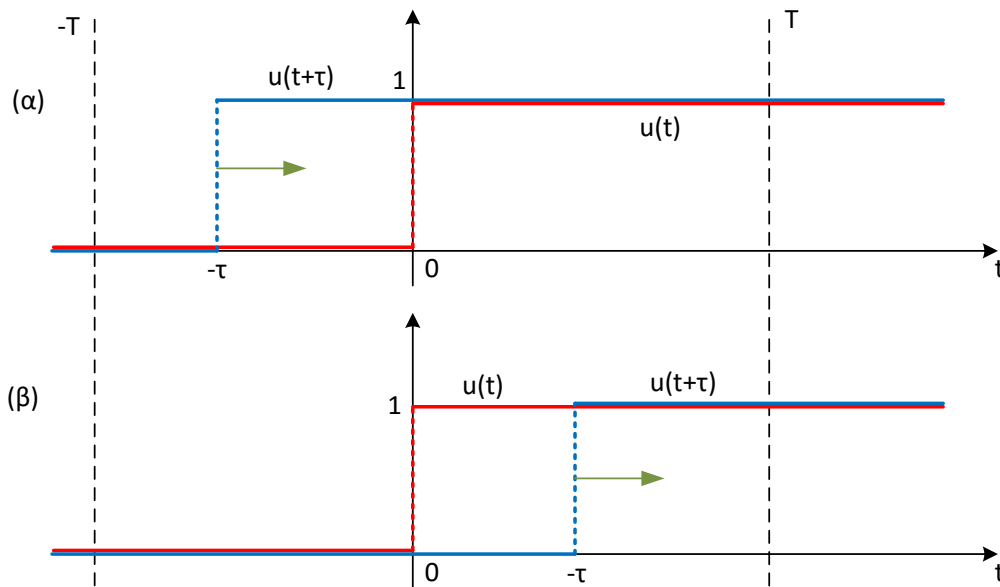
Παράδειγμα 11.2:

Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση του σήματος της βηματικής συνάρτησης

$$x(t) = u(t) \quad (11.30)$$

Λύση:

Κατασκευάζοντας το μετατοπισμένο σήμα θα πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις για τις τιμές του τ , όπως στο Σχήμα 11.3. Για την περίπτωση (α) του Σχήματος 11.3, ισχύει ότι $-\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0$. Τότε



Σχήμα 11.3: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης του Παραδείγματος 11.2.

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.31)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} T = \frac{1}{2} \quad (11.32)$$

Αντίστοιχα, για την περίπτωση (β), ισχύει ότι $-\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0$. Τότε

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.33)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\tau}^T dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} (T + \tau) = \frac{1}{2} \quad (11.34)$$

Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2} \quad \forall \tau \quad (11.35)$$

Παρατηρήστε ότι η αυτο-ομοιότητα της $x(t) = u(t)$ δε μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου!

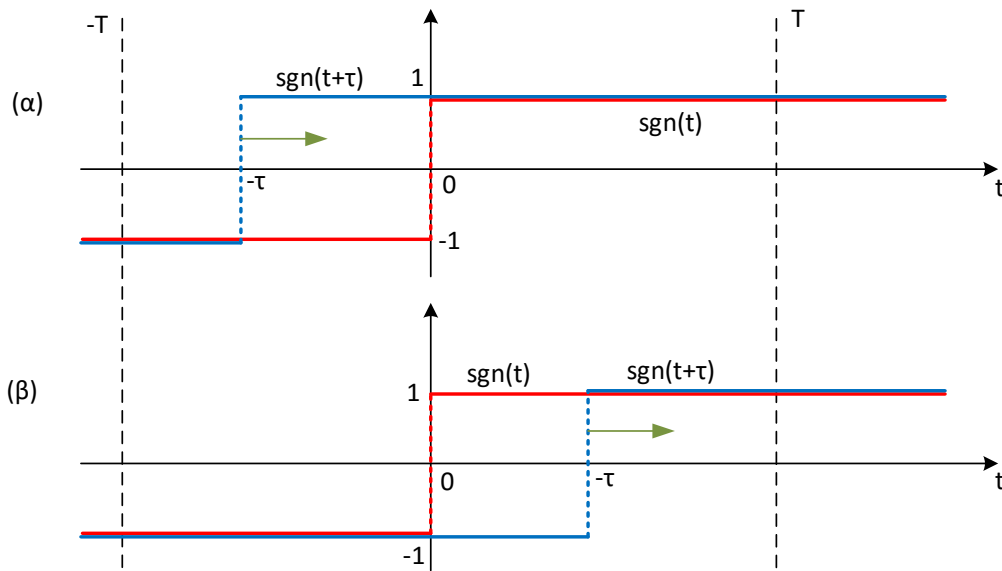
Παράδειγμα 11.3:

Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση του σήματος της συνάρτησης προσήμου

$$x(t) = \text{sgn}(t) \quad (11.36)$$

Λύση:

Κατασκευάζοντας το μετατοπισμένο σήμα θα πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις για τις τιμές του τ , όπως στο Σχήμα 11.4. Για την περίπτωση (α) του Σχήματος 11.4, ισχύει ότι $-\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0$. Τότε



Σχήμα 11.4: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης Παραδείγματος 11.3.

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \text{sgn}(t)\text{sgn}(t+\tau)dt \quad (11.37)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^{-\tau} (-1)^2 dt + \int_{-\tau}^0 (-1) dt + \int_0^T dt \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} (-2\tau + T) = 1 \quad (11.38)$$

Αντίστοιχα, για την περίπτωση (β), ισχύει ότι $-\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0$. Τότε με όμοιο ακριβώς τρόπο (δείξτε το!) προκύπτει ότι

$$\phi_x(\tau) = 1 \quad (11.39)$$

Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = 1 \quad \forall \tau \quad (11.40)$$

Παρατηρήστε ότι κι εδώ η αυτο-ομοιότητα του σήματος $x(t) = \text{sgn}(t)$ δε μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου!

11.2.1.3 Αυτοσυσχέτιση Σημάτων Ενέργειας

Τέλος, η αυτοσυσχέτιση μιγαδικών σημάτων ενέργειας ορίζεται ως

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (11.41)$$

ενώ για πραγματικά σήματα, έχουμε την ίδια σχέση χωρίς συζυγία:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt \quad (11.42)$$

Με μια πρώτη ανάγνωση των παραπάνω σχέσεων, σίγουρα έχετε παρατηρήσει ότι η αυτοσυσχέτιση ενός σήματος ενέργειας μοιάζει πολύ με τη συνέλιξη του σήματος ενέργειας με τον εαυτό του. Σύντομα θα δούμε τη σχέση που τις συνδέει. Προς το παρόν ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού αυτοσυσχέτισης ενός πολύ γνωστού μας σήματος.

Παράδειγμα 11.4:

Υπολογίστε την αυτοσυσχέτιση του σήματος

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (11.43)$$

Λύση:

Το ολοκλήρωμα της αυτοσυσχέτισης περιλαμβάνει το σήμα $x(t+\tau)$, που αποτελεί μια μετατόπιση του σήματος $x(t)$ κατά τ . Η μετατόπιση αυτή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, όπως και στη συνέλιξη. Έχουμε λοιπόν τις ακόλουθες περιπτώσεις του Σχήματος 11.5. Για την περίπτωση (α), θα έχουμε

$$\phi_x(\tau) = 0 \quad (11.44)$$

το οποίο ισχύει για

$$-\tau + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \iff \tau > T \quad (11.45)$$

Για την περίπτωση (β), είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2 t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} = A^2 T - A^2 \tau \quad (11.46)$$

το οποίο ισχύει για

$$-\tau + \frac{T}{2} \geq -\frac{T}{2} \text{ και } -\tau - \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \iff 0 < \tau \leq T \quad (11.47)$$

Στη συνέχεια, στην περίπτωση (γ), έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \int_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2 t \Big|_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = A^2 T + A^2 \tau \quad (11.48)$$

το οποίο ισχύει για

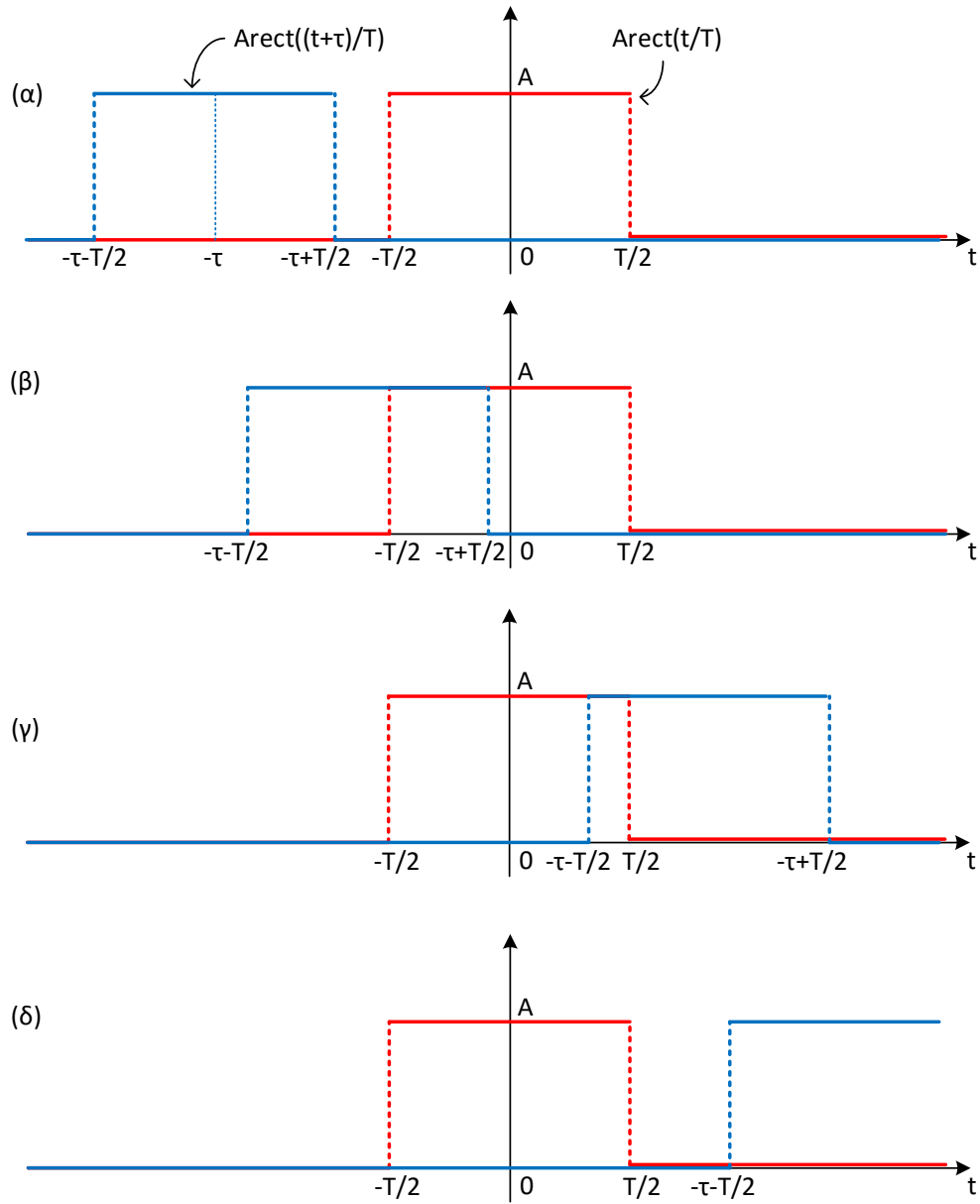
$$-\tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \text{ και } -\tau + \frac{T}{2} \geq \frac{T}{2} \iff -T \leq \tau \leq 0 \quad (11.49)$$

ενώ για την περίπτωση (δ) είναι προφανές ότι

$$\phi_x(\tau) = 0 \quad (11.50)$$

για

$$-\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \iff \tau < -T \quad (11.51)$$



Σχήμα 11.5: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης Παραδείγματος 11.4.

Συνολικά, η αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t) = Arect\left(\frac{t}{T}\right)$ είναι

$$\phi_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -T \text{ και } \tau > T \\ A^2(T + \tau), & -T \leq \tau < 0 \\ A^2(T - \tau), & 0 \leq \tau < T \end{cases} = \begin{cases} 0, & \tau < -T \text{ και } \tau > T \\ A^2T(1 + \frac{\tau}{T}), & -T \leq \tau < 0 \\ A^2T(1 - \frac{\tau}{T}), & 0 \leq \tau < T \end{cases} \quad (11.52)$$

Το παραπάνω σήμα δεν είναι κανένα άλλο από το γνωστό μας τριγωνικό παλμό! Άρα

$$\phi_x(\tau) = A^2T \text{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right) \quad (11.53)$$

Παρατηρήστε ότι η αυτο-ομοιότητα του $x(t)$ αυξάνει στο διάστημα $[-T, 0]$, φτάνοντας σε μέγιστη τιμή για $\tau = 0$, όταν το σήμα $x(t)$ συμπίπτει με τη μετατοπισμένη “έκδοσή” του $x(t + \tau)$. Για $\tau = 0$, η αυτοσυσχέτιση γράφεται

ως

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau) \Big|_{\tau=0} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = E_x \quad (11.54)$$

που είναι η ενέργεια του σήματος $x(t)$! Αυτό είναι μια γενική ιδιότητα της αυτοσυσχέτισης και θα τη δούμε και παρακάτω, όταν θα αναφερθούμε σε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες των συσχετίσεων.

■

Γενικότερα, η σχέση μεταξύ αυτοσυσχέτισης και του φασματικού περιεχομένου ενός σήματος ενέργειας μπορεί να ιδωθεί από τη σκοπιά της αυτο-ομοιότητας. Ένα σήμα συσχετίζεται “βέλτιστα” με τον εαυτό του για $\tau = 0$, όπως είδαμε, δηλ. για μηδενική καθυστέρηση. Όσο αυξάνεται η καθυστέρηση, η αυτο-ομοιότητα αρχίζει και φθίνει, άρα η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης πρέπει να είναι μια μη αύξουσα συνάρτηση του τ . Για ένα σήμα $x(t)$ που αλλάζει αργά (και άρα είναι χαμηλής συχνότητας), η αυτοσυσχέτισή του θα αλλάζει αργά, αφού η αυτο-ομοιότητά του θα αλλάζει αργά. Αντίθετα, ένα σήμα υψηλής συχνότητας θα έχει αυτοσυσχέτιση που αλλάζει γρήγορα. Βλέπουμε λοιπόν ότι το σχήμα της αυτοσυσχέτισης $\phi_x(\tau)$ έχει άμεση σχέση με το φασματικό περιεχόμενο του σήματος $x(t)$.

11.2.2 Ετεροσυσχέτιση

Η ετεροσυσχέτιση ορίζεται ως η πράξη συσχέτισης δυο σημάτων $x(t), y(t)$, και μας δίνει πληροφορία που σχετίζεται με την ομοιότητα του $x(t)$ με το $y(t)$ συναρτήσεως του χρόνου. Πρέπει να τονιστεί εξ’ αρχής ότι η πράξη της ετεροσυσχέτισης δεν είναι αντιμεταθετική, όπως αυτή της αυτοσυσχέτισης. Για παράδειγμα, η ετεροσυσχέτιση του $x(t)$ με το $y(t)$ δεν είναι εν γένει ίδια συνάρτηση με την ετεροσυσχέτιση του $y(t)$ με το $x(t)$. Σύντομα θα δούμε αυτές τις λεπτομέρειες.

11.2.2.1 Περιοδική Ετεροσυσχέτιση

Για περιοδικά σήματα με κοινή περίοδο T_0 , η περιοδική ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων $x(t), y(t)$ ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad (11.55)$$

ενώ η περιοδική ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(\tau)$, ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt \quad (11.56)$$

με τη συζυγία να παραλείπεται όταν τα σήματα είναι πραγματικά.

Ακολουθώντας όμοιο σκεπτικό με την αυτοσυσχέτιση περιοδικών σημάτων, μπορούμε να αναπτύξουμε τα δυο σήματα σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}, \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (11.57)$$

Με αντικατάσταση των Σχέσεων (11.57) στις Σχέσεις (11.55, 11.56) μπορούμε να εξάγουμε σχέσεις με αυτές για την αυτοσυσχέτιση. Θα δείξουμε αμέσως πώς αναπτύσσεται η ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ σε Σειρά Fourier, ενώ ο αναγνώστης μπορεί να εξάγει την αντίστοιχη σχέση για την ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(\tau)$.

