

Κεφάλαιο 6

Ο Μετασχηματισμός Fourier

6.1 Εισαγωγή στο Μετασχ. Fourier

Ο μετασχ. Fourier ορίζεται εύκολα ως η επέκταση των σειρών Fourier, όταν η περίοδος του σήματος τείνει στο άπειρο, όταν δηλαδή το σήμα πλησιάζει στο να μην είναι πια περιοδικό. Άρα αφορά κυρίως ΜΗ περιοδικά σήματα. Τότε τα X_k παύουν να ορίζονται για ακέραια k και για συγκεκριμένες συχνότητες kf_0 , και ορίζονται πλέον για κάθε συχνότητα f , σε ένα συνεχές φάσμα $X(f)$.

Διαισθητικά, μπορούμε να “αποδείξουμε” αυτή τη σχέση ως εξής. Δείτε το Σχήμα 6.1. Στο Σχήμα 6.1(α), βλέπουμε το φάσμα πλάτους ενός περιοδικού σήματος, που έχει περίοδο $T_0 = 5$ s. Βλέπετε πως οι φασματικές γραμμές είναι σχετικά αραιές. Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0 = 1/T_0 = 0.2$ Hz και τα πολλαπλάσιά της βρίσκονται στις θέσεις $kf_0 = 0.2k$, $k \in \mathbb{Z}$ Hz.

Δείτε τώρα το Σχήμα 6.1(β). Βλέπετε πως αν μεγαλώσουμε την περίοδο, και γίνει $T_0 = 10$ s, τότε η θεμελιώδης συχνότητα γίνεται $f_0 = 1/T_0 = 0.1$ Hz και είναι πιο μικρή, και άρα και τα πολλαπλάσιά της, $kf_0 = 0.1k$, $k \in \mathbb{Z}$ Hz, θα είναι πιο κοντά το ένα με το άλλο. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο φάσμα πλάτους. Οι φασματικές γραμμές είναι πολύ πιο κοντά απ’ ό,τι πριν. Σκεφτείτε να επαναλαμβάνουμε συνέχεια αυτή τη διαδικασία για όλο και πιο μεγάλες περιόδους T_0 . Η θεμελιώδης συχνότητα f_0 γίνεται συνεχώς όλο και πιο μικρή, και οι φασματικές γραμμές έρχονται όλο και πιο κοντά, καθώς τα kf_0 είναι όλο και πιο κοντά το ένα στο άλλο.

Όταν το T_0 γίνει πολύ πολύ (πολύ! :-)) μεγάλο, και τείνει προς το $+\infty$ – δηλ. το σήμα δέν θεωρείται πια περιοδικό – όπως στο Σχήμα 6.1(γ), τότε το f_0 θα γίνει απειροστά μικρό, και τα πολλαπλάσιά του, kf_0 , με $k \in \mathbb{Z}$, θα είναι τόσο κοντά το ένα με το άλλο που δε θα ορίζουν πια διακριτές τιμές, αλλά ένα συνεχή άξονα του f ! Έτσι, οι φασματικές γραμμές θα είναι απειροστά κοντά μεταξύ τους, τόσο κοντά που πλέον δε θα είναι φασματικές γραμμές σε συγκεκριμένες συχνότητες, αλλά θα ορίζουν μια συνεχή συνάρτηση $X(f)$! Αυτή είναι η διαισθητική προσέγγιση της σχέσης μετασχ. Fourier και της σειράς Fourier.

Αν θεμελιώσουμε τώρα τη διαισθητική μας προσέγγιση, ξεκινώντας από τη Σειρά Fourier που μας αναπτύσσει το σήμα σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συχνοτήτων kf_0

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.1)$$

Αντικαθιστώντας το γνωστό μας ολοκλήρωμα του X_k , επιλέγοντας ως περίοδο το διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$,

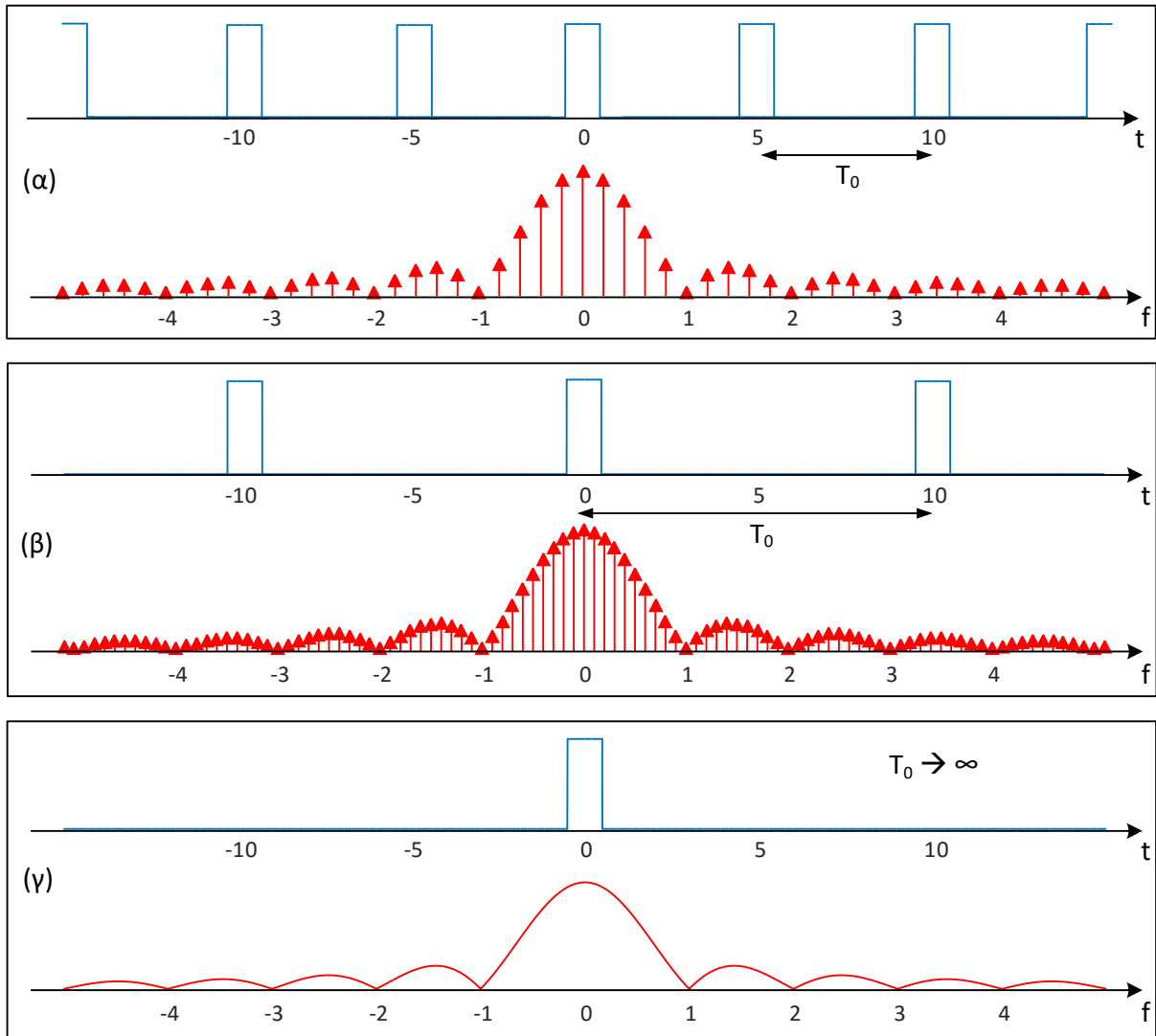
$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (6.2)$$

θα έχουμε

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.3)$$

Όταν το $T_0 \rightarrow \infty$, τότε το $f_0 = \frac{1}{T_0} \rightarrow df$, δηλ. σε μια απειροστά μικρή ποσότητα, τόσο μικρούλα που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια μικρή μετατόπιση μιας συνεχούς μεταβλητής f . Άρα, $kf_0 \rightarrow f$, σε μια συνεχή μεταβλητή f που ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό (συχνότητα).

Επίσης, όταν $T_0 \rightarrow \infty$, το $1/T_0$ μπροστά από το ολοκλήρωμα τείνει στο df . Τέλος, αφού πλέον δεν έχουμε



Σχήμα 6.1: Διαισθητική απόδειξη της σχέσης μεταξύ των σειρών Fourier και του μετασχη. Fourier.

ακέραιες πολλαπλάσιες συχνότητες του f_0 , το άθροισμα ($\sum$) της σειράς επάνω στα k μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ($\int$) πάνω στη συνεχή μεταβλητή f .

Οπότε, τελικά

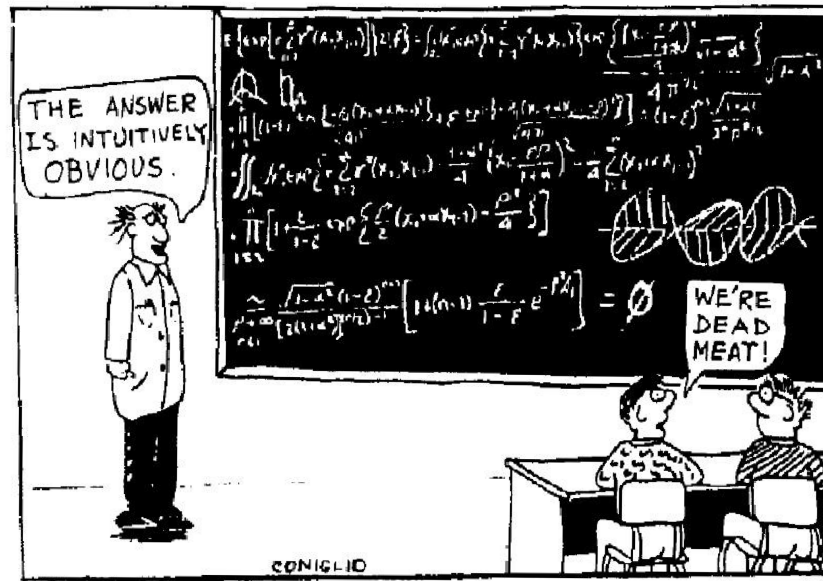
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) e^{j2\pi k f_0 t} \xrightarrow{T_0 \rightarrow \infty} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f t} \quad (6.4)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{X(f)} e^{j2\pi f t} df \quad (6.5)$$

με

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (6.6)$$

να είναι ο περίφημος Μετασχηματισμός Fourier.



Σχήμα 6.2: Βασιστείτε στη διαίσθησή σας!! ☺

6.2 Ο μετασχηματισμός Fourier

Αποδείξαμε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier ορίζεται ως:

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.7)$$

και ο αντίστροφος μετασχ. Fourier ως

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (6.8)$$

Η Σχέση (6.7) μας αναλύει ένα μη περιοδικό σήμα σε ένα συνεχές φάσμα $X(f)$, ενώ η Σχέση (6.8) μας συνθέτει το σήμα $x(t)$ ως ένα συνεχές άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων, με συντελεστές $X(f)$.

Η ομοιότητα με τις Σειρές Fourier είναι, όπως είδαμε, αρκετά μεγάλη. Όπως για πραγματικά περιοδικά σήματα, δυο μιγαδικά εκθετικά στις συχνότητες $\pm kf_0$ δίνουν ένα συνημίτονο συχνότητας kf_0 , αυτό συμβαίνει και εδώ. Έστω ένα απειροστά μικρό εύρος συχνοτήτων Δf του συνεχούς φάσματος του σήματος. Επειδή αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και το αντίστοιχο εύρος $-\Delta f$ και το πλάτος καθενός - υποθέτοντας ότι το εύρος Δf είναι τόσο μικρό που το πλάτος του είναι σταθερό - θα είναι $X(\Delta f)$ και $X^*(\Delta f)$ αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων συζυγίας συντελεστών για τα πραγματικά σήματα. Άρα προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} X(\Delta f)e^{j\Delta ft} + X^*(\Delta f)e^{-j\Delta ft} &= |X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + (|X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}})^*e^{-j2\pi\Delta ft} \\ &= |X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + |X(\Delta f)|e^{-j\phi_{\Delta f}}e^{-j2\pi\Delta ft} \\ &= |X(\Delta f)|e^{j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} + |X(\Delta f)|e^{-j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} \\ &= 2|X(\Delta f)|\cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους $2|X(\Delta f)|$ για ένα πολύ μικρό εύρος συχνοτήτων Δf . Μάλιστα, αν θέσουμε $\Delta f \rightarrow df$ και αθροίσουμε ως προς όλες τις απειροστά μικρές συχνοτικές μεταβολές df (δηλ. ολοκληρώσουμε ως προς df), θα λάβουμε

$$x(t) = 2 \int_0^{+\infty} |X(f)| \cos(2\pi ft + \phi(f)) df \quad (6.10)$$

με $|X(f)|$ και $\phi(f)$ το μέτρο και τη φάση αντίστοιχα, του μιγαδικού (εν γένει) μετασχ. Fourier. Έτσι, και ο

μετασχηματισμός Fourier αναλύει ένα σήμα σε ημίτονα στην πραγματικότητα! Μια τέτοια ανάλυση όπως τη δείξαμε μόλις βοηθά πολύ στην καλύτερη κατανόηση του μετασχηματισμού, ενώ αναδεικνύει και τις ομοιότητές του με τη Σειρά Fourier.

