

Κεφάλαιο 5

Ανάλυση Σημάτων στο Πεδίο της Συχνότητας

5.1 Εισαγωγή

Ως τώρα, η όποια ανάλυση συζητήσαμε για σήματα περιελάμβανε αποκλειστικά το χώρο του χρόνου. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γνωρίσουμε μια άλλη θεώρηση ενός σήματος. Αυτή η θεώρηση λέγεται Ανάλυση Fourier και θα ασχοληθούμε αρκετά με αυτή.

Θα ξεκινήσουμε πρώτα με τη μελέτη *περιοδικών* σημάτων, δηλ. σημάτων άπειρων σε διάρκεια, που επαναλαμβάνουν ένα τμήμα τους, τη λεγόμενη *βασική τους περίοδο*, ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Επειδή όμως η ερώτηση “αφού τα περιοδικά σήματα δεν υπάρχουν πουθενά στη φύση, ούτε μπορούν να παραχθούν στο εργαστήριο¹, τι ενδιαφέρον έχουν από τη σκοπιά του μηχανικού;” έρχεται πολύ εύκολα στο μυαλό, οφείλουμε μια απάντηση. Η απάντηση περιλαμβάνει δυο - τουλάχιστον - συνιστώσες:

1. Για διδακτικούς λόγους: τα περιοδικά σήματα είναι εύκολα στο χειρισμό τους, και τα συμπεράσματα που βγαίνουν από τη μελέτη τους μπορούν να γενικευθούν εύκολα για απεριοδικά σήματα (τα οποία υπάρχουν στη φύση και μπορούν να μελετηθούν στο εργαστήριο).
2. Για πρακτικούς λόγους: σκεφτείτε ότι και το μιγαδικό εκθετικό σήμα είναι ένα θεωρητικό κατασκευάσμα που δεν υπάρχει στην πράξη, όμως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η σημασία του ήταν θεμελιώδης για την κατανόηση της συμπεριφοράς των ημιτονοειδών και τη λύση εξισώσεων που τα περιλαμβάνουν. Ακριβώς το ίδιο ισχύει και για τα περιοδικά σήματα – μπορεί να μην υπάρχουν στη φύση, αλλά η μελέτη τους μας προσφέρει πολύτιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά των συστημάτων.

Μερικές σελίδες αργότερα, θα διαβάσετε για την *ανάλυση σε Σειρές Fourier*, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά απλά μια μέθοδος αλλαγής οπτικής γωνίας. Ναι, τόσο απλά! Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να δούμε ένα σήμα σε έναν διαφορετικό χώρο, το χώρο των *συχνοτήτων*. Το πώς, θα το δείτε σύντομα. Το *γιατί* όμως είναι ένα σοβαρό ερώτημα, και το παρακάτω παράδειγμα πιστεύουμε θα σας πείσει για την αναγκαιότητα του να μεταβαίνουμε και σε άλλους χώρους πλην αυτού του χρόνου.

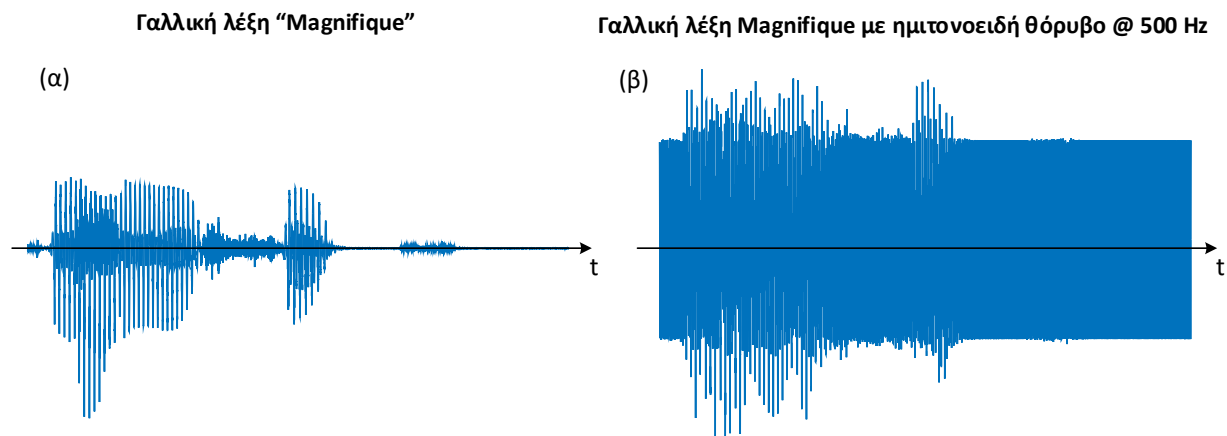
5.2 Μια μικρή εφαρμογή - κίνητρο

Έστω ότι έχουμε ένα σήμα φωνής στο πεδίο του χρόνου, όπως αυτό του Σχήματος 6.1(α). Πρόκειται για τη Γαλλική λέξη “magnifique”². Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο λόγο, ένα ισχυρό ημίτονο πλάτους 0.5, των 500 Hz (θυμηθείτε, 500 Hz σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο, το ημίτονο έχει επαναλάβει τη βασική του περίοδο 500 φορές) προστίθεται στο σήμα φωνής, και το οποίο ημίτονο θεωρείται ως ανεπιθύμητο, δηλαδή ως “θόρυβος”³. Το αποτέλεσμα στο χώρο του χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 6.1(β). Θα θέλαμε να ανακτήσουμε πίσω το αρχικό σήμα χωρίς το θόρυβο. Ασφαλώς στην πράξη δε γνωρίζουμε σχεδόν ποτέ τις ακριβείς παραμέτρους (συχνότητα, πλάτος, φάση) του ημιτόνου, οπότε ας “προσποιηθούμε” και σε αυτό το παράδειγμα ότι το ανεπιθύμητο ημίτονο

¹Μην ξεχνάτε ότι τα περιοδικά σήματα ξεκινούν από το $-\infty$ και καταλήγουν στο $+\infty$.

²Προφέρεται “μανιφίχ” που σημαίνει “υπέροχος, θαυμάσιος, μαγευτικός”.

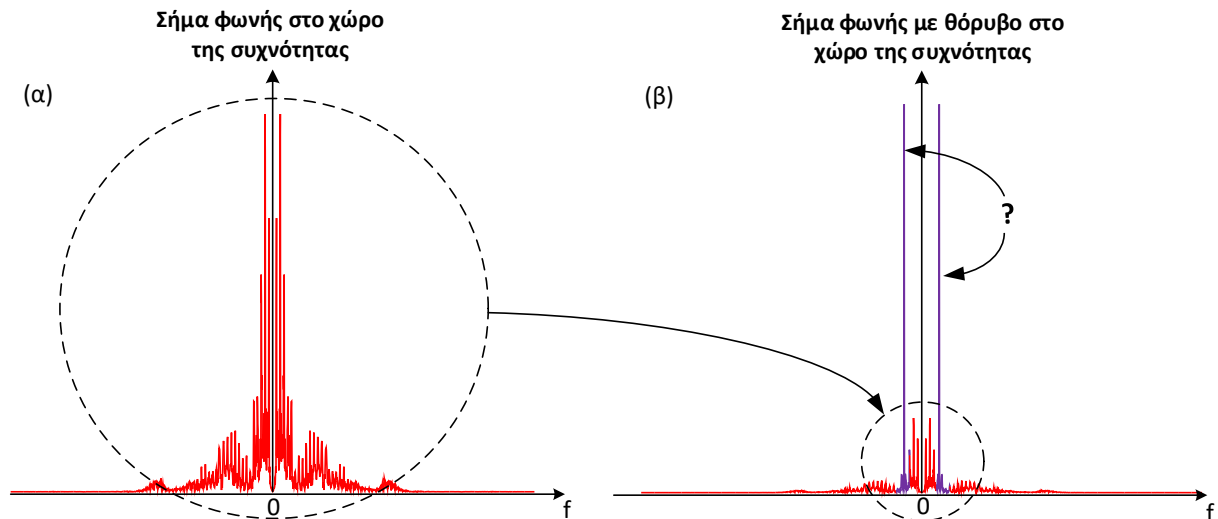
³Το παράδειγμα αυτό δεν απέχει απ’ την πραγματικότητα – στα αεροπλάνα, όταν βγαίνει μια ανακοίνωση από τα μικρόφωνα του πιλοτηρίου, ακούγεται πάνω στη φωνή του πιλότου ένα ημίτονο στα 400 Hz, λόγω του ότι η ηλεκτρική ισχύς είναι στα 400 Hz, εναντιθέσει με τα σπίτια μας, που είναι 50 – 60 Hz...



Σχήμα 5.1: (α) Σήμα φωνής με και (β) χωρίς ημιτονοειδή θόρυβο.

μας είναι εντελώς άγνωστο.

Όπως μπορείτε να δείτε, είναι τρομερά δύσκολο στην πράξη να ξεχωρίσουμε/ανακτήσουμε το σήμα μας στο πεδίο του χρόνου, μια και φαίνεται να έχει θαφτεί μέσα στο “θόρυβο” του ημιτόνου. Αν θέλαμε να το δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, θα πρέπει να γνωρίζουμε την πλήρη περιγραφή του “θορύβου”, δηλ. το πλάτος, τη συχνότητα, και τη φάση του ημιτόνου. Στην πράξη, σπάνια μπορούμε να γνωρίζουμε αυτά τα χαρακτηριστικά. Όμως, αν χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία που θα συζητήσουμε στη συνέχεια, δηλαδή την οπτική πλευρά του πεδίου της συχνότητας, τότε για το καθαρό σήμα θα έχετε το διάγραμμα του Σχήματος 6.2(α), ενώ για το “αλλοιωμένο”



Σχήμα 5.2: (α) Σήμα φωνής και (β) σήμα φωνής με ημιτονοειδή θόρυβο στο πεδίο των συχνοτήτων.

σήμα, θα έχετε το διάγραμμα του Σχήματος 6.2(β). Παρατηρήστε δυο πράγματα:

1. Ο οριζόντιος άξονας είναι πλέον η **συχνότητα** (σε Hz) στα Σχήματα 6.2, και όχι πια ο χρόνος. Πρόκειται για ακριβώς τα ίδια σήματα των Σχημάτων 6.1 μόνο που τα βλέπουμε σε έναν άλλο χώρο, αυτόν των συχνοτήτων. Το γιατί οι γραφικές παραστάσεις έχουν αυτό το σχήμα, και γιατί φαίνεται να υπάρχουν αρνητικές συχνότητες, θα το συζητήσουμε πολύ σύντομα.
2. Προσέξτε επίσης την αλλαγή της κλίμακας στα διαγράμματα αυτά. Στο διάγραμμα 6.2(β) παρατηρούμε ότι υπάρχουν δυο ισχυρές συνιστώσες - προσέξτε την αλλαγή της κλίμακας - εκατέρωθεν του μηδενός, οι οποίες έχουν σημειωθεί με διαφορετικό χρώμα και είναι εμφανές ότι δεν ανήκουν στο Σχήμα 6.2(α). Αυτές οι συνιστώσες έχουν σημειωθεί με ερωτηματικό και ίσως μπορείτε να μαντέψετε ότι βρίσκονται στις θέσεις

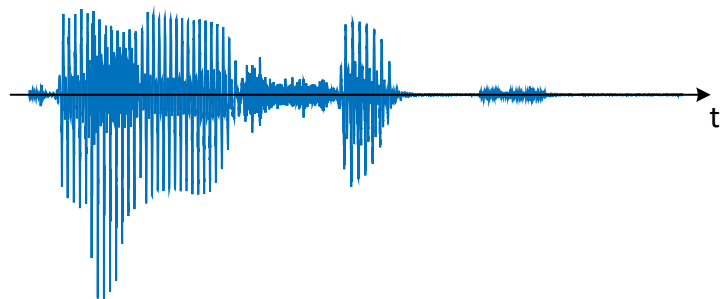
$f = \pm 500$ Hz. Σίγουρα λοιπόν αυτές οι δυο μεγάλες κατακόρυφες “γραμμές” οφείλονται στο ημίτονο που προστεθήκε εκ των υστέρων επάνω στο σήμα της φωνής. Το υπόλοιπο σήμα είναι το ίδιο και έχει σημειωθεί με διακεκομμένες ελλείψεις στα διαγράμματα.

Βλέπουμε λοιπόν τώρα ότι αυτός ο νέος χώρος, ο χώρος των συχνοτήτων, είναι πολύ πιο βοηθητικός στην προσπάθειά μας να ανακτήσουμε το σήμα μας. Η περιγραφή του σήματος σε αυτόν τον χώρο σίγουρα δε μοιάζει καθόλου με την περιγραφή του στο πεδίο του χρόνου, όμως είναι πολύ βολική για το πρόβλημα που συζητάμε. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να μηδενίσουμε τις ισχυρές συνιστώσες που βλέπουμε ότι δεν ανήκουν στο “καθαρό” σήμα φωνής (είναι τιμές ενός σήματος, αν το έχουμε καταγεγραμμένο μπορούμε να τις “πειράξουμε”). Έτσι, θα μπορέσουμε να εξαφανίσουμε το ενοχλητικό σήμα, μια και γνωρίζουμε ότι αντιστοιχεί στον ενοχλητικό “θόρυβο”. Πράγματι, αν μηδενίσουμε αυτή τη συχνότητα, και αντιστρέψουμε τη διαδικασία πίσω στο χρόνο, θα πάρουμε το Σχήμα 6.3!

Ποιός ήταν ο σκοπός όλου αυτού του – υπεραπλουστευμένου, είναι η αλήθεια – παραδείγματος; Ο σκοπός συνοψίζεται στην εξής παρατήρηση: Αν μπορούσαμε να έχουμε ένα μαθηματικό εργαλείο που μας μετατρέπει ένα οποιοδήποτε σήμα στο χώρο του χρόνου σε ένα αντίστοιχο στο χώρο των συχνοτήτων, δηλ. θα μπορούσε να μας γράψει το όποιο σήμα $x(t)$ ως συνάρτηση ημιτόνων κάποιων συγκεκριμένων συχνοτήτων (η οποία μπορεί να παρασταθεί γραφικά όπως στο Σχήμα 6.2, όπως θα δείτε σύντομα), τότε πολύ εύκολα θα μπορούσαμε να κάνουμε πράγματα που στο πεδίο του χρόνου θα ήταν πολύ δύσκολα ή και αδύνατα!

Το παραπάνω παράδειγμα, όπου απλά μηδενίζουμε μια συχνότητα (δηλ. μηδενίζουμε το πλάτος του αντίστοιχου ημιτόνου – η συχνότητα, ως τιμή, δεν μπορεί να “μηδενιστεί”) η οποία είναι ανεπιθύμητη, είναι ένα μόνο από τα εκατοντάδες παραδείγματα, όπου η αλλαγή χώρου μας λύνει τα χέρια. Αυτό το μαθηματικό εργαλείο μας είναι ήδη γνωστό εδώ και πολλά χρόνια και δεν είναι άλλο από την **Ανάλυση Fourier**...⁴

Καθαρό σήμα φωνής



Σχήμα 5.3: Αποθορυβοποιημένο Σήμα Φωνής.

5.3 Απλές αναπαραστάσεις στο χώρο της συχνότητας

Πώς λοιπόν θα μπορούσαμε να έχουμε μια γραφική παρασταση ενός σήματος στο χώρο των συχνοτήτων; Αυτό το ερώτημα ισοδυναμεί με το πώς θα μπορούσαμε να έχουμε μια μαθηματική έκφραση στο χώρο των συχνοτήτων ενός σήματος που μας δίνεται στο πεδίο του χρόνου. Η πιο απλή τέτοια αναπαράσταση φυσικά δεν είναι άλλη από της απλής μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης, συχνότητας f_0 :

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}, \quad A > 0 \quad (5.1)$$

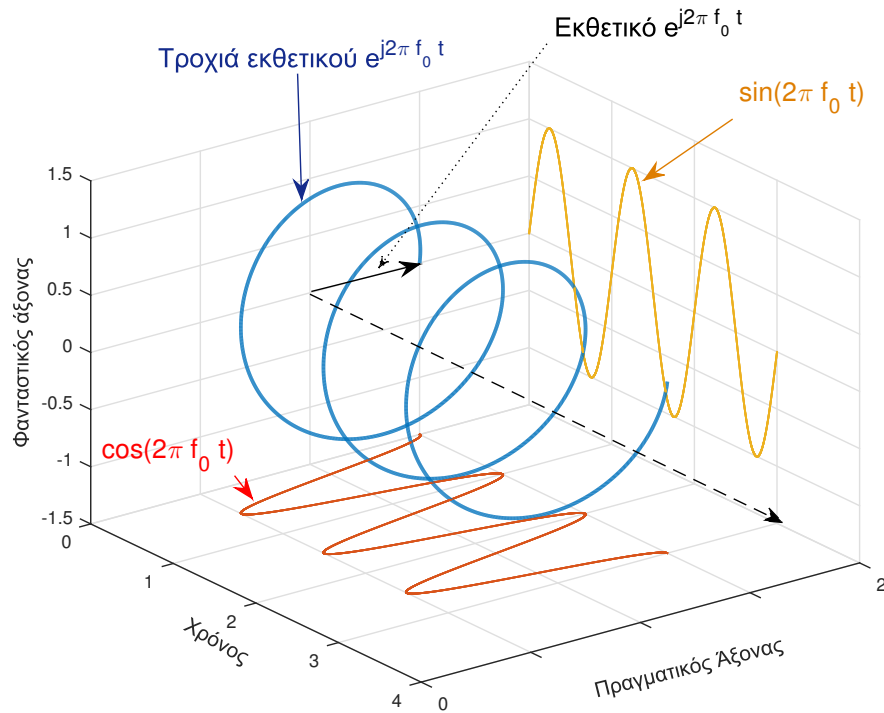
Είναι ένα σήμα που ορίζεται στο χρόνο, με πλάτος A , και με συχνότητα f_0 , η οποία είναι σταθερή και συμβολίζει το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί στο μιγαδικό επίπεδο ανά δευτερόλεπτο. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο *συντελεστής* της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης $e^{j2\pi f_0 t}$ είναι η ποσότητα A , πραγματικός θετικός αριθμός. Έχουμε ξαναδεί αυτό το σήμα - γνωρίζουμε ότι αποτελεί ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο, του οποίου το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ισούνται με

$$\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (5.2)$$

$$\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \sin(2\pi f_0 t) \quad (5.3)$$

και, ως υπενθύμιση, αναπαρίσταται όπως στο Σχήμα 6.4. Μια τέτοια αναπαράσταση, παρ' ό,τι καθόλα αληθής, δεν είναι ιδιαίτερα βολική. Οπότε, γι' αυτό το σήμα, μια διδιάστατη απεικόνιση φαίνεται στο διάγραμμα στο χώρο της συχνότητας στο Σχήμα 6.5. Δυο άξονες, με οριζόντιο τον άξονα των συχνοτήτων και κατακόρυφο τον άξονα

⁴Επειδή ίσως το σκεφτήκατε... αν το ωφέλιμο σήμα $x(t)$ έχει από μόνο του πληροφορία στη συχνότητα ± 500 Hz πριν την πρόσθεση του ημιτόνου, τότε προφανώς αυτή η πληροφορία θα χαθεί με την παραπάνω διαδικασία, και άρα το σήμα που θα πάρουμε στο πεδίο του χρόνου δε θα είναι ακριβώς ίδιο με το αρχικό.



Σχήμα 5.4: Μιγαδική εκθετική συνάρτηση $Ae^{j2\pi f_0 t}$.

του πλάτους, με μια κατακόρυφη γραμμή στη συχνότητα f_0 , ύψους A , η οποία συμβολίζει το συντελεστή της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης συχνότητας f_0 . Αυτή είναι η αναπαράσταση που ζητάμε και ονομάζεται **φάσμα - spectrum!**

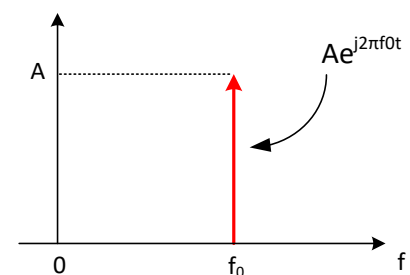
Φυσικά το σήμα που επιλέξαμε είναι το απλούστερο που μπορούσαμε να σκεφτούμε, αλλά δεν παύει να είναι ένα μιγαδικό σήμα! Αν είχαμε ένα πραγματικό σήμα όπως το

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad A > 0 \quad (5.4)$$

τότε πώς θα σχεδιάζαμε αυτή τη γραφική αναπαράσταση; Πολύ απλά, γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Euler ότι

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (5.5)$$

Οι συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων με συχνότητες $\pm f_0$ είναι τώρα $A/2$, και είναι θετικοί και πραγματικοί συντελεστές. Να λοιπόν που τώρα έχουμε ένα άθροισμα από δυο εκθετικά συχνοτήτων $\pm f_0$, οπότε θα έχουμε ένα διάγραμμα με δυο κατακόρυφες γραμμές που φυσικά αναπαριστούν αυτά τα δυο περιστρεφόμενα διανύσματα: μια στη συχνότητα $-f_0$ και μια στη συχνότητα f_0 Hz, με πλάτη $A/2$. Ας δούμε αυτά τα σχήματα μαζί, τόσο στο χρόνο όσο και στη συχνότητα, στο Σχήμα 6.6. Θα θέλαμε φυσικά η πληροφορία που μας δίνεται από τη φασματική αναπαράσταση του σήματος να είναι ισοδύναμη με αυτή του χρόνου. Δηλ. να μπορούμε, βλέποντας αυτή τη γραφική παράσταση, να καταλαβαίνουμε αμέσως για ποιά μαθηματική μορφή σήματος πρόκειται στο πεδίο του χρόνου. Πιο τυπικά, η μαθηματική/γραφική μορφή στο χώρο της συχνότητας να μπορεί να μετατραπεί μοναδικά σε μια μαθηματική μορφή στο πεδίο του χρόνου. Στο παράδειγμά μας, είναι έτσι τα πράγματα; Αρκεί η συχνότητα και το πλάτος που αναγράφονται στη φασματική αναπαράσταση για να περιγράψει πλήρως ένα οποιοδήποτε ημίτονο; Η απάντηση είναι όχι! Διότι ένα ημίτονο στη γενική του μορφή γράφεται ως



Σχήμα 5.5: Απλό παράδειγμα συχνοτικής ανάλυσης.

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi), \quad A > 0, \quad \phi \in (-\pi, \pi] \quad (5.6)$$

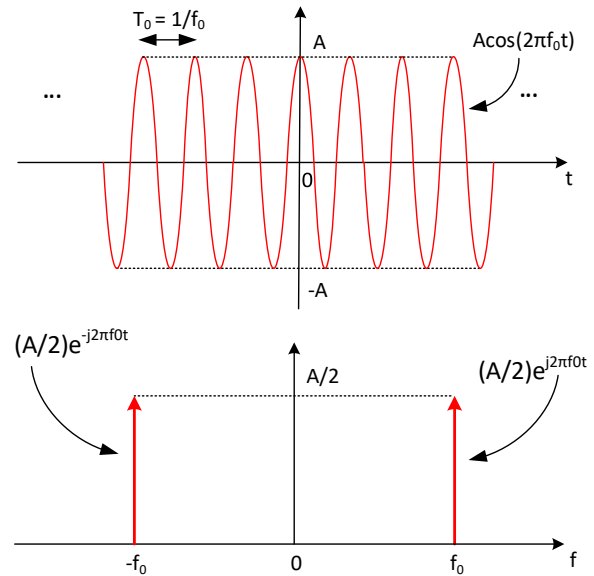
$$= \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\phi} \quad (5.7)$$

$$= \left(\frac{A}{2} e^{j\phi} \right) e^{j2\pi f_0 t} + \left(\frac{A}{2} e^{-j\phi} \right) e^{-j2\pi f_0 t} \quad (5.8)$$

$$= Z_0 e^{j2\pi f_0 t} + Z_0^* e^{-j2\pi f_0 t} \quad (5.9)$$

Παρατηρήστε τώρα ότι εδώ πλέον οι συντελεστές των εκθετικών, Z_0, Z_0^* , είναι μιγαδικοί, και συγκεκριμένα συζυγείς! Αυτοί οι μιγαδικοί συντελεστές ονομάζονται **phasors - φάσορες**, αλλά ο όρος αυτός δε θα χρησιμοποιηθεί συχνά στη συνέχεια.