Έχουμε

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right)^* \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 (t+\tau)} \right) dt \quad (11.58)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t} e^{j2\pi l f_0 \tau} \right) dt \quad (11.59)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_l e^{j2\pi l f_0 \tau} e^{j2\pi (l-k) f_0 t} \right) dt \quad (11.60)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \int_{T_0} dt + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_l e^{j2\pi l f_0 \tau} \int_{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt \right) \quad (11.61)$$

και ξανά λόγω της Σχέσης (11.10), ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης μηδενίζεται. Οπότε εν τέλει

$$\phi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad (11.62)$$

Καταλήξαμε λοιπόν ότι αν δυο περιοδικά, με την ίδια περίοδο, σήματα $x(t), y(t)$ έχουν συντελεστές Fourier X_k, Y_k , τότε η ετεροσυσχέτιση του $x(t)$ με το $y(t)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε Σειρά Fourier με συντελεστές $X_k^* Y_k$.

11.2.2.2 Ετεροσυσχέτιση Σημάτων Ισχύος

Γενικότερα, για σήματα ισχύος η ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων $x(t), y(t)$ ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^*(t) y(t + \tau) dt \quad (11.63)$$

ενώ η ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(\tau)$, ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y^*(t) x(t + \tau) dt \quad (11.64)$$

με τη συζυγία να παραλείπεται όταν τα σήματα είναι πραγματικά.

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού ετεροσυσχέτισης δυο πολύ γνωστών σημάτων ισχύος που είδαμε ξεχωριστά νωρίτερα, της βηματικής συνάρτησης $x(t) = u(t)$ και της συνάρτησης προσήμου, $y(t) = \text{sgn}(t)$.

Παράδειγμα 11.5:

Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

$$x(t) = \text{sgn}(t) \quad (11.65)$$

και

$$y(t) = u(t) \quad (11.66)$$

Λύση:

Κατασκευάζοντας το μετατοπισμένο σήμα θα πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις για τις τιμές του τ , όπως στο Σχήμα 11.6. Για την περίπτωση (α) του Σχήματος 11.6, ισχύει ότι $-\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0$. Τότε

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left(- \int_{-\tau}^0 dt + \int_0^T dt \right) \quad (11.67)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left(-t \Big|_{-\tau}^0 + t \Big|_0^T \right) = \frac{1}{2} \quad (11.68)$$

ενώ για την περίπτωση (β) του ίδιου σχήματος, ισχύει ότι $-\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0$, και τότε

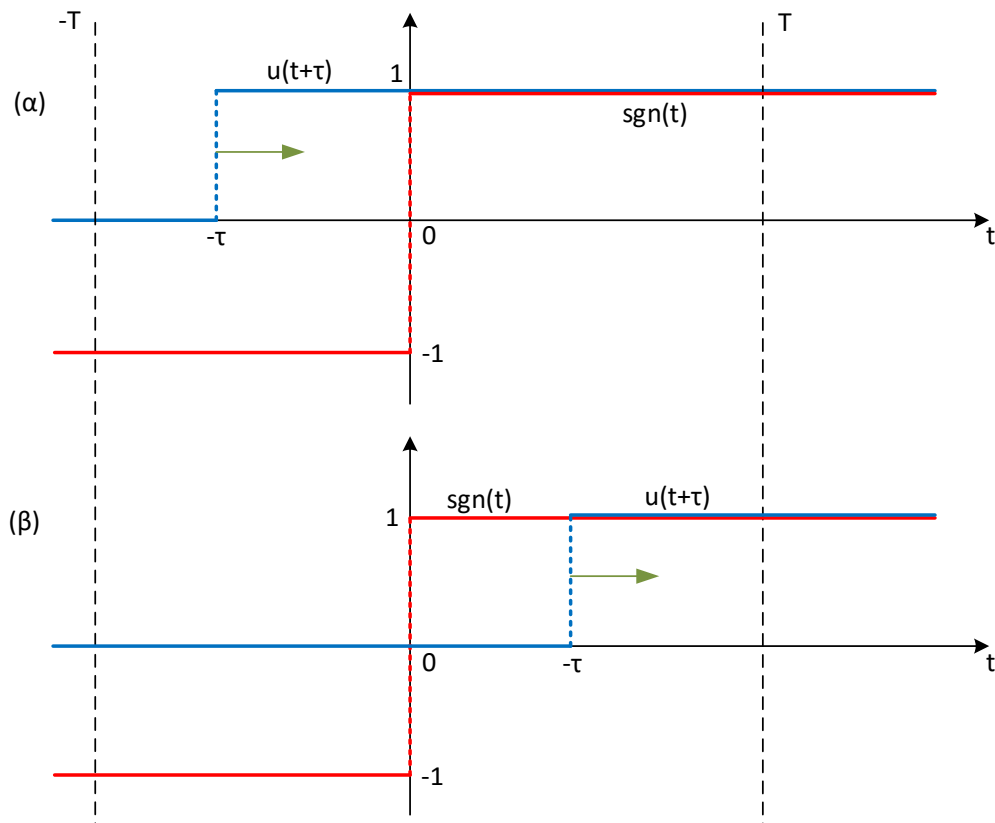
$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \quad (11.69)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} t \Big|_{-T}^T = \frac{1}{2} \quad (11.70)$$

Οπότε η ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων $x(t) = \text{sgn}(t)$ και $y(t) = u(t)$ είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \quad \forall \tau \quad (11.71)$$

■



Σχήμα 11.6: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της ετεροσυσχέτισης Παραδείγματος 11.5.

11.2.2.3 Ετεροσυσχέτιση Σημάτων Ενέργειας

Τέλος, η ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ μιγαδικών σημάτων ενέργειας $x(t), y(t)$ ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad (11.72)$$

ενώ η ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(\tau)$, ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt \quad (11.73)$$

παραλείποντας τη συζυγία όταν τα $x(t), y(t)$ είναι πραγματικά.

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι η ετεροσυσχέτιση μοιάζει πολύ με τη συνέλιξη δυο σημάτων, αλλά προφανώς δεν είναι ταυτόσημες πράξεις - σύντομα θα δούμε τη σχέση που τις συνδέει. Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού ετεροσυσχέτισης σημάτων.

Παράδειγμα 11.6:

Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \quad (11.74)$$

και

$$y(t) = e^{-2\alpha t}u(t) \quad (11.75)$$

με $\alpha > 0$.

Λύση:

Ας χρησιμοποιήσουμε αλγεβρική μέθοδο, μια και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας. Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt \quad (11.76)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-2\alpha(t+\tau)} u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.77)$$

Το γινόμενο $u(t)u(t+\tau)$ αναλύεται ως

$$u(t)u(t+\tau) = \begin{cases} 1, & t > 0 \text{ και } t > -\tau \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (11.78)$$

και για $-\tau < 0 \implies \tau > 0$, το ολοκλήρωμα της Σχέσης (11.77) γίνεται

$$\phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_0^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = e^{-2\alpha\tau} \left[\frac{1}{-3\alpha} e^{-3\alpha t} \right]_0^{+\infty} \quad (11.79)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - 1) = \frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} \quad (11.80)$$

ενώ για $-\tau > 0 \implies \tau < 0$, το ίδιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} e^{-3\alpha t} \Big|_{\tau}^{+\infty} = \quad (11.81)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - e^{3\alpha\tau}) = \frac{1}{3\alpha} e^{\alpha\tau} \quad (11.82)$$

Συνολικά

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3\alpha} \left(e^{-2\alpha\tau} u(\tau) + e^{\alpha\tau} u(-\tau) \right) \quad (11.83)$$

■

11.2.3 Ιδιότητες Συσχετίσεων

Οι συσχετίσεις έχουν κάποιες πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, τις σημαντικότερες εκ των οποίων θα απαριθμήσουμε σε αυτήν την Παράγραφο.

1. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι άρτια συνάρτηση:

$$\phi_x(\tau) = \phi_x(-\tau) \quad (11.84)$$

Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε σε όλα τα σχετικά παραδείγματα που έχουμε δει ως τώρα.

2. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης συμβαίνει τη χρονική στιγμή $\tau = 0$, δηλ. για μηδενική μετατόπιση του $x(t+\tau)$. Τότε τα δυο σήματα $x(t)$ και $x(t+\tau)$ ταυτίζονται. Για πραγματικά σήματα ενέργειας, ισχύει

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = E_x \quad (11.85)$$

με E_x την ενέργεια του σήματος $x(t)$. Για πραγματικά σήματα ισχύος η σχέση που προκύπτει είναι η

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t)dt = P_x \quad (11.86)$$

με P_x τη μέση ισχύ του σήματος $x(t)$. Τέλος, για πραγματικά περιοδικά σήματα, έχουμε

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t)dt = P_x \quad (11.87)$$

με P_x τη μέση ισχύ του περιοδικού σήματος $x(t)$, αφού τα περιοδικά σήματα είναι και αυτά σήματα ισχύος.

3. Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T_0 , η περιοδική αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$ έχει κι αυτή την ίδια περίοδο T_0 .
4. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\phi_x(\tau)$ δεν περιέχει πληροφορία για την αρχική φάση του σήματος $x(t)$.
5. Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\phi_{xy}(\tau)$ δεν είναι εν γένει άρτια συνάρτηση:

$$\phi_{xy}(\tau) \neq \phi_{xy}(-\tau) \quad (11.88)$$

Όμως μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}^*(-\tau) \quad (11.89)$$

με τη συζυγία να παραλείπεται όταν τα σήματα $x(t), y(t)$ είναι πραγματικά.

6. Αν η ετεροσυσχέτιση δυο σημάτων $\phi_{xy}(\tau)$ είναι μηδενική για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε τα σήματα $x(t), y(t)$ ονομάζονται *ασυσχέτιστα*.
7. Οι ορισμοί των συσχετίσεων πραγματικών περιοδικών σημάτων και σημάτων ενέργειας έχουν μεγάλη ομοιότητα με τον ορισμό της συνέλιξης. Δείτε:

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad \phi_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau)y(\tau+t)d\tau \quad (11.90)$$

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad \phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\tau+t)d\tau \quad (11.91)$$

με $c_{xy}(t)$ τη συνέλιξη των σημάτων $x(t), y(t)$. Στις παραπάνω σχέσεις, αλλάξαμε τις μεταβλητές t, τ μεταξύ τους στα ολοκληρώματα των συσχετίσεων, για να αναδειχθεί καλύτερα η ομοιότητα με την πράξη της συνέλιξης.

Μπορεί κανείς να δείξει (Άσκηση XXXX) ότι, στη γενικότερη μορφή τους, οι συναρτήσεις συσχέτισης μπορούν να γραφούν με την πράξη της συνέλιξης ως

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau) \quad (11.92)$$

$$\phi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau) \quad (11.93)$$

$$\phi_{yx}(\tau) = y^*(-\tau) * x(\tau) \quad (11.94)$$

όπου προφανώς ο τελεστής της συζυγίας παραλείπεται όταν τα σήματα $x(t), y(t)$ είναι πραγματικά.

11.2.4 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Στην Παράγραφο αυτή παραθέτουμε μερικά χρήσιμα παραδείγματα που εμπλέκουν συσχετίσεις, για περαιτέρω τριβή του αναγνώστη.

Παράδειγμα 11.7:

Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (11.95)$$

Λύση:

Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε αυτό το παράδειγμα χωρίς τη χρήση σχήματος, όπως στα προηγούμενα. Από το ορισμό της αυτοσυσχέτισης, έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt \quad (11.96)$$

Το σήμα $x(t) = e^{-at}u(t)$ ξεκινά από το $t = 0$ και εκτείνεται ως το $+\infty$. Το σήμα $x(t+\tau)$ δίνεται ως

$$x(t+\tau) = e^{-a(t+\tau)}u(t+\tau), \quad a > 0 \quad (11.97)$$

Η μετατόπιση τ μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Στην περίπτωση που $\tau < 0$, το σήμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά, και ξεκινά από τη χρονική στιγμή $t = \tau$. Οπότε το γινόμενο $x(t)x(t+\tau)$ θα είναι μη μηδενικό στο διάστημα

$[\tau, +\infty)$. Άρα

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-at} e^{-a(t+\tau)} dt = e^{-a\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} e^{-a\tau}, \tau < 0 \quad (11.98)$$

Στην περίπτωση που $\tau > 0$, το σήμα μετατοπίζεται προς τα αριστερά, και ξεκινά από τη χρονική στιγμή $t = -\tau$. Οπότε το γινόμενο $x(\tau)x(t+\tau)$ θα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[0, +\infty)$. Άρα

$$\phi_x(\tau) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-a(t+\tau)} dt = e^{-a\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} e^{-a\tau}, \tau > 0 \quad (11.99)$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2a} e^{-a|\tau|}, \quad a > 0 \quad (11.100)$$

■

Παράδειγμα 11.8:

Χρησιμοποιώντας της ανισότητα Schwarz

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt \quad (11.101)$$

δείτε ότι

$$(\alpha') \quad |\phi_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{\phi_x(0)\phi_y(0)}$$

$$(\beta') \quad |\phi_x(\tau)| \leq |\phi_x(0)|$$

Λύση:

(α') Είναι

$$|\phi_{xy}(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \phi_x(0)\phi_y(0) \quad (11.102)$$

$$|\phi_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{\phi_x(0)\phi_y(0)} \quad (11.103)$$

(β') Είναι

$$|\phi_x(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \phi_x^2(0) \quad (11.104)$$

$$|\phi_x(\tau)| \leq |\phi_x(0)| \quad (11.105)$$

11.3 Φασματικές Πυκνότητες

Έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι τα σήματα ισχύος δεν μπορούν να μελετηθούν με τον ορισμό του μετασχ. Fourier, καθώς το σχετικό ολοκλήρωμα δε συγκλίνει. Για την εύρεση του μετασχηματισμού, χρησιμοποιήσαμε έννοιες όπως αυτή τη συνάρτησης Δέλτα. Ακόμα και τότε όμως, ένα σήμα δεν είναι βέβαιο ότι έχει μετασχ. Fourier. Αυτό προφανώς θέτει προβλήματα όταν θέλει κανείς να μελετήσει το φασματικό περιεχόμενο τέτοιων σημάτων ή αν θέλει να μελετήσει την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος όταν στην είσοδό του παρουσιάζεται ένα σήμα ισχύος. Σε αυτές τις περιπτώσεις, καταφεύγουμε σε εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού του φασματικού περιεχομένου, και αυτοί οι τρόποι περιλαμβάνουν τη μελέτη των μετασχ. Fourier των συναρτήσεων συσχέτισης, οι οποίοι ονομάζονται **Φασματικές Πυκνότητες**.

Σε αυτήν την παράγραφο θα συζητήσουμε για τις Φασματικές Πυκνότητες και τη σημασία τους.

11.3.1 Φασματικές Πυκνότητες Ενέργειας

Ας ξεκινήσουμε από τα σήματα ενέργειας, των οποίων οι φασματικές πυκνότητες ονομάζονται *Φασματικές Πυκνότητες Ενέργειας* - *Energy Spectral Densities*.

Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης $\phi_x(\tau)$ ενός - μιγαδικού εν γένει - σήματος ενέργειας $x(t)$ είναι

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (11.106)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) dt \quad (11.107)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) X(f) e^{j2\pi ft} dt \quad (11.108)$$

$$= X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi ft} dt \quad (11.109)$$

$$= X(f) X^*(f) \quad (11.110)$$

$$= |X(f)|^2 \quad (11.111)$$

όπου στη Σχέση (11.107) αλλάξαμε τη σειρά ολοκλήρωσης εκμεταλλευόμενοι το Θεώρημα Fubini¹ Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας είναι

- πραγματική συνάρτηση
- θετική για κάθε $f \in \mathbb{R}$
- εξαρτώμενη μόνο από μετασχ. Fourier του σήματος ενέργειας $x(t)$ - που είμαστε σίγουροι ότι υπάρχει.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις είναι πολύ σημαντικές, γιατί ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητος του φάσματος φάσης του σήματος. Αυτό σημαίνει ότι η μετακίνηση του σήματος στο χρόνο είναι άνευ σημασίας για το μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης. Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας - Energy Spectral Density**, και συμβολίζεται ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = |X(f)|^2 \quad (11.117)$$

Αντιστρόφως, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μπορεί να βρεθεί μέσω της Φασματικής Πυκνότητας Ενέργειας ως

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df \quad (11.118)$$

Αν θέσουμε $\tau = 0$ στην παραπάνω σχέση, έχουμε

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x \quad (11.119)$$

λόγω του Θεωρήματος του Parseval.