Ο μετασχ. Fourier μπορεί εν γένει να γραφεί ως

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (6.12)$$

$$= \Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = R(f) + jI(f) \quad (6.13)$$

με $R(f), I(f)$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού, αντίστοιχα. Άρα ο μετασχ. Fourier είναι εν γένει μιγαδικό σήμα, με το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος να υπολογίζεται ως

$$R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (6.14)$$

$$I(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (6.15)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συνεπάγεται ότι

$$R(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(-2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt = R(f) \quad (6.16)$$

που σημαίνει ότι το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού είναι ένα άρτιο σήμα, ενώ

$$I(-f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(-2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = -I(f) \quad (6.17)$$

που σημαίνει ότι το φανταστικό του μέρους είναι περιττό σήμα. Πολλές φορές χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $X_R(f), X_I(f)$ για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα.

Μια εναλλακτική και πολύ χρήσιμη αναπαράσταση του μετασχ. Fourier είναι η πολική μορφή, δηλ.

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)} \quad (6.18)$$

με

$$|X(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} \quad (6.19)$$

να είναι το μέτρο του μετασχηματισμού (δηλ. το φάσμα πλάτους) και

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \left(\frac{I(f)}{R(f)} \right) \quad (6.20)$$

η φάση του μετασχηματισμού (δηλ. το φάσμα φάσης). Βλέπουμε λοιπόν πως όπως η Σειρά Fourier ανέλυε ένα περιοδικό σήμα στο φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του, το ίδιο συμβαίνει και εδώ.

6.2.1 Ύπαρξη του μετασχ. Fourier

Όπως προείπαμε, ο μετασχ. Fourier προέκυψε από την ανάγκη εύρεσης του συχνοτικού περιεχομένου μη περιοδικών σημάτων. Για να υπάρχει ο μετασχ. Fourier, πρέπει το ολοκλήρωμα της Σχέσης (6.7) να συγκλίνει, δηλ.

$$|X(f)| < \infty \iff \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)e^{-j2\pi ft}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (6.21)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι το $x(t)$ πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο.

Τα σήματα ενέργειας έχουν σχεδόν πάντα μετασχ. Fourier. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, δεν έχει μετασχηματισμό Fourier γιατί δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Αυτό δεν είναι τυχαίο, γιατί είναι το

σήμα αυτό δεν είναι σήμα ενέργειας, και για αυτά τα σήματα ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει, γιατί το ολοκλήρωμα της Σχέσης (6.7) δε συγκλίνει. Εν γένει, σήματα που δεν είναι σήματα ενέργειας δε σημαίνει απαραίτητα ότι δεν έχουν μετασχ. Fourier - ίσως έχουν αλλά αυτός δεν υπολογίζεται μέσω του ολοκληρώματος της Σχέσης (6.7). Περισσότερα όμως θα συζητήσουμε παρακάτω.

6.2.2 Χαρακτηριστικά παραδείγματα

Παρακάτω παρουσιάζονται τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα σημάτων και η μεθοδολογία υπολογισμού του μετασχ. Fourier τους.

Παράδειγμα 6.1:

Ας δείξουμε ότι

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) \quad (6.22)$$

με

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (6.23)$$

όπως στο Σχήμα 6.3(α).

Λύση:
Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.24)$$

$$= A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt = A \frac{1}{(-j2\pi f)} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-T/2}^{T/2} \quad (6.25)$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f} (e^{-j2\pi fT/2} - e^{j2\pi fT/2}) = \frac{A}{j2\pi f} (e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}) \quad (6.26)$$

Η παρένθεση μοιάζει πολύ με τη σχέση του Euler για το ημίτονο

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (6.27)$$

Έτσι, είναι

$$X(f) = \frac{A}{j2\pi f} (e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}) = \frac{2A}{2\pi f} \frac{e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}}{2j} = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi fT) \quad (6.28)$$

Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (6.23), για να γράψουμε πιο όμορφα το αποτέλεσμα. Η σχέση αυτή θέλει έναν όρο π μέσα στο ημίτονο και στον παρονομαστή. Πρέπει κάπως να το βάλουμε, και επίσης να φτιάξουμε κατάλληλα το πηλίκο για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Σχέση (6.23).

Θα είναι

$$X(f) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi fT) = A \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = AT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = AT \frac{\sin(\pi(fT))}{\pi(fT)} \quad (6.29)$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (6.23) και να πάρουμε τελικά

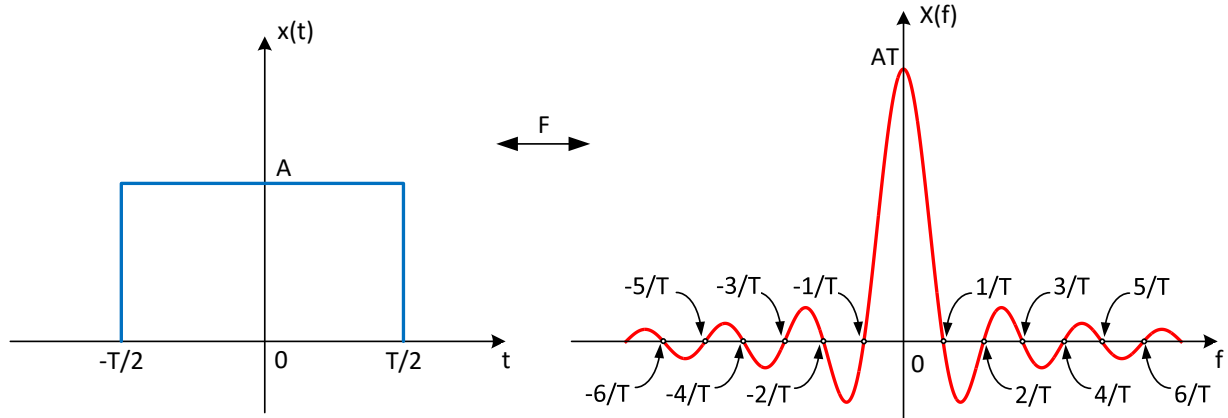
$$X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) \quad (6.30)$$

Το ζεύγος

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) \quad (6.31)$$

είναι πολύ χρήσιμο και θα το θεωρούμε δεδομένο από δω και στο εξής. Παρατηρήστε ότι το $\operatorname{sinc}(fT)$ μηδενίζεται στις θέσεις όπου μηδενίζεται ο αριθμητής $\sin(\pi fT)$, δηλ. στις $f = \pm \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$. Προσέξτε ότι για $f = 0$ υπάρχει απροσδιοριστία, οπότε το αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί μέσω κανόνων De L' Hospital (χάντε το!) και ισούται με 1. Το $X(f)$ είναι εν γένει μιγαδική συνάρτηση, άρα κι αυτή μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή ως

$$X(f) = |X(f)| e^{j\angle X(f)} \quad (6.32)$$



Σχήμα 6.3: Σήμα τετραγωνικού παλμού και ο Μετασχ. Fourier του.

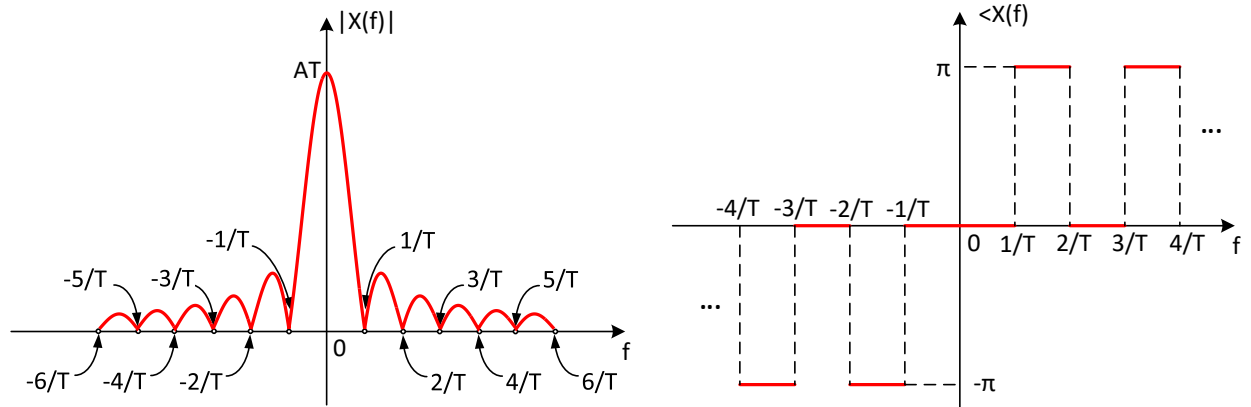
όπου το $|X(f)|$ είναι πάντα θετικό, ως μέτρο, και το $\angle X(f)$ η φάση του μετασχ. Fourier, αντίστοιχα. Για το παράδειγμά μας, έστω $A = 1$, και θα είναι

$$|X(f)| = T \left| \text{sinc}(fT) \right| \quad (6.33)$$

και

$$\angle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{(1+l)}{T} \leq f < \frac{(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{(2+l)}{T} \leq f < -\frac{(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} \leq |f| < \frac{(l+1)}{T} \end{cases} \quad (6.34)$$

με $l = 0, 2, 4, \dots$. Ας μείνουμε λίγο στις τιμές της φάσης. Το $X(f)$ είναι σε κάποια διαστήματα θετικό και σε



Σχήμα 6.4: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$.

κάποια αρνητικό. Δείτε το Σχήμα 6.3 με προσοχή. Εκεί που το $X(f)$ είναι θετικό, η φάση είναι μηδέν. Εκεί που είναι αρνητικό, έχουμε δυο περιπτώσεις:

- αν βρισκόμαστε σε θετικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(f) = -T \text{sinc}(fT) = T \text{sinc}(fT) e^{j\pi}, \quad \frac{1+l}{T} \leq f < \frac{2+l}{T}. \quad (6.35)$$

Άρα η φάση είναι $\angle X(f) = \pi$ σε αυτά τα διαστήματα.

- αν βρισκόμαστε σε αρνητικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(f) = -T \operatorname{sinc}(fT) = T \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi}, \quad -\frac{2+l}{T} \leq f < -\frac{1+l}{T}. \quad (6.36)$$

Άρα η φάση είναι $\angle X(f) = -\pi$ σε αυτά τα διαστήματα.