Αυτό τι σημαίνει; Σημαίνει ότι αν δούμε το μιγαδικό Z_0 ως ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα, τότε αυτός έχει μια αρχική φάση ϕ (δηλ. για $t = 0$ το διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον πραγματικό οριζόντιο άξονα), η οποία δεν μπορεί να παρασταθεί εύκολα στο ίδιο διάγραμμα με το πλάτος $\frac{A}{2}$. Τα ακριβώς ίδια ισχύουν και για το περιστρεφόμενο διάνυσμα Z_0^* . Άρα στη γενικότερη μορφή ενός ημιτόνου, δε μας αρκεί μια γραφική παράσταση που να δείχνει το συντελεστή του εκθετικού, γιατί πολύ συχνά ο συντελεστής είναι μιγαδικός (δυο μεταβλητές, A, ϕ)! Χρειάζεται με κάποιο τρόπο να αναπαραστήσουμε και την (αρχική) φάση ϕ της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης ως συνάρτηση της συχνότητας. Θυμηθείτε ότι η φάση ενός ημιτόνου σχετίζεται με τη μετατόπισή του σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα.



Σχήμα 5.6: Απλό παράδειγμα φασματικής ανάλυσης σήματος στους δυο χώρους.

Όμως πριν απ' όλα χρειάζεται να συμφωνήσουμε σε κάτι: οι συντελεστές Z_i, Z_i^* των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων $e^{\pm j2\pi f_0 t}$ πρέπει να βρίσκονται σε πολική μορφή, δηλ.

$$Z_i = A_i e^{j\phi_i}, \quad \text{με } A_i = |Z_i| > 0, \quad \phi_i \in (-\pi, \pi] \quad (5.10)$$

Οπότε τελικά, η πλήρης περιγραφή ενός ημιτόνου στο χώρο της συχνότητας περιλαμβάνει δυο φάσματα: ένα που αφορά το πλάτος A_i του μιγαδικού συντελεστή Z_i ως συνάρτηση της συχνότητας (αυτό που έχουμε δει ως τώρα) και ένα που αφορά την (αρχική) φάση ϕ_i του μιγαδικού συντελεστή Z_i ως συνάρτηση της συχνότητας. Αυτές οι δυο αναπαραστάσεις λέγονται **φάσμα πλάτους** και **φάσμα φάσης**, αντίστοιχα. Ας δούμε μερικά πιο σύνθετα παραδείγματα.

5.3.1 Περισσότερα παραδείγματα

Παράδειγμα 6.1:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (5.11)$$

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του.

Λύση:

Προτού σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα, ας δούμε πως αναλύεται αυτό το σήμα. Είναι

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (5.12)$$

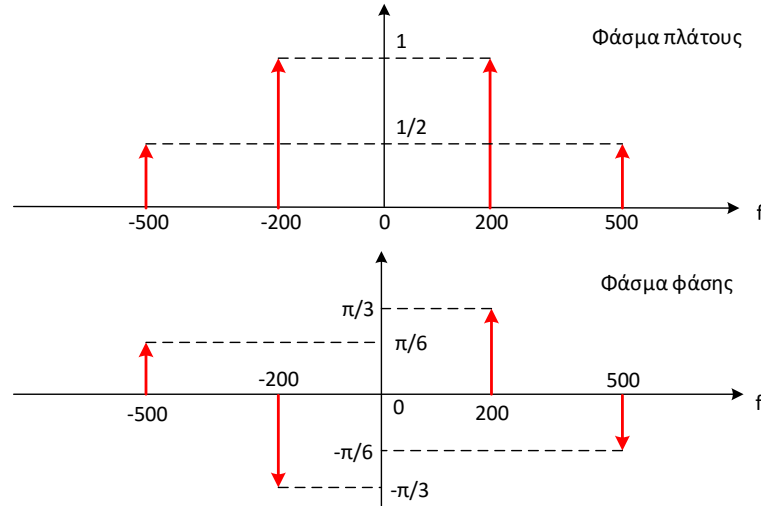
$$= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/6} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/6} \quad (5.13)$$

$$= \left(e^{j\pi/3} \right) e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3} \right) e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/6} \right) e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/6} \right) e^{-j2\pi 500t} \quad (5.14)$$

με τις παρενθέσεις να περικλείουν τους συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων συχνότητας $\pm 200, \pm 500$

Hz. Όπως βλέπετε εδώ, τώρα οι συντελεστές αυτοί είναι μιγαδικοί, $1e^{\pm j\pi/3}$, $\frac{1}{2}e^{\pm j\pi/6}$. Οι συντελεστές αυτοί είναι ήδη στην επιθυμητή πολική μορφή, $A_i e^{j\phi_i}$, με $A > 0$ και $\phi \in (-\pi, \pi]$.

Από αυτήν την αναπαράσταση, μας είναι ξεκάθαρο πώς να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης, καθώς τα A_i θα σχεδιαστούν στο φάσμα πλάτους και τα ϕ_i στο φάσμα φάσης, στις αντίστοιχες συχνότητες φυσικά. Δείτε το Σχήμα 6.7.



Σχήμα 5.7: Παράδειγμα 6.1 ανάλυσης σήματος.

Προφανώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους και φάσης οποιωνδήποτε ημιτόνων ή συνδυασμού τους με απλή εφαρμογή των σχέσεων του Euler. Προσέξτε όμως την περίπτωση που οι συντελεστές δεν καταλήγουν τόσο εύκολα σε πολική μορφή. Δείτε το παρακάτω, πιο γενικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.2:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (5.15)$$

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

Λύση:

Οι σχέσεις του Euler μας δίνουν

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (5.16)$$

$$= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2j} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/6} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/6} \quad (5.17)$$

$$= (e^{j\pi/3}) e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3}) e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2j} e^{-j\pi/6}\right) e^{j2\pi 500t} + \left(-\frac{1}{2j} e^{j\pi/6}\right) e^{-j2\pi 500t} \quad (5.18)$$

Εδώ, οι συντελεστές των εκθετικών συναρτήσεων είναι $1e^{\pm j\pi/3}$ και $\pm \frac{1}{2j} e^{\pm j\pi/6}$. Ενώ με τους συντελεστές $1e^{\pm j\pi/3}$ των δυο πρώτων στη σειρά εκθετικών συναρτήσεων είμαστε ευχαριστημένοι (είναι ήδη σε πολική μορφή), δεν ισχύει το ίδιο για τους δυο επόμενους, τους $\pm \frac{1}{2j} e^{\pm j\pi/6}$. Ο λόγος; Αυτοί οι όροι $\pm \frac{1}{j}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, και όχι πραγματικοί, όπως απαιτείται.

Μπορούμε όμως να τους μετατρέψουμε σε φάση, γιατί από τις σχέσεις του Euler ξέρουμε ότι

$$-\frac{1}{j} = j = \cos(\pi/2) + j \sin(\pi/2) = e^{j\pi/2} \quad (5.19)$$

$$\frac{1}{j} = -j = \cos(-\pi/2) + j \sin(-\pi/2) = e^{-j\pi/2} \quad (5.20)$$

Οπότε θα έχουμε

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \quad (5.21)$$

$$= (e^{j\pi/3})e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3})e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/6}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/6}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (5.22)$$

$$= (e^{j\pi/3})e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3})e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j\pi/6}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j\pi/6}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (5.23)$$

$$= (e^{j\pi/3})e^{j2\pi 200t} + (e^{-j\pi/3})e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j2\pi/3}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2}e^{j2\pi/3}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (5.24)$$

Προσέξτε ότι όλοι οι μιγαδικοί συντελεστές ($e^{\pm j\pi/3}$, $\frac{1}{2}e^{\pm j2\pi/3}$) των εκθετικών συναρτήσεων $e^{\pm j2\pi 200t}$, $e^{\pm j2\pi 500t}$ είναι σε πολική μορφή, δηλ. στη μορφή $A_i e^{j\phi_i}$, με $A > 0$ και $\phi \in (-\pi, \pi]$. Αυτός ήταν άλλωστε και ο σκοπός μας. Τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης! Κάντε το! ☺

Ας δούμε ένα ακόμα πλήρες παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.3:

Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 3 - 2 \cos(2\pi 10t + \pi/9) + \sin(2\pi 15t - \pi/7) \quad (5.25)$$

Ζητείται η περίοδος του, το φάσμα πλάτους, και το φάσμα φάσης του.

Λύση:

Για την περίοδο, γνωρίζουμε ήδη ότι ένα άθροισμα ημιτόνων είναι περιοδικό αν ο λόγος των συχνοτήτων (ή των περιόδων του) είναι λόγος ακεραίων αριθμών. Προφανώς ο λόγος των αριθμών 10 και 15 (συχνότητες σε Hz) είναι λόγος ακεραίων, άρα το σήμα είναι περιοδικό. Η θεμελιώδης του συχνότητα είναι

$$f_0 = \text{M.K.}\Delta\{10, 15\} = 5 \text{ Hz} \quad (5.26)$$

και άρα η περίοδος του είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.2$ δευτερόλεπτα. Ας αναλύσουμε τώρα το σήμα μας σε μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις, ώστε να σχεδιάσουμε τα φάσματα. Θα είναι

$$x(t) = 3 - 2 \cos(2\pi 10t + \pi/9) + \sin(2\pi 15t - \pi/7) \quad (5.27)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.28)$$

Εδώ πρέπει λοιπόν, αφού ενός να χειριστούμε τους όρους $\pm 1/j$ όπως κάναμε και πριν, αφού ετέρου να δούμε πως θα χειριστούμε τους συντελεστές των δυο πρώτων εκθετικών συναρτήσεων συχνότητας ± 10 Hz. Κατ'αρχάς, ας μετατρέψουμε τα $\pm 1/j$ κατάλληλα, στους δυο τελευταίους όρους, αφήνοντας ήσυχους προς το παρόν τους πρώτους. Έχουμε:

$$x(t) = 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.29)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.30)$$

$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.31)$$

Πλέον τα δυο τελευταία εκθετικά συχνότητας ± 15 Hz έχουν μιγαδικούς συντελεστές γραμμένους σε πολική μορφή. Ας δούμε τώρα τα δυο πρώτα εκθετικά, συχνότητας ± 10 Hz, που έχουν αρνητικό πρόσημο.

Γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Euler ότι

$$e^{j\pi} = -1 \quad (5.32)$$

$$e^{-j\pi} = -1 \quad (5.33)$$

Ποιόν από τους δυο όρους θα διαλέξουμε; Η απάντηση είναι “και τους δυο!” Απλά θα προσέξουμε η επιλογή που θα κάνουμε να μας δίνει συνολική φάση που θα ανήκει στο $(-\pi, \pi]$! Αν δεν ανήκει εκεί, αλλάζουμε τις επιλογές

μας! Ας το δούμε.

Επιλέγουμε να αντικαταστήσουμε το -1 της εκθετικής συνάρτησης συχνότητας 10 Hz με το $e^{-j\pi}$, και το -1 της εκθετικής συνάρτησης συχνότητας -10 Hz με το $e^{j\pi}$. Άρα θα έχουμε:

$$x(t) = 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.34)$$

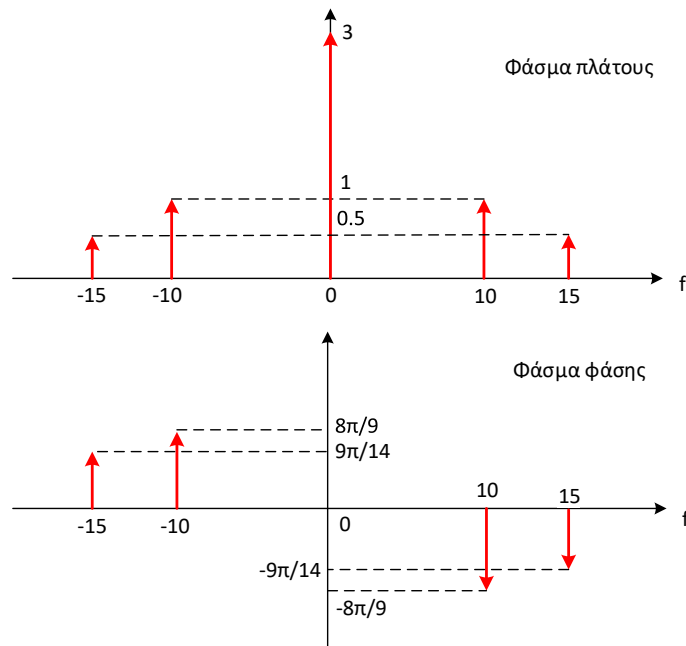
$$= 3 + (e^{j\pi/9}e^{-j\pi})e^{j2\pi 10t} + (e^{-j\pi/9}e^{j\pi})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.35)$$

$$= 3 + (e^{-j8\pi/9})e^{j2\pi 10t} + (e^{j8\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (5.36)$$

Βλέπετε ότι με αυτήν την αντιστοίχιση, οι φάσεις που προέκυψαν στους μιγαδικούς συντελεστές των δυο πρώτων εκθετικών συχνότητας $\pm 10\text{ Hz}$ είναι $\pm 8\pi/9$, που φυσικά ανήκουν στο $(-\pi, \pi]$, ενώ τα μέτρα τους είναι μοναδιαία (πραγματικά και θετικά). Αν κάναμε ανάποδα τις αντιστοιχίες των -1 με τις σχέσεις του Euler, τότε θα προέκυπταν φάσεις με τιμές $\pm 10\pi/9$, που ασφαλώς χρειάζονται περαιτέρω μετατροπή για να ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Τέλος, η σταθερά $c = 3$ πρέπει να εκφραστεί συχνωτικά. Είναι ένας απλός πραγματικός αριθμός, άρα που θα τον συμπεριλάβουμε; Προφανώς στο φάσμα πλάτους. Σε ποιά συχνότητα; Η απάντηση είναι τελικά απλή, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το $c = 3$ γράφεται ως $3e^{j0t}$. Άρα το $c = 3$ είναι το πλάτος της μηδενικής συχνότητας, $f = 0$. Άρα θα το βάλουμε στο φάσμα πλάτους, στη συμβολή των αξόνων, δηλ. στη θέση $f = 0^5$!

Πλέον όλες οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις έχουν μιγαδικούς συντελεστές που είναι γραμμένοι σε πολική μορφή. Εύκολα ξεχωρίζουμε τα πλάτη από τις φάσεις, οπότε μπορούμε να σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα. Δείτε το Σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 6.3.

Σε αυτό το παράδειγμα, παρατηρήστε το εξής: το φάσμα πλάτους έχει *άρτια* συμμετρία, ενώ το φάσμα φάσης έχει *περιττή* συμμετρία! Αυτό ισχύει, όπως θα δούμε και παρακάτω, για *κάθε* πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ που αναλύουμε, και προέρχεται από το γεγονός ότι οι μιγαδικοί συντελεστές των θετικών συχνοτήτων που βρήκαμε είναι συζυγείς με τους αντίστοιχους των αρνητικών συχνοτήτων. Είναι ένας καλός τρόπος να ελέγχετε τα αποτελέσματά σας.

Μπορούμε λοιπόν να συνοψίσουμε τα παραπάνω ως ακολούθως:

⁵Τι θα συνέβαινε αν αντί για $c = 3$ ήταν $c = -3$ ο σταθερός όρος; Τότε θα τον γράφαμε ως $c = -3 = 3e^{j\pi}e^{j0t}$, και το πλάτος $A = 3$ θα άνηκε στο φάσμα πλάτους, ενώ η φάση π στο φάσμα φάσης, στην ίδια θέση, $f = 0$!

Σχεδίαση Φασμάτων Εκθετικών Αναπαραστάσεων

Συνοψίζοντας, για το σχεδιασμό φάσματος πλάτους και φάσης σε ένα άθροισμα εκθετικών (ή ημιτόνων που τα μετατρέπουμε σε εκθετικά), φροντίζουμε να μετατρέψουμε όλους τους συντελεστές των εκθετικών σε πολική μορφή, δηλ. με θετικούς πραγματικούς αριθμούς ως μέτρο, και προσέχοντας η φάση που προκύπτει να ανήκει στο $(-\pi, \pi]$. Αυτό γίνεται μετατρέποντας τα αρνητικά πρόσημα συντελεστών σε φάση με τη σχέση $e^{\pm j\pi} = -1$, καθώς και τους όρους $\pm 1/j = \mp j$ σε $e^{\pm k\pi/2} = \pm j$.

Δεν καταλήγουν, προφανώς, όμως όλοι οι συνδυασμοί ημιτόνων σε περιοδικό σήμα. Για παράδειγμα, το παραπάνω σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = \text{M.K.}\Delta\{200, 500\} = 100 \text{ Hz}$, και άρα περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.01$ δευτερόλεπτα. Όμως, το σήμα $y(t) = \cos(2\pi 50t) - \sin(5t - \pi/4)$ ΔΕΝ είναι περιοδικό, γιατί δεν υπάρχει ο Μ.Κ.Δ των δυο συχνοτήτων (ή αλλιώς, ο λόγος των συχνοτήτων τους δεν είναι λόγος ακεραίων). Εμείς όμως ενδιαφερομαστε ιδιαίτερα για τα περιοδικά σήματα, σε πρώτη φάση. Όταν το σήμα που μας δίνεται είναι σε μορφή αθροίσματος ή γινομένου ημιτόνων, τότε μπορούμε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και τύπων του Euler, να το γράψουμε σε μορφή αθροίσματος ημιτόνων ή εκθετικών και να σχεδιάσουμε φάσματα πλάτους και φάσης σημάτων, όπως παραπάνω, άσχετα αν είναι το σήμα περιοδικό ή όχι.

Ας δούμε δυο ακόμα παραδείγματα, όπου το σήμα προς ανάλυση δεν είναι σε μορφή αθροίσματος ημιτόνων.

Παράδειγμα 6.4:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \sin^2(5\pi t) \cos(22\pi t) \quad (5.37)$$

Βρείτε την περίοδο T_0 του σήματος.

Λύση:

Για να βρούμε την περίοδο, θα πρέπει να γράψουμε το $x(t)$ ως άθροισμα ημιτόνων ή/και συνημιτόνων. Είναι:

$$x(t) = \sin^2(5\pi t) \cos(22\pi t) = \left(\frac{1}{2j} e^{j5\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j5\pi t} \right)^2 \left(\frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \quad (5.38)$$

$$= \left(\frac{1}{4j^2} e^{j10\pi t} - 2 \frac{1}{2j} \frac{1}{2j} e^{j5\pi t} e^{-j5\pi t} + \frac{1}{4j^2} e^{-j10\pi t} \right) \left(\frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \quad (5.39)$$

$$= \left(-\frac{1}{4} e^{j10\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-j10\pi t} \right) \left(\frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \quad (5.40)$$

$$= -\frac{1}{8} e^{j32\pi t} - \frac{1}{8} e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4} e^{j22\pi t} + \frac{1}{4} e^{-j22\pi t} - \frac{1}{8} e^{-j32\pi t} - \frac{1}{8} e^{j12\pi t} \quad (5.41)$$

$$= \frac{1}{8} e^{j\pi} e^{j32\pi t} + \frac{1}{8} e^{-j\pi} e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4} e^{j22\pi t} + \frac{1}{4} e^{-j22\pi t} + \frac{1}{8} e^{-j\pi} e^{-j32\pi t} + \frac{1}{8} e^{j\pi} e^{j12\pi t} \quad (5.42)$$

$$= \frac{1}{4} \cos(2\pi 6t + \pi) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 11t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi 16t + \pi) \quad (5.43)$$

Προφανώς, η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι: $f_0 = \text{M.K.}\Delta(6, 11, 16) = 1 \text{ Hz}$. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1 \text{ s}$. ■

Παράδειγμα 6.5:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα

$$x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)} \quad (5.44)$$

(α') Ποιά είναι η περίοδος του σήματος;

(β') Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης του σήματος.

Λύση:

Αναπτύσσουμε το σήμα μας σύμφωνα με τους τύπους του Euler:

$$x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)} = \frac{\frac{1}{2j}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t})}{\frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})} \quad (5.45)$$

$$= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) \quad (5.46)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις ταυτότητες:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad (5.47)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad (5.48)$$

για τα εκθετικά του αριθμητή. Θα είναι λοιπόν:

$$x(t) = \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) = \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}[(e^{jt})^2 - (e^{-jt})^2 + (e^{jt})^3 - (e^{-jt})^3] \quad (5.49)$$

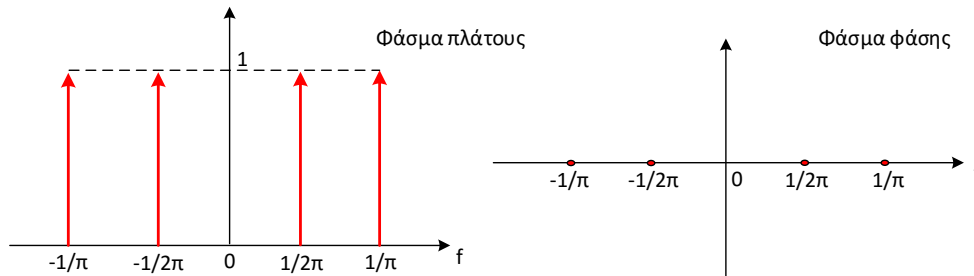
$$= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}[(e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt}) + (e^{jt} - e^{-jt})(e^{j2t} + 1 + e^{-j2t})] \quad (5.50)$$

$$= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t}) = e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t} \quad (5.51)$$

$$= 1 + e^{jt} + e^{-jt} + e^{j2t} + e^{-j2t} = 1 + 2\cos(t) + 2\cos(2t) \quad (5.52)$$

(α') Με χρήση της κυκλικής συχνότητας $\omega = 2\pi f$, που βολεύει περισσότερο στο παράδειγμα αυτό, η περίοδος του σήματος θα είναι $T_0 = \text{Μ.Κ.Δ.}\{2\pi, 4\pi\} = 2\pi$ s.

(β') Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 6.9. Παρατηρήστε ότι το φάσμα φάσης είναι μηδενικό για κάθε τιμή συχνότητας.



Σχήμα 5.9: Φάσμα Πλάτους και Φάσης Παραδείγματος 6.5.

■

5.3.2 Μόνο ημίτονα;

Όμως τα περιοδικά σήματα, όπως αυτό της Σχέσης (6.11), έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα όταν τα αναπτύσσουμε σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Αυτά τα εκθετικά έχουν συχνότητες που είναι ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας του σήματος! Παρατηρήστε ξανά ότι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος της Σχέσης (6.11) είναι 100 Hz. Οι συχνότητες του σήματος είναι ακέραιες πολλαπλάσιες του 100, δηλ. $\pm 200, \pm 500$. Αυτό ακριβώς αντικατοπτρίζεται και στο φάσμα πλάτους και φάσης.

Τι γίνεται όμως αν το περιοδικό σήμα που μας δίνεται δεν είναι σε μορφή αθροίσματος/γινομένου/πηλίκου ημιτόνων; Αν είναι ένας περιοδικός τριγωνικός ή τετραγωνικός παλμός⁶, τότε ποιό είναι το συχνοτικό του περιεχόμενο; Άρα φυσιολογικά προκύπτει το ερώτημα αν μπορούμε να εκφράσουμε ένα πραγματικό περιοδικό σήμα ως άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, δηλ. ημιτόνων (μέσω

⁶ Σήματα που εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη στις επιστήμες Η/Υ!

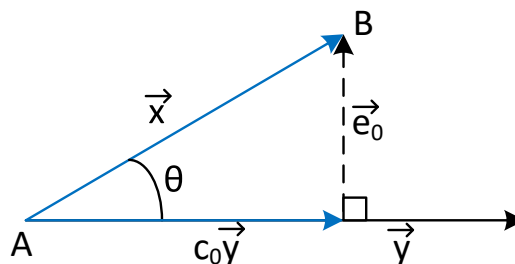
των σχέσεων Euler), με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους. Αν μπορούμε, τότε υπό ποιές συνθήκες και με ποιό σφάλμα (αν υπάρχει);. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται από τη θεωρία της Ανάλυσης σε Σειρές Fourier! Πριν φτάσουμε όμως εκεί, θα ήταν πολύ χρήσιμο για τη διαίσθησή μας και την ομαλή μετάβαση και κατανόηση των Σειρών Fourier, να μελετήσουμε το γενικότερο πρόβλημα της προσέγγισης ενός οποιουδήποτε σήματος από άλλα σήματα.