Η τελευταία σχέση είναι πολύ σημαντική, διότι μας λέει ότι η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας μας αποκαλύπτει **πώς κατανέμεται η ενέργεια ενός σήματος στις διάφορες συχνότητες**. Γνωρίζετε ήδη ότι ο

¹Το Θεώρημα Fubini αναφέρει ότι η εξίσωση

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int dx \int f(x,y) dy = \int dy \int f(x,y) dx \quad (11.112)$$

είναι έγκυρη, δηλ. η σειρά ολοκλήρωσης σε ένα διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να αλλάξει, αν καθένα από τα επιμέρους ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα όταν στη θέση της συνάρτησης προς ολοκλήρωση $f(x,y)$ βάλουμε την $|f(x,y)|$. Πιο τυπικά, αν ισχύει τουλάχιστον μια από τις σχέσεις

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| dy \right) dx < \infty \quad (11.113)$$

$$\int_Y \left(\int_X |f(x,y)| dx \right) dy < \infty \quad (11.114)$$

τότε

$$\int_{X \times Y} |f(x,y)| d(x,y) < \infty \quad (11.115)$$

και

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int dx \int f(x,y) dy = \int dy \int f(x,y) dx \quad (11.116)$$

Μια τέτοια συνθήκη ισχύει σήματα ενέργειας, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα.

μετασχ. Fourier μας πληροφορεί για το ποιά ημίτονα (πλάτη, συχνότητες, φάσεις) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να συνθέσουμε ένα συγκεκριμένο σήμα - η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας μας πληροφορεί για την ενέργεια αυτών των ημιτόνων!

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα, αν υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης $\phi_{xy}(\tau)$ δυο σημάτων ενέργειας $x(t), y(t)$, θα καταλήξουμε στη σχέση

$$\Phi_{xy}(f) = F\{\phi_{xy}(\tau)\} = X^*(f)Y(f) \quad (11.120)$$

η οποία - αντίστοιχα με πριν - ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας - Interspectral Energy Density**. Αντίστοιχα, για την ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(\tau)$, θα είναι

$$\Phi_{yx}(f) = F\{\phi_{yx}(\tau)\} = Y^*(f)X(f) \quad (11.121)$$

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 11.9:

Στην Παράγραφο 11.2.1.3, υπολογίσαμε την αυτοσυσχέτιση του τετραγωνικού παλμού και δείξαμε ότι

$$\phi_x(\tau) = A^2 T \text{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right) \quad (11.122)$$

Βρείτε τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας.

Λύση:

Η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας $\Phi_x(f)$ δίνεται εύκολα ως

$$\Phi_x(f) = A^2 T^2 \text{sinc}^2(fT) \quad (11.123)$$

γιατί γνωρίζουμε ότι

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \text{sinc}(fT) \quad (11.124)$$

και

$$|X(f)|^2 = (AT \text{sinc}(fT))^2 = A^2 T^2 \text{sinc}^2(fT) = \Phi_x(f) \quad (11.125)$$

■

Παράδειγμα 11.10:

Στην Παράγραφο 11.2.2.3, υπολογίσαμε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ και $y(t) = e^{-2\alpha t}u(t)$, με $\alpha > 0$, και τη βρήκαμε ίση με

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3\alpha} \left(e^{-2\alpha\tau}u(\tau) + e^{\alpha\tau}u(-\tau) \right) \quad (11.126)$$

Βρείτε τη Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας.

Λύση:

Η Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας $\Phi_{xy}(f)$ δίνεται ως ο μετασχ. Fourier της $\phi_{xy}(\tau)$, δηλ.

$$\frac{1}{3\alpha} \left(e^{-2\alpha\tau}u(\tau) + e^{\alpha\tau}u(-\tau) \right) \longleftrightarrow \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{1}{2\alpha + j2\pi f} + \frac{1}{\alpha - j2\pi f} \right) = \frac{1}{(2\alpha + j2\pi f)(\alpha - j2\pi f)} \quad (11.127)$$

Βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το γινόμενο $X^*(f)Y(f)$:

$$X^*(f) = \left(\frac{1}{\alpha + j2\pi f} \right)^* = \frac{1}{\alpha - j2\pi f} \quad (11.128)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2\alpha + j2\pi f} \quad (11.129)$$

$$X^*(f)Y(f) = \frac{1}{(a - j2\pi f)(2a + j2\pi f)} \quad (11.130)$$

11.3.2 Φασματικές Πυκνότητες Ισχύος

Για σήματα ισχύος, μπορούν να οριστούν αντίστοιχες έννοιες. Στη συζήτηση που ακολουθεί, θα διαχωρίσουμε τις περιπτώσεις σημάτων ισχύος σε περιοδικά και μη.

11.3.2.1 Φασματικές Πυκνότητες Περιοδικών Σημάτων

Για περιοδικά σήματα με περίοδο T_0 , η αυτοσυσχέτισή τους δίνεται ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (11.131)$$

Ας ορίσουμε το σήμα

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t, T_0)x(t+\tau)dt \quad (11.132)$$

όπου το $x(t, T_0)$ αποτελεί μια μόνο περίοδο του περιοδικού σήματος - άρα είναι ένα σήμα *ενέργειας*. Είδαμε νωρίτερα ότι για σήματα ενέργειας, η αυτοσυσχέτισή τους μπορεί να γραφεί με χρήση της πράξης της συνέλιξης ως

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau) \quad (11.133)$$

Έτσι, η Σχέση (11.132) μπορεί να γραφεί ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} x^*(-\tau, T_0) * x(\tau) \quad (11.134)$$

Το $x(\tau)$ της παραπάνω σχέσης παραμένει ένα περιοδικό σήμα, και γνωρίζουμε ότι ένα περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί ως η συνέλιξη της βασικής περιόδου του με μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα. Άρα το $x(\tau)$ μπορεί να γραφεί ως

$$x(\tau) = x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau) = x(\tau, T_0) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT_0) \quad (11.135)$$

Αντικαθιστώντας στη Σχέση (11.134), έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} x^*(-\tau, T_0) * (x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau)) \quad (11.136)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\underbrace{x^*(-\tau, T_0) * x(\tau, T_0)}_{\phi_x(\tau, T_0)} \right) * \delta_{T_0}(\tau) \quad (11.137)$$

$$= \frac{1}{T_0} \phi_x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau) \quad (11.138)$$

όπου $\phi_x(\tau, T_0)$ συμβολίζει την αυτοσυσχέτιση της βασικής περιόδου του σήματος (η οποία, υπενθυμίζουμε, είναι σήμα ενέργειας).

Πώς ερμηνεύει κανείς την παραπάνω σχέση; Είναι ξεκάθαρο ότι η αυτοσυσχέτιση ενός περιοδικού σήματος μπορεί να υπολογιστεί σε δυο βήματα:

Υπολογισμός Αυτοσυσχέτισης Περιοδικού Σήματος

1. Υπολογίζουμε την αυτοσυσχέτιση μιας περιόδου $x(t, T_0)$ του περιοδικού σήματος $x(t)$.
2. Επαναλαμβάνουμε το αποτέλεσμα σε πολλαπλάσια της περιόδου, δηλ.

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \phi_x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau - kT_0, T_0) \quad (11.139)$$

Δείξαμε όμως επίσης στην Παράγραφο 11.2.1.1 ότι η αυτοσυσχέτιση ενός περιοδικού σήματος αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi f_0 \tau} \quad (11.140)$$

της οποίας ο μετασχ. Fourier είναι

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \quad (11.141)$$

Είναι η παραπάνω σχέση ισοδύναμη με το μετασχ. Fourier της Σχέσης (11.138); Ας το δούμε.

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \frac{1}{T_0} F\{\phi_x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau)\} \quad (11.142)$$

$$= \frac{1}{T_0} F\{\phi_x(\tau, T_0)\} F\{\delta_{T_0}(\tau)\} \quad (11.143)$$

$$= \frac{1}{T_0} \Phi_x(f, T_0) \Delta(f) \quad (11.144)$$

με

$$\Delta(f) = \frac{1}{T_0} \delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0) \quad (11.145)$$

το μετασχ. Fourier μιας σειράς από συναρτήσεις Δέλτα που απέχουν T_0 μεταξύ τους. Εν τέλει η Σχέση (11.144) γράφεται

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \frac{1}{T_0} \Phi_x(f, T_0) \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0) \quad (11.146)$$

$$= \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_x(kf_0, T_0) \delta(f - kf_0) \quad (11.147)$$

με $\Phi_x(f) = |X(f, T_0)|^2$ τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας του σήματος $x(t, T_0)$, δηλ. του σήματος της βασικής περιόδου.

Είναι πλέον ξεκάθαρο, συγκρίνοντας τις Σχέσεις (11.144, 11.147) ότι

$$|X_k|^2 = \left. \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \right]_{f=kf_0} \quad (11.148)$$

Πώς ερμηνεύεται η παραπάνω σχέση; Οι συντελεστές Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός περιοδικού σήματος μπορούν να υπολογιστούν σε δυο βήματα:

Υπολογισμός Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος Περιοδικού Σήματος

1. Υπολογίζουμε τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας $\Phi_x(f, T_0)$ μιας περιόδου $x(t, T_0)$ - που είναι σήμα ενέργειας - του περιοδικού σήματος $x(t)$.
2. Δειγματοληπτούμε την παραπάνω Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας ανά kf_0 , και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με $\frac{1}{T_0^2}$.
3. Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_x(kf_0, T_0) \delta(f - kf_0) \quad (11.149)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 11.11:

Δείξαμε στην Παράγραφο 11.2.1.1 ότι για το περιοδικό σήμα $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \theta)$, η αυτοσυσχέτισή του δίνεται ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (11.150)$$

Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος.

Λύση:

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0) \quad (11.151)$$

■

Παράδειγμα 11.12:

Το περιοδικό σήμα $x(t)$ που περιγράφεται σε μια περίοδο του ως

$$x(t, T_0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & T < t < T_0 \end{cases} \quad (11.152)$$

με $T = T_0/4$. Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του.

Λύση:

Μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο βρίσκοντας πρώτα την Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας του σήματος μιας περιόδου, $x(t, T_0)$, και στη συνέχεια να δειγματοληπτήσουμε το αποτέλεσμα ανά kf_0 . Τέλος, πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με τη σταθερά $1/T_0^2$ και θα έχουμε τότε τους συντελεστές Fourier της αυτοσυσχέτισης του περιοδικού σήματος. Για το σήμα $x(t, T_0)$ έχουμε

$$\Phi_x(f, T_0) = |X(f, T_0)|^2 = \left| \frac{T_0}{4} \text{sinc}\left(f \frac{T_0}{4}\right) e^{-j2\pi f \frac{T_0}{8}} \right|^2 = \frac{T_0^2}{16} \text{sinc}^2\left(f \frac{T_0}{4}\right) \quad (11.153)$$

Δειγματοληπτώντας ανά $f = kf_0 = \frac{k}{T_0}$, $k \in \mathbb{Z}$ και πολλαπλασιάζοντας με τη σταθερά $1/T_0^2$, έχουμε

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \frac{T_0^2}{16} \text{sinc}^2\left(f \frac{T_0}{4}\right) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \quad (11.154)$$

Οπότε τελικά

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{16} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \delta(f - kf_0) \quad (11.155)$$

■

Αν ακολουθήσουμε τον ίδιο συλλογισμό για την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ περιοδικών σημάτων, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{T_0^2} \Phi_{xy}(f, T_0) \delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k \delta(f - kf_0) \quad (11.156)$$

όπου

$$\Phi_{xy}(f, T_0) = X^*(f, T_0) Y(f, T_0) \quad (11.157)$$

η Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας, $X^*(f, T_0)$ ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t, T_0)$, και $Y(f, T_0)$ ο αντίστοιχος του σήματος $y(t, T_0)$. Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι

$$X_k^* = \frac{1}{T_0} X^*(kf_0, T_0) \quad (11.158)$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(kf_0, T_0) \quad (11.159)$$

11.3.2.2 Φασματικές Πυκνότητες Απεριοδικών Σημάτων Ισχύος

Ας βρούμε, τέλος, τις σχέσεις που συνδέουν τις συσχετίσεις σημάτων ισχύος με το χώρο της συχνότητας. Όπως νωρίτερα, ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης σημάτων ισχύος ονομάζεται *Φασματική Πυκνότητα Ισχύος*, ενώ ο αντίστοιχος της ετεροσυσχέτισης ονομάζεται *Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος*, δηλ.

$$\phi_x(\tau) \longleftrightarrow \Phi_x(f) \quad (11.160)$$

$$\phi_{xy}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{xy}(f) \quad (11.161)$$

$$\phi_{yx}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(f) \quad (11.162)$$

Όμως, μια πολύ σημαντική διαφορά σε σχέση με τα σήματα ενέργειας είναι ότι ο μετασχ. Fourier των συσχετίσεων σημάτων ισχύος δε σχετίζεται με το μετασχ. Fourier των σημάτων ισχύος. Μπορεί όμως κανείς να δείξει ότι για τα σήματα ισχύος

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left| X(f, T) \right|^2 \quad (11.163)$$

με

$$X(f, T) = F\{x(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\} \quad (11.164)$$

δηλ. ο όρος $X(f, T)$ συμβολίζει το μετασχ. Fourier του παραθυροποιημένου σήματος $x(t)$. Το παραπάνω όριο μπορεί όμως να μην υπάρχει. Αυτό μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι η μελέτη σημάτων ισχύος στο χώρο της συχνότητας πρέπει να γίνει μέσω του μετασχ. Fourier των συσχετίσεων, δηλ. μέσω της εύρεσης των Φασματικών Πυκνοτήτων Ισχύος.

Παράδειγμα 11.13:

Στην Παράγραφο 11.2.1.2 δείξαμε ότι η αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$ του σήματος ισχύος $x(t) = \text{sgn}(t)$ είναι

$$\phi_x(\tau) = 1 \quad \forall \tau \quad (11.165)$$

Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος.

Λύση:

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος δίνεται εύκολα ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = F\{1\} = \delta(f) \quad (11.166)$$

■

Παράδειγμα 11.14:

Στην ίδια Παράγραφο δείξαμε ότι η αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$ του σήματος ισχύος $x(t) = u(t)$ είναι

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2} \quad \forall \tau \quad (11.167)$$

Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος.

Λύση:

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος δίνεται εύκολα ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f) \quad (11.168)$$

■

11.3.3 Ιδιότητες Φασματικών Πυκνοτήτων

Οι Φασματικές Πυκνότητες έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες.

(α') $\Phi_x(f) = \Phi_x(-f)$, για πραγματικά σήματα.

(β') $\Phi_x(f) \geq 0, \forall f$.

11.3.4 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Παράδειγμα 11.15:

Έστω τα γνωστά σας σήματα

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (11.169)$$

$$y(t) = e^{-2at}u(t), \quad a > 0 \quad (11.170)$$

(α') Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\phi_{xx}(\tau)$ του σήματος $x(t)$.

(β') Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειάς του, $\Phi_{xx}(f)$.

(γ') Υπολογίστε τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\phi_{xy}(\tau)$ και τη Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας, $\Phi_{xy}(f)$.