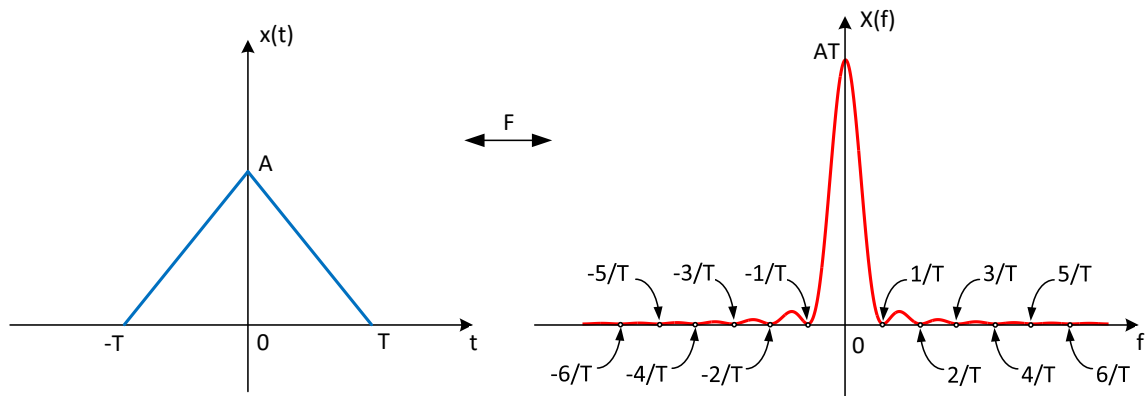
Το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού φαίνονται στο Σχήμα 6.4. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τετραγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f| \rightarrow \infty$, ενώ η φάση είναι μηδενική για κάποια ημίτονα ή $\pm\pi$ για κάποια άλλα. Επίσης παρατηρήστε τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης, αντίστοιχα! Δεν είναι τυχαία - αναλύουμε πραγματικά σήματα, και όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια, οι συμμετρίες αυτές εξακολουθούν να ισχύουν και για το μετασχηματισμό Fourier!

Παράδειγμα 6.2:

Δείξτε ότι

$$x(t) = A \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}^2(fT) \quad (6.37)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα (6.5).



Σχήμα 6.5: Σήμα τριγωνικού παλμού και ο Μετασχ. Fourier του.

Λύση:

Προσέξτε, εδώ η μισή διάρκεια του τριγώνου είναι T , και όχι ολόκληρη, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Ο λόγος θα γίνει εμφανής τώρα. Θα είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T}^0 \left(\frac{A}{T}t + A\right) e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^T \left(-\frac{A}{T}t + A\right) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.38)$$

$$= \frac{A}{T} \int_{-T}^0 t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_{-T}^0 e^{-j2\pi ft} dt - \frac{A}{T} \int_0^T t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.39)$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\int_a^b t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2} (at - 1) \Big|_a^b \quad (6.40)$$

και έχουμε

$$X(f) = \frac{A}{T} \int_{-T}^0 t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_{-T}^0 e^{-j2\pi ft} dt - \frac{A}{T} \int_0^T t e^{-j2\pi ft} dt + A \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.41)$$

$$= \frac{A}{T} \frac{e^{-j2\pi ft}}{(-j2\pi f)^2} (-j2\pi ft - 1) \Big|_{-T}^0 - \frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-T}^0 - \frac{A}{T} \frac{e^{-j2\pi ft}}{(-j2\pi f)^2} (-j2\pi ft - 1) \Big|_0^T - \frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_0^T \quad (6.42)$$

$$= \frac{A}{2T(\pi f)^2} (1 - \cos(2\pi fT)) \quad (6.43)$$

μετά από απλή αλλά βαρετή άλγεβρα, την οποία παραλείπουμε. Με χρήση της ταυτότητας

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad (6.44)$$

έχουμε

$$X(f) = \frac{A}{2T(\pi f)^2} 2 \sin^2(\pi f T) = \frac{A}{T(\pi f)^2} \sin^2(\pi f T) \quad (6.45)$$

Αν προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση sinc, θα έχουμε

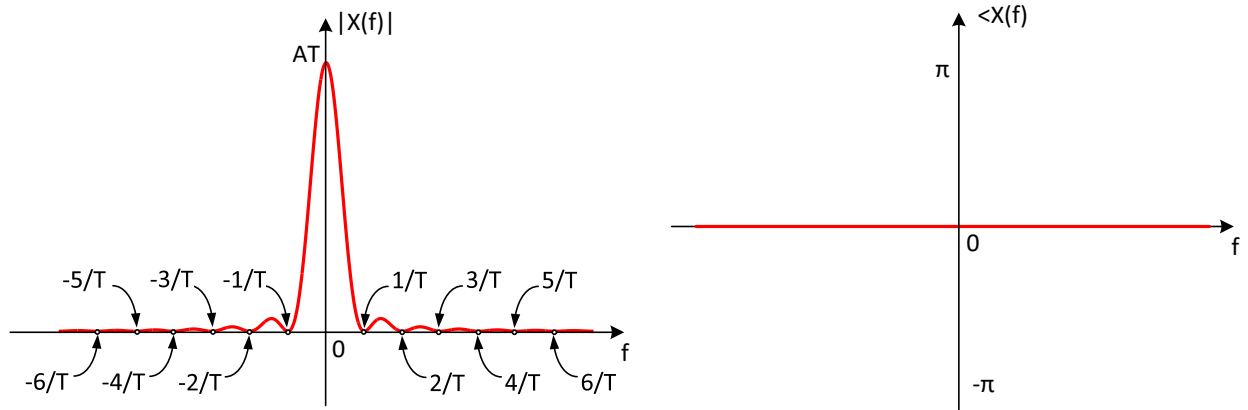
$$X(f) = \frac{A}{T(\pi f)^2} \sin^2(\pi f T) = \frac{AT}{T^2 \pi^2 f^2} \sin^2(\pi f T) \quad (6.46)$$

$$= AT \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2 = AT \text{sinc}^2(fT) \quad (6.47)$$

Άρα τελικά

$$x(t) = A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \text{sinc}^2(fT) \quad (6.48)$$

Προφανώς, επειδή το $X(f)$ είναι μόνιμα θετικό, για κάθε f , η φάση του είναι πάντα μηδέν. Το φάσμα πλάτους



Σχήμα 6.6: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$.

φαίνεται στο Σχήμα (6.5) και είναι ο ίδιος ο μετασχ. Fourier. Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 6.6. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τριγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f| \rightarrow \infty$, ενώ η φάση είναι μηδενική όλα τα ημίτονα - άρα δε χρειάζεται καμιά μετατόπιση στα ημίτονα αυτά ώστε να συντεθεί ο τριγωνικός παλμός. Επίσης παρατηρήστε ξανά τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 6.3:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier ενός άλλου συνήθους σήματος ενέργειας, του

$$x(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0 \quad (6.49)$$

Λύση:
Είναι:

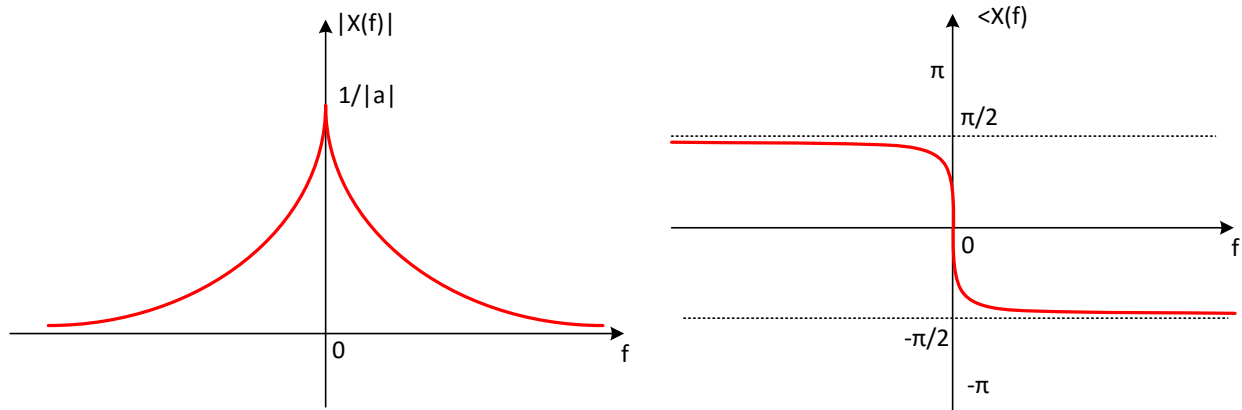
$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt \\ &= \frac{1}{-(a+j2\pi f)} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{a+j2\pi f} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right) \end{aligned} \quad (6.50)$$

Εδώ τώρα πρέπει να σταματήσουμε. Για να μην αποκλίνει αυτό το όριο στο ∞ , θα πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι αρνητικό, ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν. Όμως το $a + j2\pi f$ είναι μιγαδικός αριθμός. Ως γνωστόν,

οι μιγαδικοί αριθμοί δεν έχουν διάταξη, άρα το να πούμε ότι πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι θετικό ή αρνητικό είναι άνευ νοήματος! Όμως στην Παράγραφο ;; βρήκαμε τις τιμές αυτού του ορίου, στη Σχέση (6.51), την οποία επαναλαμβάνουμε για ευκολία εδώ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a+jb)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} e^{jbt} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \infty, & a > 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

Για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα, θα πρέπει να είναι $a > 0$, οπότε τελικά



Σχήμα 6.7: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

$$X(f) = -\frac{1}{a + j2\pi f} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right) = -\frac{1}{a + j2\pi f} (0 - 1) = \frac{1}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (6.52)$$

Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, είναι

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (6.53)$$

Παρατηρήστε ότι ο μετασχ. Fourier είναι μιγαδικό σήμα, και μπορεί να διαχωριστεί στο άθροισμα του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους ως

$$X(f) = \Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} + j \frac{-2\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (6.54)$$

Το μέτρο και η φάση του δίνονται ως

$$|X(f)| = \frac{1}{|a + j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (6.55)$$

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{\Im\{X(f)\}}{\Re\{X(f)\}} = -\tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} \quad (6.56)$$

και φαίνονται στο Σχήμα 6.7. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τετραγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f| \rightarrow \infty$, ενώ η φάση παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$.

Παράδειγμα 6.4:

Ας υπολογίσουμε επίσης το μετασχ. Fourier ενός άλλου σήματος ενέργειας, του

$$x(t) = e^{at}u(-t), \quad a > 0 \quad (6.57)$$

Λύση:

Βλέπετε ότι μοιάζει αρκετά με το προηγούμενο παράδειγμα. Ας δούμε τι θα συμβεί. Έχουμε

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a-j2\pi f} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-j2\pi f)t}\right) \quad (6.58)$$

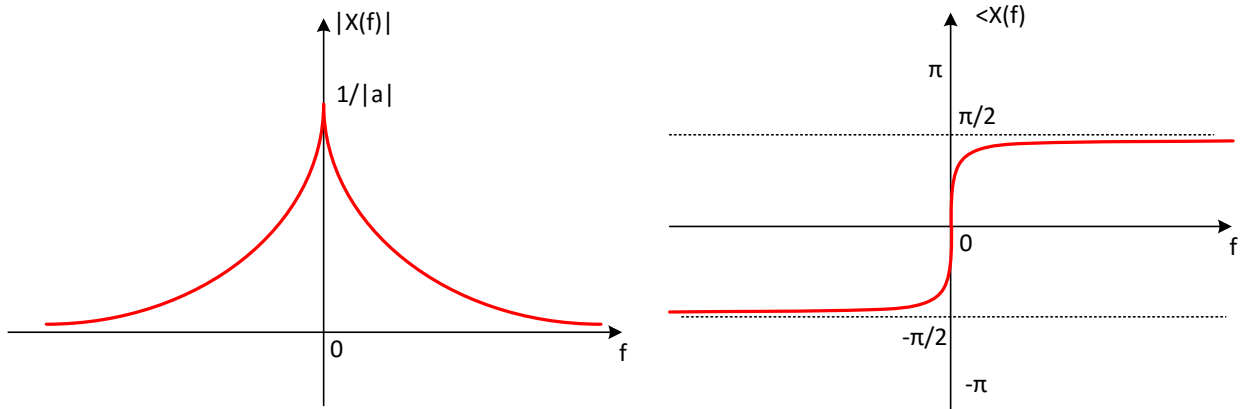
Με ακριβώς όμοιο με πριν σκεπτικό, η συνάρτηση e^{at} φθίνει στο 0 όταν $t \rightarrow -\infty$, **μόνο αν** $a > 0$, που ισχύει από υπόθεση. Άρα

$$X(f) = \frac{1}{a-j2\pi f} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-j2\pi f)t}\right) = \frac{1}{a-j2\pi f} (1-0) = \frac{1}{a-j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (6.59)$$

Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$, είναι

$$x(t) = e^{at}u(-t), \quad a > 0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a-j2\pi f} \quad (6.60)$$

Αν εξετάσουμε την πολική μορφή του μετασχηματισμού, τότε θα δούμε ότι είναι



Σχήμα 6.8: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$.

$$|X(f)| = \frac{1}{|a-j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (6.61)$$

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{\Im\{X(f)\}}{\Re\{X(f)\}} = \tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} \quad (6.62)$$

Το Σχήμα 6.8 απεικονίζει το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού. Παρατηρήστε ότι ενώ το μέτρο του μετασχ. Fourier είναι ίδιο με του Παραδείγματος 6.30, η φάση είναι αντίθετη! Αυτό σημαίνει ότι για να συνθέσουμε το σήμα $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ημίτονα ίδιου πλάτους με αυτά που συνθέτουν το $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, μόνο που οι φάσεις του θα είναι αντίθετες!

