

Κεφάλαιο 11

Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

Στα προηγούμενα Κεφάλαια, γνωρίσαμε τους Μετασχηματισμούς Fourier και Laplace, καθώς και τις σπουδαίες ιδιότητές τους και τη χρησιμότητά τους στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων. Όπως είδαμε, ο Μετασχ. Fourier μας αποκαλύπτει τις *φασματικές* συνιστώσες ενός σήματος, ενέργειας ή ισχύος. Όμως και οι σχέσεις μεταξύ σημάτων είναι το ίδιο σημαντικές με τα σήματα αυτά καθ' αυτά. Στο πεδίο του χρόνου, οι σχέσεις αυτές αποκαλύπτονται από τη μελέτη των περιήρημων *Συναρτήσεων Συσχέτισης - Correlation Functions*, ενώ στο πεδίο της συχνότητας, οι μετασχηματισμοί Fourier τους, οι λεγόμενες *Φασματικές Πυκνότητες - Spectral Densities* αναλαμβάνουν να μας πληροφορήσουν για την *κατανομή* της ενέργειας ή της ισχύος ενός σήματος ανά συχνότητες.

11.1 Μια μικρή εφαρμογή - κίνητρο

Ας θεωρήσουμε ένα μηχανισμό ανίχνευσης στόχου (radar), όπου σκοπός του είναι να ανιχνεύσει έναν πιθανό στόχο στέλνοντας προς αυτόν ένα σήμα. Αν ο στόχος είναι παρών, το σήμα αντανακλάται σε αυτόν και επιστρέφει στον πομπό, ενώ αν όχι, ο πομπός λαμβάνει μόνο θόρυβο. Η παρουσία ή η απουσία του ανακλώμενου σήματος επιβεβαιώνει την παρουσία ή την απουσία του στόχου. Το κρίσιμο πρόβλημα σε αυτή τη διαδικασία είναι η ανίχνευση του ανακλώμενου σήματος. Φυσικά, το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνεται έχει αλλοιωθεί και εξασθενήσει σοβαρά λόγω απόστασης και θορύβου του περιβάλλοντος. Σε μια τέτοια περίπτωση, η πράξη της συσχέτισης του ληφθέντος σήματος με το αρχικό μπορεί να μας βοηθήσει σημαντικά!

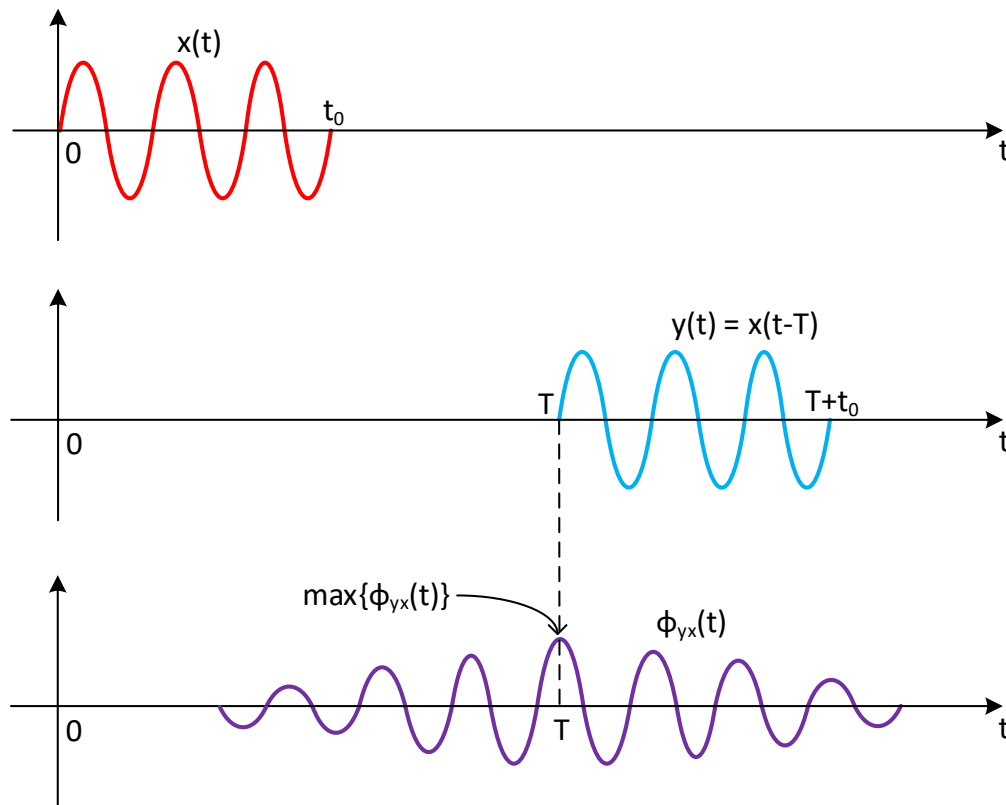
Αρχικά, ας εξηγήσουμε *διαισθητικά* πώς γίνεται η ανίχνευση του σήματος με χρήση της συσχέτισης. Μετρώντας τη χρονική καθυστέρηση μεταξύ του σήματος που στάλθηκε και αυτού που ελήφθη, μπορούμε να προσδιορίσουμε την απόσταση του στόχου. Έστω ότι το σήμα που στάλθηκε είναι το $x(t)$ και αυτό που ελήφθη είναι το $y(t)$, όπως περιγράφονται στο Σχήμα 11.1, όπου για λόγους απλότητας έχουμε θεωρήσει ότι το ληφθέν σήμα δεν έχει εξασθενήσει ή αλλοιωθεί λόγω της διέλευσής του μέσα από το κανάλι μετάδοσης. Πώς θα μπορούσαμε να συγκρίνουμε τα δυο σήματα; Θα μπορούσε να προτείνει κανείς να εφαρμόσουμε μια σχέση *προβολής* του ενός σήματος στο άλλο, όπως στους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς. Ας προβάλλουμε το ληφθέν σήμα επάνω στο εκπεμπθέν, ως

$$c_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t)dt \quad (11.1)$$

τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μηδέν, λόγω του ότι τα δυο σήματα είναι μη μηδενικά σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε μια διαφορετική σχέση, αυτή της *συνάρτησης συσχέτισης* του σήματος $y(t)$ με το σήμα $x(t)$, η οποία ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t+\tau)dt \quad (11.2)$$

όπου βλέπετε ότι μετακινούμε το εκπεμπόμενο σήμα $x(t)$ για κάθε δυνατή χρονική μετατόπιση τ . Βλέπετε ότι η συσχέτιση είναι συνάρτηση του χρόνου τ . Αν για κάποιο τ (που είναι οι διάφορες καθυστερήσεις του σήματος $x(t)$) παρατηρηθεί ισχυρή συσχέτιση (που σημαίνει μεγάλη τιμή ως αποτέλεσμα του ολοκληρώματος), δεν ανιχνεύεται μόνο η παρουσία του σήματος αλλά και η σχετική χρονική μετατόπιση του $x(t)$ σε σχέση με το $y(t)$. Έτσι, όχι μόνο μετράμε την παρουσία ενός στόχου αλλά και την απόστασή του από τη θέση αναφοράς. Το τελευταίο γράφημα του Σχήματος 11.1 δείχνει το αποτέλεσμα της συσχέτισης.



Σχήμα 11.1: Εκπεμπόμενο και ληφθέν σήμα σε ένα radar.

11.2 Συσχετίσεις

Οι συσχετίσεις μπορούν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες: την **αυτοσυσχέτιση** και την **ετεροσυσχέτιση** σημάτων. Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των συσχετίσεων στο πεδίο του χρόνου, εξετάζοντας αρχικά τη συσχέτιση περιοδικών σημάτων, γενικεύοντας στη συνέχεια για σήματα ισχύος, και ολοκληρώνοντας με σήματα ενέργειας.

11.2.1 Αυτοσυσχέτιση

Η αυτοσυσχέτιση ορίζεται ως η πράξη συσχέτισης ενός σήματος $x(t)$ με τον εαυτό του, και μας δίνει πληροφορία που σχετίζεται με τη μεταβολή της *αυτο-ομοιότητας* του σήματος συναρτήσει του χρόνου.