Λύση:

α') Είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-\alpha(t+\tau)}u(t+\tau)dt = e^{-\alpha\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-\alpha t}u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.171)$$

$$= e^{-\alpha\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha t}u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.172)$$

Είναι

$$u(t)u(t+\tau) = \begin{cases} 1, & t > 0 \text{ και } t > -\tau \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (11.173)$$

Έχουμε δύο περιπτώσεις:

- $-\tau < 0 \implies \tau > 0$, τότε

$$\phi_x(\tau) = e^{-\alpha\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t}dt = e^{-\alpha\tau} \left[\frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \right]_0^{+\infty} \quad (11.174)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\tau} (0 - 1) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\tau}, \quad \tau > 0 \quad (11.175)$$

- $-\tau > 0 \implies \tau < 0$, τότε

$$\phi_x(\tau) = e^{-\alpha\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-2\alpha t}dt = e^{-\alpha\tau} \left[\frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \right]_{-\tau}^{+\infty} \quad (11.176)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\tau} (0 - e^{2\alpha\tau}) = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha\tau}, \quad \tau < 0 \quad (11.177)$$

Οπότε συνολικά

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2\alpha} \left(e^{-\alpha\tau} u(\tau) + e^{\alpha\tau} u(-\tau) \right) \quad (11.178)$$

β') Είναι

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = \left| \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \right|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (11.179)$$

γ') Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-2\alpha(t+\tau)}u(t+\tau)dt = e^{-2\alpha\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3\alpha t}u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.180)$$

Όμοια με πριν διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Στην πρώτη περίπτωση

$$-\tau < 0 \implies \tau > 0 : \phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_0^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = e^{-2\alpha\tau} \left[\frac{1}{-3\alpha} e^{-3\alpha t} \right]_0^{+\infty} \quad (11.181)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - 1) = \frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau}, \tau > 0 \quad (11.182)$$

- Στη δεύτερη περίπτωση

$$-\tau > 0 \implies \tau < 0 : \phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} e^{-3\alpha t} \Big|_{-\tau}^{+\infty} \quad (11.183)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - e^{3\alpha\tau}) = \frac{1}{3\alpha} e^{\alpha\tau}, \tau < 0 \quad (11.184)$$

Συνολικά

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3\alpha} \left(e^{-2\alpha\tau} u(\tau) + e^{\alpha\tau} u(-\tau) \right) \quad (11.185)$$

Η Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας δίνεται ως

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) = \left(\frac{1}{\alpha + j2\pi f} \right)^* \cdot \frac{1}{2\alpha + j2\pi f} \quad (11.186)$$

$$= \frac{1}{(\alpha - j2\pi f)} \cdot \frac{1}{(2\alpha + j2\pi f)} \quad (11.187)$$

$$= \frac{1}{(\alpha - j2\pi f)(2\alpha + j2\pi f)} \quad (11.188)$$

■

Παράδειγμα 11.16:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 5, & t = -2 \\ 2, & t = -1 \\ 2, & t = 1 \\ 5, & t = 2 \\ 0, & \text{άλλου} \end{cases} \quad (11.189)$$

Δείξτε ότι

$$\Phi_x(f) \leq 156 \quad (11.190)$$

Λύση:

Το σήμα - το οποίο είναι σήμα ενέργειας - μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = 5\delta(t+2) + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 5\delta(t-2) \quad (11.191)$$

Η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας $\Phi_x(f)$ δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 \quad (11.192)$$

$$= |5e^{j2\pi 2f} + 2e^{j2\pi f} + 2e^{-j2\pi f} + 5e^{-2j2\pi f}|^2 \quad (11.193)$$

$$= |10 \cos(4\pi f) + 4 \cos(2\pi f)|^2 \quad (11.194)$$

$$= 100 \cos^2(4\pi f) + 80 \cos(4\pi f) \cos(2\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f) \quad (11.195)$$

$$= 100 \cos^2(4\pi f) + 20 \cos(2\pi f) + 20 \cos(6\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f) \quad (11.196)$$

Επειδή $|\cos(x)| \leq 1$ και $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$, έχουμε

$$\Phi_x(f) = 100 \cos^2(4\pi f) + 20 \cos(2\pi f) + 20 \cos(6\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f) \leq 100 + 20 + 20 + 16 = 156 \quad (11.197)$$

Κεφάλαιο 12

Δειγματοληψία

12.1 Εισαγωγή

Οι περισσότερες μετρήσιμες φυσικές διαδικασίες που συμβαίνουν στον κόσμο μας είναι συνεχούς χρόνου, και συνήθως αναλογικές. Από την ηλιακή ακτινοβολία, την ανθρώπινη φωνή, τον ήχο μιας λύρας, τα σεισμικά κύματα, ως μια φωτογραφία, το χτύπο της καρδιάς, και τα εγκεφαλικά κύματα, όλα αυτά είναι σήματα συνεχούς χρόνου.

Ο όρος αυτός έχει την έννοια της συνεχούς συνάρτησης, σε χρόνο και συνήθως και του πλάτους (όχι όμως απαραίτητα), δηλ. ένα τέτοιο σήμα ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή και έχει τιμή με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Οι τιμές αυτές εκφράζουν κάτι διαφορετικό, ανάλογα με την εφαρμογή (π.χ. στη φωτογραφία εκφράζουν το χρώμα του pixel, ενώ στον ήχο την ένταση του ήχου).

Με την έκρηξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών τη δεκαετία του '50, αναζητήθηκε ο τρόπος να μπορούν να αποθηκευτούν τέτοια σήματα σε έναν υπολογιστή, για περαιτέρω επεξεργασία. Φυσικά, ένας υπολογιστής δεν καταλαβαίνει στην ουσία τίποτα άλλο εκτός από 0 και 1, ενώ η χωρητικότητα και η ακρίβειά του είναι πεπερασμένες. Έτσι λοιπόν έπρεπε να βρεθεί ένας τρόπος να καταγραφούν αυτά τα αναλογικά σήματα σε ψηφιακή μορφή, αλλά με την ικανότητα να μπορούν να “δώσουν πίσω” το αναλογικό σήμα από το οποίο προήλθαν. Με άλλα λόγια, από το συνεχές/αναλογικό σήμα, να μπορούμε να πάρουμε κάποια *δεήματά* του, αλλά αυτά τα δείγματα να είναι ικανά να μας δώσουν πίσω ολόκληρο το σήμα συνεχούς χρόνου! Σίγουρα δύσκολη δουλειά! :-). Η διαδικασία μετατροπής, λοιπόν, ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτού χρόνου (κι όχι ψηφιακό) λέγεται **Δειγματοληψία**.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα της όλης διαδικασίας από την καθημερινότητά σας. Όταν ένας τραγουδιστής ερμηνεύει μπροστά σε ένα μικρόφωνο (Σχήμα 12.1), τα ηχητικά κύματα από τη φωνή του ταξιδεύουν στον αέρα και φτάνουν ως το μικρόφωνο. Τα ηχητικά αυτά κύματα χτυπούν ένα διάφραγμα μέσα στο μικρόφωνο, το οποίο πάει μπρος - πίσω (ταλαντώνεται). Ένα πηνίο, που είναι συνδεδεμένο με το διάφραγμα, κινείται κι αυτό μπρος - πίσω. Ένας μαγνήτης που είναι μαζί με το πηνίο, παράγει μαγνητικό πεδίο που το διαπερνά, και λόγω της ταλάντωσης του πηνίου, παράγεται ροή ηλεκτρικού ρεύματος. Το ρεύμα αυτό ρέει προς έναν ενισχυτή ή μια συσκευή καταγραφής¹. Άρα στην περίπτωση μας, το αναλογικό σήμα είναι ηλεκτρικό, αλλά δε μας απασχολεί η φύση του σήματος - είναι ένα σήμα. Αυτό το σήμα θέλουμε να το αποθηκεύσουμε σε έναν υπολογιστή. Πρέπει λοιπόν να το δειγματοληπτήσουμε, δηλ. να διαλέξουμε κάποιες χρονικές στιγμές και να πάρουμε τις τιμές του ηλεκτρικού σήματος σε εκείνες τις στιγμές, να πάρουμε δηλ. *δεήματα* του σήματος. Εδώ ας κάνουμε μια παρένθεση για να ορίσουμε



Σχήμα 12.1: Διαδικασία Δειγματοληψίας.

¹Άλλα μικρόφωνα χρησιμοποιούν διαφορετικό τρόπο αλλά στην ουσία πάλι μετατρέπουν ηχητική ενέργεια σε ηλεκτρική.

λίγο την ορολογία. Ορίζουμε ως **περίοδο δειγματοληψίας** T_s την απόσταση (σε δευτερόλεπτα) μεταξύ των δειγμάτων που παίρνουμε. Συνήθως είναι σταθερή. Επίσης, ορίζουμε ως **συχνότητα δειγματοληψίας** f_s το αντίστροφο της περιόδου δειγματοληψίας ($f_s = \frac{1}{T_s}$), και είναι ένας αριθμός που μας λέει πόσα δείγματα παίρνουμε ανά δευτερόλεπτο. Για παράδειγμα, στα μουσικά CD του εμπορίου, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 44100 Hz. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο πραγματικού ηχητικού κομματιού, έχουμε πάρει 44100 δείγματα, τα οποία απέχουν $\frac{1}{44100}$ δευτερόλεπτα μεταξύ τους! Πολλά δείγματα, πολύ κοντά το ένα με το άλλο! Γι' αυτό και η ποιότητα της μουσικής είναι τόσο καλή. Ας κλείσουμε όμως εδώ την παρένθεση κι ας επιστρέψουμε στη θεωρία. Για να κατανοήσουμε τη διαδικασία της Δειγματοληψίας, πρέπει πρώτα να αναφερθούμε σε ένα ιδιαίτερο σύνολο συστημάτων, που ονομάζονται **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**.

12.2 Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

Κάποια συστήματα εκτελούν συγκεκριμένες λειτουργίες, οι οποίες είναι πολύ συνήθεις και πολύ χρήσιμες στην πράξη. Αυτές οι λειτουργίες περιλαμβάνουν την αποκοπή συγκεκριμένων συχνοτήτων του σήματος εισόδου και τη διέλευση κάποιων άλλων, και/ή την ενίσχυση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που διέρχονται ελεύθερα του συστήματος. Λόγω αυτής της λειτουργίας τους, αυτά τα συστήματα ονομάζονται “φίλτρα”. Ο λόγος, προφανής: όπως το φίλτρο του καφέ π.χ. δεσμεύει τον καφέ σε στέρεα μορφή και επιτρέπει τη διέλευση του υγρού καφέ, έτσι και αυτά τα φίλτρα, επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων ενώ δεσμεύουν (καταστέλλουν, μηδενίζουν το πλάτος) κάποιες άλλες.

Εδώ θα δούμε κάποια συγκεκριμένα φίλτρα, τα οποία ονομάζονται *ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων*, και είναι ΓΧΑ συστήματα με τις εξής δυο ιδιότητες:

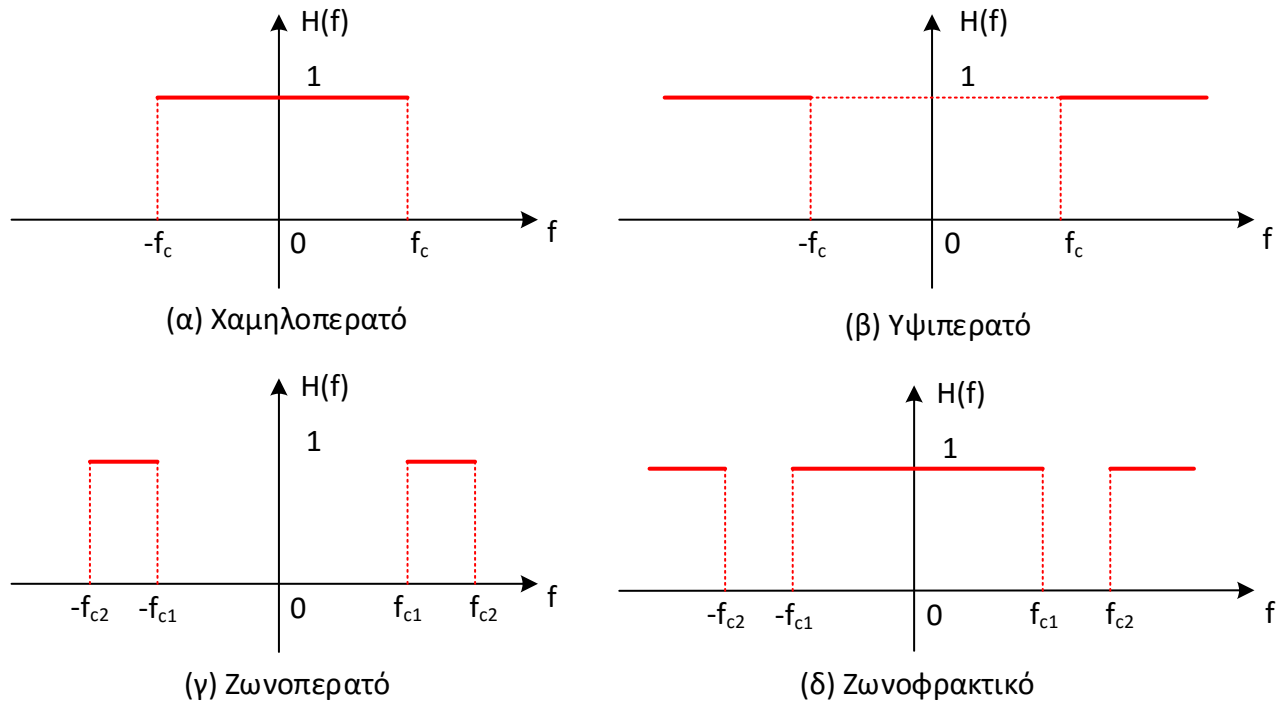
- Είναι ιδανικά, δηλ. *μη πραγματοποιήσιμα*, διότι όπως θα δούμε:
 - είναι μη-αιτιατά
 - η κρουστική τους απόκριση $h(t)$ είναι άπειρης διάρκειας
- Επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων χωρίς διαταραχή στο πλάτος ή στη φάση, ενώ αποκόπτουν εντελώς κάποιες άλλες.

Παρ' όλα αυτά, όλα τα πραγματικά φίλτρα που κατασκευάζουν οι μηχανικοί προσπαθούν να προσεγγίσουν όσο γίνεται καλύτερα αυτά τα θεωρητικά φίλτρα, δεδομένων παραγόντων όπως η πολυπλοκότητα και το κόστος κατασκευής.

Υπάρχουν τέσσερα βασικά είδη φίλτρων επιλογής συχνοτήτων:

1. Το **βαθυπερατό (lowpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από τη μηδενική συχνότητα ως μια συγκεκριμένη συχνότητα f_c .
2. Το **υψιπερατό (highpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη συχνότητα f_c , ως το $+\infty$.
3. Το **ζωνοπερατό (bandpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.
4. Το **ζωνοφρακτικό (bandstop)** φίλτρο: απαγορεύει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.

Η συχνότητα f_c σε όλα τα παραπάνω φίλτρα ονομάζεται *συχνότητα αποκοπής - cutoff frequency*. Τα φίλτρα αυτά φαίνονται σχηματικά στο Σχήμα 12.2, και όπως παρατηρείτε, είναι πραγματικά και έχουν άρτια συμμετρία, αφού αντιστοιχούν σε πραγματικά σήματα. Ας σημειωθεί ότι τα ιδανικά φίλτρα έχουν σταθερό, μοναδιαίο μέτρο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 12.2, αλλά η φάση τους μπορεί να είναι μηδενική ή γραμμική (στο Σχήμα 12.2 φαίνονται τα ιδανικά φίλτρα μηδενικής φάσης). Ας ασχοληθούμε μόνον με ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων μηδενικής φάσης.



Σχήμα 12.2: Ιδανικά Φίλτρα Μηδενικής Φάσης.

12.2.1 Ιδανικά Φίλτρα Μηδενικής Φάσης

12.2.1.1 Χαμηλοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{LP}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \quad (12.1)$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί με χρήση της γνωστής συνάρτησης rect ως

$$H_{LP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (12.2)$$

Προσέξτε ότι

$$|H_{LP}(f)| = H_{LP}(f) \quad (12.3)$$

και

$$\angle H_{LP}(f) = 0 \quad (12.4)$$

Η χρονική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{LP}(t) = F^{-1}\{H_{LP}(f)\} = 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (12.5)$$

12.2.1.2 Υψιπερατό φίλτρο

Το ιδανικό υψιπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{HP}(f) = \begin{cases} 0, & |f| \leq f_c \\ 1, & |f| > f_c \end{cases} \quad (12.6)$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί ως συνάρτηση του χαμηλοπερατού φίλτρου που είδαμε μόλις, ως

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (12.7)$$

Προσέξτε ότι κι εδώ το μέτρο του φίλτρου είναι ίσο με την απόκριση σε συχνότητα, όπως για το χαμηλοπερατό, και η φάση του είναι επίσης μηδέν.

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{HP}(t) = F^{-1}\{H_{HP}(f)\} = \delta(t) - 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (12.8)$$

12.2.1.3 Ζωνοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BP}(f) = \begin{cases} 1, & f_{c1} \leq |f| \leq f_{c2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.9)$$

κι όπως βλέπετε στο Σχήμα 12.2, αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς γύρω από τη συχνότητα $\pm f_c = \pm \frac{f_{c1} + f_{c2}}{2}$, με διάρκεια $f_{c2} - f_{c1}$ ο καθένας. Άρα το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{BP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{f_{c2} - f_{c1}}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{f_{c2} - f_{c1}}\right) \quad (12.10)$$

Με αυτή τη γραφή, η κρουστική απόκριση υπολογίζεται από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier ως

$$h_{BP}(t) = (f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) e^{-j2\pi f_c t} + (f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) e^{j2\pi f_c t} \quad (12.11)$$

η οποία μπορεί να γραφεί μέσω των σχέσεων του Euler ως

$$h_{BP}(t) = 2(f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) \cos(2\pi f_c t) \quad (12.12)$$

με $f_c = \frac{f_{c1} + f_{c2}}{2}$.