5.4 Προσέγγιση Σημάτων από Σήματα

Στις εφαρμοσμένες επιστήμες, η προσέγγιση πολύπλοκων σημάτων από άλλα απλούστερα είναι πολύ συχνό φαινόμενο. Μάλιστα, μια τέτοια προσέγγιση κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, όταν εκφράσαμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ ως συνεχές άθροισμα μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα. Η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα θεμελιώδες σήμα στη μελέτη των συστημάτων, όπως ήδη είδαμε. Στη μελέτη περιοδικών σημάτων, το αντίστοιχο θεμελιώδες σήμα είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα, $e^{j2\pi f_0 t}$, και αυτό φάνηκε ξεκάθαρα στην προηγούμενη παράγραφο, στα απλά παραδείγματα που παρουσιάστηκαν. Η ανάλυση που ακολουθεί σε αυτήν την παράγραφο ξεκινά με έννοιες οι οποίες είναι πιο οικείες στον αναγνώστη, όπως η έννοια των διανυσμάτων. Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε τις έννοιες στο χώρο των σημάτων, ώστε να καταλήξουμε στην απάντηση του ερωτήματος που τέθηκε νωρίτερα, το οποίο επαναλαμβάνουμε εδώ: μπορεί να εκφραστεί ένα οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, τα οποία έχουν συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους;

5.4.1 Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

Γνωρίζουμε ότι ένα διάνυσμα στο επίπεδο είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, με αρχή ένα σημείο A και πέρας ένα σημείο B , το οποίο συμβολίζουμε με $\vec{x}$, όπως στο Σχήμα 6.10. Θεωρώντας ένα άλλο διάνυσμα

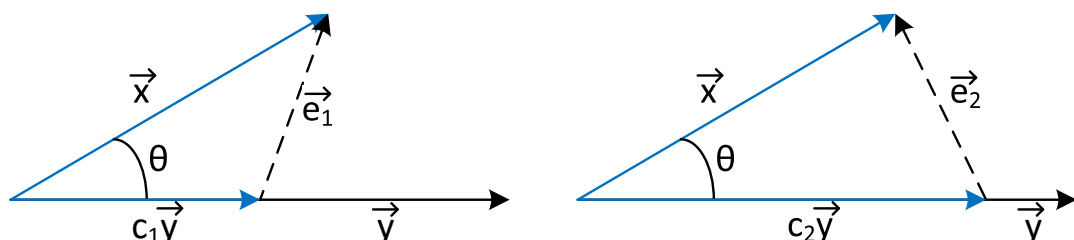


Σχήμα 5.10: Διάνυσμα $\vec{x}$ και προβολή του, $c_0 \vec{y}$, επάνω σε διάνυσμα $\vec{y}$.

$\vec{y}$, το οποίο σχηματίζει γωνία θ με το διάνυσμα $\vec{x}$, μπορούμε να φέρουμε την κάθετο από το σημείο B επάνω στο διάνυσμα $\vec{y}$. Το διάνυσμα $c_0 \vec{y}$ που δημιουργείται ονομάζεται *προβολή* του διανύσματος $\vec{x}$ επάνω στο διάνυσμα $\vec{y}$, με c_0 πραγματική σταθερά. Μπορούμε τότε να εκφράσουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως

$$\vec{x} = c_0 \vec{y} + \vec{e}_0 \quad (5.53)$$

με $\vec{e}_0$ όπως στο Σχήμα 6.10. Θα ήταν βολικό να θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{e}_0$ ως το διάνυσμα *σφάλματος* μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$, γιατί αποτελεί το διάνυσμα που πρέπει να προστεθεί στο διάνυσμα $c_0 \vec{y}$ ώστε αυτό να γίνει ίσο με το διάνυσμα $\vec{x}$. Εύκολα μπορεί κάποιος να σκεφτεί διάφορα διανύσματα σφάλματος $\vec{e}_i$, όπως αυτά που φαίνονται στο Σχήμα 6.11. Οι αντίστοιχες εκφράσεις του διανύσματος $\vec{x}$ συναρτήσει αυτών των διανυσμάτων σφάλματος



Σχήμα 5.11: Διάφορα διανύσματα σφάλματος $\vec{e}_i$.

και του διανύσματος $\vec{y}$ είναι

$$\vec{x} = c_1 \vec{y} + \vec{e}_1 \quad (5.54)$$

$$\vec{x} = c_2 \vec{y} + \vec{e}_2 \quad (5.55)$$

και τα αντίστοιχα διανύσματα σφάλματος είναι

$$\vec{e}_0 = \vec{x} - c_0 \vec{y} \quad (5.56)$$

$$\vec{e}_1 = \vec{x} - c_1 \vec{y} \quad (5.57)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{x} - c_2 \vec{y} \quad (5.58)$$

βάζοντας μαζί και το διάνυσμα σφάλματος e_0 , της αρχικής μας προσέγγισης. Αν θέλαμε να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως προσέγγιση του διανύσματος $\vec{y}$, δηλ.

$$\vec{x} = c_i \vec{y} \approx \vec{y} \quad (5.59)$$

τότε ποιά από τις (συνολικά άπειρες) εκφράσεις του διανύσματος $\vec{x}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{y}$ και $\vec{e}_i$ είναι η “καλύτερη”; Αν και θα μπορούσε κανείς να θέσει διάφορα κριτήρια για την εύρεση της καλύτερης έκφρασης, η πιο διαισθητικά προφανής είναι αυτή που σχετίζεται με το μήκος του διανύσματος σφάλματος, $\vec{e}_i$: όσο μικρότερο το μήκος του διανύσματος σφάλματος, τόσο “καλύτερη” η προσέγγιση του διανύσματος $\vec{y}$ από το διάνυσμα $\vec{x}$. Αυτή η προσέγγιση ονομάζεται *προσέγγιση ελάχιστου σφάλματος*. Σε ποιά περίπτωση λοιπόν είναι το μήκος $|\vec{e}_i|$ ελάχιστο; Η διαίσθησή μας ξανά δεν λανθεύει: όταν το διάνυσμα $\vec{e}_i$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$, δηλ. όπως το διάνυσμα $\vec{e}_0$ στο Σχήμα 6.10. Για να ολοκληρώσουμε την εύρεση της προσέγγισης, αρκεί να βρούμε τη σταθερά c_0 . Από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζουν τα διανύσματα αυτά, έχουμε

$$c_0 |\vec{y}| = |\vec{x}| \cos(\theta) \implies c_0 |\vec{y}|^2 = |\vec{y}| |\vec{x}| \cos(\theta) = \vec{x} \cdot \vec{y} \implies c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (5.60)$$

με $\vec{x} \cdot \vec{y}$ το **εσωτερικό γινόμενο** μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$.

Η παραπάνω σχέση εγείρει μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις.

- Αν το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$, δηλ. $\vec{x} \perp \vec{y}$, τότε η Σχέση (6.60) δίνει $c = 0$. Άρα καταλαβαίνουμε ότι δεν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα επάνω στο $\vec{y}$ που να γράφεται ως προσέγγιση του $\vec{x}$ με την έννοια της προβολής.
- Η σχέση $\vec{x} \perp \vec{y} \iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ ονομάζει τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ ως **ορθογώνια** μεταξύ τους.

Άρα λοιπόν μπορέσαμε και εκφράσαμε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{y}$ ως

$$\vec{x} \approx c \vec{y} \quad (5.61)$$

με

$$c = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (5.62)$$

δηλ. προσεγγίσαμε το διάνυσμα $\vec{x}$ με όρους - και συγκεκριμένα έναν όρο - του διανύσματος $\vec{y}$.

5.4.2 Προβολή Σήματος σε Σήμα

Ας επεκτείνουμε τις έννοιες που μόλις συζητήσαμε από το χώρο των διανυσμάτων στο χώρο των σημάτων. Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε ένα σήμα $x(t)$ με όρους ενός άλλου σήματος $y(t)$, τα οποία ορίζονται στο διάστημα $[t_1, t_2]$. Με άλλα λόγια, θέλουμε να βρούμε τη σταθερά c για την οποία η προσέγγιση

$$x(t) \approx cy(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (5.63)$$

είναι η “καλύτερη” - ας ονομάζουμε αυτήν την προσέγγιση ως *βέλτιση* στο εξής. Ας ορίσουμε τη *συνάρτηση σφάλματος* ως

$$e(t) = \begin{cases} x(t) - cy(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.64)$$

Θα θέλαμε αυτή η συνάρτηση σφάλματος να είναι κατά κάποια έννοια “ελάχιστη”, ώστε η προσέγγισή μας να είναι βέλτιστη. Μια πολύ δημοφιλής μέθοδος εύρεσης της βέλτιστης προσέγγισης είναι μέσω ελαχιστοποίησης της

ενέργειας της συνάρτησης σφάλματος, η οποία ορίζεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt \quad (5.65)$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε τη σταθερά c για την οποία η τιμή της E_e είναι ελάχιστη στο διάστημα $[t_1, t_2]$, δεδομένων των $x(t), y(t)$. Θέτοντας την παράγωγο της E_e ως προς c ίση με μηδέν, έχουμε:

$$\frac{dE_e}{dc} = 0 \quad (5.66)$$

$$\frac{d}{dc} \left(\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt \right) = 0 \quad (5.67)$$

$$\frac{d}{dc} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - \frac{d}{dc} \int_{t_1}^{t_2} 2cx(t)y(t) dt + \frac{d}{dc} c^2 \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt = 0 \quad (5.68)$$

$$0 - 2 \frac{d}{dc} c \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt + \frac{d}{dc} c^2 \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt}_{E_y} = 0 \quad (5.69)$$

$$2cE_y = 2 \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \quad (5.70)$$

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \quad (5.71)$$

όπου E_y η ενέργεια του σήματος $y(t)$. Άρα η σταθερά βέλτιστης προσέγγισης c δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \quad (5.72)$$

Ας συγκρίνουμε την παραπάνω σχέση με την αντίστοιχη που καταλήξαμε για τα διανύσματα:

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \quad , \quad c = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (5.73)$$

Είναι εμφανές ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$ “μεταφράζεται” σε εμβαδό του γινομένου $x(t)y(t)$ στο χώρο των σημάτων! Ας ορίσουμε λοιπόν το **εσωτερικό γινόμενο** δυο σημάτων $x(t), y(t)$ ως

$$\langle x, y \rangle = \int_A x(t)y(t) dt \quad (5.74)$$

με A το πεδίο ορισμού των δυο σημάτων.

Συνολικά λοιπόν, δείξαμε ότι ένα σήμα $x(t)$ μπορεί να προσεγγιστεί βέλτιστα, υπό την έννοια της **ελάχιστης ενέργειας σφάλματος**, από ένα σήμα $y(t)$ ως

$$x(t) \approx cy(t), \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.75)$$

με

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt = \frac{1}{E_y} \langle x, y \rangle \quad (5.76)$$

Παρατηρήστε ότι κι εδώ $\langle x, y \rangle = 0$, τότε τα σήματα ονομάζονται **ορθογώνια** μεταξύ τους, και στην παραπάνω βέλτιστη προσέγγιση ισχύει ότι $\langle e, y \rangle = 0$!

Δυο παραδείγματα θα κάνουν την παραπάνω συζήτηση πιο πρακτική και ξεκάθαρη.

Παράδειγμα 6.6:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} t, & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.77)$$

Θέλουμε να το προσεγγίσουμε μέσω του σήματος $y(t) = \sin(t)$ στο $-\pi \leq t \leq \pi$.

(α') Δείξτε ότι η βέλτιστη, με την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, προσέγγιση του $x(t)$ από το $y(t)$ είναι η

$$x(t) \approx cy(t) = 2 \sin(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad (5.78)$$

(β') Σχεδιάστε το σήμα $cy(t) = 2 \sin(t)$ στον ίδιο άξονα με το $x(t)$.

(γ') Το σφάλμα της παραπάνω προσέγγισης δίνεται από τη σχέση

$$e(t) = x(t) - cy(t) = t - 2 \sin(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad (5.79)$$

Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια σφάλματος $E_e = \int_{-\pi}^{\pi} e^2(t) dt$.

(δ') Δείξτε ότι $\langle e, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e(t)y(t) dt = 0$, δηλ. ότι τα σήματα $e(t)$, $y(t)$ είναι ορθογώνια.

Λύση:

(α') Είναι

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t) dt = \frac{1}{E_y} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt \quad (5.80)$$

με

$$E_y = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \quad (5.81)$$

$$= \frac{1}{2} t \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi - \frac{1}{4} \cdot 0 \quad (5.82)$$

$$= \pi \quad (5.83)$$

Άρα

$$c = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt = \frac{1}{\pi} \left(\sin t \Big|_{-\pi}^{\pi} - t \cos t \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \quad (5.84)$$

$$= \frac{1}{\pi} (0 - \pi \cos \pi + (-\pi) \cos(-\pi)) = \frac{1}{\pi} (\pi + \pi) = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \iff c = 2 \quad (5.85)$$

Άρα η βέλτιστη προσέγγιση είναι $x(t) \approx cy(t) = 2 \sin t$, $-\pi \leq t \leq \pi$

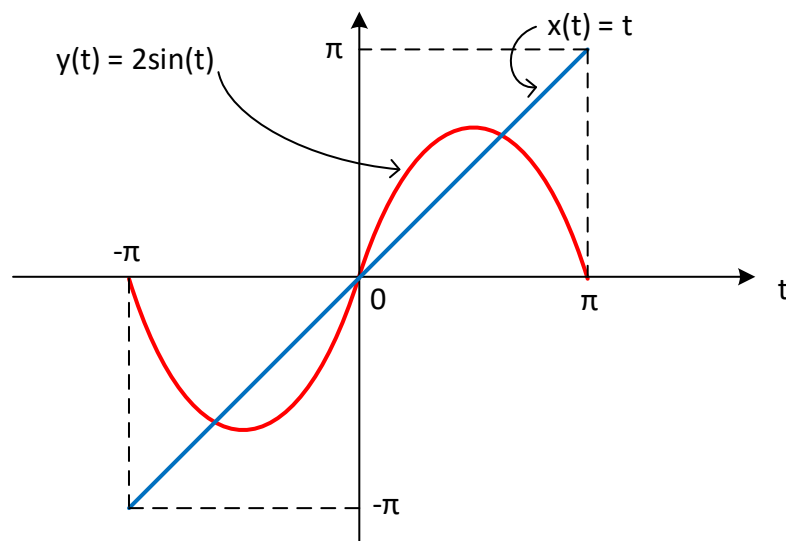
(β') Το $x(t)$ και η βέλτιστη προσέγγισή του, $2 \sin(t)$, φαίνεται στο Σχήμα 6.12.

(γ') Έχουμε

$$E_e = \int_{-\pi}^{\pi} e^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} (t - 2 \sin t)^2 dt \quad (5.86)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 - 4t \sin t + 4 \sin^2 t) dt \quad (5.87)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - 4 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt}_{cE_x=2\pi} + 4 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt}_{E_x=\pi} \quad (5.88)$$



Σχήμα 5.12: Παράδειγμα 4.6: προσέγγιση σήματος από άλλο.

$$= \frac{t^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} - 8\pi + 4\pi = \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right) - 4\pi \quad (5.89)$$

$$= \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi \quad (5.90)$$

(δ') Είναι

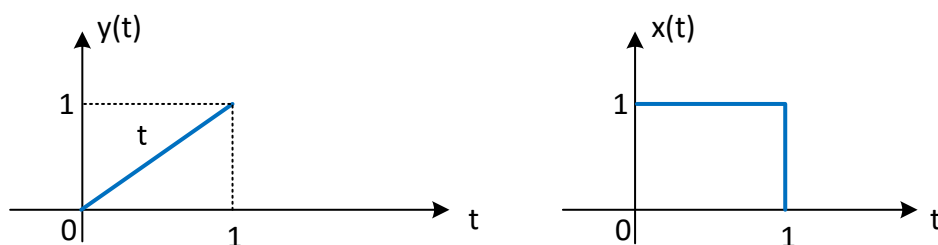
$$\langle e, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e(t)y(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} (t - 2\sin t) \sin t dt \quad (5.91)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt - \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin^2 t dt = 0 \quad (5.92)$$

άρα τα $e(t), y(t)$ είναι ορθογώνια.

Παράδειγμα 6.7:

Έστω τα σήματα του Σχήματος 6.13.



Σχήμα 5.13: Σχήματα Παραδείγματος 4.7.

(α') Βρείτε τη βέλτιστη, με την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, προσέγγιση του $y(t)$ από το $x(t)$.

(β') Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια σφάλματος $E_{e_1} = \int_0^1 e_1^2(t)dt$ για την παραπάνω προσέγγιση.

(γ') Βρείτε τη βέλτιστη, με την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, προσέγγιση του $x(t)$ από το $y(t)$.

(δ') Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια σφάλματος $E_{e_2} = \int_0^1 e_2^2(t)dt$ για την παραπάνω προσέγγιση.

Λύση:

(α') Θέλουμε να βρούμε τη σταθερά c_1 τέτοια ώστε

$$y(t) \approx c_1 x(t) \quad (5.93)$$

Η σταθερά c_1 δίνεται ως

$$c_1 = \frac{1}{E_x} \int_0^1 y(t)x(t)dt = \int_0^1 tdt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad (5.94)$$

αφού

$$E_x = \int_0^1 x^2(t)dt = \int_0^1 dt = t \Big|_0^1 = 1 \quad (5.95)$$

Οπότε το σήμα $y(t)$ γράφεται ως $y(t) \approx \frac{1}{2}x(t)$, $t \in [0, 1]$.

(β') Η συνάρτηση σφάλματος είναι

$$e_1(t) = t - \frac{1}{2}, \quad t \in [0, 1] \quad (5.96)$$

και η ελάχιστη ενέργεια σφάλματος είναι

$$E_{e_1} = \int_0^1 e_1^2(t)dt = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}t \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12} \quad (5.97)$$

(γ') Θέλουμε να βρούμε τη σταθερά c_2 τέτοια ώστε

$$x(t) \approx c_2 y(t) \quad (5.98)$$

Η σταθερά c_2 δίνεται ως

$$c_2 = \frac{1}{E_y} \int_0^1 x(t)y(t)dt = 3 \int_0^1 tdt = 3 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \quad (5.99)$$

αφού

$$E_y = \int_0^1 y^2(t)dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad (5.100)$$

Οπότε το σήμα $x(t)$ γράφεται ως $x(t) \approx \frac{3}{2}y(t)$, $t \in [0, 1]$.

(δ') Η συνάρτηση σφάλματος είναι

$$e_2(t) = 1 - \frac{3}{2}t, \quad t \in [0, 1] \quad (5.101)$$

και η ελάχιστη ενέργεια σφάλματος είναι

$$E_{e_2} = \int_0^1 e_2^2(t)dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}t \right)^2 dt = \frac{1}{4} \quad (5.102)$$

5.4.2.1 Επέκταση σε Μιγαδικά Σήματα

Παρ' όλο που η παραπάνω ανάλυση είναι πολύ ενδιαφέρουσα, ο σκοπός μας είναι να ελέγξουμε αν μπορούμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων της μορφής $e^{j2\pi k f_0 t}$, τα οποία - όπως βλέπετε - έχουν συχνότητες ακεραίες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους. Ας επεκτείνουμε λοιπόν την παραπάνω συζήτηση στα μιγαδικά σήματα - η ακριβώς όμοια ανάλυση με πραγματικά σήματα αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Έστω ότι τα σήματα $x(t), y(t)$ είναι μιγαδικά, και ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε το $x(t)$ με χρήση του $y(t)$ στο διάστημα $[t_1, t_2]$. Ορίζοντας τη συνάρτηση σφάλματος $e(t)$ ως

$$e(t) = x(t) - cy(t) \quad (5.103)$$

μπορούμε να αναζητήσουμε τη σταθερά c ελαχιστοποιώντας την ενέργειά της συνάρτησης σφάλματος, η οποία δίνεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - cy(t)|^2 dt \quad (5.104)$$

Έχουμε

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - cy(t)|^2 dt = 0 \quad (5.105)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))(x(t) - cy(t))^* dt = 0 \quad (5.106)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))(x^*(t) - c^*y^*(t)) dt = 0 \quad (5.107)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (x(t)x^*(t) - c^*x(t)y^*(t) - cx^*(t)y(t) + |c|^2y(t)y^*(t)) dt = 0 \quad (5.108)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (|x(t)|^2 - c^*x(t)y^*(t) - cx^*(t)y(t) + |c|^2|y(t)|^2) dt = 0 \quad (5.109)$$

Η παραπάνω συνάρτηση ως προς c δεν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο της (λόγω της παρουσίας των όρων $c^*, |c|^2$). Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της παραγώγου μιγαδικής συνάρτησης με χρήση των παραγώγων Wirtinger, των οποίων ο ορισμός είναι εκτός σκοπού αυτού του συγγράμματος - θα τις χρησιμοποιήσουμε μόνο για να βρούμε το αποτέλεσμα που ζητάμε. Σύμφωνα με τις παραγώγους Wirtinger, ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial c} c^* = 0 \text{ και } \frac{\partial}{\partial c} cc^* = c^* \quad (5.110)$$

με το συμβολισμό $\partial/\partial c$ να αναφέρεται στη μερική γραμμική παραγωγή. Θέτοντας λοιπόν ξανά την (μερική) παράγωγο της E_e ως προς c ίση με το μηδέν, έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial c} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \frac{\partial}{\partial c} \int_{t_1}^{t_2} c^* x(t)y^*(t) dt - \frac{\partial}{\partial c} \int_{t_1}^{t_2} cx^*(t)y(t) dt + \frac{\partial}{\partial c} |c|^2 \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt = 0 \quad (5.111)$$

$$0 - \int_{t_1}^{t_2} x^*(t)y(t) dt + c^* \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt = 0 \quad (5.112)$$

Γνωρίζοντας ότι

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt \quad (5.113)$$

για μιγαδικά σήματα, καταλήγουμε

$$-\int_{t_1}^{t_2} x^*(t)y(t) dt + c^* \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt = 0 \quad (5.114)$$

$$c^* = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x^*(t)y(t) dt \quad (5.115)$$

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t) dt \quad (5.116)$$

Άρα η σταθερά βέλτιστης προσέγγισης c δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{E_y} \langle x, y \rangle \quad (5.117)$$

με $\langle x, y \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο μιγαδικών σημάτων $x(t), y(t)$.

μας οδηγεί στην εύρεση των συντεταγμένων τους: είναι

$$\vec{x}_1 = [1 \ 0 \ 0] \quad (5.123)$$

$$\vec{x}_2 = [0 \ 1 \ 0] \quad (5.124)$$

$$\vec{x}_3 = [0 \ 0 \ 1] \quad (5.125)$$

καθώς αποτελούν τα μοναδιαία διανύσματα για κάθε διάσταση του τριδιάστατου χώρου: μήκος, πλάτος, ύψος.

Ποιά είναι όμως τα χαρακτηριστικά αυτών των διανυσμάτων (ή οποιωνδήποτε άλλων, αν υπάρχουν) που τα κάνει κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα το διάνυσμα $\vec{x}$;

(α') Μπορείτε να δείξετε ότι είναι *ορθογώνια*: $x_i \perp x_j$ για $i \neq j$. Η Γραμμική Άλγεβρα μας υποδεικνύει - και μπορεί ναδειχθεί πολύ εύκολα από τον αναγνώστη - ότι η ορθογωνιότητα συνεπάγεται *γραμμική ανεξαρτησία*. Η γραμμική ανεξαρτησία είναι πολύ σημαντική, καθώς κατά κάποιο τρόπο εννοεί ότι τα διανύσματα αυτά έχουν κάτι ιδιαίτερο, κάτι θεμελιώδες το καθένα, καθώς δεν μπορεί κανένα τους να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

(β') Παρατηρήστε ότι για ένα διάνυσμα στον τριδιάστατο χώρο απαιτούνται ακριβώς τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα για να τον περιγράψουν πλήρως και ακριβώς. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\vec{x}_i$ συνιστούν ένα *πλήρες σύνολο* ορθογωνίων διανυσμάτων του τριδιάστατου χώρου! Η έννοια της πληρότητας συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει κάποιο διάνυσμα $\vec{x}_4$ στον τριδιάστατο χώρο, το οποίο να είναι ορθογώνιο (και άρα γραμμικά ανεξάρτητο) και με τα τρία προηγούμενα $\vec{x}_i$, για $i = 1, 2, 3$.