Παράδειγμα 6.5:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα $\delta(t)$.

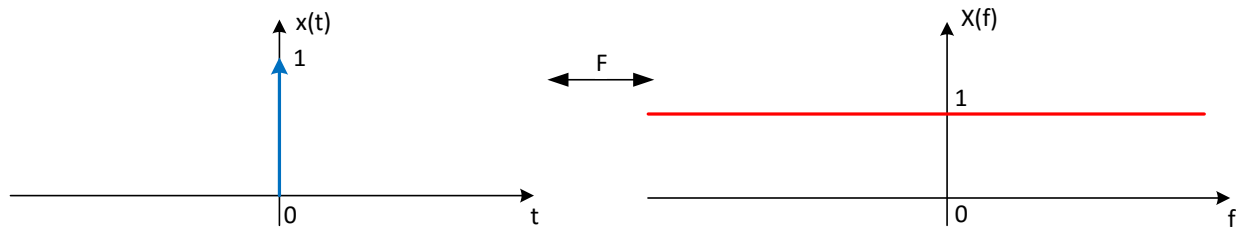
Λύση:
Είναι

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=0} = 1 \quad (6.63)$$

από τις γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. Άρα πολύ απλά

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(f) = 1 \quad (6.64)$$

Το ζεύγος αυτό αναπαρίσταται στο Σχήμα 6.9. Ερμηνεύοντας αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να πούμε ότι για να

Σχήμα 6.9: Σήμα $x(t) = \delta(t)$ και μετασχ. Fourier του.

συνθέσουμε ένα τόσο “ακαριαίο” σήμα στο χρόνο όπως το $x(t) = \delta(t)$ χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των δυνατών συχνοτήτων (όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα), με σταθερό, μοναδιαίο πλάτος και μηδενική φάση!

Παράδειγμα 6.6:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα $\delta(t - t_0)$.

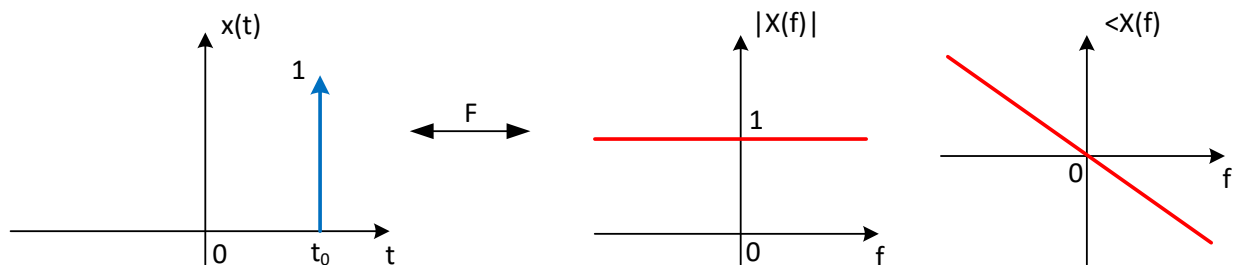
Λύση:
Είναι

$$F\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=t_0} = e^{-j2\pi ft_0} \quad (6.65)$$

από τις γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. Άρα πολύ απλά

$$x(t) = \delta(t - t_0) \longleftrightarrow X(f) = e^{-j2\pi ft_0} \quad (6.66)$$

Το ζεύγος αυτό αναπαρίσταται στο Σχήμα 6.10. Ερμηνεύοντας αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να πούμε ότι για

Σχήμα 6.10: Σήμα $x(t) = \delta(t)$ και μετασχ. Fourier του σε μέτρο και φάση.

να συνθέσουμε ένα τόσο “ακαριαίο” σήμα στο χρόνο όπως το $x(t) = \delta(t - t_0)$ χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των δυνατών συχνοτήτων (όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα), με σταθερό, μοναδιαίο πλάτος και γραμμική φάση!

Από τα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να εξάγουμε μερικές σχέσεις που θα είναι χρήσιμες στη συνέχεια:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df \quad (6.67)$$

$$\delta(t \pm t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t \pm t_0)} df \quad (6.68)$$

Ας δούμε και δυο παραδείγματα χρήσης αντίστροφου μετασχ. Fourier, του οποίου τα αποτελέσματα θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

Παράδειγμα 6.7:

Ας υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα στο χώρο της συχνότητας, $\delta(f)$.

Λύση:

Θα έχουμε τότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi ft} \Big|_{f=0} = 1 \quad (6.69)$$

Οπότε με αυτό το αποτέλεσμα βρήκαμε το μετασχ. Fourier του σταθερού σήματος! Άρα πολύ απλά

$$x(t) = 1 \longleftrightarrow X(f) = \delta(f) \quad (6.70)$$

Παράδειγμα 6.8:

Ας υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier της μετατοπισμένης συνάρτησης Δέλτα στο χώρο της συχνότητας, $\delta(f - f_0)$.

Λύση:

Θα έχουμε τότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_0 t} \Big|_{f=f_0} = e^{j2\pi f_0 t} \quad (6.71)$$

Άρα

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \delta(f - f_0) \quad (6.72)$$

Από τα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να εξάγουμε μερικές σχέσεις που θα είναι χρήσιμες στη συνέχεια:

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.73)$$

$$\delta(f \pm f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f \pm f_0)t} dt \quad (6.74)$$

6.3 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Υπάρχουν πολλές ιδιότητες του μετασχ. Fourier που βοηθούν να αποφεύγουμε την επαναλαμβανόμενη χρήση του ορισμού. Στον Πίνακα 6.1 απεικονίζονται οι περισσότερες. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε καθεμιά από αυτές, παραθέτοντας και ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της.

6.3.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Fourier $X(f)$, και - όπου απαιτείται - ένα δεύτερο σήμα $y(t)$ έχει μετασχ. Fourier $Y(f)$.

6.3.1.1 Γραμμικότητα

Ο μετασχ. Fourier του αθροίσματος $z(t) = Ax(t) + By(t)$ δίνεται ως

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax(t) + By(t)) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.75)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Ax(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} By(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.76)$$

$$= A \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + B \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.77)$$

$$= AX(f) + BY(f) \quad (6.78)$$

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(f)$ $Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f - f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{f}{a}\right)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυσικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f) = X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\ X(f) = X(-f) , \\ \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$

Πίνακας 6.1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier

Παράδειγμα 6.9:

Έστω το σήμα

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0, \quad \forall t \quad (6.79)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Λύση:

Το παραπάνω σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο σημάτων ως

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \quad (6.80)$$

με μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} = \frac{a - j2\pi f + a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)(a - j2\pi f)} \quad (6.81)$$

$$= \frac{2a}{(a + j2\pi f)(a - j2\pi f)} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (6.82)$$

6.3.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Ο μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = x(t - t_0)$ δίνεται ως

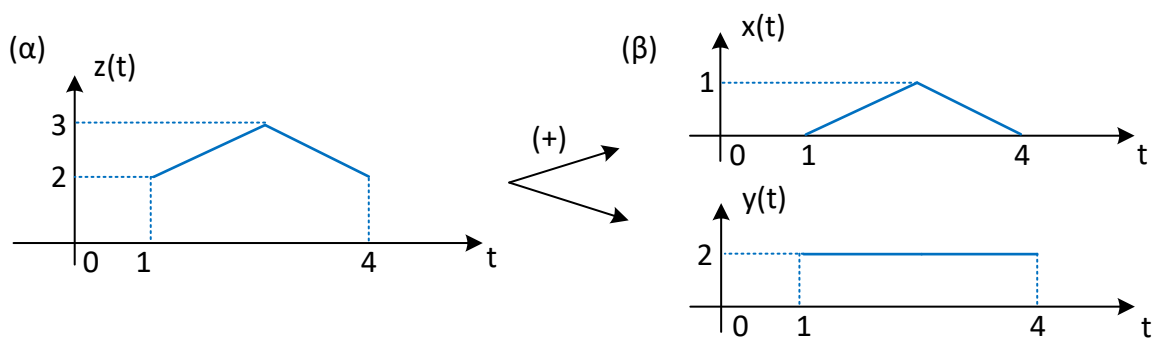
$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f (u+t_0)} du \quad (6.83)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f t_0} e^{-j2\pi f u} du = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f u} du \quad (6.84)$$

$$= X(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (6.85)$$

Παράδειγμα 6.10:

Έστω το σήμα $z(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 6.11(α).



Σχήμα 6.11: Εφαρμογή της Χρονικής Μετατόπισης: σήματα $z(t), x(t), y(t)$.

Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Λύση:

Μπορεί κανείς να γράψει το $z(t)$ ως άθροισμα δυο μετατοπισμένων γνωστών σημάτων $x(t), y(t)$, τα οποία φαίνονται στο Σχήμα 6.11(β) ως

$$z(t) = x(t) + y(t) \quad (6.86)$$

Τα $x(t), y(t)$ είναι τα γνωστά μας σήματα

$$x(t) = \text{tri}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}\right) \longleftrightarrow X(f) = \frac{3}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{3}{2}f\right) e^{-j5\pi f} \quad (6.87)$$

$$y(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{3}\right) \longleftrightarrow Y(f) = 6\text{sinc}(3f)e^{-j5\pi f} \quad (6.88)$$

Οπότε το $z(t)$ είναι

$$z(t) = \text{tri}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}\right) + \text{rect}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{3}\right) \quad (6.89)$$

και ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Z(f) = \frac{3}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{3}{2}f\right)e^{-j5\pi f} + 6\text{sinc}(3f)e^{-j5\pi f} \quad (6.90)$$

6.3.1.3 Μετατόπιση στη συχνότητα

Ο μετασχ. Fourier ενός σήματος $x(t)$ είναι $X(f)$. Έστω ότι μετατοπίζουμε το φάσμα κατά $f = \pm f_0$, με $f_0 > 0$, δηλ. έχουμε το $X(f \pm f_0)$. Το σήμα στο χρόνο $y(t)$ που αντιστοιχεί σε αυτό το φάσμα είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f \pm f_0)e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi(u \mp f_0)t} du \quad (6.91)$$

$$= e^{\mp j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut} du = e^{\mp j2\pi f_0 t} x(t) \quad (6.92)$$

Παράδειγμα 6.11:

Έστω ο μετασχ. Fourier ενός σήματος ως

$$X(f) = 2\text{sinc}(2(f - 4))e^{j2\pi 2(f-4)} \quad (6.93)$$

Βρείτε το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό αυτό.

Λύση:

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$X(f) = Y(f - 4) = 2\text{sinc}(2(f - 4))e^{j2\pi 2(f-4)} \quad (6.94)$$

και από την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα έχουμε

$$x(t) = e^{j2\pi 4t} y(t) \quad (6.95)$$

με

$$y(t) = F^{-1}\{Y(f)\} = F^{-1}\{2\text{sinc}(2f)e^{j2\pi f}\} = \text{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) \quad (6.96)$$

από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης. Άρα το σήμα $x(t)$ είναι το

$$x(t) = e^{j2\pi 4t} \text{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) \quad (6.97)$$

6.3.1.4 Συζυγές σήμα στο χρόνο

Για ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, το συζυγές σήμα $y(t) = x^*(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt \right)^* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^* = X^*(-f) \quad (6.98)$$

Παράδειγμα 6.12:

Γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = 1 + j\delta(t - 2) \longleftrightarrow X(f) = \delta(f) + je^{-j4\pi f} \quad (6.99)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του $x^*(t)$.