12.2.1.4 Ζωνοφρακτικό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BS}(f) = \begin{cases} 0, & f_{c1} \leq |f| \leq f_{c2} \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.13)$$

και μπορεί να γραφεί συναρτήσει του ζωνοπερατού φίλτρου ως

$$H_{BS}(f) = 1 - H_{BP}(f) \quad (12.14)$$

Έτσι, η κρουστική του απόκριση μπορεί να βρεθεί εύκολα ως

$$h_{BS}(t) = \delta(t) - h_{BP}(t) = \delta(t) - 2(f_{c2} - f_{c1}) \text{sinc}((f_{c2} - f_{c1})t) \cos(2\pi f_c t) \quad (12.15)$$

Παρατηρήστε ότι πράγματι όλα τα ιδανικά φίλτρα έχουν κρουστική απόκριση η οποία είναι μη-αιτιατή και άπειρης διάρκειας.

Παρ' όλο που τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων δε διαφέρουν ως προς το χειρισμό τους σε σχέση με οποιαδήποτε άλλα συστήματα, η μαθηματική μορφή τους μας διευκολύνει στην εύρεση της εξόδου τους, όταν αυτά συνιστούν ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο δέχεται εισόδους.

Η Σχεδίαση κι Ανάλυση Φίλτρων είναι ένας ολόκληρος τομέας της Επεξεργασίας Σήματος από μόνος του, οπότε δε θα επεκταθούμε περισσότερο εδώ.

12.2.2 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε όμως μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.1:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8) + \sin(2\pi 20t - \pi/3) \quad (12.16)$$

το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα ιδανικό

(α') χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

(β') υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

Βρείτε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:

Μπορούμε απ' ευθείας να απαντήσουμε ότι αφού τα φίλτρα μας αποκόπτουν τις συχνότητες μεγαλύτερες από 15 Hz (χαμηλοπερατό) και μικρότερες από 15 Hz (υψιπερατό), και η είσοδός μας αποτελείται μόνο από τις συχνότητες 10, 20 Hz, τότε πολύ απλά οι έξοδοι θα είναι

$$(α') \quad y(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8)$$

$$(β') \quad y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3)$$

αντίστοιχα, αφού τα φίλτρα είναι ιδανικά (μοναδιαίου πλάτους) και η φάση τους είναι μηδέν, οπότε δεν υπάρχει καμιά μεταβολή στα πλάτη και τις φάσεις των σημάτων που περνούν στην έξοδο.

Ας επικυρώσουμε αυτό το αποτέλεσμα αναλυτικά. Ο μετασχ. Fourier του σήματος εισόδου είναι

$$X(f) = e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) + e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20) \quad (12.17)$$

(α') Η έξοδος στο χώρο της συχνότητας θα είναι το γινόμενο των μετασχ. Fourier της εισόδου και του συστήματος, δηλ.

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (12.18)$$

$$= (e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) + e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20)) \text{rect}\left(\frac{f}{30}\right) \quad (12.19)$$

$$= e^{j\pi/8} \text{rect}\left(\frac{1}{3}\right) \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \text{rect}\left(\frac{-1}{3}\right) \delta(f + 10) \quad (12.20)$$

$$+ e^{-j5\pi/6} \text{rect}\left(\frac{2}{3}\right) \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \text{rect}\left(\frac{-2}{3}\right) \delta(f + 20) \quad (12.21)$$

λόγω της γνωστής ιδιότητας

$$X(f) \delta(f \pm f_0) = X(\mp f_0) \delta(f \pm f_0) \quad (12.22)$$

Όμως

$$\text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.23)$$

και άρα

$$\text{rect}\left(\frac{\pm 2}{3}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \text{rect}\left(\frac{\pm 1}{3}\right) = 1 \quad (12.24)$$

Οπότε τελικά

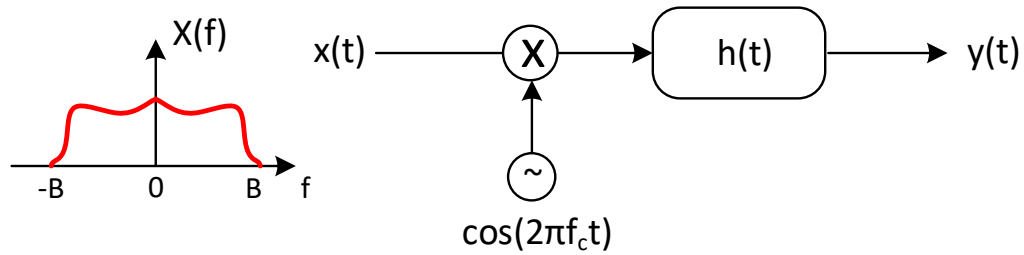
$$Y(f) = e^{j\pi/8} \delta(f - 10) + e^{-j\pi/8} \delta(f + 10) \longleftrightarrow y(t) = 2 \cos(2\pi 10t + \pi/8) \quad (12.25)$$

(β') Εντελώς ανάλογα με παραπάνω, δείξτε ότι

$$Y(f) = e^{-j5\pi/6} \delta(f - 20) + e^{j5\pi/6} \delta(f + 20) \longleftrightarrow y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3) \quad (12.26)$$

Παράδειγμα 8.2:

Έστω το σήμα $x(t)$ το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα σύστημα του Σχήματος 12.3,



Σχήμα 12.3: Σύστημα Παραδείγματος 8.2.

με $f_c = 100$ Hz, και με το σύστημα $h(t)$ να είναι της μορφής

$$h(t) = 400\text{sinc}(200t) \quad (12.27)$$

Σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:

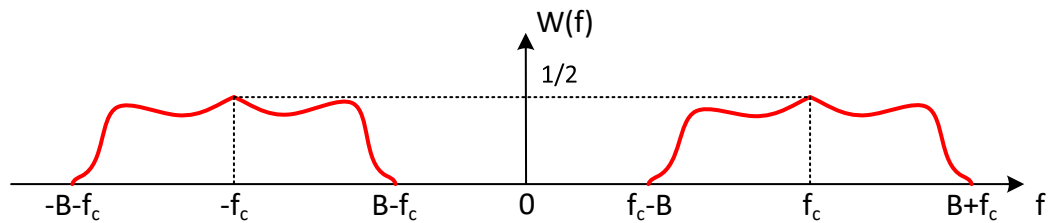
Το σήμα $x(t)$ πολλαπλασιάζεται με ένα συνημίτονο συχνότητας f_c , οπότε αν συμβολίσουμε με $w(t)$ το αποτέλεσμα της πράξης αυτής, θα είναι

$$w(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c) \right) \quad (12.28)$$

και λόγω γνωστής ιδιότητας της συνέλιξης με συνάρτηση Δέλτα, είναι

$$W(f) = \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c) \quad (12.29)$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 12.4.



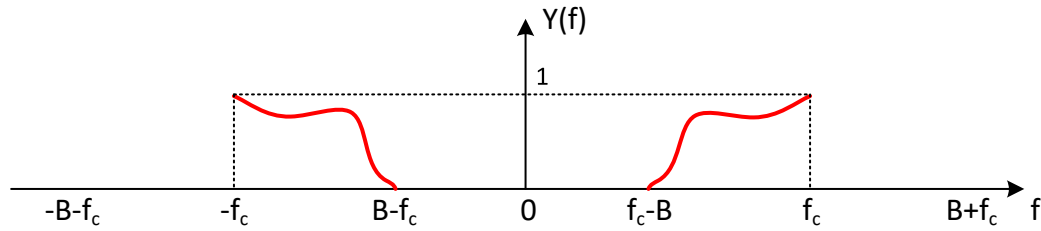
Σχήμα 12.4: Είσοδος συστήματος Παραδείγματος 8.2.

Το σύστημα $h(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$h(t) = 400\text{sinc}(200t) = 2 \times 200\text{sinc}(200t) \longleftrightarrow H(f) = 2\text{rect}\left(\frac{f}{200}\right) \quad (12.30)$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 100$ Hz με πλάτος 2. Άρα το φίλτρο αυτό θα κρατήσει τις συχνότητες της εισόδου που βρίσκονται στο διάστημα $[-100, 100]$ Hz, θα διπλασιάσει το πλάτος τους, ενώ θα αποκόψει τελείως τις συχνότητες εκτός του παραπάνω διαστήματος.

Η έξοδος του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 12.5.

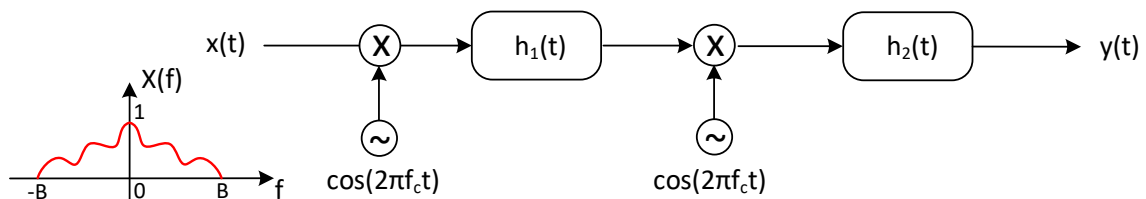


Σχήμα 12.5: Έξοδος συστήματος Παραδείγματος 8.2.

Ας μελετήσουμε τώρα ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.3:

Έστω η διάταξη του Σχήματος 12.6,



Σχήμα 12.6: Διάταξη Παραδείγματος 8.3.

με το σήμα εισόδου $x(t)$ να έχει μετασχ. Fourier όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα συστήματα $h_i(t)$ δίνονται ως:

$$h_1(t) = 4f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (12.31)$$

$$h_2(t) = 8B \text{sinc}(2Bt) \quad (12.32)$$

και η συχνότητα f_c είναι $f_c \gg B$.

- (α') Σχεδιάστε το σήμα $W(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_1(t)$ συναρτήσει του $X(f)$.
- (β') Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier του συστήματος $h_1(t)$.
- (γ') Σχεδιάστε το σήμα $Z(f)$ που προκύπτει ως έξοδος από το σύστημα $h_1(t)$.
- (δ') Σχεδιάστε το σήμα $V(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_2(t)$.
- (ε') Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier, $H_2(f)$, του δεύτερου συστήματος, $h_2(t)$.
- (ς') Σχεδιάστε την τελική έξοδο της όλης διάταξης στο χώρο της συχνότητας, $Y(f)$, και γράψτε τη μαθηματική μορφή του $y(t)$ συναρτήσει του $x(t)$.

Λύση:

(α') Είναι

$$w(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c) \right) \quad (12.33)$$

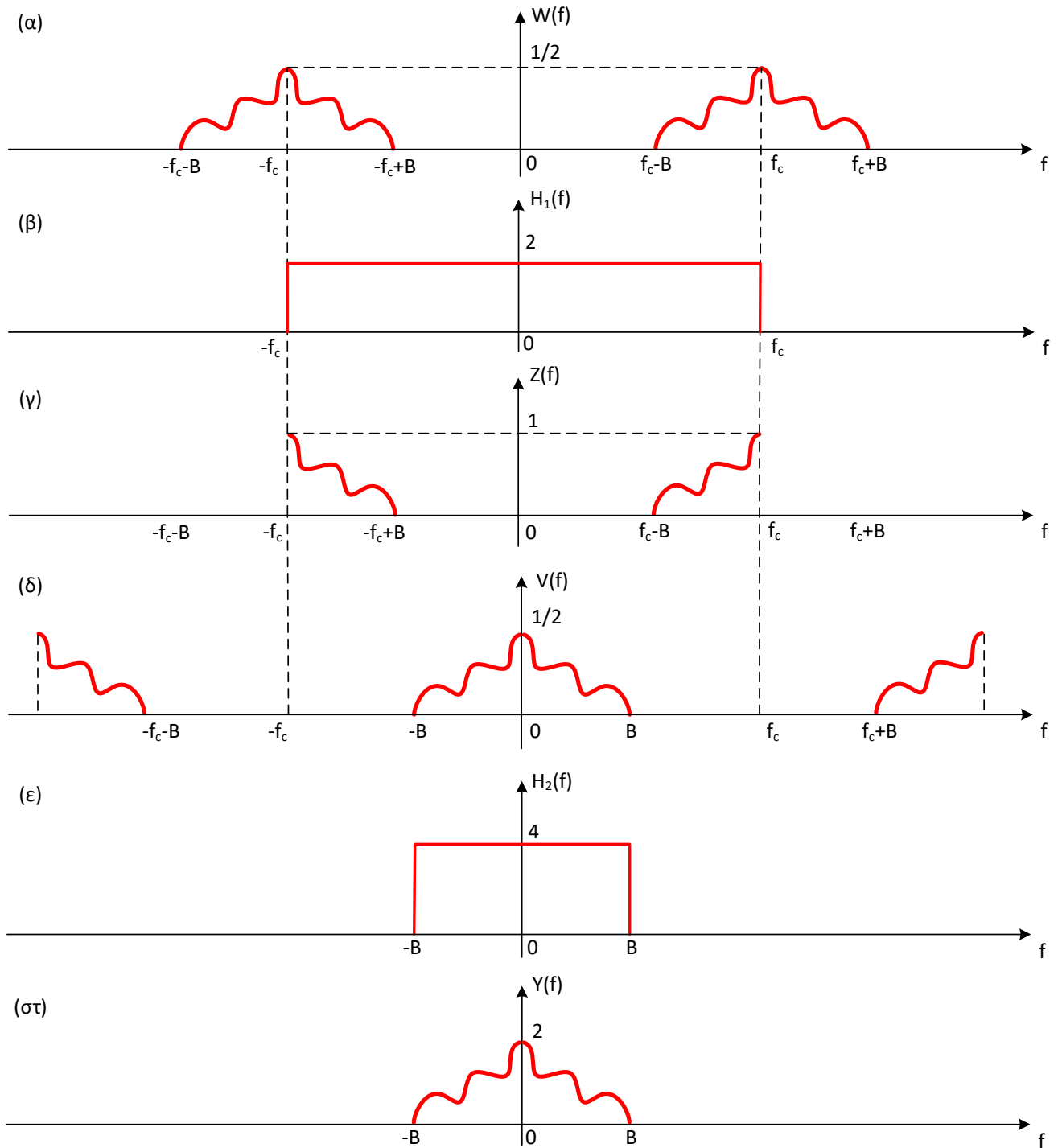
$$= \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c) \quad (12.34)$$

Το φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 12.7(α).

(β') Είναι

$$h_1(t) = 4f_c \text{sinc}(2f_c t) \longleftrightarrow H_1(f) = 2 \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (12.35)$$

το οποίο φαίνεται στο 12.7(β).



Σχήμα 12.7: Φάσματα Παραδείγματος 8.3.

(γ') Είναι

$$Z(f) = W(f)H_1(f) = \frac{1}{2}X(f - f_c)H_1(f) + \frac{1}{2}X(f + f_c)H_1(f) \quad (12.36)$$

που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα κομμάτι του αρχικού φάσματος $W(f)$ όπως στο 12.7(γ), αφού το $H_1(f)$ είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο.

(δ') Το $V(f)$ θα είναι το φάσμα του $Z(f)$ μετατοπισμένο στις συχνότητες $\pm f_c$, δηλ.

$$v(t) = z(f) \cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow V(f) = \frac{1}{2}Z(f - f_c) + \frac{1}{2}Z(f + f_c) \quad (12.37)$$

όπως στο Σχήμα 12.7(δ).

(ε') Είναι

$$h_2(t) = 8B \text{sinc}(2Bt) \longleftrightarrow H_2(f) = 4 \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (12.38)$$

το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 12.7(ε).

(ζ') Η έξοδος $Y(f)$ θα είναι της μορφής

$$Y(f) = V(f)H_2(f) = \frac{1}{2}Z(f - f_c)H_2(f) + \frac{1}{2}Z(f + f_c)H_2(f) \quad (12.39)$$

όπως στο Σχήμα 12.7(στ), αφού το $H_2(f)$ είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο, δηλ. είναι ίδιο με το αρχικό σήμα εισόδου $x(t)$, πολλαπλασιασμένο επί 2, δηλ.

$$y(t) = 2x(t) \quad (12.40)$$

12.3 Δειγματοληψία

Επιστρέφοντας στη διαδικασία της Δειγματοληψίας, τα ερωτήματα που μπορεί κανείς να σκεφτεί και να θέσει άμεσα είναι: “ποιά δείγματα να πάρω; Όποια θέλω; Και κάθε πότε να τα παίρνω; Όποτε θέλω; Ή πρέπει να υπάρχει ένα σταθερό χρονικό διάστημα στο οποίο θα πρέπει να παίρνω δείγματα; Κι αν τα πάρω αυτά τα δείγματα, μετά θα μπορώ να ανακατασκευάσω και να ακούσω το τραγούδι του ηχογραφήθηκε από ένα ηχείο ή θα ακούσω bits;” Όλα αυτά τα ερωτήματα τα απάντησε ο Nyquist και ο Shannon, το 1928 ο πρώτος, και το 1949 ο δεύτερος, με κάποιες διαφορές στις εργασίες τους. Το θεώρημα που απαντάει σε αυτά τα ερωτήματα ονομάστηκε Θεώρημα των Shannon-Nyquist.