Άρα το κλειδί για την αναπαράσταση ενός διανύσματος στον N -διάστατο χώρο με μηδενικό διάνυσμα σφάλματος είναι η εύρεση ενός συνόλου N το πλήθος διανυσμάτων που ικανοποιούν την ιδιότητα της *γραμμικής ανεξαρτησίας* και της *πληρότητας*. Αυτές οι δυο ιδιότητες μπορούν να εκφραστούν με μια λέξη: το σύνολο αυτό των διανυσμάτων αποτελεί **βάση** του N -διάστατου χώρου, δηλ. οποιοδήποτε διάνυσμα ανήκει στο χώρο μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός όλων των διανυσμάτων της βάσης, με μηδενικό σφάλμα.

Η επέκταση της παραπάνω ανάλυσης στο χώρο των σημάτων δεν (πρέπει να) είναι προφανής. Αναζητούμε ένα σύνολο σημάτων της μορφής $e^{j2\pi f_k t}$, με $f_k = kf_0$, τα οποία να αναπαριστούν με “ακρίβεια” ένα οποιοδήποτε περιοδικό σήμα. Η ανάλυσή μας ως τώρα περιελάμβανε απεριοδικά σήματα, οπότε ας παραμείνουμε σε μια περίοδο του σήματος, $[0, T_0]$. Ας θεωρήσουμε το σύνολο των περιοδικών - με περίοδο k/T_0 το καθένα - μιγαδικών σημάτων

$$\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-N}^N, \quad \text{με } k \in \mathbb{Z} \quad (5.126)$$

Ας προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ που ορίζεται στο $[0, T_0]$ ως άθροισμα $2N + 1$ τέτοιων σημάτων ως

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.127)$$

με συντελεστές X_k . Ο λόγος των αρνητικών τιμών του k έγκειται στο ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε ένα *πραγματικό* σήμα από άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Γνωρίζουμε από τη σχέση του Euler ότι αυτό μπορεί να συμβεί μόνον όταν οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις έρχονται σε συζυγή ζεύγη (τόσο οι ίδιες όσο και οι συντελεστές τους).

Η συνάρτηση σφάλματος $e(t)$ δίνεται ως

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.128)$$

Η ενέργεια της συνάρτησης σφάλματος, E_e , δίνεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |e(t)|^2 dt \quad (5.129)$$

Μπορούμε να βρούμε τα X_k για τα οποία η ενέργεια της συνάρτησης σφάλματος είναι ελάχιστη. Θα παραλείψουμε την ακριβή διαδικασία μια και δεν προσθέτει κάτι στη συζήτηση, ενώ μοιάζει αρκετά με όσα περιγράψαμε στην Παράγραφο 6.4.2.1. Αποδεικνύεται λοιπόν ότι οι συντελεστές X_k δίνονται ως

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.130)$$

Για τους συντελεστές X_k , μπορεί κανείς να δείξει ότι η ελάχιστη ενέργεια σφάλματος δίνεται από τη σχέση

$$E_e = \int_0^{T_0} x^2(t)dt - T_0 \sum_{k=-N}^N |X_k|^2 = E_x - T_0 \sum_{k=-N}^N |X_k|^2 \quad (5.131)$$

Παρατηρήστε ότι η ενέργεια σφάλματος E_e φθίνει όσο αυξάνει το N , δηλ. όσο προσθέτουμε ζεύγη συζυγών μιγαδικών εκθετικών (δηλ. ημιτόνων!). Άρα όταν $N \rightarrow +\infty$, θα πρέπει $E_e \rightarrow 0$. Όταν αυτό συμβαίνει, τότε το σύνολο $\mathbb{E}$ ονομάζεται **πλήρες**, και τότε η Σχέση (6.127) δεν είναι πια προσέγγιση αλλά ισότητα:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}, \quad t \in [0, T_0] \quad (5.132)$$

υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος πάντα.

Εφόσον το σύνολο $\mathbb{E}$ περιλαμβάνει στοιχεία που είναι ορθογώνια και είναι πλήρες όταν $N \rightarrow +\infty$, τότε το σύνολο αυτό αποτελεί **βάση** του χώρου των περιοδικών σημάτων. Η σειρά που περιγράφεται στη Σχέση (6.132) ονομάζεται **Σειρά Fourier**.

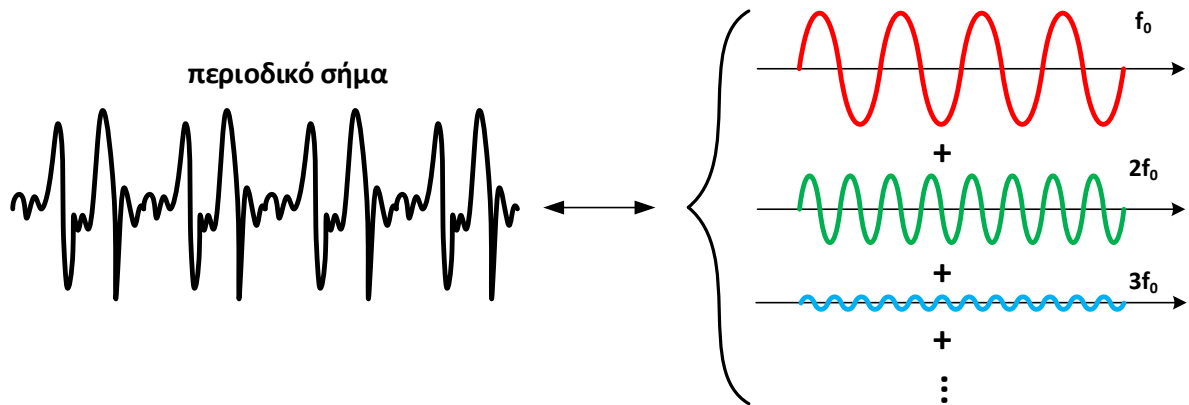
Τέλος, επειδή η ενέργεια σφάλματος E_e φθίνει στο μηδέν, η ενέργεια του αθροίσματος των μιγαδικών εκθετικών ισούται με την ενέργεια του συνολικού σήματος $x(t)$, βάσει της Σχέσης (6.131):

$$E_x = \int_0^{T_0} x^2(t)dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \quad (5.133)$$

Η Σχέση (6.133) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως το **Θεώρημα του Parseval**.

5.5 Ανάλυση σε Σειρές Fourier

Η Ανάλυση Fourier είναι ίσως το βασικότερο εργαλείο ανάλυσης σημάτων, η οποία μας δίνει πληροφορίες για το *συχνотικό τους περιεχόμενο*, δηλ. για το ποιές συχνότητες υπάρχουν στο σήμα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μας πληροφορεί για το πόσα και ποιά ημίτονα (δηλ. με ποιό πλάτος, συχνότητα, και φάση) πρέπει να προσθέσουμε μεταξύ τους για να πάρουμε το συνολικό σήμα που αναλύουμε. Ένα οπτικό παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 6.15. Με άλλα λόγια, η ανάλυση σε Σειρές Fourier δεν είναι τίποτα παραπάνω από ένα μαθηματικό εργαλείο που μας



Σχήμα 5.15: Ανάλυση σήματος σε άθροισμα ημιτόνων με ακέραιες πολλαπλάσιες συχνότητες.

επιτρέπει να γράφουμε ένα οποιοδήποτε (ή μάλλον, σχεδόν οποιοδήποτε $\ominus$, όπως θα δούμε σύντομα) περιοδικό, πραγματικό σήμα ως ένα άθροισμα ημιτόνων. Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, με περίοδο T_0 , αναλύεται σε σειρά Fourier με χρήση των σχέσεων

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.134)$$

όπου

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt, \quad k \neq 0 \quad (5.135)$$

και

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \quad (5.136)$$

με

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (5.137)$$

όπου X_k είναι οι περίφημοι **συντελεστές Fourier**, και η συχνότητα f_0 είναι η γνωστή μας θεμελιώδης συχνότητα, γιατί όλα τα εκθετικά στη Σχέση (6.134) έχουν συχνότητες που είναι ακέραιες πολλαπλάσιες αυτής. Είδαμε λοιπόν εδώ πως γράφουμε ένα οποιοδήποτε περιοδικό σήμα ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων, όπως κάναμε στην Παράγραφο 6.3 για τα απλά αθροίσματα ημιτόνων. Η Σειρά Fourier αυτής της μορφής λέγεται **εκθετική ή δίπλευρη σειρά Fourier**.

Μα ένα λεπτό... Πριν είπαμε ότι η ανάλυση Fourier μας αναλύει το σήμα και σε ημίτονα. Πού βρίσκονται αυτά στις παραπάνω σχέσεις; Μα φυσικά, απ' τις γνωστές σχέσεις του Euler, μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε εκθετική αναπαράσταση, που έχει προκύψει από ανάλυση πραγματικού σήματος, σε ημιτονοειδή αναπαράσταση. Θυμηθείτε:

$$\cos(\theta t) = \frac{e^{j(\theta t)} + e^{-j(\theta t)}}{2}, \quad \sin(\theta t) = \frac{e^{j(\theta t)} - e^{-j(\theta t)}}{2j} \quad (5.138)$$

Άρα ουσιαστικά οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις είναι κι αυτές ημίτονα, όταν βρίσκονται σε συζυγή ζεύγη. Ας δούμε πως γίνεται αυτή η μετατροπή.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.139)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.140)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (5.141)$$

Όπως όμως είπαμε, μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε οι συντελεστές X_k έρχονται σε συζυγή ζεύγη, δηλ. $X_k^* = X_{-k}$. Άρα

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (5.142)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (5.143)$$

Όμως

$$X_k^* = (|X_k| e^{j\phi_k})^* = |X_k|^* (e^{j\phi_k})^* = |X_k| e^{-j\phi_k} \quad (5.144)$$

Άρα

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (5.145)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (5.146)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \quad (5.147)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left(e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \right) \quad (5.148)$$

$$= \boxed{X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \quad (5.149)$$

Άρα δείξαμε ότι κάθε πραγματικό, περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί και ως άθροισμα ημιτόνων με πλάτη $2|X_k|$, συχνότητες $k f_0$, και φάσεις ϕ_k . Το παραπάνω ανάπτυγμα λέγεται **τριγωνομετρική ή μονόπλευρη Σειρά Fourier**, και δείχνει ξεκάθαρα πώς αναλύεται ένα περιοδικό, πραγματικό σήμα σε ένα άθροισμα από ημίτονα με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους!

Πριν πάμε σε παραδείγματα, ας ξεκινήσουμε πρώτα μερικές παρατηρήσεις σχετικά με την ανάλυση σε Σειρές Fourier.

Παρατηρήσεις

- (α') Ας ξεκινήσουμε από κάτι πολύ σημαντικό: όλες οι συχνότητες της Σχέσης (6.134) είναι **ακέραιες πολλαπλάσιες** μιας συγκεκριμένης, της θεμελιώδους συχνότητας, που ορίζεται ως το αντίστροφο της βασικής περιόδου του σήματος. Αυτό σημαίνει ότι τα φάσματα πλάτους και φάσης που - θα δούμε πως - προκύπτουν θα πρέπει να έχουν γραμμές μόνο στις συχνότητες $k f_0$, $k \in \mathbb{Z}$, και πουθενά αλλού!
- (β') Το ολοκλήρωμα στη Σχέση (6.135) μας πληροφορεί ότι για να βρούμε τους συντελεστές X_k κάθε εκθετικής συνάρτησης, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το περιοδικό σήμα $x(t)$ με τις περιφημες **συναρτήσεις βάσης**, και για την ακρίβεια τις συζυγείς τους $e^{-j2\pi k f_0 t}$, και να ολοκληρώσουμε το αποτέλεσμα σε μια περίοδο - οποιαδήποτε περίοδο του σήματος, όχι απαραίτητα από 0 ως T_0 ! Μπορούμε να βάλουμε στα άκρα του ολοκληρώματος όποιο διάστημα μιας βασικής περιόδου μας βολεύει, αρκεί να αποτελεί ένα τμήμα βασικής περιόδου του σήματος! Περισσότερα για τους συντελεστές Fourier σε επόμενη παρατήρηση...
- (γ') Ίσως παρατηρήσατε ότι, για πραγματικά σήματα, ο όρος X_0 εξ' ορισμού δεν είναι τίποτα άλλο παρά το (αλγεβρικό) εμβαδό μιας περιόδου του σήματος. Άρα ο όρος X_0 είναι απλά η μέση τιμή του σήματος. Πραγματικός αριθμός πάντα, για πραγματικά σήματα!
- (δ') Αντίθετα, οι συντελεστές X_k , $k \neq 0$ δεν είναι απαραίτητα πραγματικοί αριθμοί, συνήθως μάλιστα είναι μιγαδικοί. Το είδαμε άλλωστε σε προηγούμενες παραγράφους, στα σήματα που μελετήσαμε. Για το λόγο αυτό, οι συντελεστές X_k μπορούν - και συνήθως πρέπει, γιατί μας βοηθά στη σχεδίαση των φασμάτων - να γραφούν σε πολική μορφή:

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k} = |X_k| e^{j\phi_k} \quad (5.150)$$

Το $|X_k|$ - επανάληψη μήτηρ μαθήσεως - αποτελεί το **μέτρο** των συντελεστών Fourier (πάντα θετικό) και το $\angle X_k = \phi_k$ αποτελεί τη **φάση** αυτών. Η φάση πάντα εκφράζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Υπάρχουν πολλές ιδιότητες σχετικά με τους συντελεστές X_k ανάλογα με το είδος του σήματος $x(t)$. Για παράδειγμα, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε ισχύει ότι $X_k^* = X_{-k}$, δηλ. οι συντελεστές για αρνητικά k είναι απλά οι συζυγείς συντελεστές των όρων θετικών k . Προσοχή! Αυτό ισχύει μόνο για **πραγματικά, περιοδικά σήματα $x(t)$** !

- (ε') Σημαντικό είναι επίσης να παρατηρήσουμε ότι τα πραγματικά σήματα $x(t)$ που αναπτύσσονται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (5.151)$$

μπορούν να γραφούν ως

$$x(t) = X_0 + 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \right\} \quad (5.152)$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα μπορεί να ιδωθεί ως το πραγματικό μέρος ενός αθροίσματος περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, οι οποίες έχουν συχνότητες $k f_0$ και αρχικές φάσεις ϕ_k . Είναι ενδιαφέρον να παρουσιαστεί αυτή η οπτική στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν.

5.5.1 Ύπαρξη Σειράς Fourier

Είπαμε πιο πριν ότι μπορούμε να γράψουμε σχεδόν οποιοδήποτε περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier. Ποιές είναι αυτές οι συνθήκες που καθορίζουν πότε μπορούμε να γράψουμε ένα περιοδικό σήμα ως σειρά Fourier και πότε όχι; Προφανώς τα σήματα που δεν μπορούν να αναπτυχθούν κατά Fourier πρέπει να είναι κάπως ασυνήθιστα. Αν και από τη σκοπιά του μηχανικού δε μας ενδιαφέρουν τέτοια σήματα, μια και υπάρχουν μόνο στη θεωρία, ενδιαφέρον είναι να δούμε ποιές είναι οι συνθήκες που καθορίζουν την ύπαρξη ή όχι του αναπτύγματος Fourier.

Υπάρχουν δύο βασικές συνθήκες για την ύπαρξη της σειράς Fourier.

- (α') Οι συντελεστές X_k πρέπει να έχουν πεπερασμένο μέτρο, δηλ. $|X_k| < \infty$. Αυτό αποδεικνύεται ότι συμβαίνει μόνον όταν

$$|X_k| = \frac{1}{T_0} \left| \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right| \leq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad (5.153)$$

Η Σχέση 6.153 ονομάζεται *ασθενής συνθήκη του Dirichlet*. Αν μια συνάρτηση $x(t)$ ικανοποιεί την ασθενή συνθήκη του Dirichlet, η ύπαρξη της σειράς Fourier είναι εγγυημένη, αλλά μπορεί η σειρά να μη συγκλίνει σε κάθε σημείο. Για παράδειγμα, αν ένα σήμα $x(t)$ απειρίζεται σε κάποιο σημείο, τότε προφανώς κανένα άθροισμα ημιτόνων δεν μπορεί να αναπαραστήσει αυτήν την περιοχή, οπότε η σειρά που θα αναπαριστά το σήμα θα είναι “προβληματική” σε αυτήν την περιοχή, με άλλα λόγια, δε θα συγκλίνει. Παρόμοια, αν ένα σήμα έχει άπειρα σημεία μεγιστου-ελαχίστου σε μια περίοδό του. Έτσι, απαιτούμε μια ακόμα συνθήκη.

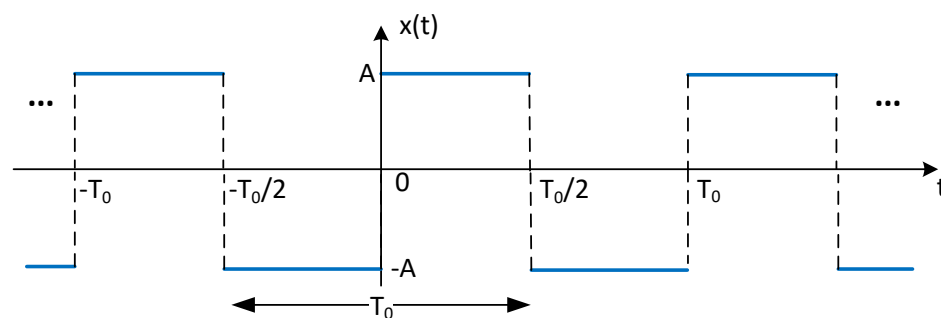
- (β') Το σήμα $x(t)$ πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων σε μια περίοδό του, και πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένων ασυνεχειών σε μια περίοδό του. Αυτές οι δυο συνθήκες λέγονται *ισχυρές συνθήκες του Dirichlet*. Αξίζει να σημειωθεί ότι οποιοδήποτε σήμα μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση (υπό την προσέγγιση της περιοδικότητας φυσικά) ικανοποιεί τις ισχυρές συνθήκες του Dirichlet, και άρα έχει σειρά Fourier που συγκλίνει. Έτσι, στην πράξη, η φυσική ύπαρξη του σήματος είναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της σειράς Fourier του.

5.5.2 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Έχοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις υπόψη μας, ας δούμε τέσσερα χαρακτηριστικά παραδείγματα, πλήρως αναλυτικά.

Παράδειγμα 6.8:

Βρείτε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 6.16.



Σχήμα 5.16: Παράδειγμα 6.8 Ανάλυσης σε Σειρά Fourier.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η περίοδός του είναι ίση με T_0 (περιλαμβάνονται σε αυτή δυο παλμοί, ένας πάνω κι ένας κάτω). Αυτό το σήμα λοιπόν γράφεται σε μια περίοδο ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < T_0/2 \\ -A, & 0 \leq T_0/2 < t \leq T_0 \end{cases} \quad (5.154)$$

Θα έχουμε λοιπόν:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} (-A) dt \quad (5.155)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} dt - \frac{A}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} dt = \frac{A}{T_0} \left[t \right]_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0} \left[t \right]_{T_0/2}^{T_0} \quad (5.156)$$

$$= \frac{A}{T_0} \left(\frac{T_0}{2} - 0 \right) - \frac{A}{T_0} \left(T_0 - \frac{T_0}{2} \right) = \frac{A}{2} \frac{T_0}{2} - \frac{A}{T_0} T_0 + \frac{A}{T_0} \frac{T_0}{2} \quad (5.157)$$

$$= \frac{A}{2} - A + \frac{A}{2} = 0 \quad (5.158)$$

που ήταν αναμενόμενο, καθώς έχουμε σε μια περίοδο δύο παλμούς ίσου εμβαδού ($AT_0/2$) που βρίσκονται εκατέρωθεν του οριζώντιου άξονα. Οπότε το συνολικό αλγεβρικό εμβαδό είναι μηδέν σε μια περίοδο.

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.159)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{A}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.160)$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{T_0/2}^{T_0} \quad (5.161)$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0) - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}}) \quad (5.162)$$

Ξέρουμε ότι $f_0 T_0 = 1$, και με αντικατάσταση έχουμε

$$X_k = \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0) - \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} (e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}}) \quad (5.163)$$

$$= -\frac{A}{j2k\pi} (e^{-jk\pi} - 1) + \frac{A}{j2k\pi} (e^{-j2k\pi} - e^{-jk\pi}) = -\frac{A}{j2k\pi} (e^{-jk\pi} - 1) + \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) \quad (5.164)$$

$$= \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) + \frac{A}{j2k\pi} (1 - e^{-jk\pi}) = \frac{A}{jk\pi} (1 - e^{-jk\pi}) \quad (5.165)$$

και επειδή $e^{-jk\pi} = (-1)^k$, έχουμε

$$X_k = \frac{A}{jk\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{2A}{jk\pi}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (5.166)$$

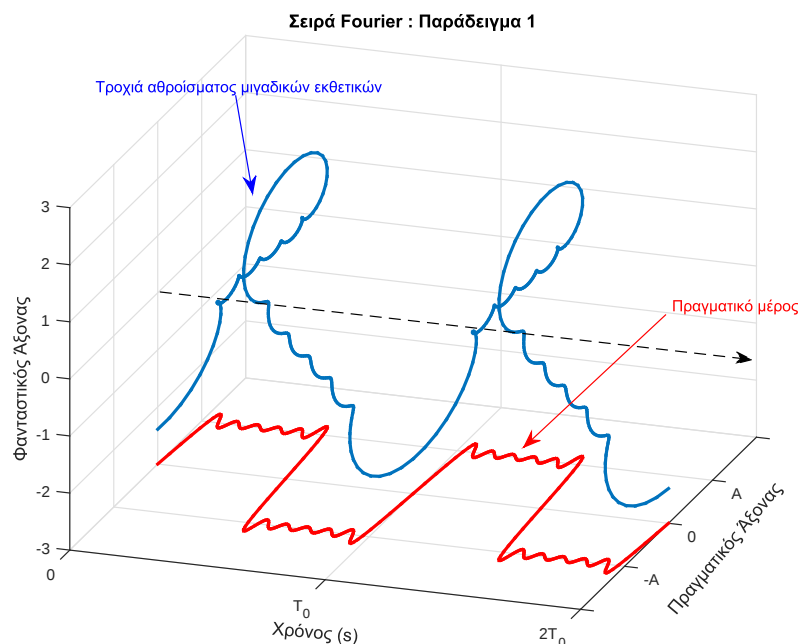
γιατί προφανώς το $1 - (-1)^k$ είναι μηδέν για k άρτια, και 2 για k περιττά. Οπότε σε πρώτη φάση, η Σειρά Fourier μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2} e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.167)$$

ή αλλιώς, περιλαμβάνοντας μόνο τα περιττά k ,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2A}{(2k-1)\pi} e^{-j\pi/2} \right) e^{j2\pi(2k-1)f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2A}{(2k-1)\pi} e^{j(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2)} \quad (5.168)$$

Αυτή λοιπόν είναι η εκθετική σειρά Fourier που αντιστοιχεί στο δεδομένο περιοδικό σήμα $x(t)$. Ας βρούμε και τη μονόπλευρη σειρά Fourier.



Σχήμα 5.17: Σειρά Fourier Παραδείγματος 6.8 στο μιγαδικό χώρο για 6 μη μηδενικούς όρους.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \frac{4A}{k\pi} \cos\left(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.169)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4A}{(2k-1)\pi} \sin(2\pi(2k-1)f_0 t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4A}{(2k-1)\pi} \Re\{e^{j(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2)}\} \quad (5.170)$$

Το άθροισμα 11 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 6.17.