Λύση:

Σύμφωνα με την ιδιότητα, θα είναι

$$F\{x^*(t)\} = X^*(-f) = (\delta(-f) + je^{-j4\pi(-f)})^* = \delta(f) - je^{j4\pi(-f)} = \delta(f) - je^{-j4\pi f} \quad (6.100)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\delta(x) = \delta(-x)$ και την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης. Πράγματι, αναλυτικά,

$$F\{x^*(t)\} = F\{1 - j\delta(t-2)\} = \delta(f) - je^{-j4\pi f} \quad (6.101)$$

6.3.1.5 Αντιστροφή στο χρόνο

Το σήμα $y(t) = x(-t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-j2\pi ft} dt = - \int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{j2\pi fu} du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{j2\pi fu} du = X(-f) \quad (6.102)$$

Παράδειγμα 6.13:

Στο Παράδειγμα 6.3 δείξαμε ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (6.103)$$

και στο Παράδειγμα 6.4 δείξαμε ότι

$$y(t) = e^{at}u(-t), \quad a > 0 \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (6.104)$$

Τα παραπάνω ζεύγη μπορούν να αποδειχθούν από την ιδιότητα της αντιστροφής στο χρόνο.

Λύση:

Είναι

$$x(-t) = e^{-a(-t)}u(-t) = e^{at}u(-t) = y(t) \longleftrightarrow X(-f) = \frac{1}{a + j2\pi(-f)} = \frac{1}{a - j2\pi f} = Y(f) \quad (6.105)$$

που αποτελεί το ζεύγος της Σχέσης (6.104).

6.3.1.6 Στάθμιση στο χρόνο

Ας θεωρήσουμε το σήμα $y(t) = x(at)$, $a > 0$. Ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u} du = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (6.106)$$

Για το σήμα $y(t) = x(at)$, $a < 0$, ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u} du = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u} du = -\frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (6.107)$$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (6.108)$$

Παράδειγμα 6.14:

Ας θεωρήσουμε το γνωστό μας σήμα

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (6.109)$$

το οποίο έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = T \text{sinc}(fT) \quad (6.110)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(2t)$.

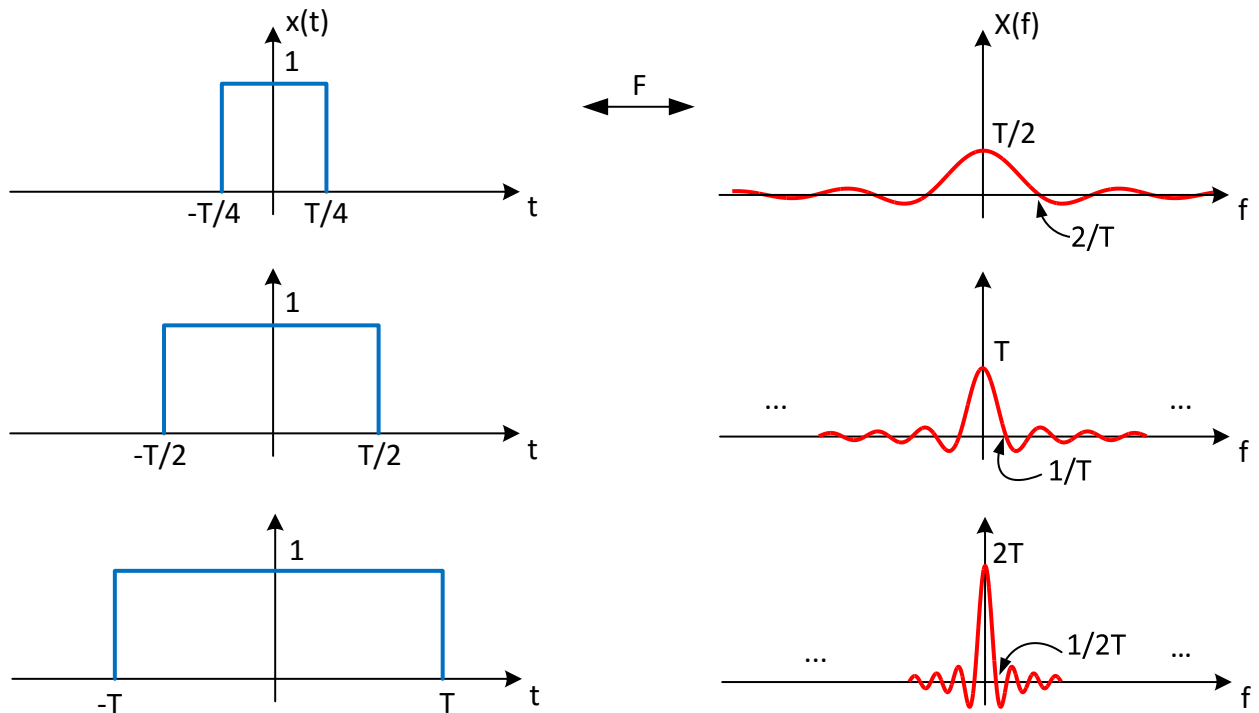
Λύση:

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, θα έχουμε

$$x(2t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{2}X\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{T}{2}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) \quad (6.111)$$

$$x\left(\frac{t}{2}\right) = \text{rect}\left(\frac{t/2}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \longleftrightarrow 2X(2f) = 2T\text{sinc}(2fT) \quad (6.112)$$

Τα παραπάνω απεικονίζονται στο Σχήμα 6.12. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική γιατί μας πληροφορεί ότι



Σχήμα 6.12: Εφαρμογή της Χρονικής Κλιμάκωσης: σήματα χρόνου και συχνότητας.

δεν μπορούμε να έχουμε μικρή διάρκεια τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας. Αυτή η εγγενής ιδιότητα του μετασχ. Fourier είναι πολύ χρήσιμη στη φασματική ανάλυση σημάτων.

6.3.1.7 Συνέλιξη στο χρόνο

Ο μετασχ. Fourier της συνέλιξης δυο σημάτων στο χρόνο είναι

$$F\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t))e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.113)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.114)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-j2\pi ft} dt \right) d\tau \quad (6.115)$$

$$= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (6.116)$$

$$= X(f)Y(f) \quad (6.117)$$

όπου στη Σχέση (6.115) έγινε χρήση της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό. Μας πληροφορεί ότι η πράξη της συνέλιξης στο χρόνο μετατρέπεται σε γινόμενο στο χώρο της συχνότητας. Γνωρίζουμε ήδη ότι η συνέλιξη αποτελεί σημαντικότερη πράξη στο χώρο των συστημάτων. Αργότερα θα δούμε πως λειτουργεί αυτή η ιδιότητα στο χώρο της συχνότητας των συστημάτων.

Παράδειγμα 6.15:

Θα μιλήσουμε για τη συνέλιξη αναλυτικότερα στη συνέχεια.

6.3.1.8 Δυικότητα

Είναι

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (6.118)$$

Θέτουμε $u = -t$, και τότε

$$x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi fu} df \quad (6.119)$$

και αλλάζοντας τις μεταβλητές u, f μεταξύ τους, έχουμε

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{-j2\pi fu} du = F\{X(t)\} \quad (6.120)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σπουδαίο, γιατί εκτός των άλλων, για κάθε ζεύγος μετασχηματισμού Fourier, μας δίνει άλλο ένα (το δυικό του)!

Παράδειγμα 6.16:

Ας δούμε το γνωστό μας σήμα

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (6.121)$$

που έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = AT\text{sinc}(fT) \quad (6.122)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $X(t)$.

Λύση:

Αν μεταφέρουμε τη συνάρτηση $\text{sinc}(\cdot)$ στο χρόνο, θα έχουμε το σήμα

$$X(t) = AT\text{sinc}(tT) \quad (6.123)$$

και σύμφωνα με το θεώρημα της δυικότητας, ο μετασχ. Fourier του θα είναι

$$x(-f) = \text{Arect}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{Arect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (6.124)$$

λόγω αρτιότητας της συνάρτησης $\text{rect}(\cdot)$.

6.3.1.9 Πολλαπλασιασμός στο χρόνο

Ο μετασχ. Fourier του γινομένου δυο σημάτων στο χρόνο είναι

$$F\{x(t)y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.125)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut} du \right) y(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.126)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-u)t} dt \right) du \quad (6.127)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)du \quad (6.128)$$

$$= X(f) * Y(f) \quad (6.129)$$

Άρα το γινόμενο δυο σημάτων στο χρόνο μετατρέπεται σε συνέλιξη στο χώρο της συχνότητας.

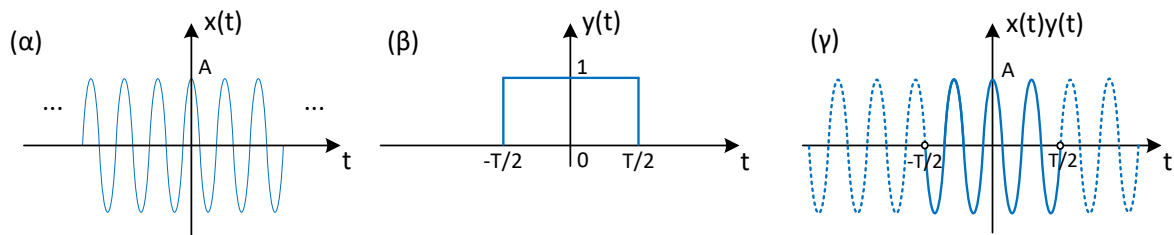
Παράδειγμα 6.17:

Ας θεωρήσουμε δυο απλά σήματα, τα

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (6.130)$$

$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (6.131)$$

Τα σήματα αυτά, καθώς και το γινόμενο $x(t)y(t)$ φαίνονται στο Σχήμα 6.13.



Σχήμα 6.13: Εφαρμογή του Γινομένου στο Χρόνο: σήματα (α) $x(t)$, (β) $y(t)$, (γ) $x(t)y(t)$.

Βρείτε το μετασχ. Fourier του γινομένου τους.

Λύση:

Παρατηρήστε ότι το γινόμενο ενός σήματος με το τετραγωνικό παλμό “κόβει” ένα τμήμα του σήματος που αντιστοιχεί στη διάρκεια του παλμού. Αναζητούμε πλέον το μετασχ. Fourier του σήματος $z(t) = x(t)y(t)$. Η ιδιότητα του γινομένου στο χρόνο δηλώνει ότι ο μετασχ. Fourier ενός γινομένου σημάτων ισούται με τη συνέλιξη των μετασχ. Fourier τους. Γνωρίζουμε ότι

$$X(f) = \frac{A}{2}F\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{A}{2}F\{e^{-j2\pi f_0 t}\} = \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0) \quad (6.132)$$

$$Y(f) = T\text{sinc}(fT) \quad (6.133)$$

με το μετασχ. Fourier του ημιτόνου να προκύπτει από τις Σχέσεις 6.74. Το $X(f)$ αποτελείται από συναρτήσεις Δέλτα, και μπορούμε να δείξουμε ότι για μια οποιαδήποτε συνάρτηση $X(f)$ ισχύει

$$X(f) * \delta(f-f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-f_0)X(f-u)du = X(f-u)\Big|_{u=f_0} = X(f-f_0) \quad (6.134)$$

από τις ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. Άρα τελικά

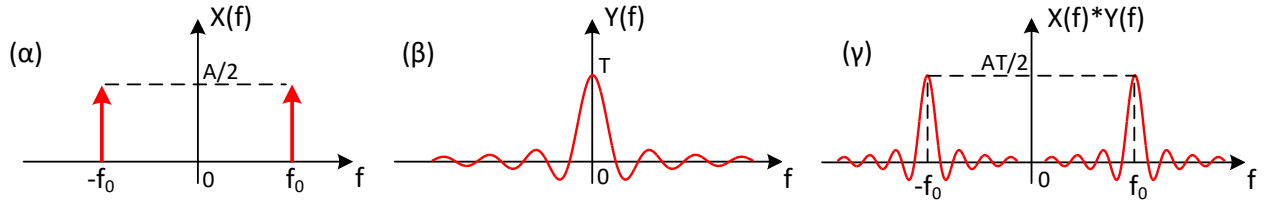
$$Z(f) = X(f) * Y(f) = \frac{AT}{2}\text{sinc}(T(f-f_0)) + \frac{AT}{2}\text{sinc}(T(f+f_0)) \quad (6.135)$$

Τα σήματα αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 6.14. Το παράδειγμα αυτό είναι μια καλή ευκαιρία να σκεφτεί κανείς την επιρροή της διάρκειας του τετραγωνικού παλμού στο φάσμα πλάτους. Τι συμβαίνει στο φάσμα πλάτους του γινομένου των σημάτων όταν η διάρκεια του τετραγωνικού παλμού είναι μεγάλη; Τι συμβαίνει όταν είναι μικρή;