Θεώρημα Δειγματοληψίας

Ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα (μη-μηδενικού πλάτους) B Hz, μπορεί να ανακτηθεί ακριβώς από τα δείγματά του, αν δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας

$$f_s > 2B, \quad (12.41)$$

δηλ. με περίοδο δειγματοληψίας

$$T_s < \frac{1}{2B} \quad (12.42)$$

Η συνθήκη:

$$f_s > 2B \quad \left(\text{ή } T_s < \frac{1}{2B} \right) \quad (12.43)$$

λέγεται *συνθήκη του Shannon*. Η μέγιστη συχνότητα B του σήματος συνήθως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως $f_{\max}$ και λέγεται *συχνότητα Nyquist*^a, ενώ η ελάχιστη συχνότητα $2B$ πάνω από την οποία πληρείται η συνθήκη του Shannon αναφέρεται ως *ρυθμός Nyquist*.

^a Αν και υπάρχει μια κάποιια σύγχυση στη βιβλιογραφία σχετικά με την ονομασία αυτή...

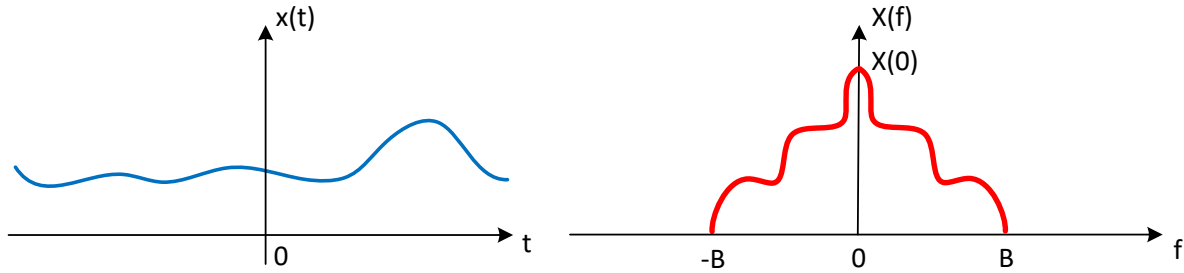
Όπως πρέπει να σας έχει γίνει ήδη αντιληπτό, το θεώρημα της δειγματοληψίας εμπλέκει μέσα το πεδίο της συχνότητας, εκτός από αυτό του χρόνου. Το πεδίο της συχνότητας, όπως πρέπει ήδη να ξέρετε πολύ καλά, δεν είναι τίποτα άλλο από την αναπαράσταση του ίδιου σήματος ως προς τη συχνότητα f .

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ που θέλουμε να δειγματοληπτήσουμε, και αυτό το σήμα έχει φάσμα (μετασχηματισμός Fourier δηλαδή) $X(f)$, όπως στο Σχήμα 12.8. Έστω ότι ο μετασχηματισμός είναι πραγματικός και θετικός, για ευκολία στη σχεδίαση. Παρατηρείτε ότι το φάσμα του σήματος έχει μέγιστη συχνότητα B . Μετά τη συχνότητα αυτή, δεν υπάρχουν πλάτη για τις υπόλοιπες συχνότητες. Το ίδιο και για το αρνητικό μέρος των συχνοτήτων, πριν τη συχνότητα $-B$.

12.3.1 Ιδανική Δειγματοληψία

Ας κάνουμε τώρα δειγματοληψία στο σήμα μας στο χρόνο, με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = \frac{1}{f_s}$. Πώς όμως θα αναπαράστησουμε μαθηματικά τη δειγματοληψία; Θυμηθείτε ότι

$$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t \pm t_0) \quad (12.44)$$

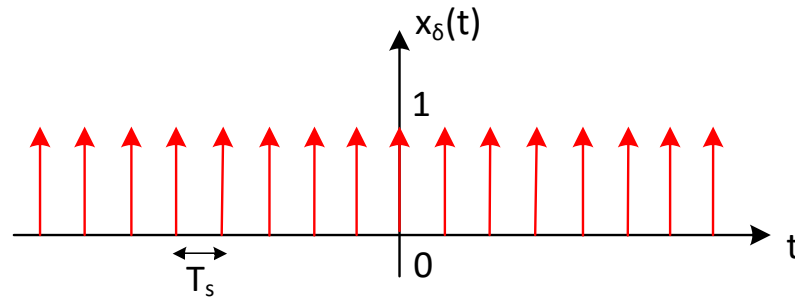


Σχήμα 12.8: Σήμα συνεχούς χρόνου και Μετασχηματισμός Fourier του.

Άρα η συνάρτηση δειγματοληψίας δεν είναι τίποτα άλλο από μια (άπειρη, εν γένει) σειρά από τις γνωστές μας Συναρτήσεις Δέλτα:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (12.45)$$

Η συνάρτηση δειγματοληψίας φαίνεται στο Σχήμα 12.9.



Σχήμα 12.9: Συνάρτηση Δειγματοληψίας

Όπως φαίνεται, αυτές οι συναρτήσεις Δέλτα απέχουν μεταξύ τους χρόνο T_s .

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δειγματοληψίας είναι:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \longleftrightarrow \Delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s) \quad (12.46)$$

δηλ.² βλέπουμε ότι και ο μετασχ. Fourier της άπειρης σειράς από Συναρτήσεις Δέλτα στο χρόνο που απέχουν

²Για μια σύντομη απόδειξη... αφού η συνάρτηση $x_\delta(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T_s , μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier. Οι συντελεστές Fourier δίνονται ως

$$X_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} x(t) e^{-jk2\pi f_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jk2\pi f_s t} dt = \frac{1}{T_s} e^{-j2\pi f_s t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_s}$$

λόγω της ιδιότητας της συνάρτησης Δέλτα

$$\int x(t) \delta(t) dt = x(0)$$

Άρα

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_s t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} e^{j2\pi k f_s t} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f_s t}$$

Όμως από το τυπολόγιο του Μετασχ. Fourier, ξέρουμε ότι

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - kf_0)$$

Άρα τελικά

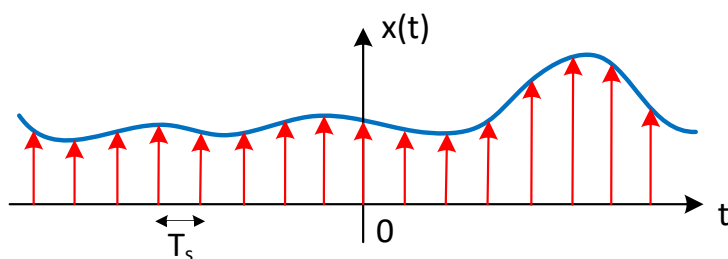
$$X_\Delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s)$$

απόσταση T_s είναι μια άπειρη σειρά από συναρτήσεις Δέλτα ΚΑΙ στη συχνότητα, οι οποίες μάλιστα απέχουν μεταξύ τους $f_s = 1/T_s$ Hz.

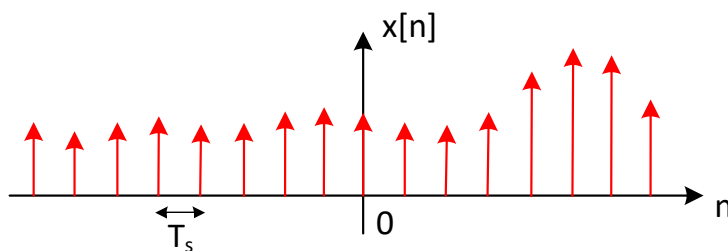
Η δειγματοληψία μπορεί να αναπαρασταθεί λοιπόν μαθηματικά από τον πολλαπλασιασμό στο χρόνο του σήματος πληροφορίας $x(t)$ με τη σειρά από συναρτήσεις Δέλτα, $x_\delta(t)$. Άρα θα έχουμε:

$$x_s(t) = x(t)x_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (12.47)$$

Οπότε αυτό που θα πάρουμε θα είναι οι κόκκινες τιμές στις κορυφές των συναρτήσεων Δέλτα. Οι υπόλοιπες τιμές χάνονται. Αυτό που μένει λοιπόν είναι το σήμα μας, $x[n]$, με n τον αριθμό του δείγματος. Αυτό το $x[n]$ δεν είναι τίποτα άλλο από τις τιμές $x(nT_s)$ που πήραμε παραπάνω. Όλα αυτά μας τα δείχνουν γραφικά τα Σχήματα 12.10 και 12.11.



Σχήμα 12.10: Δειγματοληψία.



Σχήμα 12.11: Δειγματοληπτημένο σήμα.

Ας δούμε τι συμβαίνει στο πεδίο της συχνότητας. Το γινόμενο των δυο παραπάνω σημάτων, $x_s(t) = x(t)x_\delta(t)$, γίνεται συνέλιξη στη συχνότητα:

$$X_s(f) = X(f) * \Delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s) \quad (12.48)$$

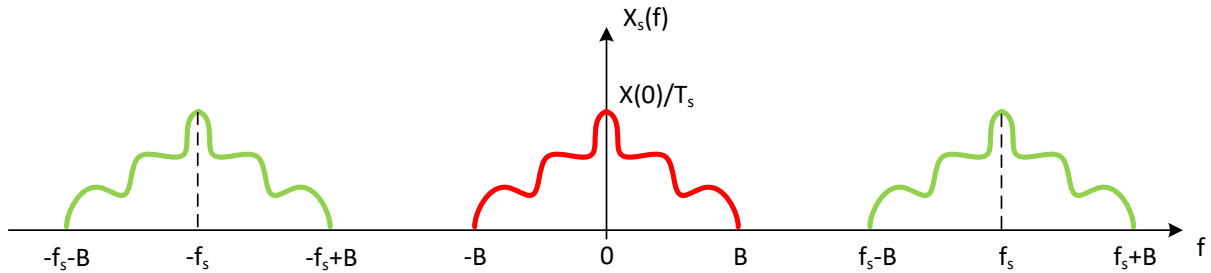
$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (X(f) * \delta(f - nf_s)) \quad (12.49)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_s) \quad (12.50)$$

αφού ξέρουμε ότι η συνέλιξη σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα δίνει το ίδιο το σήμα μετατοπισμένο στη θέση της συνάρτησης Δέλτα, δηλ.

$$X(f) * \delta(f \pm f_0) = X(f \pm f_0) \quad (12.51)$$

Άρα λοιπόν, αυτό που παίρνουμε στο πεδίο της συχνότητας σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, είναι επαναλήψεις του φάσματος $X(f)$ γύρω από τις συχνότητες $\pm nf_s$. Αν η συχνότητα δειγματοληψίας f_s είναι “αρκετά μεγάλη” (θα δούμε παρακάτω τι σημαίνει αυτό), τότε αυτό που θα συμβεί στο πεδίο της συχνότητας φαίνεται στο Σχήμα 12.12.

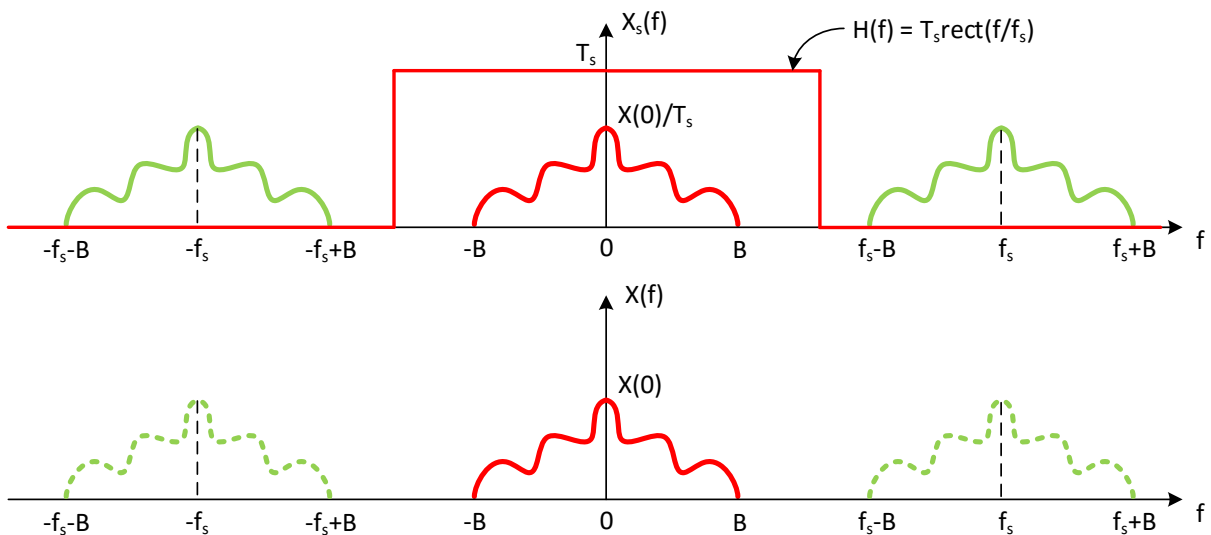


Σχήμα 12.12: Μη επικαλυπτόμενο φάσμα δειγματοληπτημένου σήματος.

Τι παρατηρούμε και στο Σχήμα 12.12; Παρατηρούμε ότι, λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας, εμφανίστηκαν “από το πουθενά” περιοδικές “επαναλήψεις” του αρχικού φάσματος γύρω από τις συχνότητες $\pm n f_s$. Αυτό είναι το φάσμα του δειγματοληπτημένου (δηλ. του διακριτού χρόνου) σήματος. Στο Σχήμα 12.12 φαίνονται μόνο οι “επαναλήψεις” του φάσματος γύρω από τις συχνότητες $\pm f_s$, αλλά αυτή η επανάληψη συνεχίζεται σε όλα τα πολλαπλάσια της f_s , από το $-\infty$ ως το $+\infty$. Απλά για λόγους ευκολίας, εδώ δείχνουμε μόνο τις επαναλήψεις γύρω από την συχνότητα $-f_s$ και την f_s .

12.3.2 Ανακατασκευή

Υπενθυμίζεται ότι μετά την αποθήκευση ή επεξεργασία του διακριτού σήματος στον υπολογιστή, σκοπός μας είναι να μπορούμε να πάρουμε πίσω το αρχικό σήμα, δηλ. το φάσμα $X(f)$ που θα μας δώσει το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$. Αυτό γίνεται με την εφαρμογή ενός χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου γύρω από το κεντρικό φάσμα, κόβοντας τα “περισσευούμενα” φάσματα και κρατώντας μόνο αυτό στο διάστημα $[-f_s/2, f_s/2]$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.13. Θυμίζεται ότι το κεντρικό (κόκκινου χρώματος) φάσμα είναι το φάσμα του αρχικού σήματος συνεχούς χρόνου, ενώ τα φάσματα πράσινου χρώματος “ξεφύτρωσαν” λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας. Οπότε αν θέλουμε να ανακτήσουμε το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου, θα πρέπει να κρατήσουμε μόνο το κεντρικό φάσμα γύρω από τη μηδενική συχνότητα, γιατί ΜΟΝΟ αυτό αντιστοιχεί στο αρχικό σήμα, όπως δείχνει το Σχήμα 12.13. Το φίλτρο αυτό, που προφανώς το ορίζουμε στη συχνότητα, πρέπει να σας θυμίζει κάτι. :-) Ναι,



Σχήμα 12.13: Φίλτρο ανακατασκευής.

είναι ένας τετραγωνικός παλμός (!!) που δίνεται από την εξίσωση:

$$H(f) = \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = T_s \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) \quad (12.52)$$

Αυτό σημαίνει ότι το παράθυρο ορίζεται στο διάστημα $[-f_s/2, f_s/2]$. Ο αντίστροφος μετασχη. Fourier του σήματος αυτού ξέρουμε ότι είναι:

$$h(t) = T_s f_s \text{sinc}(t f_s) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad (12.53)$$

λόγω της ιδιότητας της Δυικότητας³. Πολλαπλασιάζοντας το σήμα $H(f)$ με το φάσμα του διακριτού σήματος

$$\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_s)$$

θα έχουμε:

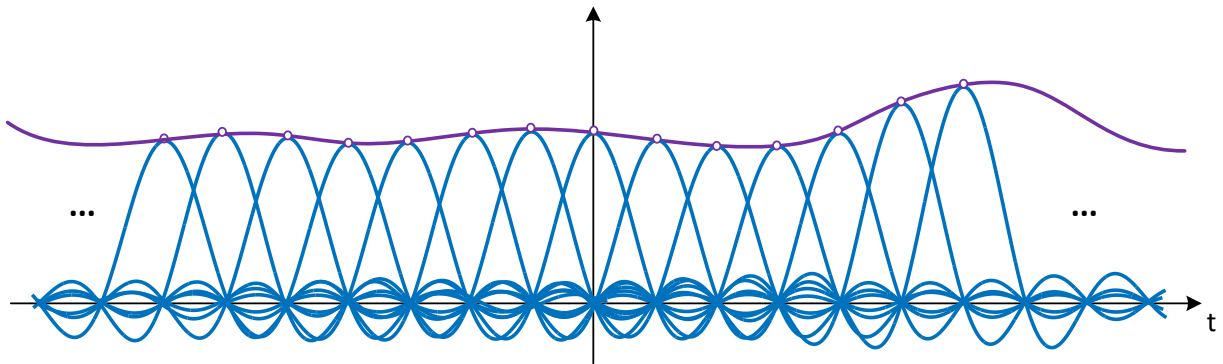
$$\frac{1}{T_s} H(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_s) = \frac{1}{T_s} T_s X(f) = X(f) \quad (12.56)$$

αφού το $H(f)$ είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[-f_s/2, f_s/2]$.