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε φάσμα πλάτους και φάσης από τους συντελεστές X_k που βρήκαμε; Κάποιος θα μπορούσε να πει ότι οι συντελεστές X_k είναι ήδη διαθέσιμοι και γραμμένοι σε πολική μορφή. Αυτό όμως είναι λάθος, γιατί ο όρος k στον παρονομαστή του X_k μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Αυτό σημαίνει ότι για $k < 0$, το $\frac{2A}{k\pi}$ θα λάβει αρνητικό πρόσημο, οπότε δεν μπορεί να είναι πλέον μέτρο (δηλ. θετικό). Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να διαχωρίσουμε τις καταστάσεις σε περιττά $k > 0$ και $k < 0$, στη σχέση του X_k που βρήκαμε. Η φιλοσοφία είναι η ίδια με αυτή όταν συζητούσαμε για αθροίσματα ημιτόνων και τους μιγαδικούς συντελεστές τους. Άρα θα έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{(-|k|)\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ -\frac{2A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (5.171)$$

$$= \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{|k|\pi} e^{j\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{2A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (5.172)$$

Τώρα έχουμε πλέον την πολική μορφή που θέλουμε. Το μέτρο είναι

$$|X_k| = \frac{2A}{|k|\pi}, \quad k \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\} \quad (5.173)$$

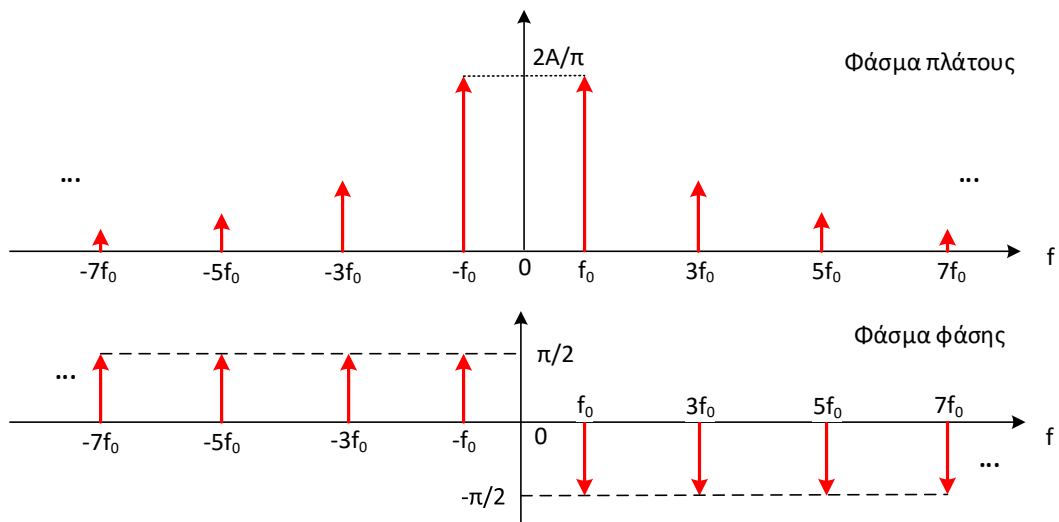
$$|X_0| = 0 \quad (5.174)$$

και η φάση είναι

$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} -\pi/2, & k > 0 \text{ και περιττά} \\ \pi/2, & k < 0 \text{ και περιττά} \end{cases} \quad (5.175)$$

$$\angle X_0 = 0 \quad (5.176)$$

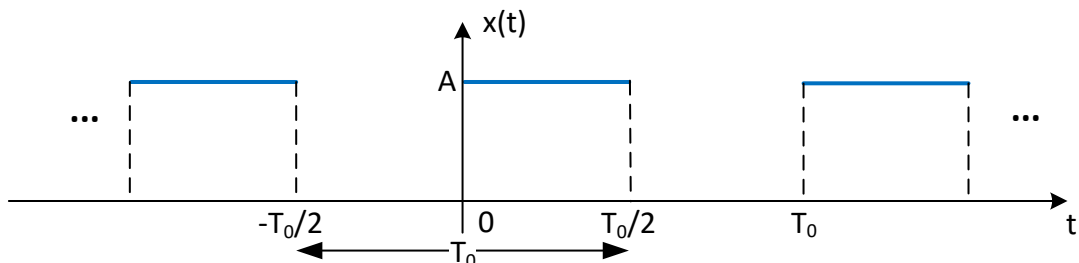
Έτσι, ο σχεδιασμός του φάσματος πλάτους και φάσης είναι τετριμμένη υπόθεση, αρκεί να βάλουμε μερικές ενδεικτικές τιμές (λίγες) του k , στις παραπάνω σχέσεις και να λάβουμε τελικά φάσματα όπως αυτό του Σχήματος 6.18.



Σχήμα 5.18: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 6.8.

Παράδειγμα 6.9:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 6.19.



Σχήμα 5.19: Περιοδικός Παλμός Παραδείγματος 6.9.

Λύση:

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις μας, θα έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A dt = \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0/2} dt = \frac{A}{T_0} t \Big|_0^{T_0/2} = \frac{A}{T_0} \left(\frac{T_0}{2} - 0 \right) = \frac{AT_0}{2T_0} = \frac{A}{2} \quad (5.177)$$

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.178)$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0/2} = -\frac{A}{j2\pi k} \left(e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0 \right) \quad (5.179)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi k} (e^{-j\pi k} - 1) = \frac{A}{j2\pi k} (1 - e^{-j\pi k}) \quad (5.180)$$

Όμως,

$$e^{-j\pi k} = (e^{-j\pi})^k = (-1)^k \quad (5.181)$$

άρα

$$X_k = \frac{A}{j2\pi k} (1 - e^{-j\pi k}) = \frac{A}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) \quad (5.182)$$

Προφανώς το $1 - (-1)^k$ είναι μηδέν για k άρτια, και $1 - (-1) = 2$ για k περιττά. Οπότε

$$X_k = \frac{A}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{A}{j\pi k}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} \quad (5.183)$$

Άρα καταλήγουμε ότι

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2} e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \pi/2)} \quad (5.184)$$

Η αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά Fourier θα είναι

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \pi/2)} = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{\pi k} \cos(2\pi k f_0 t - \pi/2) \quad (5.185)$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k-1)} \cos(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k-1)} \Re\{e^{j(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2)}\} \quad (5.186)$$

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης. Υπενθυμίζουμε ότι

$$X_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2} \quad (5.187)$$

και ότι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το k μπορεί να πάρει και αρνητικές περιττές τιμές, οπότε πρέπει να το λάβουμε υπόψη μας στην πολική μορφή. Είναι:

$$X_k = \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{A}{(-|k|)\pi} e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \quad (5.188)$$

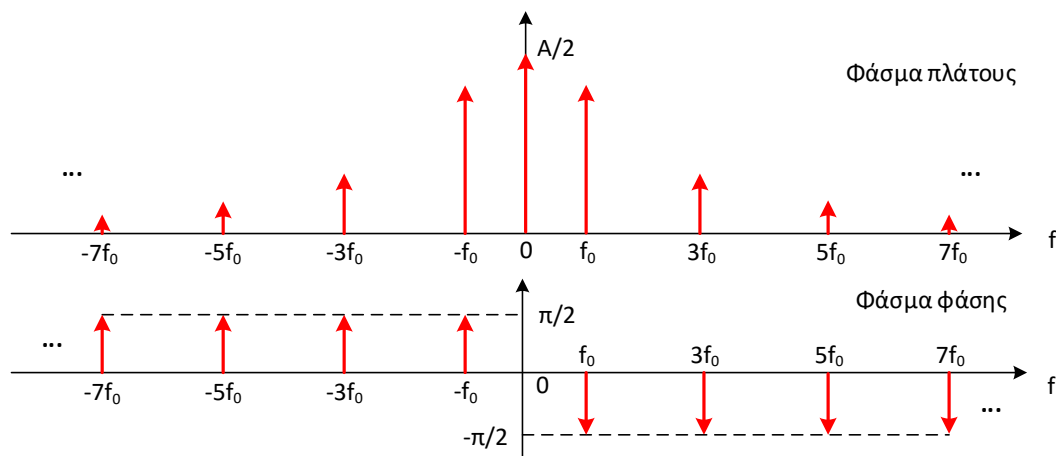
Άρα τελικά το μέτρο είναι

$$|X_k| = \frac{A}{|k|\pi}, \quad k \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\} \quad (5.189)$$

και η φάση είναι

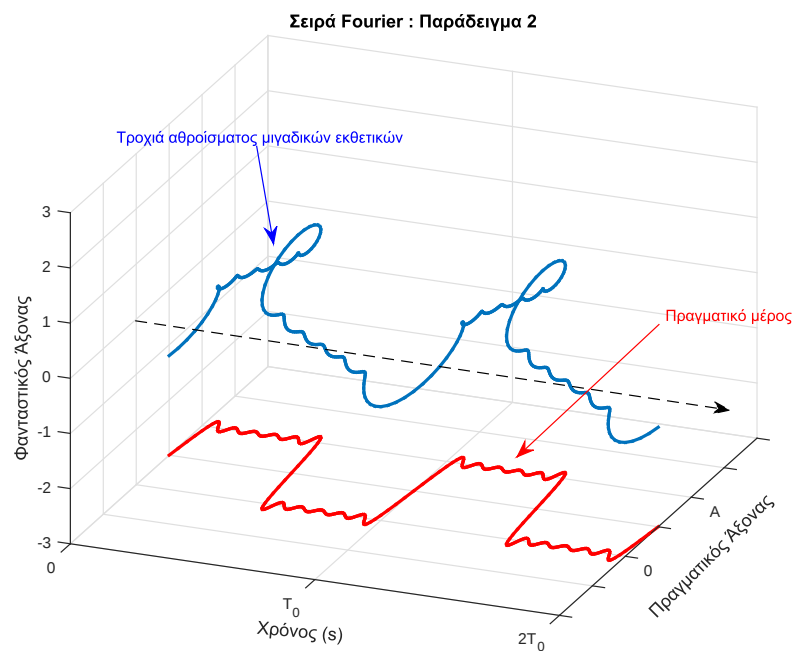
$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} -\pi/2, & k > 0 \text{ και περιττά} \\ \pi/2, & k < 0 \text{ και περιττά} \end{cases} \quad (5.190)$$

Έτσι, ο σχεδιασμός του φάσματος πλάτους και φάσης είναι τετριμμένη υπόθεση, αρκεί να βάλουμε μερικές ενδεικτικές τιμές (λίγες) του k , στις παραπάνω σχέσεις και να λάβουμε τελικά φάσματα όπως αυτό του Σχήματος 6.20.



Σχήμα 5.20: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 6.9.

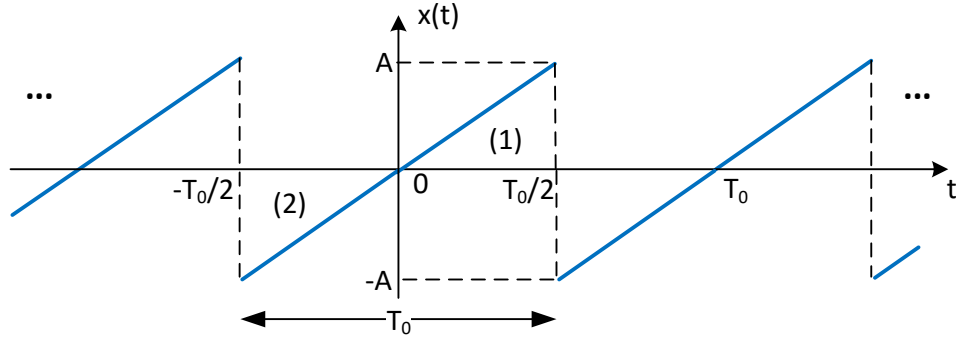
Το άθροισμα 6 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 6.21.



Σχήμα 5.21: Σειρά Fourier Παραδείγματος 6.9 στο μιγαδικό χώρο για 6 όρους.

Παράδειγμα 6.10:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 6.22.



Σχήμα 5.22: Περιοδικό Σήμα Παραδείγματος 6.10.

Λύση:

Επιλέγουμε ως περίοδο το διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$. Η πλάγια ευθεία που ορίζεται εκεί περνάει από τα σημεία $(0, 0)$, $(T_0/2, A)$, άρα θα έχει τη μορφή

$$y - 0 = \frac{A - 0}{T_0/2 - 0}(t - 0) \iff y = \frac{2A}{T_0}t = x(t) \quad (5.191)$$

Έτσι θα έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{2A}{T_0} t dt = 2A \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} = 0 \quad (5.192)$$

Εναλλακτικά, θέλουμε το εμβαδό του σήματος σε μια περίοδο, επί $1/T_0$. Στο διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$, έχουμε δυο ορθογώνια τρίγωνα (σημειωμένα με (1), (2) στο Σχήμα), που έχουν εμβαδό $T_0/2 \times A = \frac{AT_0}{2}$ το καθένα. Όμως το ένα είναι κάτω από τον άξονα ενώ το άλλο επάνω, άρα το αλγεβρικό άθροισμα είναι μηδέν.

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{2A}{T_0} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{2A}{T_0^2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.193)$$

Με χρήση του δοσμένου ολοκληρώματος, θα έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{T_0^2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{2A}{T_0^2} \left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{(-j2\pi k f_0)} \left(t - \frac{1}{(-j2\pi k f_0)} \right) \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} \quad (5.194)$$

$$= \frac{2A}{T_0^2} \left(-\frac{e^{-j2\pi k f_0 T_0/2}}{j2\pi k f_0} \left(\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) + \frac{e^{j2\pi k f_0 T_0/2}}{j2\pi k f_0} \left(-\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) \right) \quad (5.195)$$

Κάνοντας πράξεις, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις

$$f_0 T_0 = 1 \quad (5.196)$$

$$e^{jk\pi} = (-1)^k \quad (5.197)$$

και συμμαζεύοντας την κατάσταση $\odot$, έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{T_0^2} \frac{e^{-jk\pi}}{(-j2\pi k f_0)} \left(\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0} \right) + \frac{2A}{T_0^2} \frac{e^{jk\pi}}{j2\pi k f_0} \left(\frac{1}{j2\pi k f_0} - \frac{T_0}{2} \right) \quad (5.198)$$

$$= \frac{2A}{T_0} \frac{T_0}{2} \frac{(-1)^k}{(-j2\pi k)} + \frac{2A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{(-1)^k}{(-j2\pi k)} + \frac{2A}{T_0} \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{(-1)^k}{j2\pi k} - \frac{2A}{T_0} \frac{T_0}{2} \frac{(-1)^k}{j2\pi k} \quad (5.199)$$

$$= -2A \frac{(-1)^k}{j2\pi k} - 2A \frac{(-1)^k}{(j2\pi k)^2} + 2A \frac{(-1)^k}{(j2\pi k)^2} \quad (5.200)$$

$$= -A \frac{(-1)^k}{jk\pi} = \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j\pi/2} \quad (5.201)$$

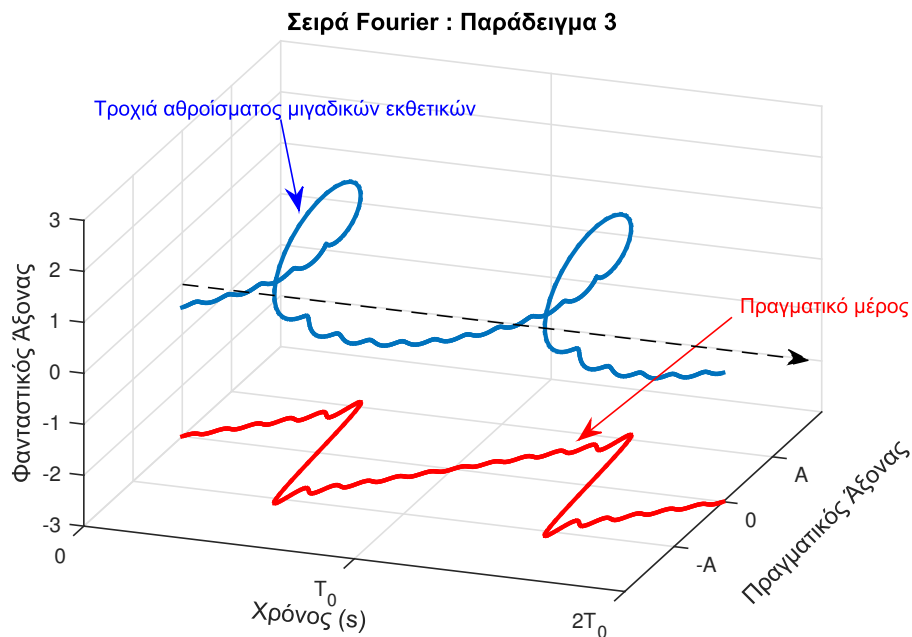
Ουφ! Τελικά η πλήρης μορφή της δίπλευρης Σειράς Fourier ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j(2\pi k f_0 t + \pi/2)} \quad (5.202)$$

ενώ για την μονόπλευρη Σειρά Fourier η γραφή είναι πιο πολύπλοκη, όπως θα φανεί παρακάτω, όμως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Re \left\{ \frac{2A}{k\pi} (-1)^k e^{j(2\pi k f_0 t + \pi/2)} \right\} \quad (5.203)$$

Το άθροισμα 11 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 6.23.



Σχήμα 5.23: Σειρά Fourier Παραδείγματος 6.10 στο μιγαδικό χώρο για 11 όρους.

Για να σχεδιάσουμε, τέλος, φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης πρέπει να γράψουμε τους συντελεστές X_k σε πολική μορφή. Εδώ θέλει προσοχή, γιατί όχι μόνο ο όρος k στον παρονομαστή, αλλά και ο όρος $(-1)^k$ του αριθμητή πρέπει να ληφθεί υπόψη. Άρα

$$X_k = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ -\frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} \quad (5.204)$$

$$= \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, θετικά} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, θετικά} \\ -\frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, αρνητικά} \\ -\frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, αρνητικά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια, θετικά} \\ \frac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά, θετικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ άρτια, αρνητικά} \\ \frac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά, αρνητικά} \end{cases} \quad (5.205)$$

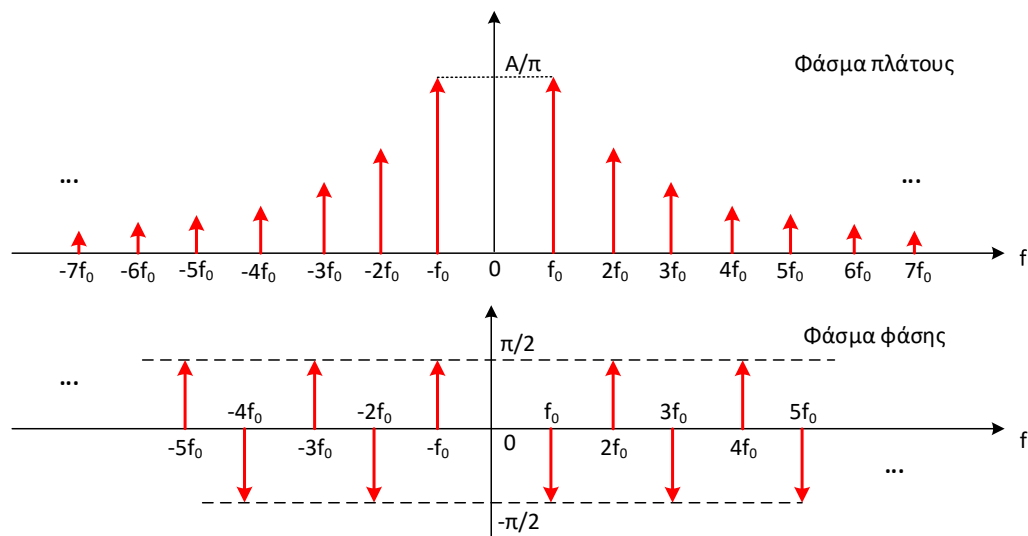
Τώρα πλέον είναι εμφανές ότι

$$|X_k| = \frac{A}{|k|\pi}, \quad k \in Z - \{0\} \quad (5.206)$$

και

$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} \pi/2, & k > 0 \text{ και άρτια, } k < 0 \text{ και περιττά} \\ -\pi/2, & k > 0 \text{ και περιττά, } k < 0 \text{ και άρτια} \end{cases} \quad (5.207)$$

Οπότε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα 6.24.



Σχήμα 5.24: Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 6.10.

Παρατηρήσεις

(α') Τα μαθηματικά που περιγράφουν την ανάλυση Fourier πρέπει να σας είναι ξεκάθαρα, σαν απλά μαθηματικά. Το πρόβλημα είναι ότι δεν πρέπει να αρχειστείτε σε αυτό. Πρέπει να καταλάβετε πώς αυτά ερμηνεύονται απ'τη σκοπιά του μηχανικού. Δείξαμε ότι κάθε *πραγματικό, περιοδικό σήμα* μπορεί να γραφεί στη μορφή μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier ως

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (5.208)$$

όπου $A_0 = X_0$, $A_k = 2|X_k|$, και $\phi_k = \angle X_k$. Είναι προφανές ότι η Σχέση (6.208) προκύπτει εύκολα αν έχουμε βρει όλους τους αγνώστους της Σχέσης (6.134). Αυτή η σχέση είναι πλήρως ισοδύναμη με την αντίστοιχη σχέση των εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων. Μάλιστα υπάρχουν κλειστοί τύποι για τον υπολογισμό των A_k χωρίς τη χρήση του X_k .

- (β') Αν θέλαμε να περιγράψουμε διαισθητικά την ανάλυση Fourier (όχι μόνο τη Σειρά, αλλά και κάθε άλλη συχνοτική ανάλυση που θα δούμε), τότε μια ταιριαστή αναλογία είναι αυτή της συνταγής ενός ανάμεικτου χυμού φρούτων! ☺ Το ολοκλήρωμα X_k παίρνει το χυμό ($x(t)$) και μας βρίσκει τη “συνταγή”. Πώς; Περνά το χυμό ($x(t)$) μέσα από μια σειρά από k φίλτρα ($e^{-j2\pi k f_0 t}$), όπου το κάθε φίλτρο κρατά μόνο ένα συστατικό του χυμού και μας λέει μάλιστα και την ποσότητα (X_k) που υπάρχει! Η διαδικασία όμως πρέπει να είναι αναστρέψιμη, δηλ. πρέπει να μπορούμε αναμειγνύοντας ξανά τα συστατικά ($e^{j2\pi k f_0 t}$) στις σωστές ποσότητες (X_k) να πάρουμε πίσω το χυμό ($x(t)$): αυτό το αναλαμβάνει το άθροισμα της σειράς Fourier!