11.2.1.1 Περιοδική Αυτοσυσχέτιση

Για περιοδικά σήματα με περίοδο T_0 , η αυτοσυσχέτιση ορίζεται ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (11.3)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι ένα περιοδικό σήμα μπορεί να αναπτυχθεί σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (11.4)$$

με $f_0 = \frac{1}{T_0}$ η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος. Αν αντικαταστήσουμε τη Σχέση (11.4) στη Σχέση (11.3) έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right)^* \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 (t+\tau)} \right) dt \quad (11.5)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 t} e^{j2\pi l f_0 \tau} \right) dt \quad (11.6)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_k e^{j2\pi k f_0 \tau} + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} \right) dt \quad (11.7)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \int_{T_0} dt + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau} \int_{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt \right) \quad (11.8)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau} \int_{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt \right) \quad (11.9)$$

Ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης ισούται με μηδέν, λόγω της γνωστής (πλέον) σχέσης της ορθογωνιότητας των σημάτων $\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$:

$$\int_{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ T_0, & l = k \end{cases} \quad (11.10)$$

Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad (11.11)$$

Η παραπάνω σχέση μας πληροφορεί ότι αν το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T_0 έχει συντελεστές Fourier X_k , τότε η περιοδική αυτοσυσχέτιση του σήματος είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο και μπορεί να αναπτυχθεί σε Σειρά Fourier με συντελεστές $|X_k|^2$. Μετατρέποντας αυτή τη σχέση σε τριγωνομετρική Σειρά Fourier, έχουμε ότι

$$\phi_x(\tau) = |X_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2 \cos(2\pi k f_0 \tau) \quad (11.12)$$

Παρατηρήστε ότι αν οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος (και άρα και το αρχικό περιοδικό σήμα) είχαν κάποια φάση ϕ_k , δηλ.

$$X_k = |X_k| e^{j\phi_k} \quad (11.13)$$

η περιοδική αυτοσυσχέτιση του σήματος δεν περιλαμβάνει αυτή τη φάση στους συντελεστές Fourier της. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η αυτοσυσχέτιση είναι “τυφλή” (phase-blind) όσον αφορά τη φάση του περιοδικού σήματος, αφού η πληροφορία φάσης του περιοδικού σήματος χάνεται δια παντός.

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού της περιοδικής αυτοσυσχέτισης, όπου φαίνεται ξεκάθαρα και η παραπάνω ιδιότητα.

Παράδειγμα 11.1:

Βρείτε την περιοδική αυτοσυσχέτιση του σήματος

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \theta) \quad (11.14)$$

Λύση:

Από τον ορισμό, έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} A \cos(2\pi f_0 t - \theta) A \cos(2\pi f_0(t+\tau) - \theta)dt \quad (11.15)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \int_{T_0} \cos(2\pi f_0 t - \theta) \cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau - \theta)dt \quad (11.16)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \int_{T_0} \left(\frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau - 2\theta) + \frac{1}{2} \cos(-2\pi f_0 \tau) \right) dt \quad (11.17)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \left(\int_{T_0} \left(\frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau - 2\theta) dt + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \int_{T_0} dt \right) \right) \quad (11.18)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \left(\int_{T_0} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau - 2\theta) dt + \frac{1}{2} T_0 \cos(2\pi f_0 \tau) \right) \quad (11.19)$$

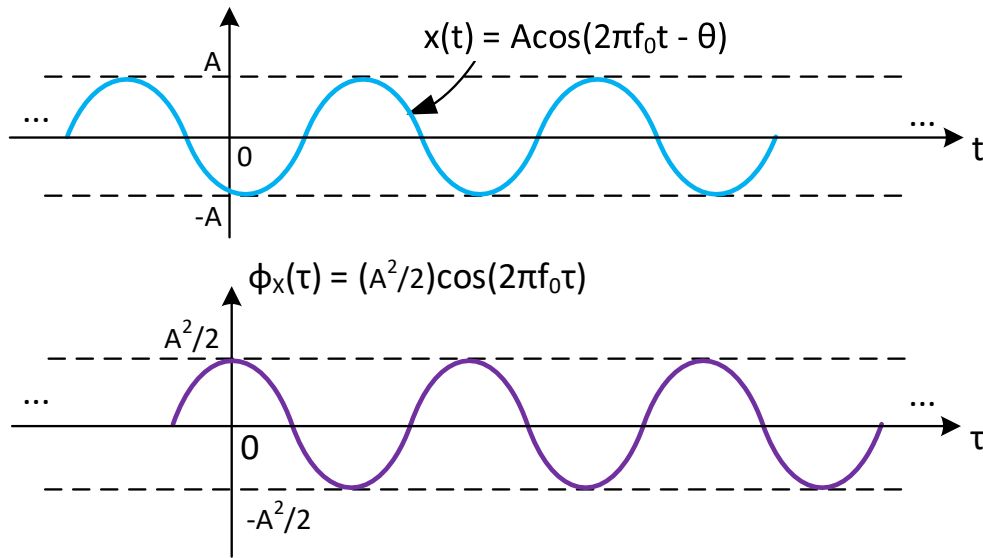
όπο χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b) \quad (11.20)$$

Ο πρώτος όρος της Σχέσης (11.19) ισούται με μηδέν, ως ολοκλήρωμα ημιτόνου σε μια περίοδο. Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (11.21)$$

Τα δυο σήματα φαίνονται στο Σχήμα 11.2. Παρατηρήστε ότι η αρχική φάση $-\theta$ δε διατηρείται στο αποτέλεσμα



Σχήμα 11.2: Περιοδική αυτοσυσχέτιση Παραδείγματος 11.1.

της αυτοσυσχέτισης. Προσέξτε ότι η περιοδική αυτοσυσχέτιση παρουσιάζει περιοδικά μέγιστα και ελάχιστα, όπως ακριβώς η μορφή του $\cos(2\pi f_0 \tau)$. Αυτό σημαίνει ότι το περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει μέγιστη ομοιότητα με τον “μετατοπισμένο” κατά $t = \tau$ εαυτό του τις χρονικές στιγμές $t = kT_0$, $k \in \mathbb{Z}$. Αντίθετα, το περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει ελάχιστη ομοιότητα ή εντελώς αντίθετη μορφή με το “μετατοπισμένο” κατά $t = \tau$ εαυτό του τις χρονικές στιγμές $t = k\frac{T_0}{2}$. Αυτό επιβεβαιώνεται ακριβώς από τη διαίσθησή μας.

Επίσης, το αρχικό περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \theta) = \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{-j2\pi f_0 t} = X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_1^* e^{-j2\pi f_0 t} \quad (11.22)$$

και άρα οι συντελεστές του είναι

$$X_1 = \frac{A}{2} e^{-j\theta} \quad (11.23)$$

$$X_1^* = \frac{A}{2} e^{j\theta} \quad (11.24)$$

Η αυτοσυσχέτιση αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) = \frac{A^2}{4} e^{j2\pi f_0 \tau} + \frac{A^2}{4} e^{-j2\pi f_0 \tau} = X_{\phi_1} e^{j2\pi f_0 \tau} + X_{\phi_1}^* e^{-j2\pi f_0 \tau} \quad (11.25)$$

Παρατηρήστε ότι πράγματι

$$X_{\phi_1} = |X_1|^2 \quad (11.26)$$

$$X_{\phi_1}^* = |X_1^*|^2 \quad (11.27)$$

■

11.2.1.2 Αυτοσυσχέτιση Σημάτων Ισχύος

Η έννοια της αυτοσυσχέτισης μπορεί να γενικευθεί για σήματα ισχύος ως

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (11.28)$$

με T μια οποιαδήποτε τιμή χρονικού διαστήματος, για $x(t)$ μιγαδικό, ενώ για πραγματικά σήματα ο ορισμός τροποποιείται ως

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (11.29)$$

Η διαδικασία υπολογισμού της αυτοσυσχέτισης σημάτων ισχύος έχει μεγάλες ομοιότητες με τον υπολογισμό της συνέλιξης - όχι τυχαία, αφού τα δυο ολοκληρώματα μοιάζουν. Ας υπολογίσουμε την αυτοσυσχέτιση δυο πολύ γνωστών μας σημάτων ισχύος.