6.3.1.10 Παραγωγή στη συχνότητα

Παραγωγίζοντας το μετασχ. Fourier $X(f)$ του σήματος $x(t)$ έχουμε

$$\frac{d}{df}X(f) = \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{d}{df}e^{-j2\pi ft}dt \quad (6.136)$$



Σχήμα 6.14: Εφαρμογή του Γινομένου στο Χρόνο: σήματα (α) $X(f)$, (β) $Y(f)$, (γ) $X(f) * Y(f)$.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j2\pi t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-j2\pi tx(t))e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.137)$$

$$= -j2\pi F\{tx(t)\} \quad (6.138)$$

$$F\{tx(t)\} = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f) \quad (6.139)$$

Παράδειγμα 6.18:

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$y(t) = te^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (6.140)$$

Λύση:

Θα ήταν χρονοβόρο να λύσει κανείς το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού αναλυτικά. Με χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης στη συχνότητα, έχουμε

$$y(t) = te^{-at}u(t) = tx(t) \quad (6.141)$$

με $x(t) = e^{-at}u(t)$. Άρα

$$Y(f) = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f) = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{1}{(a + j2\pi f)^2} \quad (6.142)$$

6.3.1.11 Παραγώγιση στο χρόνο

Το σήμα $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.143)$$

$$= x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.144)$$

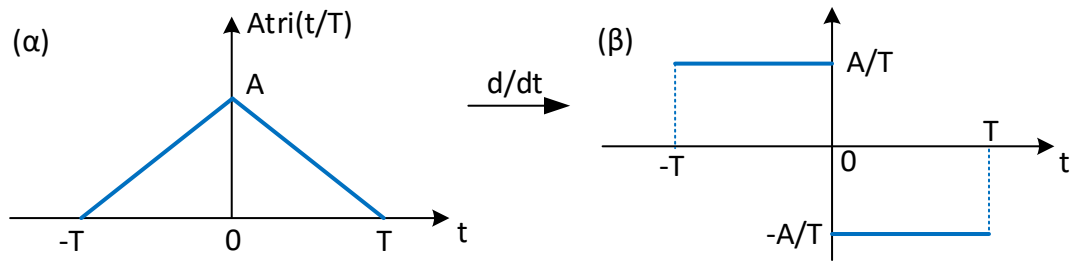
$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t)e^{-j2\pi ft}) - \lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t)e^{-j2\pi ft}) + j2\pi f X(f) \quad (6.145)$$

$$= j2\pi f X(f) \quad (6.146)$$

διότι το $x(t)$ φθίνει στο μηδέν όταν $t \rightarrow \pm\infty$, αφού έχει μετασχ. Fourier (και άρα είναι σήμα ενέργειας).

Παράδειγμα 6.19:

Ας αποδείξουμε ξανά τη Σχέση (6.37), αυτή τη φορά με λιγότερες πράξεις, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγώγισης. Το Σχήμα 6.15 δείχνει το σήμα τριγωνικού παλμού, καθώς και την παράγωγό του.



Σχήμα 6.15: Εφαρμογή της Παραγώγισης στο Χρόνο: σήματα (α) σήμα τριγωνικού παλμού, (β) παράγωγος τριγωνικού παλμού.

Λύση:

Η παράγωγος αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς οι οποίοι γράφονται ως

$$\frac{d}{dt} \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (6.147)$$

Με την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης, ο μετασχ. Fourier της παραγώγου του σήματος είναι

$$F\left\{\frac{d}{dt} \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = F\left\{\frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)\right\} \quad (6.148)$$

$$= A \text{sinc}(fT) e^{j\pi fT} - A \text{sinc}(fT) e^{-j\pi fT} \quad (6.149)$$

$$= A \text{sinc}(fT) (e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) \quad (6.150)$$

$$= j2A \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT) \quad (6.151)$$

Όμως η ιδιότητα της παραγώγου μας δίνει ότι

$$F\left\{\frac{d}{dt} \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = j2\pi f F\left\{AT \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} \quad (6.152)$$

$$j2A \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT) = j2\pi f F\left\{AT \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} \quad (6.153)$$

$$F\left\{\text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \frac{A \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi f} \quad (6.154)$$

$$= \frac{AT \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi fT} \quad (6.155)$$

$$= AT \text{sinc}(fT) \text{sinc}(fT) \quad (6.156)$$

$$= AT \text{sinc}^2(fT) \quad (6.157)$$

6.3.1.12 Ολοκλήρωση στο χρόνο

Σε αυτήν την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα αποτέλεσμα που αποδεικνύεται στη συνέχεια του βιβλίου. Το σήμα $y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$ μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = x(t) * u(t) \quad (6.158)$$

όπου $u(t)$ η γνωστή μας βηματική συνάρτηση. Με χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο, έχουμε

$$Y(f) = X(f)U(f) \quad (6.159)$$

Στην Παράγραφο 6.5 αποδεικνύουμε ότι

$$U(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (6.160)$$

οπότε

$$Y(f) = X(f)U(f) = \frac{X(0)}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} \quad (6.161)$$

Παράδειγμα 6.20:

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (6.162)$$

με $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (6.163)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα, θα είναι

$$Y(f) = \frac{X(0)}{2} + X(f) \frac{1}{j2\pi f} = \frac{1}{2a} \delta(f) + \frac{1}{(a + j2\pi f)j2\pi f} \quad (6.164)$$

Κάνοντας αναλυτικά την ολοκλήρωση, έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})u(t) \quad (6.165)$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει αυτούς τους μετασχηματισμούς, οπότε

$$Y(f) = \frac{1}{2a} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi a f} - \frac{1}{a} \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (6.166)$$

και μετά από πράξεις,

$$Y(f) = \frac{1}{2a} \delta(f) + \frac{1}{(a + j2\pi f)(j2\pi f)} \quad (6.167)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της ιδιότητας.

6.3.1.13 Συζυγής συμμετρία

Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, δηλ. ισχύει ότι $x(t) = x^*(t)$, τότε

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (6.168)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi f t} dt \right)^* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^* \quad (6.169)$$

$$= X^*(-f) \quad (6.170)$$

Από την παραπάνω σχέση, εξάγουμε ότι

$$X(f) = X^*(-f) \quad (6.171)$$

$$\Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\} - j\Im\{X(-f)\} \quad (6.172)$$

$$\Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\} \text{ και } \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\} \quad (6.173)$$

Επίσης, η πολική μορφή της Σχέσης (6.171) δίνει

$$X(f) = X^*(-f) \quad (6.174)$$

$$|X(f)| e^{j\phi_x(f)} = |X(-f)| e^{-j\phi_x(-f)} \quad (6.175)$$

$$|X(f)| = |X(-f)| \text{ και } \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \quad (6.176)$$

Άρα, για πραγματικά σήματα, το φάσμα πλάτους είναι άρτια συνάρτηση του f ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτηση του f .

Παράδειγμα 6.21:

Ελέγξτε αν το σήμα με μετασχ. Fourier

$$X(f) = j \frac{\pi^2}{2f} \quad (6.177)$$

είναι πραγματικό ή όχι.

Λύση:
Ισχύει ότι

$$X^*(-f) = \left(j \frac{\pi^2}{2(-f)} \right)^* = -j \frac{\pi^2}{(-2f)} = j \frac{\pi^2}{2f} = X(f) \quad (6.178)$$

άρα το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό. Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι το μέτρο και η φάση του σήματος έχουν τις συμμετρίες που αναφέρονται παραπάνω.

6.3.1.14 Άρτιο σήμα

Αν το σήμα είναι άρτιο, ισχύει $x(t) = x(-t)$, και τότε το φανταστικό μέρος του μετασχ. Fourier είναι

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (6.179)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$I(f) = 0 \quad (6.180)$$

Οπότε

$$X(f) = R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (6.181)$$

με την αλλαγή των άκρων του ολοκληρώματος να οφείλεται στο ότι το γινόμενο δυο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, και το ολοκλήρωμα αυτής σε συμμετρικό διάστημα $[-a, a]$ μπορεί να γραφεί ως το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο διάστημα $[0, a]$.

Παράδειγμα 6.22:

Ο γνωστός μας τετραγωνικός παλμός είναι ένα άρτιο σήμα. Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Λύση:
Μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier του ως

$$X(f) = F\{A \text{rect}(t/T)\} = 2 \int_0^{T/2} A \cos(2\pi ft) dt \quad (6.182)$$

$$= 2A \left[\frac{1}{2\pi f} \sin(2\pi ft) \right]_0^{T/2} = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi fT) \quad (6.183)$$

$$= AT \text{sinc}(fT) \quad (6.184)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τον κλασικό ορισμό του μετασχηματισμού.

6.3.1.15 Περιττό σήμα

Αν το σήμα είναι περιττό, ισχύει $x(t) = -x(-t)$, και τότε το πραγματικό μέρος του μετασχ. Fourier είναι

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (6.185)$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$R(f) = 0 \quad (6.186)$$

Οπότε

$$X(f) = jI(f) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = -j2 \int_0^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (6.187)$$

με την αλλαγή των άκρων του ολοκληρώματος να οφείλεται στο ότι το γινόμενο δυο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, και το ολοκλήρωμα αυτής σε συμμετρικό διάστημα $[-a, a]$ μπορεί να γραφεί ως το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο διάστημα $[0, a]$.

Παράδειγμα 6.23:

Έστω το σήμα $x(t) = 1/t$, του οποίου ζητούμε το μετασχ. Fourier.

Λύση:

Το σήμα $x(t)$ είναι περιττό, και άρα ο μετασχ. Fourier θα έχει μόνο φανταστικό μέρος, δηλ.

$$X(f) = jI(f) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = -j2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{t} dt \quad (6.188)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t} dt = \begin{cases} \pi/2, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -\pi/2, & a < 0 \end{cases} \quad (6.189)$$

οπότε ο μετασχ. Fourier $X(f)$ είναι

$$X(f) = \begin{cases} -j\pi, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ j\pi, & f < 0 \end{cases} \quad (6.190)$$

6.3.1.16 Άρτιο μέρος

Το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad (6.191)$$

και άρα

$$F\{x_e(t)\} = \frac{1}{2}F\{x(t)\} + \frac{1}{2}F\{x(-t)\} = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}X(-f) \quad (6.192)$$

$$= \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}X^*(f) = \frac{1}{2}2\Re\{X(f)\} \quad (6.193)$$

$$= \Re\{X(f)\} \quad (6.194)$$

Παράδειγμα 6.24:

Το άρτιο μέρος του σήματος

$$x(t) = 2e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (6.195)$$

είναι το σήμα

$$x_e(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad (6.196)$$

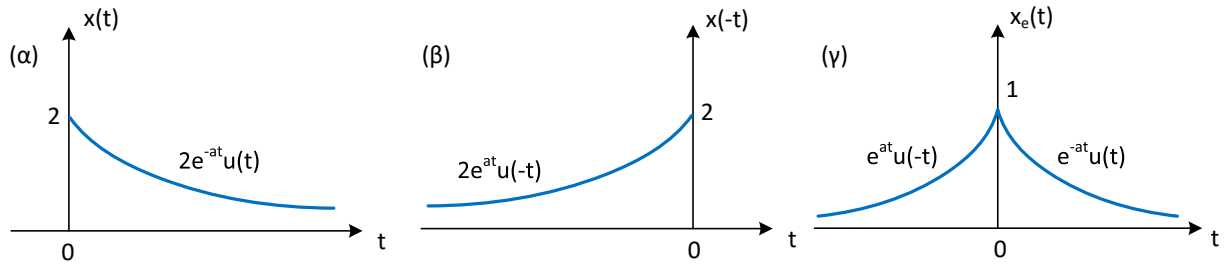
Βρείτε το μετασχ. Fourier του, $X_e(f)$.