Για να μπορεί όμως να ισχύσει μια τέτοια διαδικασία πρέπει:

- (α') **Τα φίλτρα να είναι ανεξάρτητα:** το φίλτρο που “πιάνει” το χυμό μπανάνα πρέπει να πιάνει μόνο χυμό μπανάνας, και τίποτε άλλο. Αν περάσουμε από το φίλτρο αυτό μερικά πορτοκάλια, η ένδειξη θα πρέπει να δείχνει μηδέν. Αυτό, στην ορολογία των μαθηματικών εξασφαλίζεται από τη γραμμική ανεξαρτησία των συναρτήσεων $e^{-j2\pi k f_0 t}$. Γνωρίζετε από τη Γραμμική Άλγεβρα την έννοια της ανεξαρτησίας: σε ένα σύνολο διανυσμάτων, ένα οποιοδήποτε από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Στα δικά μας ενδιαφέροντα, η έννοια αυτή σημαίνει ότι ένα μιγαδικό εκθετικό $e^{-j2\pi k f_0 t}$ πρέπει να μην περιέχει πληροφορία για το μιγαδικό εκθετικό $e^{-j2\pi(k+1)f_0 t}$, που πράγματι συμβαίνει, γιατί τα μιγαδικά εκθετικά είναι ορθογώνια μεταξύ τους.
- (β') **Τα φίλτρα πρέπει να είναι πλήρη:** τα φίλτρα μας πρέπει να “πιάνουν” μέχρι και το τελευταίο συστατικό του χυμού. Δε θα μπορέσουμε ποτέ να φτιάξουμε τον αρχικό χυμό ($x(t)$) αν π.χ. λείπει το φίλτρο για το χυμό ροδάκινο. ☹ Αυτό εξασφαλίζεται από το ότι η προβολή του σήματος $x(t)$ γίνεται επάνω σε κάθε συχνότητα πολλαπλάσια της θεμελιώδους.
- (γ') **Τα συστατικά πρέπει να είναι “συνδυάσιμα”:** Τα συστατικά πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα ανεξαρτήτως της σειράς με την οποία συνδυάζονται.
- (γ') Μετά από το παραπάνω πολύ διαισθητικό παράδειγμα, ας πάμε λίγο στην πραγματικότητα. Έστω ότι αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, και ένας συντελεστής Fourier είναι $X_3 = 2e^{j\pi/4}$, τότε αυτό τι μας λέει; Δεδομένου ότι το περιοδικό σήμα συντίθεται από μιγαδικά εκθετικά ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.209)$$

ο προαναφερθέντας συντελεστής μας λέει ότι το εκθετικό $e^{j2\pi 3 f_0 t}$ συνεισφέρει στη σύνθεση του σήματος με πλάτος 2 και φάση $\pi/4$. Αν αυτό σας φαντάζει κάπως δυσνόητο (αν και δε θα έπρεπε), τότε αφού το σήμα είναι πραγματικό, θα έχει και ένα συντελεστή $X_{-3} = X_3^* = 2e^{-j\pi/4}$. Αν προσθέσουμε τις εκθετικές συναρτήσεις $X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t}$ θα έχουμε:

$$X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t} = 2e^{j(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)} + 2e^{-j(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)} = 4 \cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4) \quad (5.210)$$

Αυτό ξεκάθαρα δηλώνει ότι το περιοδικό σήμα που αναλύουμε περιέχει τον όρο $4 \cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)$, με άλλα λόγια, για να κατασκευάσουμε το σήμα που αναλύουμε είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε ένα ημίτονο με συχνότητα $f_3 = 3f_0$, πλάτος $A = 4$, και φάση $\phi = \pi/4$ (μεταξύ άλλων ημιτονων, πιθανότατα). Έτσι λοιπόν, τώρα σας είναι ξεκάθαρο τι ακριβώς σημαίνουν οι συντελεστές Fourier όσον αφορά τη σημασία τους στην ανάλυση και στη σύνθεση.

- (δ') Φυσικά παρατηρείτε ότι η σειρά Fourier αποτελείται από άπειρα εκθετικά (ή ημίτονα). Στην πράξη, δεν μπορούμε να έχουμε άπειρα ημίτονα. Αναγκαστικά κρατάμε έναν αριθμό από αυτά, και άρα η προσέγγιση ενός περιοδικού σήματος από πεπερασμένα ημίτονα θα είναι αναγκαστικά με σφάλμα.
- (ε') Τέλος, είδαμε ότι μια βολική αναπαράσταση της ανάλυσης σε σειρές Fourier είναι η σχεδίαση του φάσματος πλάτους και του φάσματος φάσης. Οι φασματικές αναπαραστάσεις (και οι δυο μαζί) μας δίνουν όλη την απαραίτητη πληροφορία για το περιοδικό σήμα. Με άλλα λόγια, αν έχουμε τις φασματικές

αναπαραστάσεις, μπορούμε να βρούμε την σειρά Fourier που αυτές αντιπροσωπεύουν. Σημαντικό: θυμίζεται ότι στο φάσμα πλάτους αναπαριστούμε τις ποσότητες $|X_k|$, δηλ. το πως αλλάζει το πλάτος των συντελεστών ανά συχνότητα, ενώ στο φάσμα φάσης αναπαριστούμε τις ποσότητες $\angle X_k$, που δηλώνει το πως αλλάζει η φάση των συντελεστών ανά συχνότητα, δηλ. ποιά είναι η σχετική μετατόπιση των ημιτόνων.

- (ε') Προσέξτε ότι το μέτρο των συντελεστών Fourier, $|X_k|$, είναι σταθερό ή φθίνει στο 0 όσο το $k \rightarrow +\infty$. Αυτό είναι γενικό φαινόμενο στο φάσμα πλάτους, όταν έχουμε άπειρο πλήθος ημιτόνων. Δε θα μπορούσαν οι συντελεστές $|X_k|$ να μεγαλώνουν όσο $f \rightarrow \infty$, γιατί ένα τέτοιο άθροισμα ημιτόνων θα έδινε συνολικά άπειρο πλάτος στο περιοδικό σήμα. Έχοντας αυτό στο μυαλό σας, και την προηγούμενη παρατήρηση, μπορείτε να ελέγχετε τις απαντήσεις σας στο φάσμα πλάτους σε θεωρητικές ασκήσεις. Τονίζεται ότι το παραπάνω ισχύει όταν αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα σε άπειρο πλήθος από ημίτονα. Όταν π.χ. έχουμε ένα άθροισμα

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^N 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (5.211)$$

ή

$$x(t) = \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.212)$$

τότε έχουμε πεπερασμένου πλήθους ημίτονα a' , άρα τα A_k ή τα X_k μπορούν να έχουν όποια κατανομή θέλουν, όσο αυξάνει το k . Φυσικά αν αυτά τα N ημίτονα προέρχονται ως προσέγγιση άπειρου πλήθους ημιτόνων, προφανώς θα ακολουθούν την κατανομή που συζητήσαμε (σταθερά ή φθίνοντα πλάτη $|X_k|$).

- (ζ') Σίγουρα ένα στοιχείο που θα σας ξενίζει αρκετά είναι αυτό των αρνητικών συχνοτήτων των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Ξέρουμε ότι συχνότητα είναι ο αριθμός επαναλήψεων ενός τμήματος σήματος στη μονάδα του χρόνου, και αναμφίβολα αυτός ο αριθμός είναι μια θετική ποσότητα. Δεν μπορούμε να έχουμε $f_0 = -4$ επαναλήψεις ανά δευτερόλεπτο! Άρα πώς ερμηνεύεται μια αρνητική συχνότητα; Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία, μπορούμε να εκφράσουμε ένα ημίτονο αρνητικής συχνότητας $-f_0$ ως

$$\cos(-2\pi f_0 t + \theta) = \cos(-(2\pi f_0 t - \theta)) = \cos(2\pi f_0 t - \theta) \quad (5.213)$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει καθαρά ότι η συχνότητα του ημιτόνου είναι $|f_0|$, και είναι θετική. Πώς τώρα όμως ερμηνεύουμε τις φασματικές γραμμές στις αρνητικές συχνότητες; Ένας ασφαλής τρόπος είναι να πούμε απλά ότι το φάσμα είναι μια γραφική αναπαράσταση των συντελεστών $|X_k|$ συναρτήσει του f . Η παρουσία αρνητικών συχνοτήτων απλά σημαίνει ότι υπάρχει ένα εκθετικό μιας τέτοιας αρνητικής συχνότητας στη σειρά Fourier που αναλύουμε. Απλό, έτσι δεν είναι; ☺

- (η') Τα Σχήματα 6.17, 6.21, και 6.23 δείχνουν το άθροισμα μερικών από τα πρώτα μιγαδικά εκθετικά, καθώς και το πραγματικό του μέρος. Θα ήταν περισσότερο ενδιαφέρον και διορατικό να δούμε τη συνεισφορά καθενός μιγαδικού εκθετικού στη σύνθεση ενός περιοδικού σήματος. Δείτε το Σχήμα 6.25. Αριστερά, βλέπουμε τα τρία πρώτα μη μηδενικού πλάτους περιστρεφόμενα μιγαδικά εκθετικά, κυκλικής συχνότητας $\omega_0 = 2\pi f_0$, $3\omega_0$, $5\omega_0$, καθώς και το άθροισμά τους. Η σχεδιάσή τους είναι τέτοια ώστε να μπορεί να είναι εμφανές το πως αθροίζονται. Δεξιά, βλέπουμε το πραγματικό μέρος καθενός από τα μιγαδικά εκθετικά, καθώς και το άθροισμά τους, που συνιστά το περιοδικό σήμα του Παραδείγματος 1. Το σχήμα δείχνει δυο χρονικές στιγμές, μια στο πρώτο και μια στο τρίτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου.

- (θ') Υπάρχει μια ακόμα αναπαράσταση περιοδικών σημάτων κατά Fourier, η οποία είναι η ακόλουθη:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2\pi k f_0 t) \quad (5.214)$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.215)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.216)$$

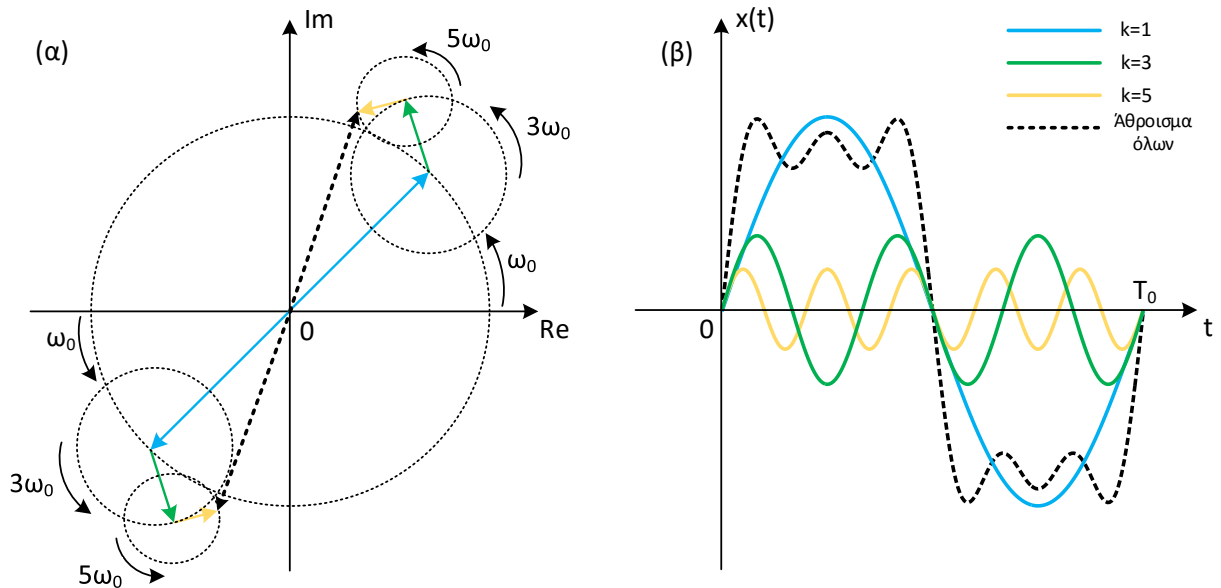
Οι παραπάνω συντελεστές a_k, b_k σχετίζονται με τους γνωστούς συντελεστές X_k ως

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k), & k > 0 \\ \frac{1}{2}a_0, & k = 0 \\ X_k^*, & k < 0 \end{cases} \quad (5.217)$$

(ι') Ίσως γνωρίζετε ότι τα “Στοιχεία” του Αλεξανδρινού μαθηματικού Ευκλείδη είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα στην ιστορία της ανθρωπότητας. Η μελέτη και εμπέδωση των 13 βιβλίων των “Στοιχείων” ήταν και παραμένει ζόρικη υπόθεση! Κάποια στιγμή, ο βασιλιάς της Αλεξάνδρειας, Πτολεμαίος ο Α', ζήτησε από τον Ευκλείδη έναν τρόπο να μάθει Γεωμετρία πιο εύκολο από τη μελέτη των “Στοιχείων”. Η απάντηση του μεγάλου μαθηματικού ήταν λακωνική, σαφής, και έμεινε στην Ιστορία: “Δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη Γεωμετρία!”.

Αν λοιπόν ζούσε σήμερα ο J. B. Fourier, και τον ρωτούσατε ποιός είναι ο πιο εύκολος τρόπος να μάθετε Σειρές Fourier, θα σας απαντούσε όπως ο μεγάλος μαθηματικός της Αρχαιότητας: “Δεν υπάρχει εύκολος δρόμος για τις Σειρές Fourier!”. Αυτό σημαίνει ότι για τις Σειρές Fourier απαιτείται αρκετή εξάσκηση!

^α Έχουμε N ημίτονα στην πρώτη περίπτωση, πόσα στη δεύτερη;



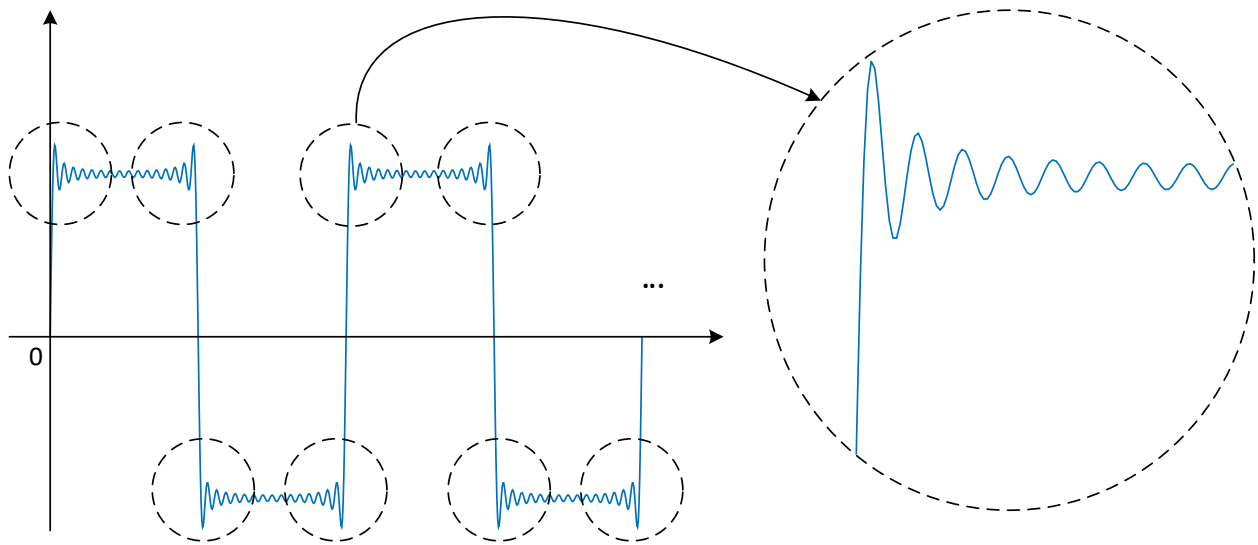
Σχήμα 5.25: Σύνθεση πραγματικού σήματος από περιστρεφόμενα μιγαδικά εκθετικά: (α) περιστρεφόμενα μιγαδικά εκθετικά, (β) το πραγματικό τους μέρος.

5.6 Το φαινόμενο Gibbs

Σε όλα τα παραδείγματα που έχουμε δει ως τώρα, θα παρατηρήσατε ότι το συντιθέμενο σήμα δεν είναι μια ακριβής “ρέπλικα” του εκάστοτε σήματος που αναλύεται, αλλά παρουσιάζει ταλαντώσεις, τόσο στα διαστήματα που το αρχικό σήμα είναι γραμμικό ή σταθερό, όσο και στα σημεία ασυνέχειας. Μάλιστα στα τελευταία, η τιμή της Σειράς Fourier είναι σημαντικά μεγαλύτερη από οποιοδήποτε άλλο σημείο. Ας πάρουμε για παράδειγμα το σήμα του Παραδείγματος 1 που παρουσιάστηκε νωρίτερα, του οποίου η Σειρά Fourier φαίνεται στο Σχήμα 6.26. Επάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί όλα τα σημεία ασυνέχειας και οι ταλαντώσεις τις Σειράς Fourier που συμβαίνουν. Όλες οι Σειρές Fourier που απεικονίζονται στις προηγούμενες σελίδες χρησιμοποιούν πεπερασμένου πλήθους ημίτονα για τη σύνθεση. Θα περίμενε λοιπόν κανείς ότι όσο προσθέτουμε ημίτονα στη Σειρά Fourier, τόσο θα μειώνονται αυτές οι ταλαντώσεις. Ιδανικά, όταν το πλήθος των ημιτόνων N τείνει στο ∞ , τότε γνωρίζουμε ότι η ενέργεια

σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν, οπότε θα περίμενε κανείς η Σειρά Fourier να “ταυτίζεται” με το αρχικό περιοδικό σήμα.

Αν δοκιμάσουμε πειραματικά να προσθέσουμε πολλά ημίτονα, θα δούμε ότι όντως η Σειρά Fourier προσεγγίζει



Σχήμα 5.26: Το φαινόμενο Gibbs στα σημεία ασυνέχειας ενός περιοδικού σήματος.

πολύ καλά το περιοδικό σήμα στα διαστήματα όπου το σήμα είναι γραμμικό ή σταθερό, αλλά στα σημεία ασυνέχειας παρατηρείται η ίδια προβληματική κατάσταση, με ισχυρές ταλαντώσεις της Σειράς Fourier γύρω από αυτά τα σημεία. Αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται να αντιτίθεται στο γεγονός ότι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο φθίνει στο μηδέν όσο προσθέτουμε ημίτονα στη Σειρά Fourier. Πράγματι, αυτή η φαινομενική αντίθεση προβληματίσε για πολύ καιρό τους μηχανικούς και τους μαθηματικούς. Την εξήγηση έδωσε τελικά ο J. W. Gibbs, δείχνοντας ότι το φαινόμενο αυτό μπορεί να συμβαίνει ακριβώς λόγω των ασυνεχειών του αρχικού σήματος - και μόνο παρουσία αυτών - ακόμα κι αν πράγματι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν! Συγκεκριμένα, ο Gibbs έδειξε ότι η Σειρά Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή του περιοδικού σήματος σε κάθε σημείο, εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, όπου η Σειρά Fourier συγκλίνει στη μέση τιμή των τιμών του περιοδικού σήματος εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας. Η Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων που δεν παρουσιάζουν ασυνέχειες λέγεται ότι συγκλίνει *ομοιόμορφα* σε όλα τα σημεία της περιόδου του περιοδικού σήματος, ενώ για ασυνεχή περιοδικά σήματα, η Σειρά Fourier συγκλίνει σε κάθε σημείο της περιόδου πλην των σημείων ασυνέχειας.

Τέλος, θυμηθείτε ότι η εύρεση των συντελεστών Fourier βασίζεται στην έννοια της *ελάχιστης ενέργειας* σφάλματος E_e μεταξύ του περιοδικού σήματος και της προσέγγισής του από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, και όχι στην ελάχιστη διαφορά των δυο σημάτων ή στην ελάχιστη διαφορά σε κάθε σημείο. Αυτός ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών Fourier επιτρέπει στην ενέργεια σφάλματος να τείνει στο μηδέν όσο αυξάνει το πλήθος των ημιτόνων, και ταυτόχρονα να υπάρχουν σημεία όπου η διαφορά της Σειράς Fourier με το περιοδικό σήμα να μην είναι μηδενική (μη ομοιόμορφη σύγκλιση)!

5.7 Ιδιότητες Σειρών Fourier

Υπάρχουν πολλές χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, που βοηθούν σε πολλές εφαρμογές. Ο Πίνακας 6.1 απεικονίζει τις περισσότερες.

5.7.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Παρακάτω ακολουθούν αποδείξεις των ιδιοτήτων, καθώς και ένα παράδειγμα χρήσης τους σε καθεμιά. Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα έχει συντελεστές Fourier X_k , και - όπου απαιτείται - ένα δεύτερο περιοδικό σήμα $y(t)$ με περίοδο T_0 έχει συντελεστές Fourier Y_k .

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 $y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X_{-k}^*
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a > 0$	X_k , με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγωγή	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X_{-k}^*, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ X_k = X_{-k} , \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t), x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \mathbb{R}$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t), x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \mathbb{S}$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k ^2$

Πίνακας 5.1: Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

5.7.1.1 Γραμμικότητα

Οι συντελεστές Fourier του αθροίσματος $z(t) = Ax(t) + By(t)$ δίνονται ως

$$Z_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} z(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} (Ax(t) + By(t)) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.218)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} Ax(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0} By(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.219)$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{B}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.220)$$

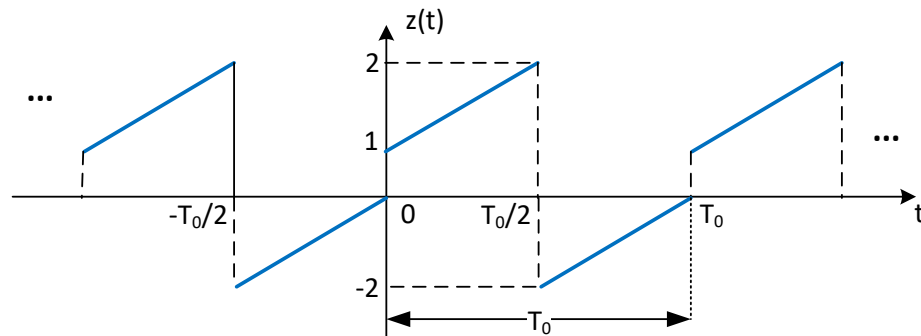
$$= AX_k + BY_k \quad (5.221)$$

Άρα

$$Ax(t) + By(t) \longleftrightarrow AX_k + BY_k \quad (5.222)$$

Παράδειγμα 6.11:

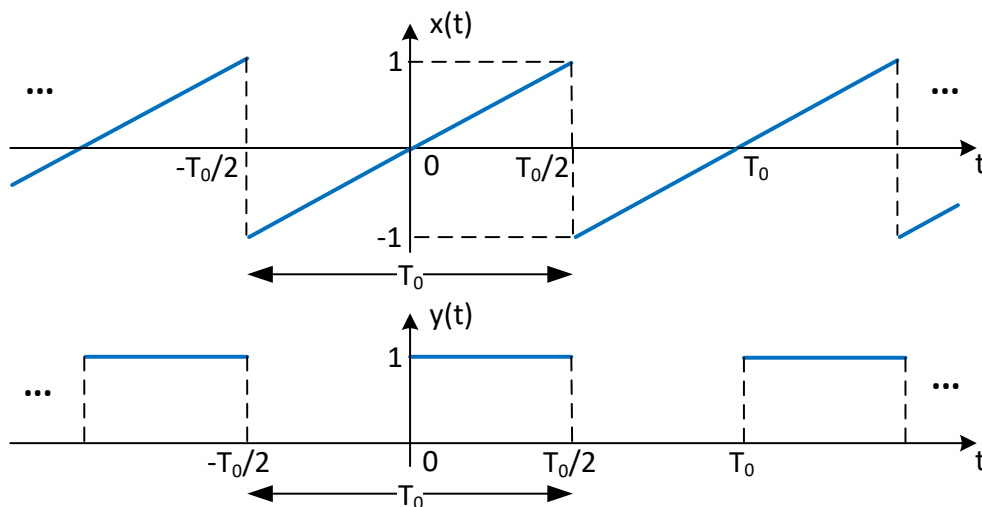
Βρείτε τους συντελεστές Fourier του περιοδικού με περίοδο T_0 σήματος $z(t)$ του Σχήματος 6.27.



Σχήμα 5.27: Εφαρμογή της Γραμμικότητας: περιοδικό σήμα $z(t)$.

Λύση:

Το περιοδικό σήμα του Σχήματος 6.27 μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των περιοδικών σημάτων που φαίνονται στο Σχήμα 6.28. Αυτά τα περιοδικά σήματα όμως είναι γνωστά από τα παραδείγματα. Οι συντελεστές Fourier



Σχήμα 5.28: Εφαρμογή της Γραμμικότητας: περιοδικά σήματα $x(t), y(t)$.