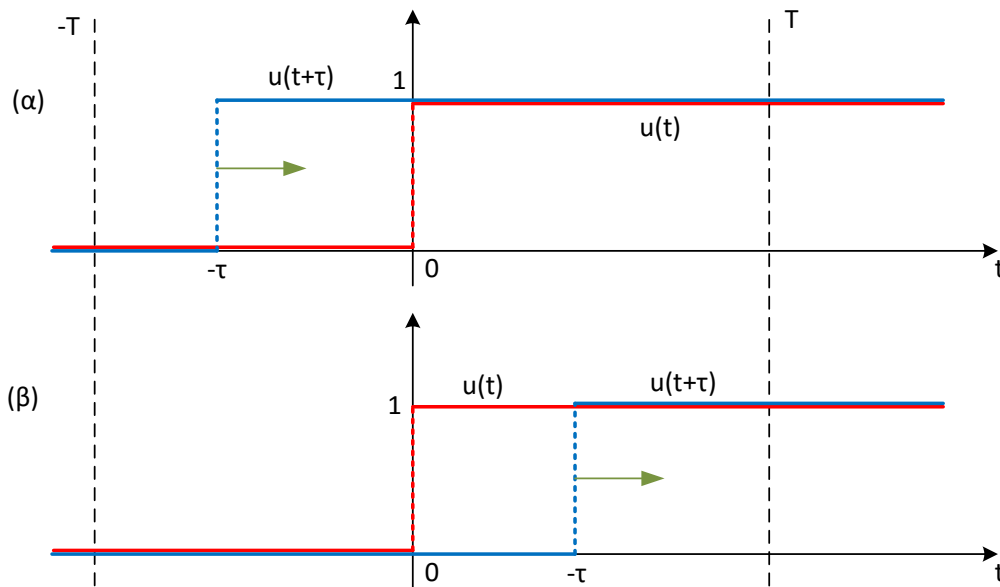
Παράδειγμα 11.2:

Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση του σήματος της βηματικής συνάρτησης

$$x(t) = u(t) \quad (11.30)$$

Λύση:

Κατασκευάζοντας το μετατοπισμένο σήμα θα πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις για τις τιμές του τ , όπως στο Σχήμα 11.3. Για την περίπτωση (α) του Σχήματος 11.3, ισχύει ότι $-\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0$. Τότε



Σχήμα 11.3: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης του Παραδείγματος 11.2.

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.31)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} T = \frac{1}{2} \quad (11.32)$$

Αντίστοιχα, για την περίπτωση (β), ισχύει ότι $-\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0$. Τότε

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.33)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\tau}^T dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} (T + \tau) = \frac{1}{2} \quad (11.34)$$

Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2} \quad \forall \tau \quad (11.35)$$

Παρατηρήστε ότι η αυτο-ομοιότητα της $x(t) = u(t)$ δε μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου!

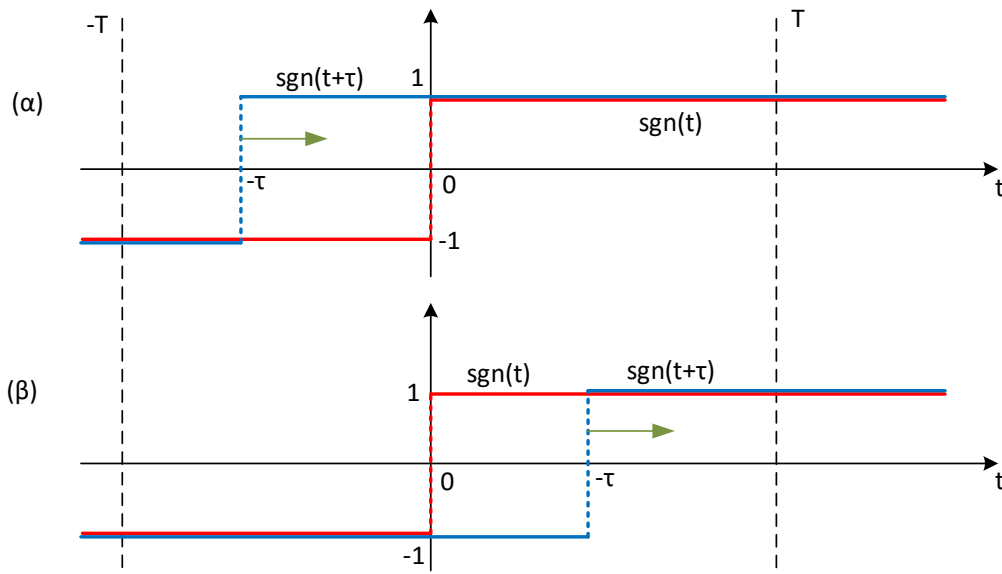
Παράδειγμα 11.3:

Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση του σήματος της συνάρτησης προσήμου

$$x(t) = \text{sgn}(t) \quad (11.36)$$

Λύση:

Κατασκευάζοντας το μετατοπισμένο σήμα θα πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις για τις τιμές του τ , όπως στο Σχήμα 11.4. Για την περίπτωση (α) του Σχήματος 11.4, ισχύει ότι $-\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0$. Τότε



Σχήμα 11.4: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης Παραδείγματος 11.3.

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \text{sgn}(t)\text{sgn}(t+\tau)dt \quad (11.37)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^{-\tau} (-1)^2 dt + \int_{-\tau}^0 (-1) dt + \int_0^T dt \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} (-2\tau + T) = 1 \quad (11.38)$$

Αντίστοιχα, για την περίπτωση (β), ισχύει ότι $-\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0$. Τότε με όμοιο ακριβώς τρόπο (δείξτε το!) προκύπτει ότι

$$\phi_x(\tau) = 1 \quad (11.39)$$

Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = 1 \quad \forall \tau \quad (11.40)$$

Παρατηρήστε ότι κι εδώ η αυτο-ομοιότητα του σήματος $x(t) = \text{sgn}(t)$ δε μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου!

11.2.1.3 Αυτοσυσχέτιση Σημάτων Ενέργειας

Τέλος, η αυτοσυσχέτιση μιγαδικών σημάτων ενέργειας ορίζεται ως

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (11.41)$$

ενώ για πραγματικά σήματα, έχουμε την ίδια σχέση χωρίς συζυγία:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt \quad (11.42)$$

Με μια πρώτη ανάγνωση των παραπάνω σχέσεων, σίγουρα έχετε παρατηρήσει ότι η αυτοσυσχέτιση ενός σήματος ενέργειας μοιάζει πολύ με τη συνέλιξη του σήματος ενέργειας με τον εαυτό του. Σύντομα θα δούμε τη σχέση που τις συνδέει. Προς το παρόν ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού αυτοσυσχέτισης ενός πολύ γνωστού μας σήματος.

Παράδειγμα 11.4:

Υπολογίστε την αυτοσυσχέτιση του σήματος

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (11.43)$$

Λύση:

Το ολοκλήρωμα της αυτοσυσχέτισης περιλαμβάνει το σήμα $x(t+\tau)$, που αποτελεί μια μετατόπιση του σήματος $x(t)$ κατά τ . Η μετατόπιση αυτή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, όπως και στη συνέλιξη. Έχουμε λοιπόν τις ακόλουθες περιπτώσεις του Σχήματος 11.5. Για την περίπτωση (α), θα έχουμε

$$\phi_x(\tau) = 0 \quad (11.44)$$

το οποίο ισχύει για

$$-\tau + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \iff \tau > T \quad (11.45)$$

Για την περίπτωση (β), είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2 t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} = A^2 T - A^2 \tau \quad (11.46)$$

το οποίο ισχύει για

$$-\tau + \frac{T}{2} \geq -\frac{T}{2} \text{ και } -\tau - \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \iff 0 < \tau \leq T \quad (11.47)$$

Στη συνέχεια, στην περίπτωση (γ), έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \int_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2 t \Big|_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = A^2 T + A^2 \tau \quad (11.48)$$