Λύση:

Το σήμα $x_e(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$e^{-a|t|} = e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t) = x_e(t) \quad (6.197)$$

Η παραπάνω διάσπαση φαίνεται στο Σχήμα 6.16. Γνωρίζουμε ότι



Σχήμα 6.16: (α): σήμα $x(t)$, (β) σήμα $x(-t)$, (γ) $x_e(t)$: άρτιο μέρος του $x(t)$.

$$x(t) = 2e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{2}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (6.198)$$

και άρα ο μετασχ. Fourier του $x_e(t)$ θα είναι

$$X_e(f) = \Re\{X(f)\} = \Re\left\{\frac{2}{a + j2\pi f}\right\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (6.199)$$

6.3.1.17 Περιττό μέρος

Το περιττό μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (6.200)$$

και άρα

$$F\{x_o(t)\} = \frac{1}{2}F\{x(t)\} - \frac{1}{2}F\{x(-t)\} = \frac{1}{2}X(f) - \frac{1}{2}X(-f) \quad (6.201)$$

$$= \frac{1}{2}X(f) - \frac{1}{2}X^*(f) = j\frac{1}{2}2\Im\{X(f)\} \quad (6.202)$$

$$= j\Im\{X(f)\} \quad (6.203)$$

Παράδειγμα 6.25:

Το περιττό μέρος του σήματος

$$x(t) = 2e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (6.204)$$

είναι το σήμα

$$x_o(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t), \quad a > 0 \quad (6.205)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του, $X_o(f)$.

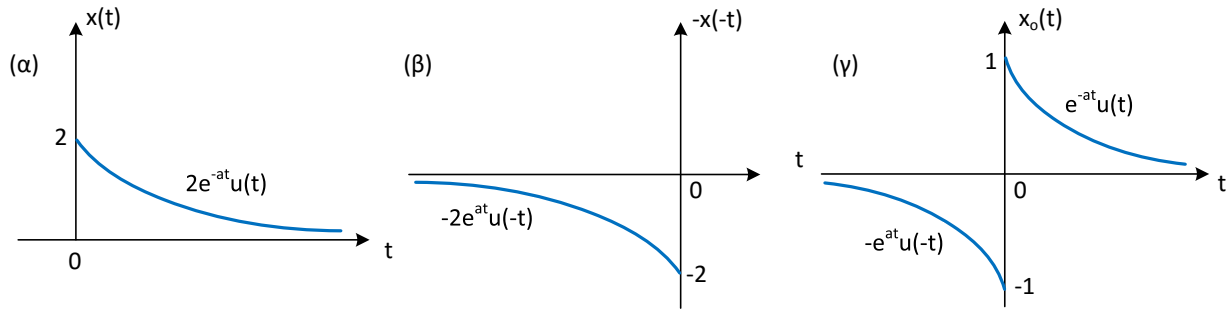
Λύση:

Δείτε το Σχήμα 6.17. Γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = 2e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{2}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (6.206)$$

και άρα ο μετασχ. Fourier του $x_o(t)$ θα είναι

$$X_o(f) = j\Im\{X(f)\} = j\Im\left\{\frac{2}{a + j2\pi f}\right\} = -j\frac{4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (6.207)$$



Σχήμα 6.17: (α): σήμα $x(t)$, (β) σήμα $-x(-t)$, (γ) $x_o(t)$: περιττό μέρος του $x(t)$.

6.3.1.18 Θεώρημα του Parseval

Ξεκινώντας από το αριστερό μέλος και για ένα εν γένει μιγαδικό σήμα $x(t)$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut} du \right)^* dt \quad (6.208)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)e^{-j2\pi ut} du dt \quad (6.209)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(u) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t} dt du df \quad (6.210)$$

Όμως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t} dt = \delta(f-u) \quad (6.211)$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)\delta(f-u) du \right) df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (6.212)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει με όμοιο τρόπο τη γενικότερη σχέση του Parseval, η οποία είναι η

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f) df \quad (6.213)$$

Παράδειγμα 6.26:

Δείξαμε νωρίτερα ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \quad (6.214)$$

Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος.

Λύση:

Η ενέργεια του σήματος είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} \quad (6.215)$$

Ας δείξουμε ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα μέσω του χώρου της συχνότητας.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{a + j2\pi f} \right|^2 df \quad (6.216)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df \quad (6.217)$$

λόγω άρτιας συμμετρίας της συνάρτησης εντός του ολοκληρώματος. Γνωρίζουμε ότι

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \Big|_{c_1}^{c_2} \quad (6.218)$$

Άρα η Σχέση (6.217) μας δίνει

$$E_x = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df = \frac{2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 + f^2} df \quad (6.219)$$

$$= \frac{1}{a\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\pi f}{a} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a\pi} \left(\lim_{f \rightarrow +\infty} \tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} - \tan^{-1}(0) \right) \quad (6.220)$$

$$= \frac{1}{a\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2a} \quad (6.221)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε στο πεδίο του χρόνου.

Παρατηρήσεις

- (α') Έχουμε μιλήσει για τα σήματα ισχύος, που είναι άπειρα σε διάρκεια, κι έχουν πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια. Στον αντίποδα, υπάρχουν τα σήματα ενέργειας, που έχουν πεπερασμένη ενέργεια και μηδενική ισχύ. Θυμίζουμε ότι σήματα ενέργειας είναι τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad (6.222)$$

μια σχέση που μοιάζει με τη Σχέση (6.21) αλλά όχι ακριβώς. Τα σήματα ενέργειας έχουν ΠΑΝΤΑ μετασχηματισμό Fourier.

- (β') Αξίζει να αναφέρουμε ότι κι εδώ ισχύει η ιδέα της προβολής που είδαμε στις σειρές Fourier. Μόνο που εδώ δεν προβάλλουμε το σήμα σε εκθετικά συγκεκριμένων συχνοτήτων kf_0 , αλλά σε εκθετικά όλων των συχνοτήτων!
- (γ') Τέλος, ένα σημαντικό, όσο και αξιοθαύμαστο, στοιχείο που αξίζει να αναφερθεί είναι το εξής: τόσο στις Σειρές Fourier, όσο και στο μετασχ. Fourier, ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ αναπαρίσταται (ή αλλιώς, μπορεί να συντεθεί) από μιγαδικά εκθετικά, που στην περίπτωση των πραγματικών σημάτων είναι συνημίτονα (είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier σχετίζεται στενά με τις σειρές Fourier). Ός γνωστόν, τα συνημίτονα έχουν άπειρη διάρκεια. Σκεφτείτε το λίγο: ένα μη περιοδικό σήμα που είναι, για παράδειγμα, μη μηδενικό σε ένα διάστημα $[a, b]$ και μηδέν παντού αλλού, μπορεί να αναπαρασταθεί ΑΚΡΙΒΩΣ ως ένα άθροισμα άπειρων σε διάρκεια συνημιτόνων!

Το φάσμα $X(f)$ περιέχει άπειρα μιγαδικά εκθετικά (ή συνημίτονα) που ξεκινούν από το $-\infty$ και διαρκούν για πάντα. Τα πλάτη και οι φάσεις αυτών των συνιστωσών είναι τέτοια ώστε όταν τα προσθέσουμε, παίρνουμε ΑΚΡΙΒΩΣ το σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[a, b]$, ενώ έξω από αυτό, οι συνιστώσες αυτές αθροίζονται στο μηδέν!!!! Αν “παίζαμε” μόνοι μας με πλάτη και φάσεις άπειρου αριθμού συνημιτόνων για να πετύχουμε μια τόσο τέλεια, ακριβής, και λεπτή ισορροπία μεταξύ τους ώστε να ανακατασκευάζουμε ακριβώς το σήμα μας, θα ήταν αφάνταστα δύσκολο – πιθανώς αδύνατο – να τα καταφέρουμε! Κι όμως, ο μετασχ. Fourier (όπως και οι Σειρές Fourier) το πετυχαίνει με μεγάλη ευκολία, χωρίς πολλή σκέψη από μέρους μας. Μερικές φορές, μας απορροφούν τόσο τα μαθηματικά που ξεχνάμε να προσέξουμε μερικές τέτοιες, όμορφες, και θαυμαστές λεπτομέρειες...

6.4 Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

Ιδανικά, θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε τον μετασχ. Fourier και για σήματα ισχύος, όχι μόνο ενέργειας, ενοποιώντας τη θεωρία του μετασχ. Fourier για κάθε σήμα, ενέργειας ή ισχύος. Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό του μετασχ. Fourier σε ένα γνωστό περιοδικό σήμα ισχύος όπως το $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.223)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt \quad (6.224)$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε αυτά τα ολοκληρώματα!

Τι κάνουμε τότε; Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας συνάρτηση Δέλτα, που έχουμε ήδη δει. Με χρήση του ακόλουθου ζεύγους μετασχ. Fourier

$$e^{\mp j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f \pm f_0) \quad (6.225)$$

ο μετασχ. Fourier του δεδομένου σήματος θα είναι

$$X(f) = F\left\{\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \quad (6.226)$$

και άρα

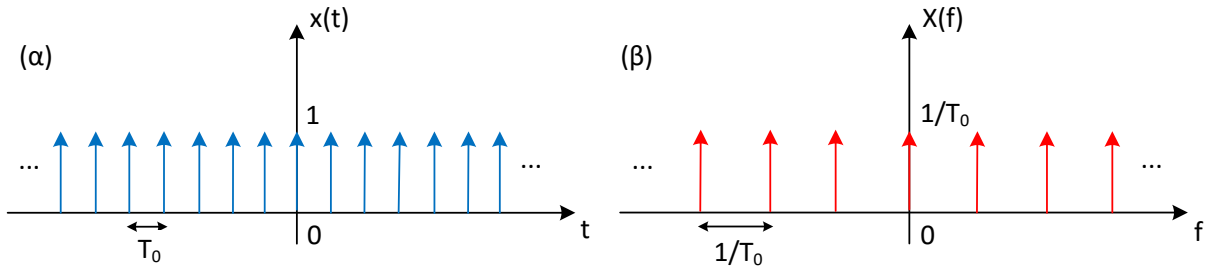
$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0) \quad (6.227)$$

Αφού λοιπόν κάθε περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ημιτόνων ή, γενικότερα, άθροισμα μιγαδικών εκθετικών $e^{j2\pi k f_0 t}$ μέσω της Σειράς Fourier, μπορούμε να βρούμε το μετασχ. Fourier ενός περιοδικού σήματος! Ας δούμε πως.

Ένα βασικό περιοδικό σήμα είναι η σειρά συναρτήσεων Δέλτα που φαίνεται στο Σχήμα 6.18(α) και που περιγράφεται μαθηματικά με την εξίσωση

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \quad (6.228)$$

Οπως ήδη γνωρίζουμε μπορούμε να αναπτύξουμε ένα περιοδικό σήμα σε εκθετική Σειρά Fourier ως



Σχήμα 6.18: (α): σειρά συναρτήσεων Δέλτα στο πεδίο του χρόνου με περίοδο T_0 και (β) σειρά συναρτήσεων Δέλτα στο πεδίο της συχνότητας με περίοδο $1/T_0$, και (β) ο Μετασχηματισμός Fourier του (α).

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.229)$$

όπου οι συντελεστές Δ_k υπολογίζονται από τη σχέση

$$\Delta_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta_{T_0}(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \quad (6.230)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του συντελεστή Fourier, Δ_k στην Εξίσωση (6.229) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - k f_0) \quad (6.231)$$

ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος της σειράς συναρτήσεων Δέλτα είναι

$$F\{\delta_{T_0}(t)\} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_0) = \frac{1}{T_0} \delta_{1/T_0}(f) \quad (6.232)$$

Ο μετασχ. Fourier της σειράς συναρτήσεων Δέλτα φαίνεται στο Σχήμα 6.18(β). Όπως φαίνεται και από το σχήμα, ο μετασχ. Fourier είναι πάλι μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα, με περίοδο $1/T_0$ και πλάτος $1/T_0$.

6.4.1 Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

Γράφοντας ένα περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier μπορούμε να βρούμε ένα σύνδεσμο μεταξύ του διακριτού φάσματος που μόλις είδαμε και των συντελεστών του αναπτύγματος του περιοδικού σήματος σε Σειρά Fourier. Έχουμε δει ότι το εκθετικό ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος είναι

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (6.233)$$

όπου

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (6.234)$$

Ο μετασχ. Fourier του σήματος δίνεται από τη σχέση

$$F\{x(t)\} = X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k F\{e^{j2\pi k f_0 t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - k f_0) \quad (6.235)$$

όπου $f_0 = 1/T_0$. Μπορούμε να δείξουμε (χωρίς να το κάνουμε εδώ) ότι

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(f) \Big|_{f=k f_0} \quad (6.236)$$

με $X_{T_0}(f)$ το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του περιοδικού σήματος!