τους είναι οι

$$X_k = \frac{1}{\pi k} (-1)^k e^{j\pi/2} \quad (5.223)$$

$$Y_k = \frac{1}{2\pi k} (1 - (-1)^k) e^{-j\pi/2} \quad (5.224)$$

Άρα οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος του Σχήματος 6.27 είναι

$$Z_k = X_k + Y_k = \frac{1}{\pi k} (-1)^k e^{j\pi/2} + \frac{1}{2\pi k} (1 - (-1)^k) e^{-j\pi/2} \quad (5.225)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ -\frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2} + \frac{1}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ -\frac{2j}{\pi k} \sin(\pi/2), & k \text{ περιττό} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ \frac{2}{\pi k} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \end{cases} \quad (5.226)$$

5.7.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $y(t) = x(t - t_0)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t - t_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 (u+t_0)} du \quad (5.227)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 t_0} e^{-j2\pi k f_0 u} du = \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 u} du \quad (5.228)$$

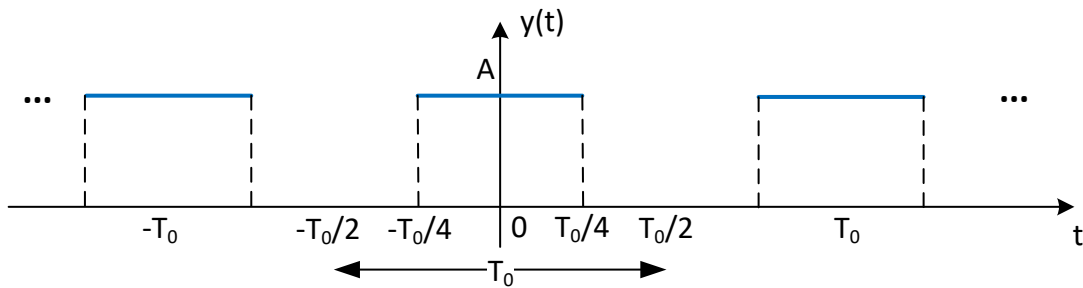
$$= X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0} \quad (5.229)$$

Άρα

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0} \quad (5.230)$$

Παράδειγμα 6.12:

Βρείτε τους συντελεστές Fourier του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 6.29.



Σχήμα 5.29: Εφαρμογή της Χρονικής Μετατόπισης: περιοδικό σήμα $y(t) = x(t - t_0)$.

Λύση:

Το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 6.29 δεν είναι άλλο από το σήμα $x(t)$ του Σχήματος 6.19 μετατοπισμένο κατά $t_0 = -T_0/4$. Οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $y(t)$ θα είναι

$$Y_k = X_k e^{j2\pi k f_0 \frac{T_0}{4}} = \frac{A}{j2\pi k} (1 - (-1)^k) e^{j\pi k/2} = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιο} \\ \frac{A}{\pi k} e^{j\left(\frac{\pi}{2}(k-1)\right)}, & k \text{ περιττό} \end{cases} \quad (5.231)$$

5.7.1.3 Μετατόπιση στη Συχνότητα

Αντικαθιστώντας το δείκτη k των συντελεστών Fourier X_k με $k - M$, όπου M ακέραιος αριθμός, τότε οι συντελεστές μπορούν να γραφούν ως

$$X_{k-M} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi(k-M)f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} e^{j2\pi M f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} (x(t) e^{j2\pi M f_0 t}) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.232)$$

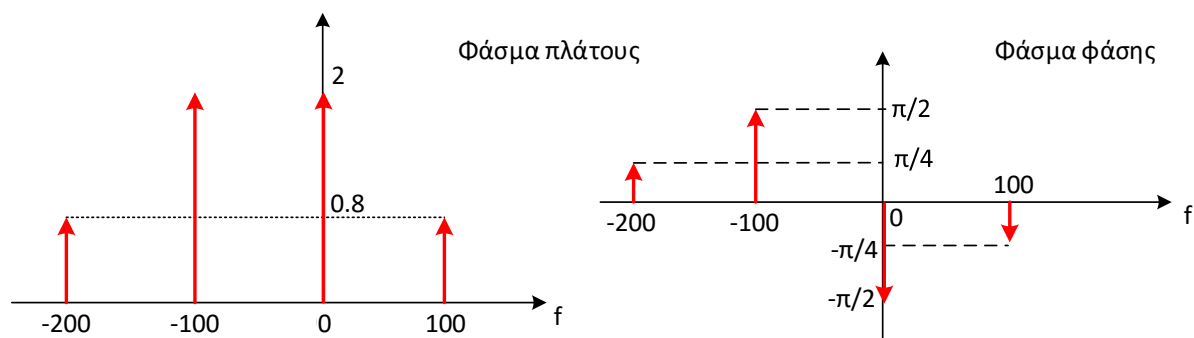
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές X_{k-M} αντιστοιχούν στο περιοδικό σήμα $x(t) e^{j2\pi M f_0 t}$, δηλ. στον πολλαπλασιασμό του αρχικού σήματος $x(t)$ με μια μιγαδική εκθετική συνάρτηση συχνότητας $M f_0$. Σημειώστε ότι η αντικατάσταση $k \leftarrow k - M$ αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση των φασματικών γραμμών κατά M . Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, τότε τα φάσματα πλάτους και φάσης θα έχουν τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία, αντίστοιχα. Μια οποιαδήποτε μετατόπιση των φασμάτων κατά M , οδηγεί σε άρση αυτών των συμμετριών, με αποτέλεσμα το περιοδικό σήμα στο χρόνο να μην είναι πια πραγματικό, όπως φαίνεται και από την παραπάνω ιδιότητα (πολλαπλασιασμός στο χρόνο με ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα).

Άρα

$$x(t) e^{j2\pi M f_0 t} \longleftrightarrow X_{k-M} \quad (5.233)$$

Παράδειγμα 6.13:

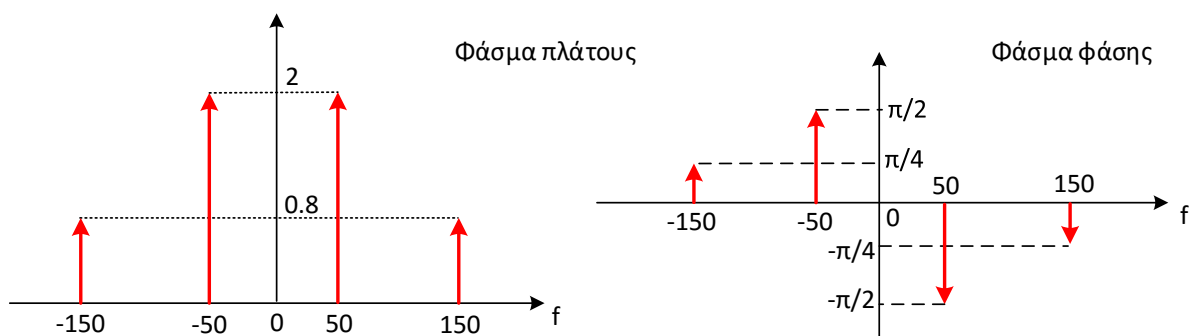
Έστω τα φάσματα του Σχήματος 6.30. Βρείτε το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί σε αυτά.



Σχήμα 5.30: Εφαρμογή της Συχνοτικής Μετατόπισης: μετατοπισμένο φάσμα.

Λύση:

Θα μπορούσαμε να βρούμε αναλυτικά το σήμα στο χρόνο από την πληροφορία των φασμάτων, αλλά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα φάσματα του Σχήματος 6.30 δεν είναι άλλα από τα φάσματα του Σχήματος 6.31, τα οποία έχουν θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 50$ Hz, μετατοπισμένα αριστερά κατά $M = 1$, δηλ. μετατοπισμένα κατά $M = -1$. Τα φάσματα του Σχήματος 6.31 πληροφορούν ότι το περιοδικό σήμα στο χρόνο $x(t)$ δίνεται ως



Σχήμα 5.31: Εφαρμογή της Συχνοτικής Μετατόπισης: μη μετατοπισμένο φάσμα.

$$x(t) = 4 \cos(2\pi 50t - \pi/2) + \cos(2\pi 150t - \pi/4) \quad (5.234)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα, το σήμα στο χρόνο $y(t)$ που αντιστοιχεί στα φάσματα του Σχήματος 6.30 είναι το

$$y(t) = e^{-j2\pi 50t} x(t) = 4e^{-j2\pi 50t} \cos(2\pi 50t - \pi/2) + e^{-j2\pi 50t} \cos(2\pi 150t - \pi/4) \quad (5.235)$$

5.7.1.4 Συζυγία στο Χρόνο

Για ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$, οι συντελεστές Fourier του συζυγούς σήματος $y(t) = x^*(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \right)^* \quad (5.236)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi(-k)f_0 t} dt \right)^* = X_{-k}^* \quad (5.237)$$

Άρα

$$x^*(t) \longleftrightarrow X_{-k}^* \quad (5.238)$$

Παράδειγμα 6.14:

Αν ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = -\frac{2}{\pi k} + \frac{j}{\pi k} \quad (5.239)$$

βρείτε τους συντελεστές του συζυγούς σήματος, $y(t) = x^*(t)$.

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier του συζυγούς του $y(t) = x^*(t)$ είναι

$$Y_k = X_{-k}^* = \frac{2}{\pi k} + \frac{j}{\pi k} \quad (5.240)$$

5.7.1.5 Αντιστροφή στο Χρόνο

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = x(-t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{j2\pi k f_0 u} du \quad (5.241)$$

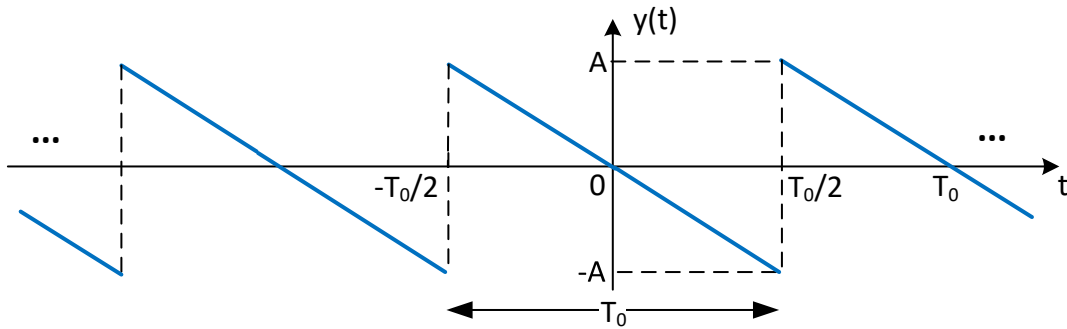
$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(u) e^{-j2\pi(-k)f_0 u} du = X_{-k} \quad (5.242)$$

Άρα

$$x(-t) \longleftrightarrow X_{-k} \quad (5.243)$$

Παράδειγμα 6.15:

Το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 6.32



Σχήμα 5.32: Εφαρμογή της Αντιστροφής στο Χρόνο: περιοδικό σήμα $y(t) = x(-t)$.

δεν είναι άλλο από το περιοδικό σήμα του Σχήματος 6.22 ανεστραμμένο στο χρόνο. Βρείτε τους συντελεστές Fourier του.

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = X_{-k} = -\frac{A}{\pi k}(-1)^{-k}e^{j\pi/2} = \frac{A}{\pi k}(-1)^k e^{-j\pi/2} \quad (5.244)$$

5.7.1.6 Στάθμιση στο Χρόνο

Αν ορίσουμε το περιοδικό σήμα $x(t)$ και το αναπτύξουμε σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.245)$$

τότε το σταθμισμένο στο χρόνο σήμα $y(t) = x(at)$, με $a > 0$, θα είναι

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 (at)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k (af_0) t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k \frac{a}{T_0} t} \quad (5.246)$$

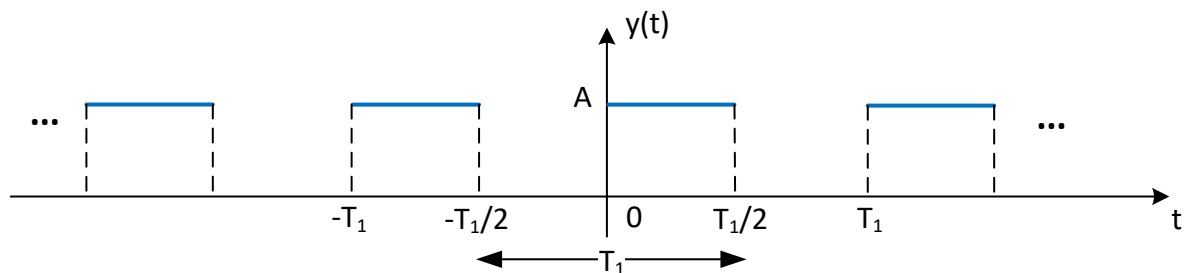
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές X_k δεν μεταβλήθηκαν καθόλου, αλλά άλλαξε η θεμελιώδης συχνότητα από f_0 σε af_0 , και άρα και η περίοδος από T_0 σε $\frac{T_0}{a}$. Αυτό σημαίνει ότι οι αποστάσεις των φασματικών γραμμών στο φάσμα πλάτους και φάσης αλλάζουν!

Άρα

$$x(at) \longleftrightarrow X_k \text{ με } \hat{T}_0 = \frac{T_0}{a} \quad (5.247)$$

Παράδειγμα 6.16:

Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 6.33.



Σχήμα 5.33: Εφαρμογή της Κλιμάκωσης στο Χρόνο: περιοδικό σήμα $y(t) = x(2t)$.

Το περιοδικό αυτό σήμα είναι μια συμπιεσμένη εκδοχή του σήματος του Σχήματος 6.19, κατά παράγοντα $a = 2$. Βρείτε τους συντελεστές Fourier του.

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier Y_k είναι οι ίδιοι με του Παραδείγματος 5.9, δηλ.

$$Y_k = X_k = \begin{cases} \frac{A}{\pi k} e^{-k\pi/2}, & k \text{ περιττό} \\ 0, & k \text{ άρτιο} \end{cases} \quad (5.248)$$

με τη διαφορά ότι η περίοδος είναι ίση με $T_1 = \frac{T_0}{2}$.

5.7.1.7 Περιοδική Συνέλιξη

Έστω το περιοδικό σήμα $z(t)$ που ορίζεται ως

$$z(t) = \int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (5.249)$$

Οι συντελεστές Fourier του δίνονται ως

$$Z_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) \left(\int_{T_0} y(t-\tau)e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) d\tau \quad (5.250)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) T_0 Y_k e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau = T_0 Y_k \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \quad (5.251)$$

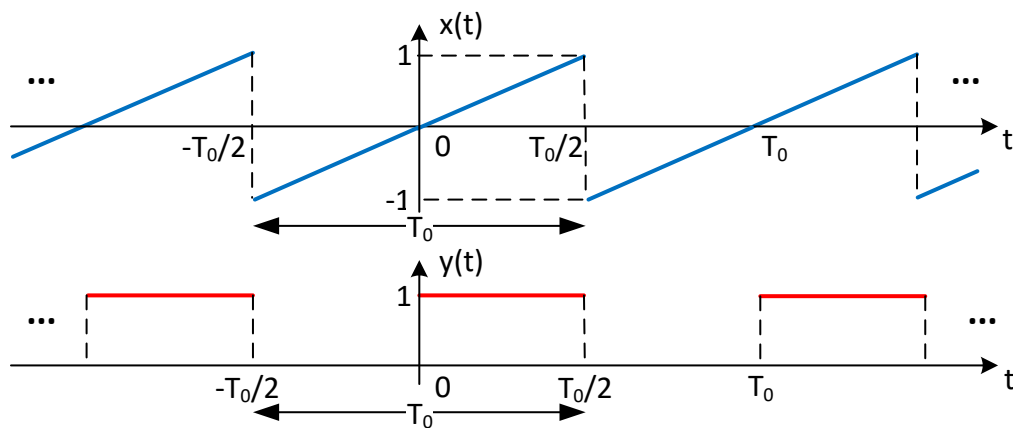
$$= T_0 Y_k X_k \quad (5.252)$$

Άρα

$$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \longleftrightarrow T_0 X_k Y_k \quad (5.253)$$

Παράδειγμα 6.17:

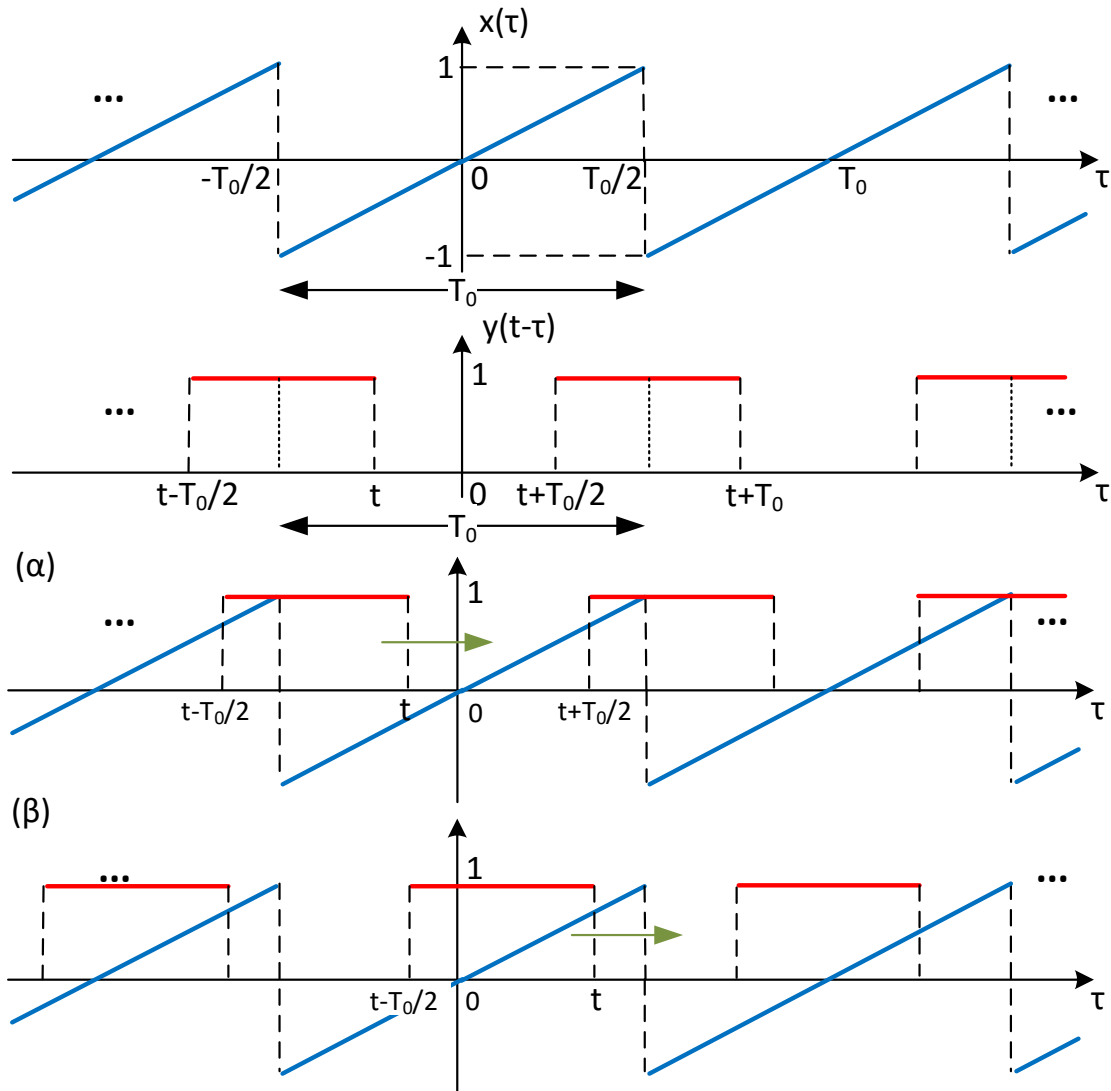
Υπολογίστε την περιοδική συνέλιξη των σημάτων που φαίνονται στο Σχήμα 6.34.



Σχήμα 5.34: Εφαρμογή της Περιοδικής Συνέλιξης στο Χρόνο: περιοδικά σήματα $x(t), y(t)$.

Λύση:

Κατασκευάζοντας το σήμα $y(t-\tau)$, έχουμε τις περιπτώσεις που απεικονίζονται στο Σχήμα 6.35. Η περιοδική



Σχήμα 5.35: Περιπτώσεις Περιοδικής Συνέλιξης στο Χρόνο.

συνέλιξη υπολογίζεται σε μια περίοδο, στο διάστημα $(-T_0/2, T_0/2]$. Στην περίπτωση (α) έχουμε

$$z(t) = \int_{-T_0/2}^t \frac{2}{T_0} \tau d\tau + \int_{t+T_0/2}^{T_0/2} \frac{2}{T_0} \tau d\tau = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^t \tau d\tau + \frac{2}{T_0} \int_{t+T_0/2}^{T_0/2} \tau d\tau \quad (5.254)$$

$$= \left. \frac{2}{T_0} \frac{\tau^2}{2} \right]_{-T_0/2}^t + \left. \frac{2}{T_0} \frac{\tau^2}{2} \right]_{t+T_0/2}^{T_0/2} = \frac{t^2}{T_0} - \frac{T_0}{4} - t - \frac{t^2}{T_0} \quad (5.255)$$

$$= -t - \frac{T_0}{4} \quad (5.256)$$

για $-T_0/2 \leq t < 0$. Στην περίπτωση (β), έχουμε

$$z(t) = \int_{t-T_0/2}^t \frac{2}{T_0} \tau d\tau = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0/2}^t \tau d\tau = \left. \frac{2}{T_0} \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-T_0/2}^t = t - \frac{T_0}{4} \quad (5.257)$$

για $0 \leq t < T_0/2$. Άρα το αποτέλεσμα της περιοδικής συνέλιξης γράφεται σε μια περίοδο ως

$$z(t) = \begin{cases} -t - \frac{T_0}{4}, & -T_0/2 \leq t < 0 \\ t - \frac{T_0}{4}, & 0 \leq t < T_0/2 \end{cases} \quad (5.258)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της περιοδικής συνέλιξης, το περιοδικό αυτό σήμα έχει συντελεστές Fourier ως

$$Z_k = T_0 X_k Y_k \quad (5.259)$$

με X_k, Y_k τους γνωστούς από τα Παραδείγματα 5.9 και 5.10 συντελεστές Fourier, τους οποίους επαναλαμβάνουμε εδώ:

$$X_k = \frac{1}{\pi k} (-1)^k e^{j\pi/2} \quad (5.260)$$

$$Y_k = \frac{1}{2\pi k} e^{-j\pi/2} (1 - (-1)^k) \quad (5.261)$$

Οπότε οι συντελεστές Z_k θα είναι

$$Z_k = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{T_0}{\pi^2 k^2} e^{j\pi}, & k \text{ περιττός} \end{cases} \quad (5.262)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει αναλυτικά ότι το περιοδικό σήμα $z(t)$ έχει πράγματι τους παραπάνω συντελεστές (Άσκηση XXXX).

5.7.1.8 Πολλαπλασιασμός

Για το σήμα $z(t) = x(t)y(t)$, η Σειρά Fourier του δίνεται ως

$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y_l e^{j2\pi(k+l)f_0 t} \quad (5.263)$$

Θέτοντας $m = k + l$, έχουμε

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y_l e^{j2\pi(k+l)f_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{m-l} Y_l e^{j2\pi m f_0 t} \quad (5.264)$$

Από την παραπάνω σχέση είναι εμφανές ότι οι συντελεστές Fourier του σήματος $z(t) = x(t)y(t)$ είναι

$$Z_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l} Y_l \quad (5.265)$$

Άρα

$$x(t)y(t) \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l} Y_l \quad (5.266)$$

Παράδειγμα 6.18:

Έστω το γινόμενο

$$z(t) = x(t)y(t) \quad (5.267)$$

με

$$x(t) = 2 \cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{3}\right) \longleftrightarrow X_{-1} = e^{-j\pi/3}, \quad X_1 = e^{j\pi/3} \quad (5.268)$$

$$y(t) = \cos\left(2\pi 500t - \frac{\pi}{8}\right) \longleftrightarrow Y_{-5} = \frac{1}{2} e^{j\pi/8}, \quad Y_5 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/8} \quad (5.269)$$

με τους συντελεστές Y_k να είναι μη μηδενικοί για $k = \pm 5$, αν θεωρήσουμε το σήμα $y(t)$ ως περιοδικό με περίοδο $T_0 = 1/100 = 0.01$ s, με τους ημιτονοειδείς όρους συχνοτήτων $f_k = 100k$ Hz, $k = 1, 2, 3, 4$ να είναι μηδενικού πλάτους. Παρ' όλο που είναι απλό να βρεθεί εύκολα - μέσω τριγωνομετρικών σχέσεων - το $z(t)$, και στη συνέχεια τα φάσματα πλάτους και φάσης, ας δούμε πως μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Z_k κατευθείαν.