το οποίο ισχύει για

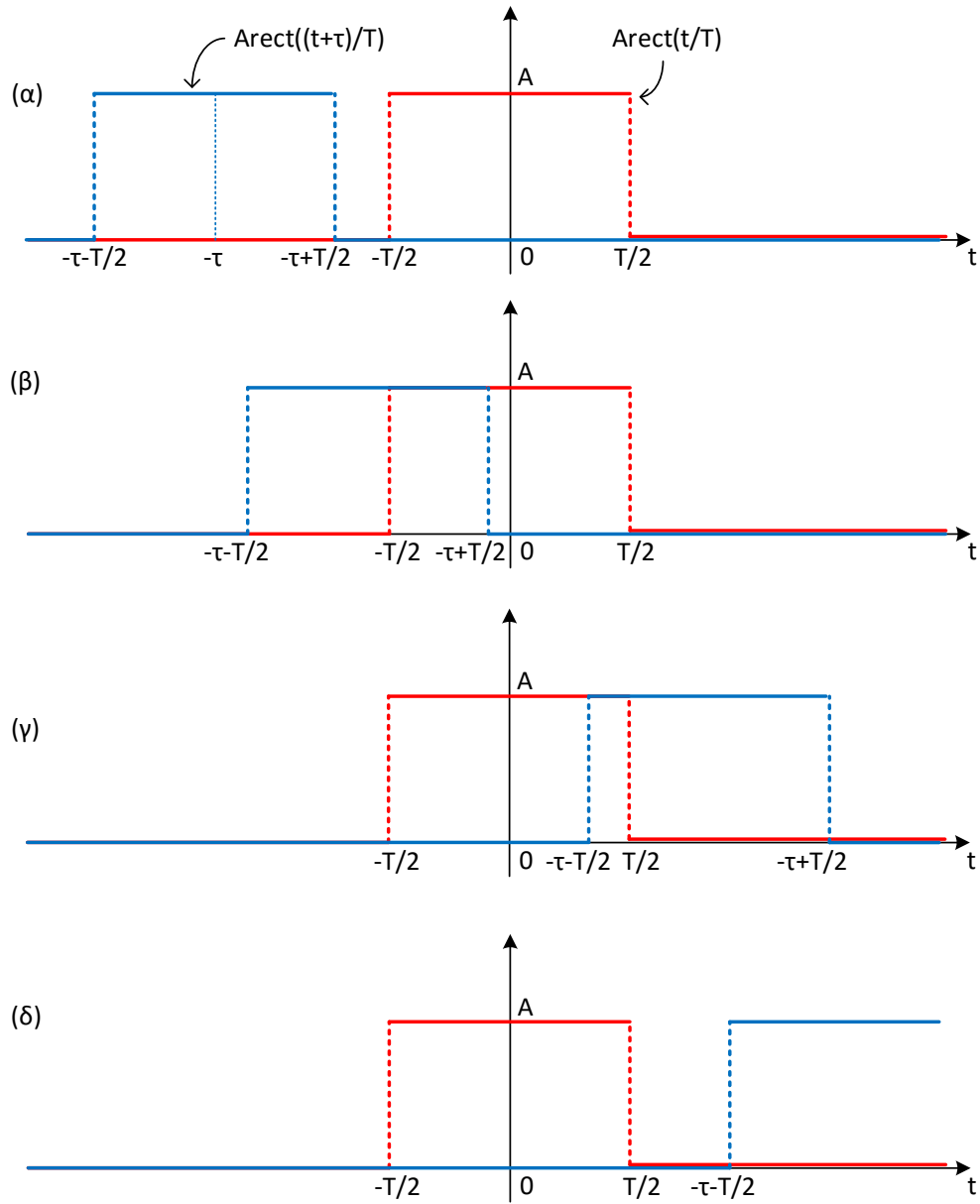
$$-\tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \text{ και } -\tau + \frac{T}{2} \geq \frac{T}{2} \iff -T \leq \tau \leq 0 \quad (11.49)$$

ενώ για την περίπτωση (δ) είναι προφανές ότι

$$\phi_x(\tau) = 0 \quad (11.50)$$

για

$$-\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \iff \tau < -T \quad (11.51)$$



Σχήμα 11.5: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης Παραδείγματος 11.4.

Συνολικά, η αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$ είναι

$$\phi_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -T \text{ και } \tau > T \\ A^2(T + \tau), & -T \leq \tau < 0 \\ A^2(T - \tau), & 0 \leq \tau < T \end{cases} = \begin{cases} 0, & \tau < -T \text{ και } \tau > T \\ A^2T(1 + \frac{\tau}{T}), & -T \leq \tau < 0 \\ A^2T(1 - \frac{\tau}{T}), & 0 \leq \tau < T \end{cases} \quad (11.52)$$

Το παραπάνω σήμα δεν είναι κανένα άλλο από το γνωστό μας τριγωνικό παλμό! Άρα

$$\phi_x(\tau) = A^2 T \text{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right) \quad (11.53)$$

Παρατηρήστε ότι η αυτο-ομοιότητα του $x(t)$ αυξάνει στο διάστημα $[-T, 0]$, φτάνοντας σε μέγιστη τιμή για $\tau = 0$, όταν το σήμα $x(t)$ συμπίπτει με τη μετατοπισμένη “έκδοσή” του $x(t + \tau)$. Για $\tau = 0$, η αυτοσυσχέτιση γράφεται

ως

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau) \Big|_{\tau=0} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = E_x \quad (11.54)$$

που είναι η ενέργεια του σήματος $x(t)$! Αυτό είναι μια γενική ιδιότητα της αυτοσυσχέτισης και θα τη δούμε και παρακάτω, όταν θα αναφερθούμε σε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες των συσχετίσεων.

■

Γενικότερα, η σχέση μεταξύ αυτοσυσχέτισης και του φασματικού περιεχομένου ενός σήματος ενέργειας μπορεί να ιδωθεί από τη σκοπιά της αυτο-ομοιότητας. Ένα σήμα συσχετίζεται “βέλτιστα” με τον εαυτό του για $\tau = 0$, όπως είδαμε, δηλ. για μηδενική καθυστέρηση. Όσο αυξάνεται η καθυστέρηση, η αυτο-ομοιότητα αρχίζει και φθίνει, άρα η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης πρέπει να είναι μια μη αύξουσα συνάρτηση του τ . Για ένα σήμα $x(t)$ που αλλάζει αργά (και άρα είναι χαμηλής συχνότητας), η αυτοσυσχέτισή του θα αλλάζει αργά, αφού η αυτο-ομοιότητά του θα αλλάζει αργά. Αντίθετα, ένα σήμα υψηλής συχνότητας θα έχει αυτοσυσχέτιση που αλλάζει γρήγορα. Βλέπουμε λοιπόν ότι το σχήμα της αυτοσυσχέτισης $\phi_x(\tau)$ έχει άμεση σχέση με το φασματικό περιεχόμενο του σήματος $x(t)$.

11.2.2 Ετεροσυσχέτιση

Η ετεροσυσχέτιση ορίζεται ως η πράξη συσχέτισης δυο σημάτων $x(t), y(t)$, και μας δίνει πληροφορία που σχετίζεται με την ομοιότητα του $x(t)$ με το $y(t)$ συναρτήσεως του χρόνου. Πρέπει να τονιστεί εξ’ αρχής ότι η πράξη της ετεροσυσχέτισης δεν είναι αντιμεταθετική, όπως αυτή της αυτοσυσχέτισης. Για παράδειγμα, η ετεροσυσχέτιση του $x(t)$ με το $y(t)$ δεν είναι εν γένει ίδια συνάρτηση με την ετεροσυσχέτιση του $y(t)$ με το $x(t)$. Σύντομα θα δούμε αυτές τις λεπτομέρειες.

11.2.2.1 Περιοδική Ετεροσυσχέτιση

Για περιοδικά σήματα με κοινή περίοδο T_0 , η περιοδική ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων $x(t), y(t)$ ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad (11.55)$$

ενώ η περιοδική ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(\tau)$, ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt \quad (11.56)$$

με τη συζυγία να παραλείπεται όταν τα σήματα είναι πραγματικά.

Ακολουθώντας όμοιο σκεπτικό με την αυτοσυσχέτιση περιοδικών σημάτων, μπορούμε να αναπτύξουμε τα δυο σήματα σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}, \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (11.57)$$

Με αντικατάσταση των Σχέσεων (11.57) στις Σχέσεις (11.55, 11.56) μπορούμε να εξάγουμε σχέσεις με αυτές για την αυτοσυσχέτιση. Θα δείξουμε αμέσως πώς αναπτύσσεται η ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ σε Σειρά Fourier, ενώ ο αναγνώστης μπορεί να εξάγει την αντίστοιχη σχέση για την ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(\tau)$.

Έχουμε

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right)^* \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 (t+\tau)} \right) dt \quad (11.58)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t} e^{j2\pi l f_0 \tau} \right) dt \quad (11.59)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_l e^{j2\pi l f_0 \tau} e^{j2\pi (l-k) f_0 t} \right) dt \quad (11.60)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \int_{T_0} dt + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_l e^{j2\pi l f_0 \tau} \int_{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt \right) \quad (11.61)$$

και ξανά λόγω της Σχέσης (11.10), ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης μηδενίζεται. Οπότε εν τέλει

$$\phi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad (11.62)$$

Καταλήξαμε λοιπόν ότι αν δυο περιοδικά, με την ίδια περίοδο, σήματα $x(t), y(t)$ έχουν συντελεστές Fourier X_k, Y_k , τότε η ετεροσυσχέτιση του $x(t)$ με το $y(t)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε Σειρά Fourier με συντελεστές $X_k^* Y_k$.