Τέλος, το γινόμενο στη συχνότητα γίνεται συνέλιξη στο χρόνο:

$$h(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n T_s) \delta(t - n T_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n T_s) h(t - n T_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n T_s) \text{sinc}\left(\frac{t - n T_s}{T_s}\right) \quad (12.57)$$

Η παραπάνω σχέση είναι πολύ σημαντική. Μας λέει ότι, ιδανικά, ένα αναλογικό σήμα (το οποίο ορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή - άρα σε άπειρες χρονικές στιγμές) δειγματοληπτημένο με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s > 2f_{max}$ μπορεί να ανακατασκευαστεί **πλήρως και ακριβώς** από τα δείγματα του $x(n T_s)$ (δηλ. από κάποιες διακριτές μόνο χρονικές στιγμές του σήματος) όταν αυτά συνδυαστούν γραμμικά με συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$, όταν κάθε μιά έχει τον κεντρικό λοβό της γύρω από τις χρονικές στιγμές $n T_s$, $n \in \mathbb{Z}$!!! Δείτε το Σχήμα 12.14 και παρατηρήστε πώς οι συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$ με κατάλληλη μετατόπιση (μπλε καμπύλες) και άθροιση κατασκευάζουν ένα σήμα στο συνεχή χρόνο (μώβ καμπύλη) από τα δείγματά του (κουκκίδες).



Σχήμα 12.14: Ανακατασκευή από Συναρτήσεις sinc.

Ας επανέλθουμε λίγο στο φάσμα του διακριτού σήματος, που το παραθέτουμε ξανά για ευκολία, στο Σχήμα 12.15(α). Παρατηρήστε λίγο το δεξί άκρο του κεντρικού φάσματος (κόκκινη καμπύλη) και το αριστερό άκρο του φάσματος γύρω από τη συχνότητα f_s (πράσινη καμπύλη). Βλέπετε ότι το ένα έχει συχνότητα B και το άλλο έχει συχνότητα $f_s - B$. Αν αυτά τα δυο άκρα ήταν πιο κοντά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.15(β), τότε θα “έμπαινε” το ένα φάσμα μέσα στο άλλο, θα είχαμε δηλ. επικάλυψη στα φάσματα, και σε εκείνο το διάστημα τα φάσματα θα προστίθενται, αλλοιώνοντας έτσι το αρχικό μας σήμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.15(γ).

Για να μη συμβαίνει αυτό, καταλαβαίνετε ότι πρέπει να έχουμε μια κατάσταση όπως στο Σχήμα 12.15(α), δηλ. να ισχύει

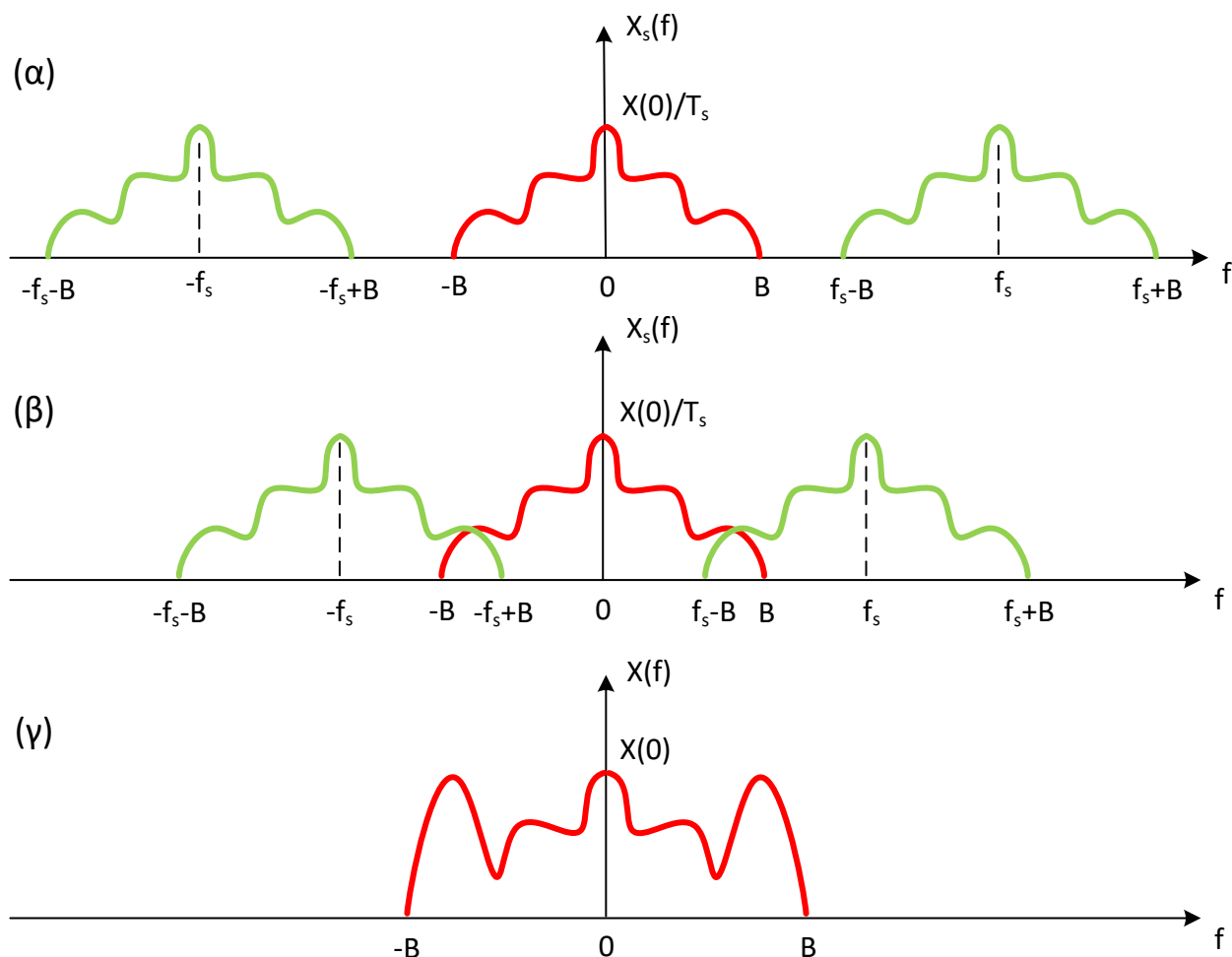
$$B < f_s - B \iff f_s > 2B \quad (12.58)$$

³Υπενθυμίζεται:

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \implies X(t) \longleftrightarrow x(-f) \quad (12.54)$$

και για το γνωστό μας ζεύγος είναι

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow \text{ATsinc}(fT) \implies \text{ATsinc}(tT) \longleftrightarrow \text{Arect}\left(-\frac{f}{T}\right) = \text{Arect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (12.55)$$



Σχήμα 12.15: Υποδειγματοληψία: Φάσμα με ξένες συχνότητες

που είναι το κριτήριο του Shannon. Αυτή ουσιαστικά είναι η απόδειξη του θεωρήματος της δειγματοληψίας (χωρίς μαθηματικά :-)). Προέρχεται απλά από την παρατήρηση αυτού του σχήματος. Δείτε στο Σχήμα 12.15(γ), τι συμβαίνει αν το κριτήριο του Shannon παραβιάζεται, δηλ. η συχνότητα δειγματοληψίας f_s είναι μικρότερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα B του σήματος. Βλέπετε ότι πλέον το κεντρικό φάσμα (κόκκινη καμπύλη) δεν είναι η ίδια με πριν. Στα άκρα της έχουν προστεθεί συχνότητες “ξένες”, και έχουν αλλοιώσει το κεντρικό φάσμα. Καταλαβαίνετε τι γίνεται αν η f_s είναι ακόμα πιο κοντά στο μηδέν...

Το φαινόμενο αυτό της επικάλυψης των φασμάτων ονομάζεται **aliasing** στα Αγγλικά⁴.

Συνοπτικά, η διαδικασία της δειγματοληψίας φαίνεται στο Σχήμα 12.16.

12.3.3 Παρατηρήσεις

1. Προσέξτε ότι στην παραπάνω ανάλυσή μας, θεωρήσαμε ότι το $x(t)$ είναι ένα σήμα πεπερασμένης ζώνης συχνοτήτων, δηλ. το φάσμα του, $X(f)$, είναι μη μηδενικό σε ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων (στο $[-B, B]$). Αυτό μπορεί να μην ισχύει πάντα, και για την ακρίβεια πράγματι δεν ισχύει για όλα τα σήματα που μπορούμε να κατασκευάσουμε ή καταγράψουμε στην πράξη, μια και όλα τα υπαρκτά σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, άρα άπειρης διάρκειας στη συχνότητα! Τότε πρέπει να εφαρμόσουμε εκ των προτέρων στο φάσμα του σήματος ένα φίλτρο $H_{aa}(f)$, που είναι ίδιας μορφής με το $H(f)$ που είδαμε, και ονομάζεται *anti-aliasing filter*, ώστε να περιορίσουμε το εύρος ζώνης του, και έτσι να ισχύει η ανάλυση που κάναμε παραπάνω. Το φίλτρο αυτό πρέπει να είναι κατ'άλληλο ώστε να μην “κόβει” μεγάλο κομμάτι απ' την πληροφορία του σήματος.
2. Δείτε το φίλτρο $H(f)$ που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυσή μας (Σχήμα 12.13). Αυτό το φίλτρο είναι ιδανικό, αλλάζει τιμές στα άκρα του με αχαριαίο τρόπο, είναι ασυνεχές και άρα μη υλοποιήσιμο στην πράξη, όμως

⁴Μια προσπάθεια μετάφρασης θα ήταν “ψευδώνυμες συχνότητες”...

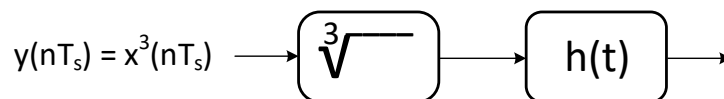
υπάρχουν αρκετά παρόμοια που το προσεγγίζουν. Αυτή η “παραχώρηση” που κάνουμε εισάγει παραμόρφωση στο σήμα μας, αλλά δεν μπορεί να γίνει αλλιώς. Θα πούμε περισσότερα για αυτό το ιδεατό φίλτρο στις επόμενες σελίδες.

3. Η συνάρτηση δειγματοληψίας $x_\delta(t)$ επίσης δεν μπορεί να υλοποιηθεί στην πράξη. Προσεγγίζεται αρκετά καλά όμως από τετραγωνικούς παλμούς (αντί για συναρτήσεις Δέλτα) με πολύ μικρό εύρος, όπως ο παλμός που είδαμε στο Κεφάλαιο για το μετασχ. Fourier

$$\delta(t) \approx \frac{1}{\epsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad (12.59)$$

όπου όσο το $\epsilon \rightarrow 0$, τόσο η προσέγγιση πλησιάζει πιο κοντά στη θεωρητική συνάρτηση Δέλτα. Αυτού του τύπου η δειγματοληψία ονομάζεται *πρακτική δειγματοληψία* ή *δειγματοληψία με παρακράτηση*, και θα τη συζητήσουμε πολύ σύντομα.

4. Η συνθήκη του Shannon δεν είναι αναγκαία για τη σωστή ανάκτηση του σήματος. Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:
Έστω $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, με $X(f)$ μη μηδενικό στο διάστημα $[-B, B]$. Έστω $y(t) = x^3(t)$, άρα θα είναι $Y(f) \neq 0$ στο $[-3B, 3B]$. Για ανάκτηση του σήματος σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει, πρέπει $f_s > 6B$. Έστω ότι το δειγματοληπτούμε με $f_s = 2B$. Τι συμβαίνει; Προφανώς υπάρχουν επικαλύψεις στο φάσμα του διακριτού σήματος $y(nT_s)$. Όμως για δείτε την διάταξη στο Σχήμα 12.17. Γίνεται ή όχι σωστή ανάκτηση του σήματος;



Σχήμα 12.17: Διάταξη ανάκτησης σήματος.