Εν κατακλείδει, για να υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier ενός περιοδικού σήματος, εκτελούμε τα παρακάτω δυο βήματα:

Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

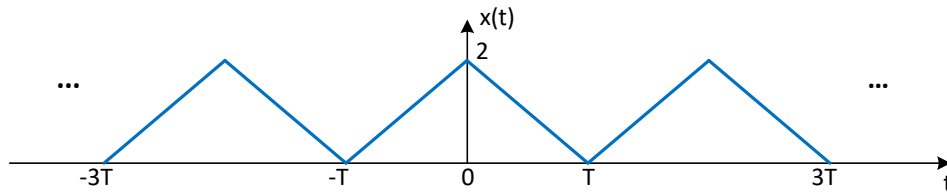
- Υπολογίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier σε μια περίοδο του σήματος $x_{T_0}(t)$ (σαν να ήταν - που είναι - σήμα ενέργειας)
- Δειγματοληπτούμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής (θεμελειώδους) συχνότητας: $f = k f_0$ όπου $f_0 = 1/T_0$. Αυτή η δειγματοληψία μας δίνει τους συντελεστές X_k του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος.
- Υπολογίζουμε το $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - k f_0)$

Ένα πολύ ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι, όπως βλέπετε, το T_0 μπορεί να είναι οποιαδήποτε περίοδος! Με άλλα λόγια, μπορούμε από το φάσμα του μετασχ. Fourier, να βρούμε τους συντελεστές Fourier για οποιαδήποτε περίοδο του αντίστοιχου περιοδικού σήματος! Αυτό που συμβαίνει είναι ότι απλά δειγματοληπτούμε σε διαφορετικές αποστάσεις το φάσμα του μετασχηματισμού Fourier!

Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε και τον κουραστικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της Σειράς Fourier... δείτε πόσο απλά στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.27:

Βρείτε τους συντελεστές του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος του Σχήματος 6.19.



Σχήμα 6.19: Περιοδικό Τριγωνικό Σήμα Παραδείγματος 6.27

Λύση:

Θα βρούμε πρώτα το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος $x(t)$ και μετά θα δειγματοληπτήσουμε το φάσμα $X(f)$ για να βρούμε τους συντελεστές Fourier. Προφανώς το σήμα είναι περιοδικό μια περίοδο $T_0 = 2T$. Αν απομονώσουμε μια περίοδό του, δηλ. τον κεντρικό τριγωνικό παλμό, αυτός γράφεται ως

$$x_{T_0}(t) = 2\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (6.237)$$

και έχει μετασχ. Fourier

$$X_{T_0}(f) = 2T\text{sinc}^2(fT) \quad (6.238)$$

Η περίοδος του περιοδικού σήματος είναι $T_0 = 2T$, άρα οι συντελεστές Fourier θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(f) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{2T} 2T\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2T}T\right) = \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττό} \quad (6.239)$$

που είναι και το ζητούμενο.

6.5 Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος - Μη Περιοδικά Σήματα

Επίσης, όταν το υπό εξέταση σήμα ισχύος δεν είναι περιοδικό, υπάρχουν άλλες τεχνικές για τον υπολογισμό του μετασχ. Fourier τέτοιων σημάτων. Για παράδειγμα, ένα σήμα ισχύος $\hat{x}(t)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα της μέσης τιμής του και ενός σήματος που έχει μηδενική μέση τιμή, δηλ.

$$\hat{x}(t) = x_0 + x_z(t) \quad (6.240)$$

όπου x_0 είναι η μέση τιμή του σήματος και $x_z(t)$ το τμήμα του σήματος με τη μηδενική μέση τιμή. Προφανώς, ο μετασχ. Fourier του θα είναι:

$$\hat{X}(f) = x_0\delta(f) + F\{x_z(t)\} \quad (6.241)$$

Αρκεί να βρούμε το μετασχ. Fourier του $x_z(t)$. Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.28:

Έστω $x(t) = \text{sgn}(t)$ η συνάρτηση προσήμου

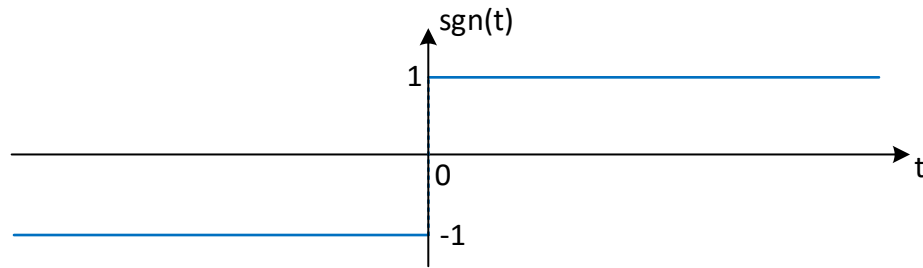
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \quad (6.242)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του $x(t)$.

Λύση:

Η συνάρτηση προσήμου φαίνεται στο Σχήμα 6.20 και προφανώς έχει μηδενική μέση τιμή. Άρα $x_z(t) = \text{sgn}(t)$ και $x_0 = 0$, οπότε $x(t) = x_z(t)$. Παραγωγίζοντας το $x_z(t)$ έχουμε

$$\frac{d}{dt}x_z(t) = 2\delta(t) \quad (6.243)$$

Σχήμα 6.20: Σήμα προσήμου $\text{sgn}(t)$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχ. Fourier, έχουμε

$$j2\pi f X_z(f) = 2F\{\delta(t)\} \iff j2\pi f X_z(f) = 2 \iff X_z(f) = \frac{1}{j\pi f} \quad (6.244)$$

Άρα τελικά

$$x(t) = \text{sgn}(t) \longleftrightarrow X(f) = \begin{cases} 0, & f = 0 \\ \frac{1}{j\pi f}, & f \neq 0 \end{cases} \quad (6.245)$$

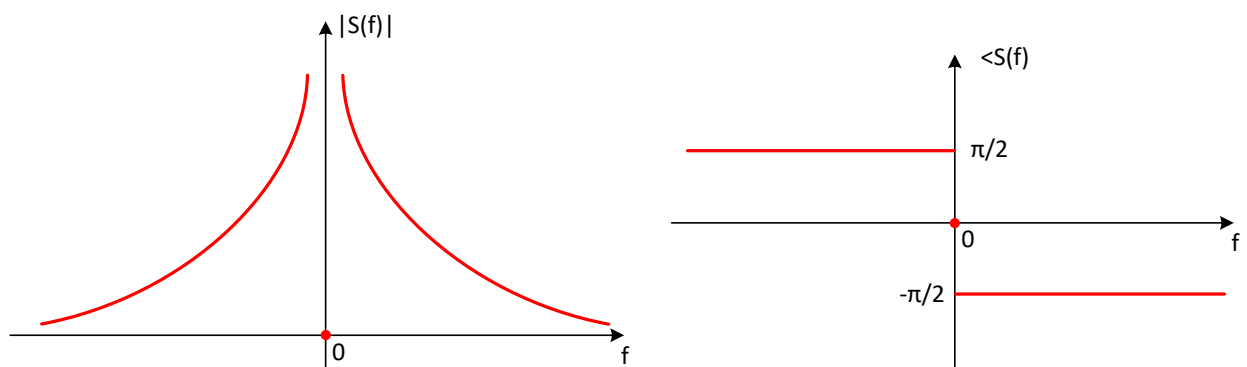
Αναλύοντας το μετασχ. Fourier σε πολική μορφή, έχουμε

$$F\{\text{sgn}(t)\} = S(f) = \frac{1}{j\pi f} \implies |S(f)| = \begin{cases} \frac{1}{\pi|f|}, & f \neq 0 \\ 0, & f = 0 \end{cases} \quad (6.246)$$

και

$$\phi_s(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0 \end{cases} \quad (6.247)$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 6.21.

Σχήμα 6.21: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \text{sgn}(t)$.

Παράδειγμα 6.29:

Η γνωστή βηματική συνάρτηση $x(t) = u(t)$ δεν έχει μηδενική μέση τιμή. Μπορεί όμως να γραφεί ως:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t) \quad (6.248)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier της.

Λύση:

Προφανώς $x_z(t) = \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$ και $x_0 = \frac{1}{2}$. Γνωρίζουμε όμως το μετασχ. Fourier της συνάρτησης προσήμου, οπότε τελικά η βηματική συνάρτηση έχει μετασχ. Fourier

$$x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (6.249)$$

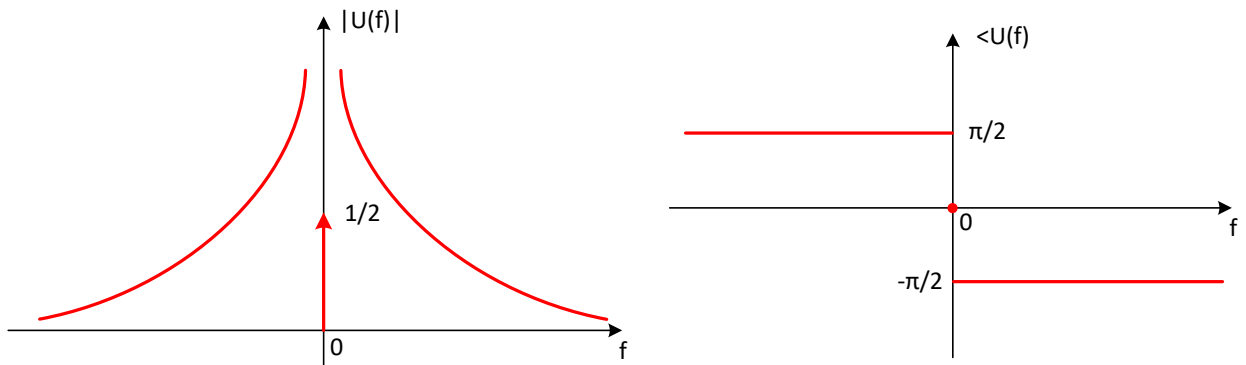
Αναλύοντας ξανά σε πολική μορφή, θα είναι

$$F\{u(t)\} = U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \Rightarrow |U(f)| = \begin{cases} \frac{1}{2}, & f = 0 \\ \frac{1}{2\pi|f|}, & f \neq 0 \end{cases} \quad (6.250)$$

και

$$\phi_u(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0 \end{cases} \quad (6.251)$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 6.22.



Σχήμα 6.22: Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = u(t)$.

■

Ένα καλό κριτήριο – αλλά όχι και αναγκαίο – για την ύπαρξη του μετασχ. Fourier ενός σήματος ισχύος είναι το να είναι απολύτως φραγμένου πλάτους, δηλ.

$$|x(t)| < M, \quad M < \infty \quad (6.252)$$

όπως για παράδειγμα τα

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \quad z(t) = u(t), \quad w(t) = \text{sgn}(t) \quad (6.253)$$

και άλλα που ικανοποιούν τη Σχέση (6.252).

Είναι αξιοσημείωτο ότι παρ' όλες τις τεχνικές που μπορούμε να εφαρμόσουμε για να βρούμε το μετασχ. Fourier

σημάτων ισχύος, αυτός μπορεί να μην υπάρχει! Δεν είναι σίγουρο δηλαδή ότι ένα σήμα ισχύος έχει μετασχ. Fourier, όσες τεχνικές κι αν χρησιμοποιήσουμε. Οπότε τίθεται το πρόβλημα του τι μπορούμε να κάνουμε για να μελετήσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο τέτοιων σημάτων. Η απάντηση είναι ότι μελετούμε το μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης του σήματος, όπως θα δούμε αργότερα σε σχετικό κεφάλαιο.

6.6 Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Ο Πίνακας 6.2 δείχνει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που είναι πολύ χρήσιμα στην πράξη.

Συνήθη ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{j\phi}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\phi}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{-j\phi}e^{-j\pi/2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{j\phi}e^{j\pi/2}\delta(f + f_0)$
1	$\delta(f)$
$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}(fT)$
$\text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-a t }, \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$te^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^n}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2 f^2}{2}}$

Πίνακας 6.2: Πίνακας ζευγών μετασχ. Fourier