Λύση:
Είναι

$$Z_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l}Y_l = X_{k-5}Y_5 + X_{k+5}Y_{-5} \quad (5.270)$$

Προφανώς το παραπάνω άθροισμα είναι μη μηδενικό μόνον όταν τα γινόμενα $X_{k-5}Y_5$ και $X_{k+5}Y_{-5}$ είναι μη μηδενικά. Άρα

$$Z_6 = X_1Y_5 + X_{11}Y_{-5} = X_1Y_5 = \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{24}} \quad (5.271)$$

$$Z_{-6} = X_{-11}Y_5 + X_{-1}Y_{-5} = X_{-1}Y_{-5} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{24}} \quad (5.272)$$

$$Z_4 = X_{-1}Y_5 + X_9Y_{-5} = X_{-1}Y_5 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{11\pi}{24}} \quad (5.273)$$

$$Z_{-4} = X_{-9}Y_5 + X_1Y_{-5} = X_1Y_{-5} = \frac{1}{2}e^{j\frac{11\pi}{24}} \quad (5.274)$$

με την περίοδο του $z(t)$ να είναι $T_0 = 0.01$ s. Οπότε το $z(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$z(t) = \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{24}}e^{j2\pi 600t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{24}}e^{-j2\pi 600t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{11\pi}{24}}e^{j2\pi 400t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{11\pi}{24}}e^{-j2\pi 400t} \quad (5.275)$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις του Euler, το $z(t)$ είναι

$$z(t) = \cos\left(2\pi 400t - \frac{11\pi}{24}\right) + \cos\left(2\pi 600t + \frac{5\pi}{24}\right) \quad (5.276)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι η εφαρμογή γνωστών τριγωνομετρικών σχέσεων δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

5.7.1.9 Παραγωγήσις

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{d}{dt}x(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt = \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi kf_0t} \Big|_{T_0} - \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \frac{d}{dt}e^{-j2\pi kf_0t}dt \quad (5.277)$$

$$= 0 - \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \frac{1}{-j2\pi kf_0}e^{-j2\pi kf_0t}dt = j2\pi kf_0 \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt \quad (5.278)$$

$$= j2\pi kf_0 X_k \quad (5.279)$$

αφού η τιμή

$$\frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi kf_0t} \Big|_{T_0} = \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi kf_0t} \Big|_0^{T_0} = \frac{1}{T_0}(x(T_0)e^{-j2\pi k} - x(0)) = 0 \quad (5.280)$$

αφού $x(T_0) = x(0)$. Σημειώστε ότι η τιμή Y_0 πρέπει να υπολογιστεί ξεχωριστά.

Άρα

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j2\pi kf_0 X_k} \quad (5.281)$$

Η ιδιότητα της παραγωγισής χρησιμοποιείται συνήθως ως με την αντίστροφη μορφή της, την ιδιότητα της ολοκλήρωσης, που ακολουθεί.

5.7.1.10 Ολοκλήρωση

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt = -\frac{1}{j2\pi kf_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) \left(\frac{d}{dt}e^{-j2\pi kf_0t}\right)dt \quad (5.282)$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k} y(t)e^{-j2\pi kf_0t} \Big|_{T_0} + \frac{1}{j2\pi kf_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)e^{-j2\pi kf_0t}dt \quad (5.283)$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k} y(T_0) e^{-j2\pi k f_0 T_0} + \frac{1}{j2\pi k} y(0) + \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.284)$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k} (y(T_0) - y(0)) + \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.285)$$

$$= \frac{1}{j2\pi k f_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.286)$$

$$= \frac{X_k}{j2\pi k f_0} \quad (5.287)$$

αφού για το περιοδικό σήμα $y(t)$ ισχύει $y(T_0) = y(0)$.

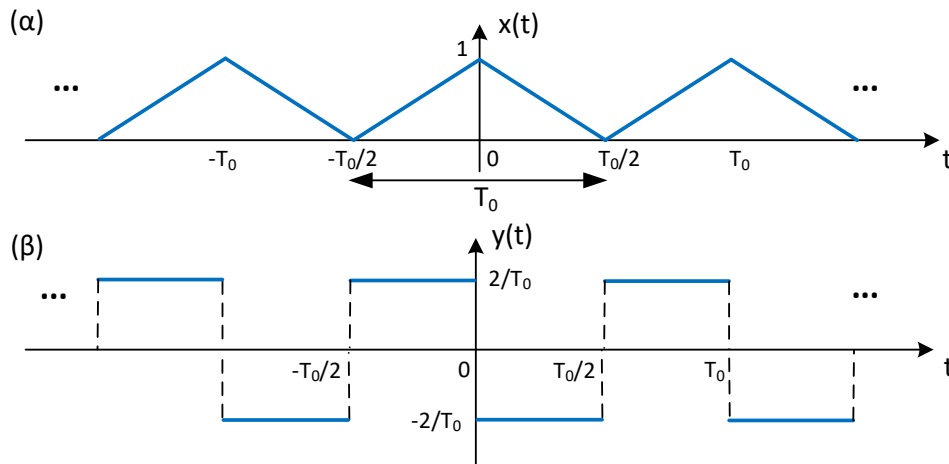
Άρα

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{X_k}{j2\pi k f_0} \quad (5.288)$$

Στην Άσκηση XXXX θα δείξετε ότι η παραπάνω ιδιότητα ισχύει μόνον αν $X_0 = 0$. Αν δεν ισχύει, το Y_0 πρέπει να υπολογιστεί ξεχωριστά.

Παράδειγμα 6.19:

Θεωρώντας το περιοδικό σήμα $x(t)$ του Σχήματος 6.36(α), η παράγωγός του $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ απεικονίζεται στο Σχήμα 6.36(β).



Σχήμα 5.36: Εφαρμογή της Ολοκλήρωσης στο Χρόνο: (α) σήμα $x(t)$, (β) η παράγωγός του, $y(t)$.

Βρείτε τους συντελεστές Fourier του σήματος $x(t)$.

Λύση:

Η εφαρμογή του ορισμού είναι δύσκολη, καθώς απαιτούνται αρκετές πράξεις. Όμως γνωρίζουμε ότι το σήμα $y(t)$ μας είναι γνωστό από τα Παραδείγματα, με $A = 2/T_0$, μόνο που έχει καθυστερήσει κατά $t_0 = T_0/2$. Οπότε οι συντελεστές Fourier του δίνονται ως

$$Y_k = \frac{2}{jk\pi T_0} (1 - e^{-jk\pi}) e^{-j2\pi k f_0 T_0/2} = \frac{2}{jk\pi T_0} (1 - e^{-jk\pi}) e^{-j\pi k} = \frac{2}{jk\pi T_0} (1 - (-1)^k) (-1)^k = \frac{2}{jk\pi T_0} ((-1)^k - 1) \quad (5.289)$$

που καταλήγει στο

$$Y_k = \begin{cases} -\frac{4}{jk\pi T_0}, & k \text{ περιττό} \\ 0, & k \text{ άρτιο} \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{k\pi T_0} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \\ 0, & k \text{ άρτιο} \end{cases} \quad (5.290)$$

Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης, μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Fourier του $x(t)$ ως

$$X_k = \frac{Y_k}{j2\pi k f_0} = \frac{\frac{4}{k\pi T_0} e^{j\pi/2}}{j2\pi k f_0} = \frac{4}{j2\pi^2 k^2} e^{j\pi/2} = \frac{2}{\pi^2 k^2} \quad (5.291)$$

για k περιττά. Μπορείτε να υπολογίσετε την τιμή του X_0 για αυτό το σήμα;

5.7.1.11 Συζυγής Συμμετρία

Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, δηλ. ισχύει ότι $x(t) = x^*(t)$, τότε

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.292)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \right)^* = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi(-k)f_0 t} dt \right)^* \quad (5.293)$$

$$= X_{-k}^* \quad (5.294)$$

Από την παραπάνω σχέση, εξάγουμε ότι

$$X_k = X_{-k}^* \quad (5.295)$$

$$\Re\{X_k\} + j\Im\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\} - j\Im\{X_{-k}\} \quad (5.296)$$

$$\Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\} \text{ και } \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\} \quad (5.297)$$

Επίσης, η πολική μορφή της Σχέσης (6.295) δίνει

$$X_k = X_{-k}^* \quad (5.298)$$

$$|X_k| e^{j\phi_k} = |X_{-k}| e^{-j\phi_{-k}} \quad (5.299)$$

$$|X_k| = |X_{-k}| \text{ και } \phi_k = -\phi_{-k} \quad (5.300)$$

Άρα, για πραγματικά σήματα, το φάσμα πλάτους είναι άρτια συνάρτηση της συχνότητας ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτησή της.

Άρα

$$x(t) = x^*(t) \longleftrightarrow X_k = X_{-k}^* \quad (5.301)$$

Παράδειγμα 6.20:

Ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = -\frac{\pi^2}{2jk^2} \quad (5.302)$$

Ας ελέγξουμε αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό ή μιγαδικό.

Λύση:
Είναι

$$X_k^* = \left(-\frac{\pi^2}{2jk^2} \right)^* = \frac{\pi^2}{2jk^2} \quad (5.303)$$

και

$$X_{-k} = -\frac{\pi^2}{2j(-k)^2} = -\frac{\pi^2}{2jk^2} \quad (5.304)$$

άρα το σήμα δεν είναι πραγματικό.

5.7.1.12 Άρτιο Σήμα

Ένα σήμα λέγεται *άρτιο* όταν ισχύει

$$x(t) = x(-t) \quad \forall t \quad (5.305)$$

Οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt - j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \right) \quad (5.306)$$

Το ολοκλήρωμα

$$-j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.307)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$-j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt = 0 \quad (5.308)$$

Οπότε

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.309)$$

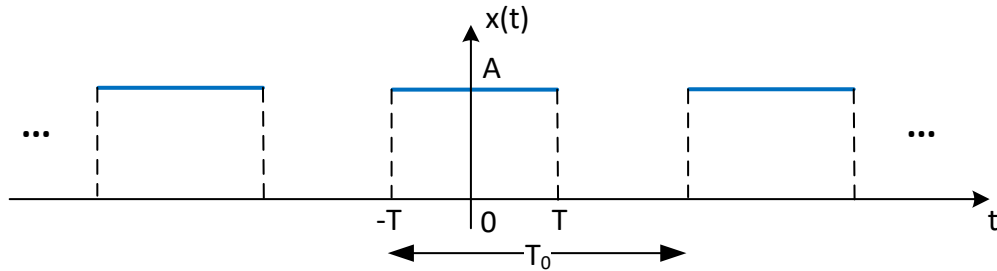
που είναι ασφαλώς πραγματικοί αριθμοί, δηλ. $\Re\{X_k\} = X_k$.

Άρα

$$x(t) \text{ άρτιο} \longleftrightarrow \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.310)$$

Παράδειγμα 6.21:

Δείξτε ότι το περιοδικό σήμα του Σχήματος 6.37



Σχήμα 5.37: Άρτιο σήμα.

έχει πραγματικούς συντελεστές Fourier

Λύση:
Θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T A e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.311)$$

$$= \frac{A}{-j2\pi k} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{-T}^T = -\frac{A}{j2\pi k} (-2j \sin(2\pi k f_0 T)) \quad (5.312)$$

$$= \frac{A}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 T) \quad (5.313)$$

που προφανώς είναι πραγματικοί, δηλ. $\Re\{X_k\} = X_k$. Υπολογίζοντας τους συντελεστές με τη Σχέση (6.309), έχουμε

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T A \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.314)$$

$$= \frac{A}{2\pi k} \sin(2\pi k f_0 t) \Big|_{-T}^T = \frac{A}{2\pi k} (\sin(2\pi k f_0 T) - \sin(-2\pi k f_0 T)) \quad (5.315)$$

$$= \frac{A}{2\pi k} 2 \sin(2\pi k f_0 T) = \frac{A}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 T) \quad (5.316)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα.

5.7.1.13 Περιττό Σήμα

Ένα σήμα λέγεται περιττό όταν ισχύει

$$x(t) = -x(-t) \quad \forall t \quad (5.317)$$

Οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt - j \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \right) \quad (5.318)$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.319)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου περιττής επί άρτιας συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$\int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt = 0 \quad (5.320)$$

Οπότε

$$X_k = -j \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.321)$$

που είναι ασφαλώς φανταστικοί αριθμοί, δηλ. $j\Im\{X_k\} = X_k$.

Άρα

$$x(t) \text{ περιττό} \longleftrightarrow -j \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.322)$$

Παράδειγμα 6.22:

Στο Παράδειγμα 4.11 δείξαμε ότι το περιοδικό σήμα του Σχήματος 6.22 έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = \frac{A}{k\pi} (-1)^k e^{j\pi/2} = j \frac{A}{k\pi} (-1)^k \quad (5.323)$$

που προφανώς είναι φανταστικοί.

Λύση:

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει το παραπάνω αποτέλεσμα με χρήση της Σχέσης (6.321).

5.7.1.14 Άρτιο μέρος

Το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad (5.324)$$

και άρα οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_{e_k} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.325)$$

$$= \frac{1}{2} X_k + \frac{1}{2} X_{-k} = \frac{1}{2} X_k + \frac{1}{2} X_k^* \quad (5.326)$$

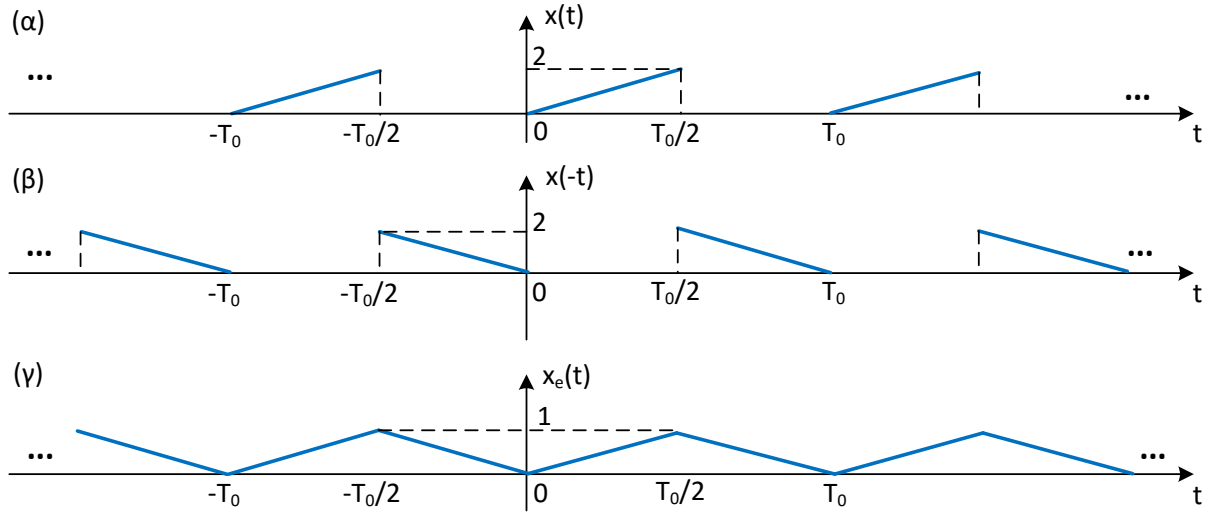
$$= \frac{1}{2} 2\Re\{X_k\} = \Re\{X_k\} \quad (5.327)$$

Άρα

$$x_e(t) \longleftrightarrow \Re\{X_k\} \quad (5.328)$$

Παράδειγμα 6.23:

Στο Σχήμα 6.38 φαίνεται ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, το σήμα $x(-t)$, καθώς και το άρτιο μέρος $x_e(t)$ του $x(t)$.



Σχήμα 5.38: (α) σήμα $x(t)$, (β) σήμα $x(-t)$, (γ) $x_e(t)$: άρτιο μέρος του $x(t)$.

Δείξτε ότι το άρτιο μέρος του σήματος $x_e(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_{ek} = \Re\{X_k\} = \frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) \quad (5.329)$$

Λύση:

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $x(t)$ είναι (Άσκηση XXXX)

$$X_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) + j \frac{(-1)^k}{\pi k} \quad (5.330)$$

Άρα οι συντελεστές Fourier του άρτιου μέρους του σήματος, $x_e(t)$, (Άσκηση XXXX) είναι

$$X_{ek} = \Re\{X_k\} = \frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) \quad (5.331)$$

5.7.1.15 Περιττό μέρος

Το περιττό μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (5.332)$$

και άρα οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_{ok} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.333)$$

$$= \frac{1}{2} X_k - \frac{1}{2} X_{-k} = \frac{1}{2} X_k - \frac{1}{2} X_k^* \quad (5.334)$$

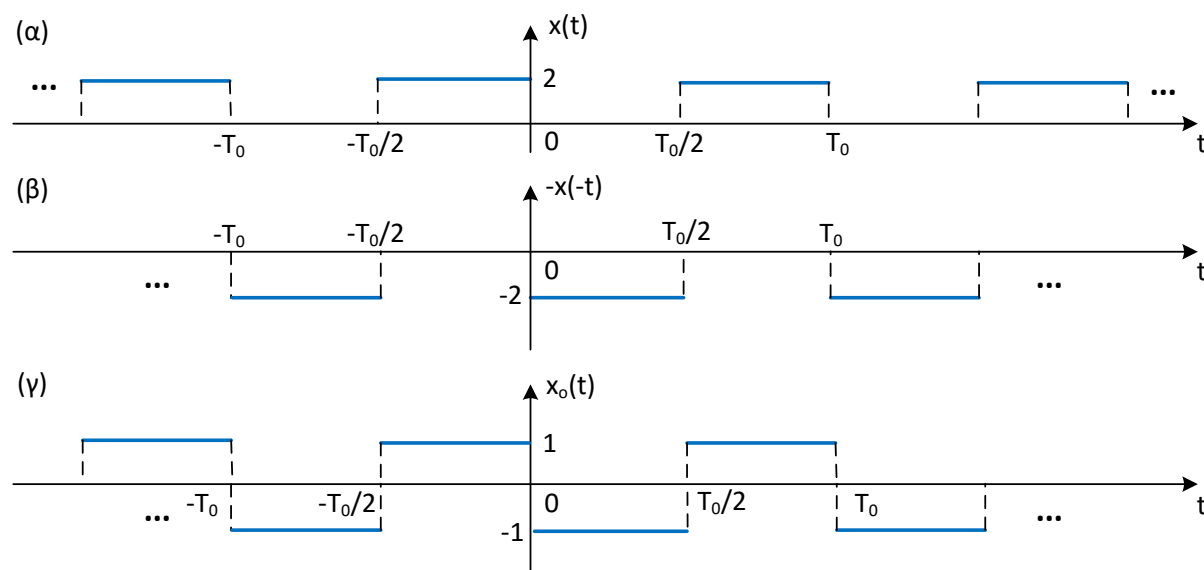
$$= \frac{1}{2} 2j \Im\{X_k\} = j \Im\{X_k\} \quad (5.335)$$

Άρα

$$\boxed{x_o(t) \longleftrightarrow j \Im\{X_k\}} \quad (5.336)$$

Παράδειγμα 6.24:

Στο Σχήμα 6.39 φαίνεται ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, το σήμα $-x(-t)$, καθώς και το περιττό μέρος $x_o(t)$ του $x(t)$.



Σχήμα 5.39: (α) σήμα $x(t)$, (β) σήμα $-x(-t)$, (γ) $x_o(t)$: περιττό μέρος του $x(t)$.

Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier του περιττού μέρους $x_o(t)$ είναι

$$X_{o_k} = j\Im\{X_k\} = -j\frac{1}{\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \quad (5.337)$$

Λύση:

Το σήμα $x(t)$ δεν είναι άλλο από το σήμα του Παραδείγματος 6.9 με πλάτος $A = 2$, κι έχοντας υποστεί αντιστροφή χρόνου. Άρα οι συντελεστές Fourier του θα είναι

$$X_k = 2\frac{1}{j2\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \quad (5.338)$$

Οι συντελεστές Fourier του περιττού μέρους του σήματος, $x_o(t)$, είναι

$$X_{o_k} = j\Im\{X_k\} = -j\frac{1}{\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \quad (5.339)$$

Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται από το Παράδειγμα 6.8, αφού το περιττό μέρος $x_o(t)$ που συζητάμε είναι το περιοδικό σήμα του Παραδείγματος 6.8, έχοντας υποστεί αντιστροφή στο χρόνο.

5.7.1.16 Θεώρημα του Parseval

Έστω ότι το περιοδικό σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.340)$$

Η ισχύς του σήματος δίνεται ως

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right|^2 dt \quad (5.341)$$

Το σύνολο $\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ περιέχει στοιχεία που είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Μπορούμε να δείξουμε ότι λόγω της ορθογωνιότητας, η ενέργεια του αθροίσματός τους ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ενεργειών, δηλ.

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right|^2 dt \quad (5.342)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right)^* dt \quad (5.343)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 t} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \right) dt \quad (5.344)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{+\infty} X_l X_k^* e^{j2\pi(l-k)f_0 t} \right) dt \quad (5.345)$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_0^{T_0} dt + \frac{1}{T_0} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{+\infty} X_l X_k^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt \quad (5.346)$$

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (5.347)$$

Οπότε

$$P_x = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_0^{T_0} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \quad (5.348)$$

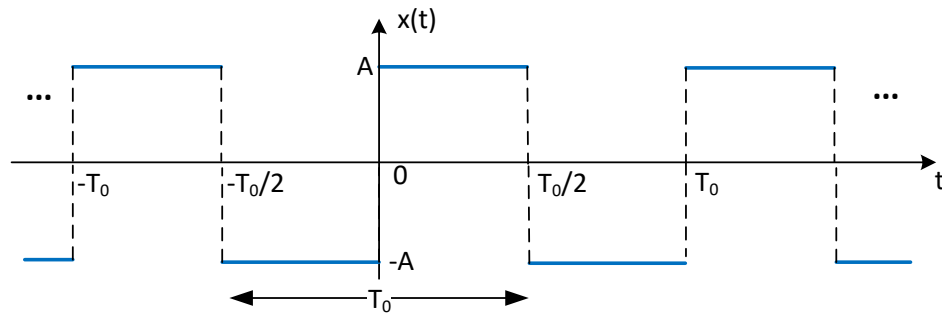
που είναι και το ζητούμενο.

Άρα

$$\boxed{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2} \quad (5.349)$$

Παράδειγμα 6.25:

Υπολογίστε την ισχύ P_x του περιοδικού σήματος $x(t)$ του Σχήματος 6.16, το οποίο επαναλαμβάνουμε εδώ για ευκολία.



Σχήμα 5.40: Θεώρημα του Parseval για το περιοδικό σήμα του παραδείγματος 6.8.

Λύση:

Η ισχύς του σήματος υπολογίζεται ως

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_0^{\frac{T_0}{2}} A^2 dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} A^2 dt \right) = A^2 \quad (5.350)$$

Βρήκαμε νωρίτερα ότι οι συντελεστές Fourier του σήματος είναι

$$X_k = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\pi/2} \quad (5.351)$$

για περιττά k . Άρα

$$|X_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2 k^2} \quad (5.352)$$

Το Θεώρημα του Parseval δίνει

$$P_x = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2} \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4A^2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{4} = A^2 \quad (5.353)$$

γιατί μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} \quad (5.354)$$

Ως τώρα αναλύσαμε μια μέθοδο αναπαράστασης ενός περιοδικού σήματος ως ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών περιοδικών σημάτων των οποίων οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους. Αυτή η αναπαράσταση (Σειρά Fourier), καθώς και τα συμπεράσματά της, είναι πολύτιμη σε πολλές εφαρμογές. Όμως, η Σειρά Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για περιοδικά σήματα. Όλα όμως τα σήματα στην πράξη είναι μη περιοδικά (θυμηθείτε ότι ένα περιοδικό σήμα ξεκινά από το $-\infty$ και εκτείνεται ως το $+\infty$).

Αυτό μπορεί να υπερκεραστεί με την αναπαράσταση μη περιοδικών σημάτων ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Αυτό δεν είναι άλλο από τον περίφημο *μετασχηματισμό Fourier*, που θα συζητήσουμε άμεσα.