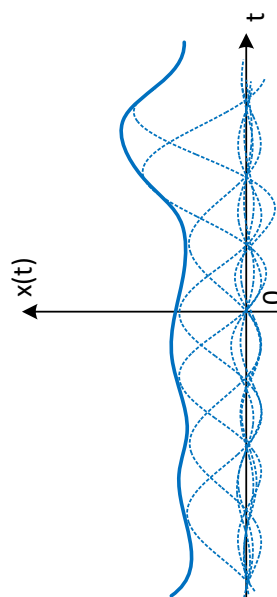
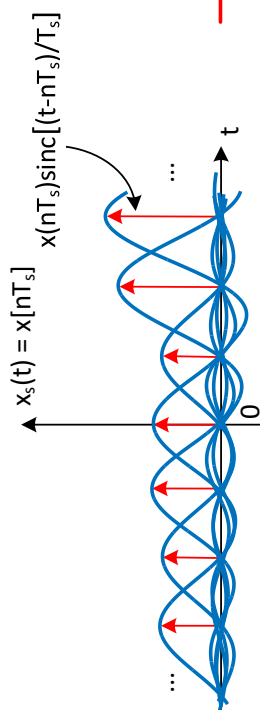
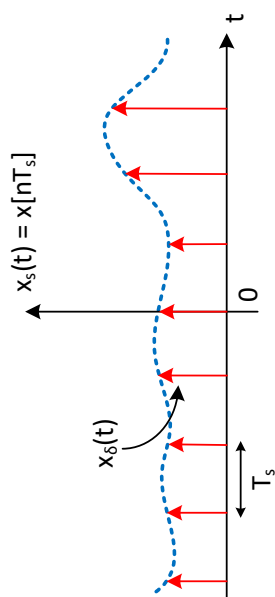
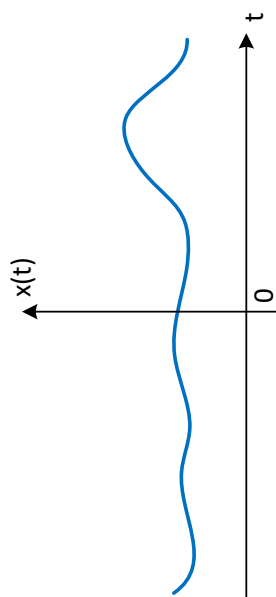
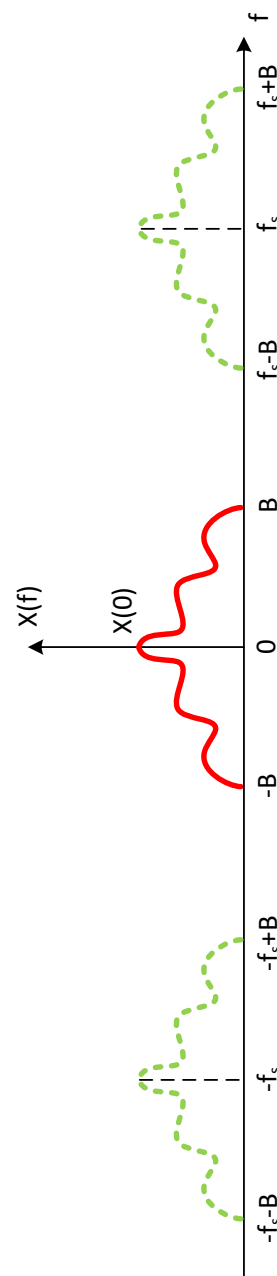
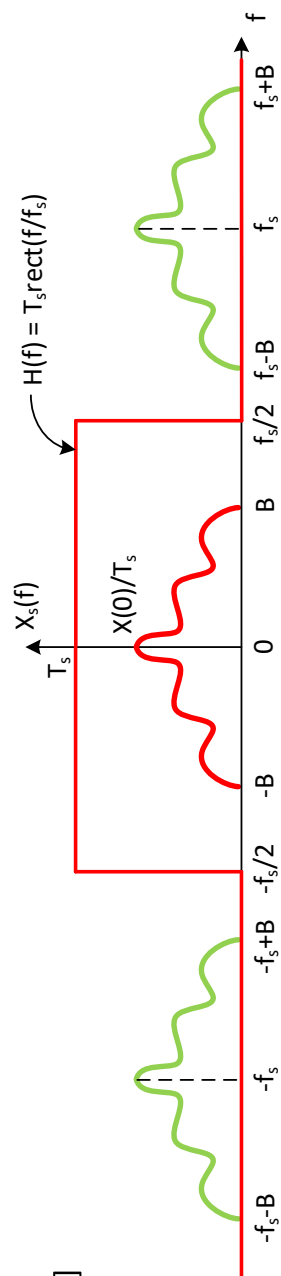
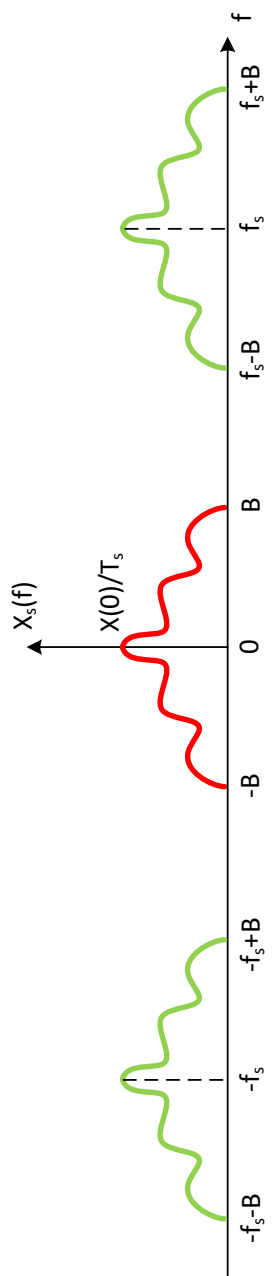
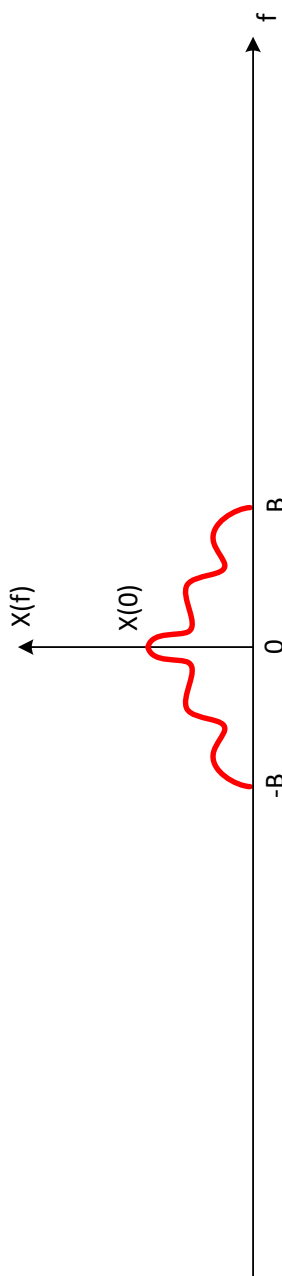
5. Θα μπορούσε κάποιος να θέσει το ερώτημα “γιατί δεν σχεδιάζουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο στο συχνοτικό διάστημα $[-B, B]$ αλλά στο $[-f_s/2, f_s/2]$.” Η απάντηση είναι ότι δε γνωρίζουμε πάντα ποιά είναι η μέγιστη συχνότητα του σήματος απαραίτητα, γνωρίζουμε όμως ότι - αν όλα τα έχουμε κάνει σωστά - το σήμα μπορεί να ανακτηθεί πλήρως ορίσουμε ως τη μέγιστη συχνότητά του την $f_s/2$, άσχετα αν πράγματι υπάρχει συχνοτικό περιεχόμενο λίγο πριν αυτή. Είναι μια δικλείδα ασφαλείας, δεδομένου ότι ο δειγματολήπτης έκανε σωστά τη δουλειά του. :-)
6. Ίσως επίσης αναρωτηθήκατε “γιατί δεν παίρνουμε μια αρκετά μεγάλη συχνότητα δειγματοληψίας ώστε να μην αναγκάζομαστε να εξετάζουμε κάθε φορά το θεώρημα του Shannon;”. Η απάντηση σε αυτό είναι - όπως ίσως μαντέψατε - το κόστος. Για παράδειγμα, σε ηχογραφήσεις φωνής, μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από 20 kHz ίσως είναι πλεονασματική, γιατί οι σημαντικές συχνοτικές συνιστώσες της ανθρώπινης φωνής σπάνια ξεπερνούν τα 10 kHz. Οπότε μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από $2 \cdot 10 = 20$ kHz αποθηκεύει πληροφορία με λίγη σημασία για την καταληπτότητα και την καθαρότητα της φωνής.

Αντίθετα, μερικά μουσικά όργανα μπορούν να παράξουν συχνότητες ως και τα 20 – 25 kHz, οπότε θα πρέπει να δειγματοληπτήσουμε τέτοιες ηχογραφήσεις με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s > 2 \cdot \{20 - 25\} = 40 - 50$ kHz. Όμως το ανθρώπινο αυτί μπορεί να ακούσει συχνότητες από 20 Hz ως περίπου 20 kHz. Άρα μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από $2 \cdot 20 = 40$ kHz πρακτικά δεν έχει πολύ νόημα.

Παρ’ όλα αυτά, τα CD του εμπορίου καθιέρωσαν (με πρωτεργάτρια τη Sony τη δεκαετία του ’70) τη συχνότητα δειγματοληψίας των 44.1 kHz, τόσο για το ότι είναι κοντά στο όριο των 20 kHz του ανθρώπινου αυτιού, όσο και για πρακτικούς λόγους υλοποίησης του τετραγωνικού παραθύρου που ανακατασκευάζει το φάσμα του σήματος συνεχούς χρόνου από το περιοδικό φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος.

12.3.4 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε πως εφαρμόζεται η δειγματοληψία σε μερικά παραδείγματα.

ΧΡΟΝΟΣΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Σχήμα 12.16: Η διαδικασία της δειγματοληψίας στο χώρο του χρόνου και της συχνότητας.

Παράδειγμα 12.4:

Ένα συνεχές σήμα της μορφής

$$x(t) = 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(4400\pi t) \quad (12.60)$$

δειγματοληπτείται με $f_s = 4000$ Hz παράγοντας την ακολουθία $x[n]$. Ελέγξτε αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι ικανή να μας δώσει πίσω το αρχικό σήμα από τα δείγματά του, και βρείτε τη μαθηματική έκφραση του $x[n]$.

Λύση:

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος $x(t)$ είναι προφανώς η μέγιστη συχνότητα που υπάρχει στα ημίτονά του, κι αυτή δεν είναι άλλη από την $f_{max} = 2200$ Hz. Όμως

$$2f_{max} = 2 \cdot 2200 = 4400 > f_s \quad (12.61)$$

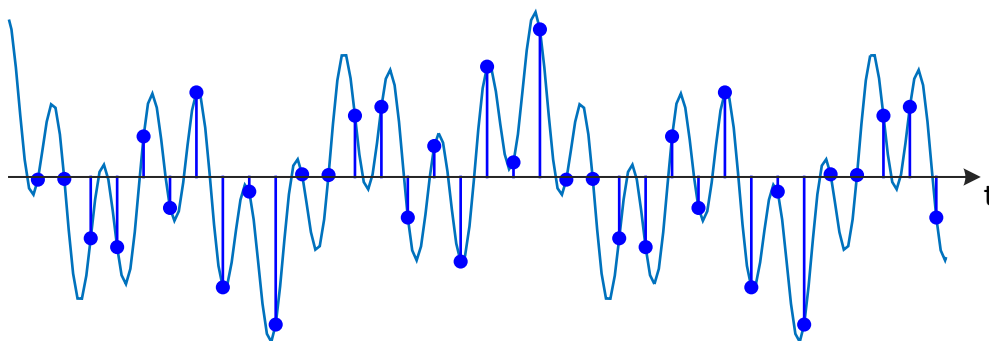
άρα το κριτήριο του Shannon δεν ικανοποιείται, οπότε ΔΕΝ μπορούμε να πάρουμε πίσω το αναλογικό σήμα από τα δείγματά του. Παρ' όλα αυτά, δε μας απαγορεύει κανείς να δειγματοληπτήσουμε με αυτή τη συχνότητα και να πάρουμε ένα διακριτό σήμα. :-)

Προφανώς $t = nT_s = n \frac{1}{4000}$ s. Αντικαθιστούμε όπου t με nT_s . Άρα θα είναι:

$$x[n] = 3 \cos(400\pi nT_s) + 5 \sin(1200\pi nT_s) + 6 \cos(4400\pi nT_s) \quad (12.62)$$

$$= 3 \cos\left(\frac{n\pi}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{3n\pi}{10}\right) + 6 \cos\left(\frac{11n\pi}{10}\right) \quad (12.63)$$

Το σήμα συνεχούς χρόνου καθώς και τα δείγματά του φαίνονται στο Σχήμα 12.18.



Σχήμα 12.18: Σήμα συνεχούς χρόνου και δείγματα αυτού για $f_s < 2f_{max}$.

Παράδειγμα 12.5:

Δείξτε ότι το φίλτρο

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi f_s t} \quad (12.64)$$

με $f_M < f_c < f_s - f_M$ και $f_s = \frac{1}{T_s}$ παίρνει την τιμή $h[nT_s] = \delta[n]$ για κάθε n , αν ισχύει ότι $f_c = \frac{f_s}{2}$. Δίνεται ότι η διακριτή συνάρτηση Δέλτα (ή αλλιώς Dirac Δέλτα) ορίζεται ως:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.65)$$

Λύση:

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi f_s t} = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi (f_s t)} = \text{sinc}(f_s t) \quad (12.66)$$

Δειγματοληπτούμε με $f_s = \frac{1}{T_s}$, αντικαθιστώντας όπου t με nT_s , κι έχουμε

$$h[nT_s] = \text{sinc}(f_s nT_s) = \text{sinc}\left(\frac{1}{T_s} nT_s\right) \iff h[n] = \text{sinc}(n) \quad (12.67)$$

Προφανώς, επειδή το συγκεκριμένο $\text{sinc}(n) = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n}$ μηδενίζεται όταν μηδενίζεται ο αριθμητής, δηλαδή

$$\sin(\pi n) = 0 \iff \sin(\pi n) = \sin(k\pi) \quad (12.68)$$

άρα στις θέσεις

$$\pi n = k\pi \iff n = k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (12.69)$$

και οι τιμές του n , ως ακέραιες, είναι ακριβώς πάνω σε αυτά τα σημεία μηδενισμού, ισχύει ότι

$$h[n] = \begin{cases} \text{sinc}(0) = 1, & n = 0, \\ \text{sinc}(n) = 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

που ουσιαστικά είναι ο ορισμός της διακριτής συνάρτησης Δέλτα, άρα

$$h[n] = \delta[n] \quad (12.70)$$

Παράδειγμα 12.6:

Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, ο οποίος έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $[-B, B]$. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τη δειγματοληψία των παρακάτω σημάτων:

(α') $x(t)$

(β') $x(t - t_0)$

(γ') $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$

(δ') $x(t - t_0) + x(t + t_0)$

(ε') $\frac{dx(t)}{dt}$

(ς') $x(t)x(t)$

(ζ') $x(t) * x(t)$

Λύση:

Προφανώς η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (ρυθμός Nyquist) καθορίζεται ΜΟΝΟ από το φάσμα του σήματος. Άρα:

(α') Η μέγιστη συχνότητα είναι B , άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 2B$.

(β') Ισχύει ότι

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0} \quad (12.71)$$

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος παραμένει B , άρα ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 2B$.

(γ') Ισχύει ότι

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0) \quad (12.72)$$

Το σήμα έχει μετατοπιστεί γύρω από τη συχνότητα f_0 , άρα η μέγιστη συχνότητά του είναι πλέον $f_0 + B$. Έτσι, ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 2(f_0 + B)$.

(δ') Ισχύει ότι

$$x(t - t_0) + x(t + t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0} + X(f)e^{j2\pi ft_0} = 2X(f)\cos(2\pi ft_0) \quad (12.73)$$

Η μέγιστη συχνότητα του φάσματος παραμένει B , αφού το γινόμενο ενός πεπερασμένης ζώνης φάσματος με ένα άπειρης ζώνης δίνει αποτέλεσμα στο φάσμα πεπερασμένης ζώνης, άρα $f_s = 2B$.

(ε') Ισχύει ότι

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f) \quad (12.74)$$

Κι εδώ, η μέγιστη συχνότητα του φάσματος παραμένει B , για τον ίδιο λόγο με το προηγούμενο ερώτημα. Άρα $f_s = 2B$.

(ς') Ισχύει ότι

$$x(t)x(t) \longleftrightarrow X(f) * X(f) \quad (12.75)$$

Η συνέλιξη, όπως έχουμε δει, δυο σημάτων που είναι μη μηδενικά σε πεπερασμένα διαστήματα είναι μη μηδενική στο διάστημα που ορίζεται ως το άθροισμα των άκρων των διαστημάτων. Άρα το φάσμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[-B - B, B + B] = [-2B, 2B]$. Οπότε ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 4B$.

(ζ') Ισχύει ότι

$$x(t) * x(t) \longleftrightarrow X(f)X(f) = X^2(f) \quad (12.76)$$

Προφανώς ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 2B$, καθώς η ύψωση στο τετράγωνο δεν αλλάζει το εύρος συχνοτήτων που το φάσμα είναι μη μηδενικό.

Παράδειγμα 12.7:

Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα σήματα

(α') $\text{sinc}^2(100t)$

(β') $\frac{1}{100}\text{sinc}^2(100t)$

(γ') $\text{sinc}(100t) + 3\text{sinc}^2(60t)$

(δ') $\text{sinc}(50t) * \text{sinc}(100t)$

Λύση:

Ο ρυθμός Nyquist είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που ικανοποιεί το θεώρημα του Shannon, δηλ. η $2f_{max}$ του σήματος.

Επίσης, εδώ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της Δυσικότητας του Μετασχ. Fourier, που θυμίζεται ότι είναι

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \implies X(t) \longleftrightarrow x(-f) \quad (12.77)$$

Επειδή εδώ έχουμε σήματα $\text{sinc}(\cdot)$ στο χρόνο, από τα γνωστά μας ζεύγη (θέτοντας $A = 1$), και με την ιδιότητα της Δυσικότητας που μας λέει ότι αν

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T\text{sinc}(fT) \quad (12.78)$$

τότε

$$T\text{sinc}(tT) \longleftrightarrow \text{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (12.79)$$

και αν

$$\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T\text{sinc}^2(fT) \quad (12.80)$$

τότε

$$T\text{sinc}^2(tT) \longleftrightarrow \text{tri}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{tri}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (12.81)$$

όπου το $-f$ γίνεται f επειδή οι συναρτήσεις $\text{sinc}(\cdot)$, $\text{rect}(\cdot)$ είναι άρτιες. Άρα θα είναι

(α')

$$\text{sinc}^2(100t) \longleftrightarrow \frac{1}{100}\text{tri}\left(\frac{f}{100}\right) \quad (12.82)$$

Το σήμα $\text{tri}(\cdot)$ είναι ένας τριγωνικός παλμός με διάρκεια στο $[-100, 100]$ Hz. Άρα η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100 Hz, άρα ο ρυθμός Nyquist θα είναι $f_s = 200$ Hz.

(β') Η αλλαγή στο πλάτος δεν επηρεάζει το φάσμα, άρα κι εδώ $f_s = 200$ Hz.

(γ') Είναι

$$\text{sinc}(100t) + 3\text{sinc}^2(60t) \longleftrightarrow \frac{1}{100}\text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + 3\frac{1}{60}\text{tri}\left(\frac{f}{60}\right) \quad (12.83)$$

άρα η μέγιστη συχνότητα είναι 60 Hz, οπότε ο ρυθμός Nyquist είναι $f_s = 120$ Hz.

(δ') Είναι

$$\text{sinc}(50t) * \text{sinc}(100t) \longleftrightarrow \frac{1}{50}\text{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \frac{1}{100}\text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) \quad (12.84)$$

άρα η μέγιστη συχνότητα είναι 25 Hz, οπότε ο ρυθμός Nyquist θα είναι $f_s = 50$ Hz.