11.2.2.2 Ετεροσυσχέτιση Σημάτων Ισχύος

Γενικότερα, για σήματα ισχύος η ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων $x(t), y(t)$ ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^*(t) y(t + \tau) dt \quad (11.63)$$

ενώ η ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(\tau)$, ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y^*(t) x(t + \tau) dt \quad (11.64)$$

με τη συζυγία να παραλείπεται όταν τα σήματα είναι πραγματικά.

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού ετεροσυσχέτισης δυο πολύ γνωστών σημάτων ισχύος που είδαμε ξεχωριστά νωρίτερα, της βηματικής συνάρτησης $x(t) = u(t)$ και της συνάρτησης προσήμου, $y(t) = \text{sgn}(t)$.

Παράδειγμα 11.5:

Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

$$x(t) = \text{sgn}(t) \quad (11.65)$$

και

$$y(t) = u(t) \quad (11.66)$$

Λύση:

Κατασκευάζοντας το μετατοπισμένο σήμα θα πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις για τις τιμές του τ , όπως στο Σχήμα 11.6. Για την περίπτωση (α) του Σχήματος 11.6, ισχύει ότι $-\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0$. Τότε

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left(- \int_{-\tau}^0 dt + \int_0^T dt \right) \quad (11.67)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left(-t \Big|_{-\tau}^0 + t \Big|_0^T \right) = \frac{1}{2} \quad (11.68)$$

ενώ για την περίπτωση (β) του ίδιου σχήματος, ισχύει ότι $-\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0$, και τότε

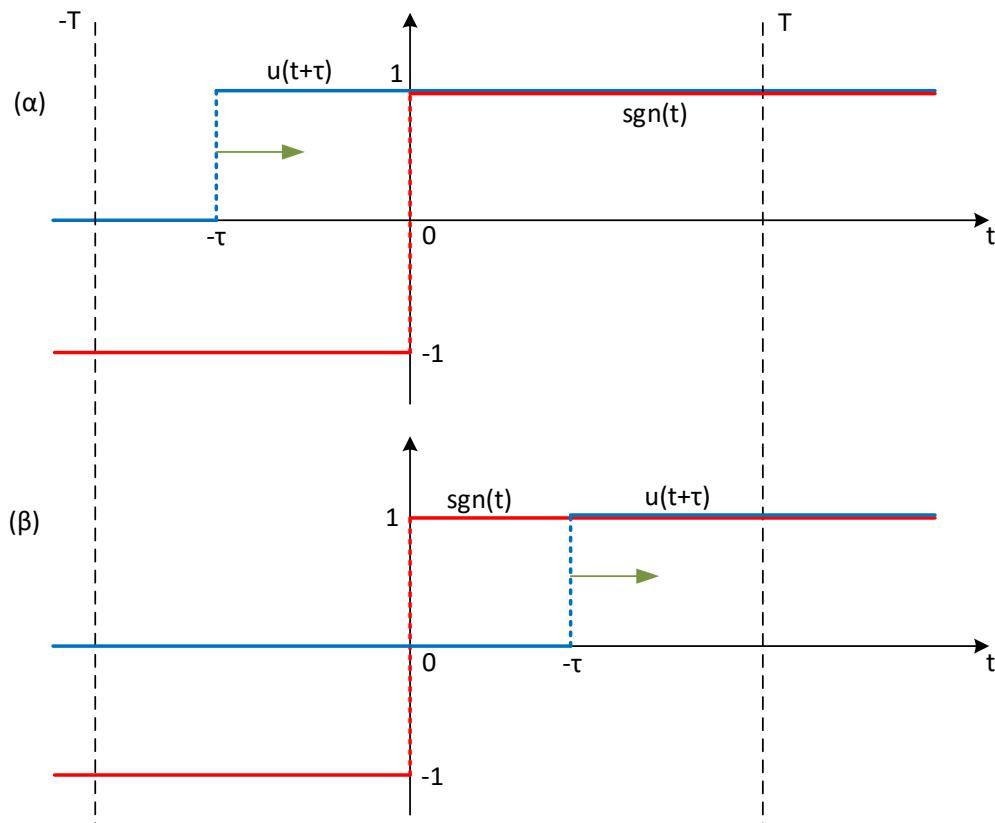
$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\tau}^T dt \quad (11.69)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} t \Big|_{-\tau}^T = \frac{1}{2} \quad (11.70)$$

Οπότε η ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων $x(t) = \text{sgn}(t)$ και $y(t) = u(t)$ είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \quad \forall \tau \quad (11.71)$$

■



Σχήμα 11.6: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της ετεροσυσχέτισης Παραδείγματος 11.5.

11.2.2.3 Ετεροσυσχέτιση Σημάτων Ενέργειας

Τέλος, η ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ μιγαδικών σημάτων ενέργειας $x(t), y(t)$ ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad (11.72)$$

ενώ η ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(\tau)$, ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt \quad (11.73)$$

παραλείποντας τη συζυγία όταν τα $x(t), y(t)$ είναι πραγματικά.

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι η ετεροσυσχέτιση μοιάζει πολύ με τη συνέλιξη δυο σημάτων, αλλά προφανώς δεν είναι ταυτόσημες πράξεις - σύντομα θα δούμε τη σχέση που τις συνδέει. Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού ετεροσυσχέτισης σημάτων.

Παράδειγμα 11.6:

Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \quad (11.74)$$

και

$$y(t) = e^{-2\alpha t}u(t) \quad (11.75)$$

με $\alpha > 0$.

Λύση:

Ας χρησιμοποιήσουμε αλγεβρική μέθοδο, μια και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας. Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt \quad (11.76)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-2\alpha(t+\tau)} u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.77)$$

Το γινόμενο $u(t)u(t+\tau)$ αναλύεται ως

$$u(t)u(t+\tau) = \begin{cases} 1, & t > 0 \text{ και } t > -\tau \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (11.78)$$

και για $-\tau < 0 \implies \tau > 0$, το ολοκλήρωμα της Σχέσης (11.77) γίνεται

$$\phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_0^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = e^{-2\alpha\tau} \left[\frac{1}{-3\alpha} e^{-3\alpha t} \right]_0^{+\infty} \quad (11.79)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - 1) = \frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} \quad (11.80)$$

ενώ για $-\tau > 0 \implies \tau < 0$, το ίδιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} e^{-3\alpha t} \Big|_{\tau}^{+\infty} = \quad (11.81)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - e^{3\alpha\tau}) = \frac{1}{3\alpha} e^{\alpha\tau} \quad (11.82)$$

Συνολικά

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3\alpha} \left(e^{-2\alpha\tau} u(\tau) + e^{\alpha\tau} u(-\tau) \right) \quad (11.83)$$

■

11.2.3 Ιδιότητες Συσχετίσεων

Οι συσχετίσεις έχουν κάποιες πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, τις σημαντικότερες εκ των οποίων θα απαριθμήσουμε σε αυτήν την Παράγραφο.

1. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι άρτια συνάρτηση:

$$\phi_x(\tau) = \phi_x(-\tau) \quad (11.84)$$

Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε σε όλα τα σχετικά παραδείγματα που έχουμε δει ως τώρα.

2. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης συμβαίνει τη χρονική στιγμή $\tau = 0$, δηλ. για μηδενική μετατόπιση του $x(t+\tau)$. Τότε τα δυο σήματα $x(t)$ και $x(t+\tau)$ ταυτίζονται. Για πραγματικά σήματα ενέργειας, ισχύει

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = E_x \quad (11.85)$$

με E_x την ενέργεια του σήματος $x(t)$. Για πραγματικά σήματα ισχύος η σχέση που προκύπτει είναι η

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t)dt = P_x \quad (11.86)$$

με P_x τη μέση ισχύ του σήματος $x(t)$. Τέλος, για πραγματικά περιοδικά σήματα, έχουμε

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t)dt = P_x \quad (11.87)$$

με P_x τη μέση ισχύ του περιοδικού σήματος $x(t)$, αφού τα περιοδικά σήματα είναι και αυτά σήματα ισχύος.

3. Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T_0 , η περιοδική αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$ έχει κι αυτή την ίδια περίοδο T_0 .
4. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\phi_x(\tau)$ δεν περιέχει πληροφορία για την αρχική φάση του σήματος $x(t)$.
5. Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\phi_{xy}(\tau)$ δεν είναι εν γένει άρτια συνάρτηση:

$$\phi_{xy}(\tau) \neq \phi_{xy}(-\tau) \quad (11.88)$$

Όμως μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}^*(-\tau) \quad (11.89)$$

με τη συζυγία να παραλείπεται όταν τα σήματα $x(t), y(t)$ είναι πραγματικά.

6. Αν η ετεροσυσχέτιση δυο σημάτων $\phi_{xy}(\tau)$ είναι μηδενική για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε τα σήματα $x(t), y(t)$ ονομάζονται *ασυσχέτιστα*.
7. Οι ορισμοί των συσχετίσεων πραγματικών περιοδικών σημάτων και σημάτων ενέργειας έχουν μεγάλη ομοιότητα με τον ορισμό της συνέλιξης. Δείτε:

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad \phi_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau)y(\tau+t)d\tau \quad (11.90)$$

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad \phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\tau+t)d\tau \quad (11.91)$$

με $c_{xy}(t)$ τη συνέλιξη των σημάτων $x(t), y(t)$. Στις παραπάνω σχέσεις, αλλάξαμε τις μεταβλητές t, τ μεταξύ τους στα ολοκληρώματα των συσχετίσεων, για να αναδειχθεί καλύτερα η ομοιότητα με την πράξη της συνέλιξης.

Μπορεί κανείς να δείξει (Άσκηση XXXX) ότι, στη γενικότερη μορφή τους, οι συναρτήσεις συσχέτισης μπορούν να γραφούν με την πράξη της συνέλιξης ως

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau) \quad (11.92)$$

$$\phi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau) \quad (11.93)$$

$$\phi_{yx}(\tau) = y^*(-\tau) * x(\tau) \quad (11.94)$$

όπου προφανώς ο τελεστής της συζυγίας παραλείπεται όταν τα σήματα $x(t), y(t)$ είναι πραγματικά.

11.2.4 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Στην Παράγραφο αυτή παραθέτουμε μερικά χρήσιμα παραδείγματα που εμπλέκουν συσχετίσεις, για περαιτέρω τριβή του αναγνώστη.

Παράδειγμα 11.7:

Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (11.95)$$

Λύση:

Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε αυτό το παράδειγμα χωρίς τη χρήση σχήματος, όπως στα προηγούμενα. Από το ορισμό της αυτοσυσχέτισης, έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt \quad (11.96)$$

Το σήμα $x(t) = e^{-at}u(t)$ ξεκινά από το $t = 0$ και εκτείνεται ως το $+\infty$. Το σήμα $x(t+\tau)$ δίνεται ως

$$x(t+\tau) = e^{-a(t+\tau)}u(t+\tau), \quad a > 0 \quad (11.97)$$

Η μετατόπιση τ μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Στην περίπτωση που $\tau < 0$, το σήμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά, και ξεκινά από τη χρονική στιγμή $t = \tau$. Οπότε το γινόμενο $x(t)x(t+\tau)$ θα είναι μη μηδενικό στο διάστημα

$[\tau, +\infty)$. Άρα

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-at} e^{-a(t+\tau)} dt = e^{-a\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} e^{-a\tau}, \quad \tau < 0 \quad (11.98)$$

Στην περίπτωση που $\tau > 0$, το σήμα μετατοπίζεται προς τα αριστερά, και ξεκινά από τη χρονική στιγμή $t = -\tau$. Οπότε το γινόμενο $x(\tau)x(t+\tau)$ θα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[0, +\infty)$. Άρα

$$\phi_x(\tau) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-a(t+\tau)} dt = e^{-a\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} e^{-a\tau}, \quad \tau > 0 \quad (11.99)$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2a} e^{-a|\tau|}, \quad a > 0 \quad (11.100)$$

■

Παράδειγμα 11.8:

Χρησιμοποιώντας της ανισότητα Schwarz

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt \quad (11.101)$$

δείτε ότι

$$(\alpha') \quad |\phi_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{\phi_x(0)\phi_y(0)}$$

$$(\beta') \quad |\phi_x(\tau)| \leq |\phi_x(0)|$$

Λύση:

(α') Είναι

$$|\phi_{xy}(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \phi_x(0)\phi_y(0) \quad (11.102)$$

$$|\phi_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{\phi_x(0)\phi_y(0)} \quad (11.103)$$

(β') Είναι

$$|\phi_x(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \phi_x^2(0) \quad (11.104)$$

$$|\phi_x(\tau)| \leq |\phi_x(0)| \quad (11.105)$$

11.3 Φασματικές Πυκνότητες

Έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι τα σήματα ισχύος δεν μπορούν να μελετηθούν με τον ορισμό του μετασχ. Fourier, καθώς το σχετικό ολοκλήρωμα δε συγκλίνει. Για την εύρεση του μετασχηματισμού, χρησιμοποιήσαμε έννοιες όπως αυτή τη συνάρτησης Δέλτα. Ακόμα και τότε όμως, ένα σήμα δεν είναι βέβαιο ότι έχει μετασχ. Fourier. Αυτό προφανώς θέτει προβλήματα όταν θέλει κανείς να μελετήσει το φασματικό περιεχόμενο τέτοιων σημάτων ή αν θέλει να μελετήσει την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος όταν στην είσοδό του παρουσιάζεται ένα σήμα ισχύος. Σε αυτές τις περιπτώσεις, καταφεύγουμε σε εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού του φασματικού περιεχομένου, και αυτοί οι τρόποι περιλαμβάνουν τη μελέτη των μετασχ. Fourier των συναρτήσεων συσχέτισης, οι οποίοι ονομάζονται **Φασματικές Πυκνότητες**.

Σε αυτήν την παράγραφο θα συζητήσουμε για τις Φασματικές Πυκνότητες και τη σημασία τους.

11.3.1 Φασματικές Πυκνότητες Ενέργειας

Ας ξεκινήσουμε από τα σήματα ενέργειας, των οποίων οι φασματικές πυκνότητες ονομάζονται *Φασματικές Πυκνότητες Ενέργειας* - *Energy Spectral Densities*.

Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης $\phi_x(\tau)$ ενός - μιγαδικού εν γένει - σήματος ενέργειας $x(t)$ είναι

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (11.106)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) dt \quad (11.107)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) X(f) e^{j2\pi ft} dt \quad (11.108)$$

$$= X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi ft} dt \quad (11.109)$$

$$= X(f) X^*(f) \quad (11.110)$$

$$= |X(f)|^2 \quad (11.111)$$

όπου στη Σχέση (11.107) αλλάξαμε τη σειρά ολοκλήρωσης εκμεταλλευόμενοι το Θεώρημα Fubini¹ Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας είναι

- πραγματική συνάρτηση
- θετική για κάθε $f \in \mathbb{R}$
- εξαρτώμενη μόνο από μετασχ. Fourier του σήματος ενέργειας $x(t)$ - που είμαστε σίγουροι ότι υπάρχει.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις είναι πολύ σημαντικές, γιατί ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητος του φάσματος φάσης του σήματος. Αυτό σημαίνει ότι η μετακίνηση του σήματος στο χρόνο είναι άνευ σημασίας για το μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης. Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας - Energy Spectral Density**, και συμβολίζεται ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = |X(f)|^2 \quad (11.117)$$

Αντιστρόφως, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μπορεί να βρεθεί μέσω της Φασματικής Πυκνότητας Ενέργειας ως

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df \quad (11.118)$$

Αν θέσουμε $\tau = 0$ στην παραπάνω σχέση, έχουμε

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x \quad (11.119)$$

λόγω του Θεωρήματος του Parseval.

Η τελευταία σχέση είναι πολύ σημαντική, διότι μας λέει ότι η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας μας αποκαλύπτει **πώς κατανέμεται η ενέργεια ενός σήματος στις διάφορες συχνότητες**. Γνωρίζετε ήδη ότι ο

¹Το Θεώρημα Fubini αναφέρει ότι η εξίσωση

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int dx \int f(x,y) dy = \int dy \int f(x,y) dx \quad (11.112)$$

είναι έγκυρη, δηλ. η σειρά ολοκλήρωσης σε ένα διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να αλλάξει, αν καθένα από τα επιμέρους ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα όταν στη θέση της συνάρτησης προς ολοκλήρωση $f(x,y)$ βάλουμε την $|f(x,y)|$. Πιο τυπικά, αν ισχύει τουλάχιστον μια από τις σχέσεις

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| dy \right) dx < \infty \quad (11.113)$$

$$\int_Y \left(\int_X |f(x,y)| dx \right) dy < \infty \quad (11.114)$$

τότε

$$\int_{X \times Y} |f(x,y)| d(x,y) < \infty \quad (11.115)$$

και

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int dx \int f(x,y) dy = \int dy \int f(x,y) dx \quad (11.116)$$

Μια τέτοια συνθήκη ισχύει σήματα ενέργειας, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα.

μετασχ. Fourier μας πληροφορεί για το ποιά ημίτονα (πλάτη, συχνότητες, φάσεις) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να συνθέσουμε ένα συγκεκριμένο σήμα - η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας μας πληροφορεί για την ενέργεια αυτών των ημιτόνων!

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα, αν υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης $\phi_{xy}(\tau)$ δυο σημάτων ενέργειας $x(t), y(t)$, θα καταλήξουμε στη σχέση

$$\Phi_{xy}(f) = F\{\phi_{xy}(\tau)\} = X^*(f)Y(f) \quad (11.120)$$

η οποία - αντίστοιχα με πριν - ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας - Interspectral Energy Density**. Αντίστοιχα, για την ετεροσυσχέτιση $\phi_{yx}(\tau)$, θα είναι

$$\Phi_{yx}(f) = F\{\phi_{yx}(\tau)\} = Y^*(f)X(f) \quad (11.121)$$

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 11.9:

Στην Παράγραφο 11.2.1.3, υπολογίσαμε την αυτοσυσχέτιση του τετραγωνικού παλμού και δείξαμε ότι

$$\phi_x(\tau) = A^2 T \text{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right) \quad (11.122)$$

Βρείτε τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας.

Λύση:

Η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας $\Phi_x(f)$ δίνεται εύκολα ως

$$\Phi_x(f) = A^2 T^2 \text{sinc}^2(fT) \quad (11.123)$$

γιατί γνωρίζουμε ότι

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \text{sinc}(fT) \quad (11.124)$$

και

$$|X(f)|^2 = (AT \text{sinc}(fT))^2 = A^2 T^2 \text{sinc}^2(fT) = \Phi_x(f) \quad (11.125)$$

■

Παράδειγμα 11.10:

Στην Παράγραφο 11.2.2.3, υπολογίσαμε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ και $y(t) = e^{-2\alpha t}u(t)$, με $\alpha > 0$, και τη βρήκαμε ίση με

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3\alpha} \left(e^{-2\alpha\tau}u(\tau) + e^{\alpha\tau}u(-\tau) \right) \quad (11.126)$$

Βρείτε τη Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας.

Λύση:

Η Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας $\Phi_{xy}(f)$ δίνεται ως ο μετασχ. Fourier της $\phi_{xy}(\tau)$, δηλ.

$$\frac{1}{3\alpha} \left(e^{-2\alpha\tau}u(\tau) + e^{\alpha\tau}u(-\tau) \right) \longleftrightarrow \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{1}{2\alpha + j2\pi f} + \frac{1}{\alpha - j2\pi f} \right) = \frac{1}{(2\alpha + j2\pi f)(\alpha - j2\pi f)} \quad (11.127)$$

Βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το γινόμενο $X^*(f)Y(f)$:

$$X^*(f) = \left(\frac{1}{\alpha + j2\pi f} \right)^* = \frac{1}{\alpha - j2\pi f} \quad (11.128)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2\alpha + j2\pi f} \quad (11.129)$$

$$X^*(f)Y(f) = \frac{1}{(a - j2\pi f)(2a + j2\pi f)} \quad (11.130)$$

11.3.2 Φασματικές Πυκνότητες Ισχύος

Για σήματα ισχύος, μπορούν να οριστούν αντίστοιχες έννοιες. Στη συζήτηση που ακολουθεί, θα διαχωρίσουμε τις περιπτώσεις σημάτων ισχύος σε περιοδικά και μη.

11.3.2.1 Φασματικές Πυκνότητες Περιοδικών Σημάτων

Για περιοδικά σήματα με περίοδο T_0 , η αυτοσυσχέτισή τους δίνεται ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (11.131)$$

Ας ορίσουμε το σήμα

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t, T_0)x(t+\tau)dt \quad (11.132)$$

όπου το $x(t, T_0)$ αποτελεί μια μόνο περίοδο του περιοδικού σήματος - άρα είναι ένα σήμα *ενέργειας*. Είδαμε νωρίτερα ότι για σήματα ενέργειας, η αυτοσυσχέτισή τους μπορεί να γραφεί με χρήση της πράξης της συνέλιξης ως

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau) \quad (11.133)$$

Έτσι, η Σχέση (11.132) μπορεί να γραφεί ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} x^*(-\tau, T_0) * x(\tau) \quad (11.134)$$

Το $x(\tau)$ της παραπάνω σχέσης παραμένει ένα περιοδικό σήμα, και γνωρίζουμε ότι ένα περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί ως η συνέλιξη της βασικής περιόδου του με μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα. Άρα το $x(\tau)$ μπορεί να γραφεί ως

$$x(\tau) = x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau) = x(\tau, T_0) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT_0) \quad (11.135)$$

Αντικαθιστώντας στη Σχέση (11.134), έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} x^*(-\tau, T_0) * (x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau)) \quad (11.136)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\underbrace{x^*(-\tau, T_0) * x(\tau, T_0)}_{\phi_x(\tau, T_0)} \right) * \delta_{T_0}(\tau) \quad (11.137)$$

$$= \frac{1}{T_0} \phi_x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau) \quad (11.138)$$

όπου $\phi_x(\tau, T_0)$ συμβολίζει την αυτοσυσχέτιση της βασικής περιόδου του σήματος (η οποία, υπενθυμίζουμε, είναι σήμα ενέργειας).

Πώς ερμηνεύει κανείς την παραπάνω σχέση; Είναι ξεκάθαρο ότι η αυτοσυσχέτιση ενός περιοδικού σήματος μπορεί να υπολογιστεί σε δυο βήματα:

Υπολογισμός Αυτοσυσχέτισης Περιοδικού Σήματος

1. Υπολογίζουμε την αυτοσυσχέτιση μιας περιόδου $x(t, T_0)$ του περιοδικού σήματος $x(t)$.
2. Επαναλαμβάνουμε το αποτέλεσμα σε πολλαπλάσια της περιόδου, δηλ.

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \phi_x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau - kT_0, T_0) \quad (11.139)$$

Δείξαμε όμως επίσης στην Παράγραφο 11.2.1.1 ότι η αυτοσυσχέτιση ενός περιοδικού σήματος αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi f_0 \tau} \quad (11.140)$$

της οποίας ο μετασχ. Fourier είναι

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \quad (11.141)$$

Είναι η παραπάνω σχέση ισοδύναμη με το μετασχ. Fourier της Σχέσης (11.138); Ας το δούμε.

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \frac{1}{T_0} F\{\phi_x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau)\} \quad (11.142)$$

$$= \frac{1}{T_0} F\{\phi_x(\tau, T_0)\} F\{\delta_{T_0}(\tau)\} \quad (11.143)$$

$$= \frac{1}{T_0} \Phi_x(f, T_0) \Delta(f) \quad (11.144)$$

με

$$\Delta(f) = \frac{1}{T_0} \delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0) \quad (11.145)$$

το μετασχ. Fourier μιας σειράς από συναρτήσεις Δέλτα που απέχουν T_0 μεταξύ τους. Εν τέλει η Σχέση (11.144) γράφεται

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \frac{1}{T_0} \Phi_x(f, T_0) \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0) \quad (11.146)$$

$$= \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_x(kf_0, T_0) \delta(f - kf_0) \quad (11.147)$$

με $\Phi_x(f) = |X(f, T_0)|^2$ τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας του σήματος $x(t, T_0)$, δηλ. του σήματος της βασικής περιόδου.

Είναι πλέον ξεκάθαρο, συγκρίνοντας τις Σχέσεις (11.144, 11.147) ότι

$$|X_k|^2 = \left. \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \right]_{f=kf_0} \quad (11.148)$$

Πώς ερμηνεύεται η παραπάνω σχέση; Οι συντελεστές Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός περιοδικού σήματος μπορούν να υπολογιστούν σε δυο βήματα:

Υπολογισμός Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος Περιοδικού Σήματος

1. Υπολογίζουμε τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας $\Phi_x(f, T_0)$ μιας περιόδου $x(t, T_0)$ - που είναι σήμα ενέργειας - του περιοδικού σήματος $x(t)$.
2. Δειγματοληπτούμε την παραπάνω Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας ανά kf_0 , και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με $\frac{1}{T_0^2}$.
3. Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_x(kf_0, T_0) \delta(f - kf_0) \quad (11.149)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 11.11:

Δείξαμε στην Παράγραφο 11.2.1.1 ότι για το περιοδικό σήμα $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \theta)$, η αυτοσυσχέτισή του δίνεται ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (11.150)$$

Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος.

Λύση:

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0) \quad (11.151)$$

■

Παράδειγμα 11.12:

Το περιοδικό σήμα $x(t)$ που περιγράφεται σε μια περίοδο του ως

$$x(t, T_0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & T < t < T_0 \end{cases} \quad (11.152)$$

με $T = T_0/4$. Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του.

Λύση:

Μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο βρίσκοντας πρώτα την Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας του σήματος μιας περιόδου, $x(t, T_0)$, και στη συνέχεια να δειγματοληπτήσουμε το αποτέλεσμα ανά kf_0 . Τέλος, πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με τη σταθερά $1/T_0^2$ και θα έχουμε τότε τους συντελεστές Fourier της αυτοσυσχέτισης του περιοδικού σήματος. Για το σήμα $x(t, T_0)$ έχουμε

$$\Phi_x(f, T_0) = |X(f, T_0)|^2 = \left| \frac{T_0}{4} \text{sinc}\left(f \frac{T_0}{4}\right) e^{-j2\pi f \frac{T_0}{8}} \right|^2 = \frac{T_0^2}{16} \text{sinc}^2\left(f \frac{T_0}{4}\right) \quad (11.153)$$

Δειγματοληπτώντας ανά $f = kf_0 = \frac{k}{T_0}$, $k \in \mathbb{Z}$ και πολλαπλασιάζοντας με τη σταθερά $1/T_0^2$, έχουμε

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \frac{T_0^2}{16} \text{sinc}^2\left(f \frac{T_0}{4}\right) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \quad (11.154)$$

Οπότε τελικά

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{16} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \delta(f - kf_0) \quad (11.155)$$

■

Αν ακολουθήσουμε τον ίδιο συλλογισμό για την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ περιοδικών σημάτων, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{T_0^2} \Phi_{xy}(f, T_0) \delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k \delta(f - kf_0) \quad (11.156)$$

όπου

$$\Phi_{xy}(f, T_0) = X^*(f, T_0) Y(f, T_0) \quad (11.157)$$

η Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας, $X^*(f, T_0)$ ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t, T_0)$, και $Y(f, T_0)$ ο αντίστοιχος του σήματος $y(t, T_0)$. Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι

$$X_k^* = \frac{1}{T_0} X^*(kf_0, T_0) \quad (11.158)$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(kf_0, T_0) \quad (11.159)$$

11.3.2.2 Φασματικές Πυκνότητες Απεριοδικών Σημάτων Ισχύος

Ας βρούμε, τέλος, τις σχέσεις που συνδέουν τις συσχετίσεις σημάτων ισχύος με το χώρο της συχνότητας. Όπως νωρίτερα, ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης σημάτων ισχύος ονομάζεται *Φασματική Πυκνότητα Ισχύος*, ενώ ο αντίστοιχος της ετεροσυσχέτισης ονομάζεται *Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος*, δηλ.

$$\phi_x(\tau) \longleftrightarrow \Phi_x(f) \quad (11.160)$$

$$\phi_{xy}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{xy}(f) \quad (11.161)$$

$$\phi_{yx}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(f) \quad (11.162)$$

Όμως, μια πολύ σημαντική διαφορά σε σχέση με τα σήματα ενέργειας είναι ότι ο μετασχ. Fourier των συσχετίσεων σημάτων ισχύος δε σχετίζεται με το μετασχ. Fourier των σημάτων ισχύος. Μπορεί όμως κανείς να δείξει ότι για τα σήματα ισχύος

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left| X(f, T) \right|^2 \quad (11.163)$$

με

$$X(f, T) = F\{x(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\} \quad (11.164)$$

δηλ. ο όρος $X(f, T)$ συμβολίζει το μετασχ. Fourier του παραθυροποιημένου σήματος $x(t)$. Το παραπάνω όριο μπορεί όμως να μην υπάρχει. Αυτό μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι η μελέτη σημάτων ισχύος στο χώρο της συχνότητας πρέπει να γίνει μέσω του μετασχ. Fourier των συσχετίσεων, δηλ. μέσω της εύρεσης των Φασματικών Πυκνοτήτων Ισχύος.

Παράδειγμα 11.13:

Στην Παράγραφο 11.2.1.2 δείξαμε ότι η αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$ του σήματος ισχύος $x(t) = \text{sgn}(t)$ είναι

$$\phi_x(\tau) = 1 \quad \forall \tau \quad (11.165)$$

Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος.

Λύση:

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος δίνεται εύκολα ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = F\{1\} = \delta(f) \quad (11.166)$$

■

Παράδειγμα 11.14:

Στην ίδια Παράγραφο δείξαμε ότι η αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$ του σήματος ισχύος $x(t) = u(t)$ είναι

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2} \quad \forall \tau \quad (11.167)$$

Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος.

Λύση:

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος δίνεται εύκολα ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f) \quad (11.168)$$

■

11.3.3 Ιδιότητες Φασματικών Πυκνοτήτων

Οι Φασματικές Πυκνότητες έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες.

(α') $\Phi_x(f) = \Phi_x(-f)$, για πραγματικά σήματα.

(β') $\Phi_x(f) \geq 0, \forall f$.

11.3.4 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Παράδειγμα 11.15:

Έστω τα γνωστά σας σήματα

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (11.169)$$

$$y(t) = e^{-2at}u(t), \quad a > 0 \quad (11.170)$$

(α') Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\phi_{xx}(\tau)$ του σήματος $x(t)$.

(β') Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειάς του, $\Phi_{xx}(f)$.

(γ') Υπολογίστε τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\phi_{xy}(\tau)$ και τη Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας, $\Phi_{xy}(f)$.

Λύση:

α') Είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-\alpha(t+\tau)}u(t+\tau)dt = e^{-\alpha\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-\alpha t}u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.171)$$

$$= e^{-\alpha\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha t}u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.172)$$

Είναι

$$u(t)u(t+\tau) = \begin{cases} 1, & t > 0 \text{ και } t > -\tau \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (11.173)$$

Έχουμε δύο περιπτώσεις:

- $-\tau < 0 \implies \tau > 0$, τότε

$$\phi_x(\tau) = e^{-\alpha\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t}dt = e^{-\alpha\tau} \left[\frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \right]_0^{+\infty} \quad (11.174)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\tau} (0 - 1) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\tau}, \quad \tau > 0 \quad (11.175)$$

- $-\tau > 0 \implies \tau < 0$, τότε

$$\phi_x(\tau) = e^{-\alpha\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-2\alpha t}dt = e^{-\alpha\tau} \left[\frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \right]_{-\tau}^{+\infty} \quad (11.176)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\tau} (0 - e^{2\alpha\tau}) = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha\tau}, \quad \tau < 0 \quad (11.177)$$

Οπότε συνολικά

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2\alpha} \left(e^{-\alpha\tau} u(\tau) + e^{\alpha\tau} u(-\tau) \right) \quad (11.178)$$

β') Είναι

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = \left| \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \right|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (11.179)$$

γ') Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-2\alpha(t+\tau)}u(t+\tau)dt = e^{-2\alpha\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3\alpha t}u(t)u(t+\tau)dt \quad (11.180)$$

Όμοια με πριν διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Στην πρώτη περίπτωση

$$-\tau < 0 \implies \tau > 0 : \phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_0^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = e^{-2\alpha\tau} \left[\frac{1}{-3\alpha} e^{-3\alpha t} \right]_0^{+\infty} \quad (11.181)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - 1) = \frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau}, \tau > 0 \quad (11.182)$$

- Στη δεύτερη περίπτωση

$$-\tau > 0 \implies \tau < 0 : \phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} e^{-3\alpha t} \Big|_{-\tau}^{+\infty} \quad (11.183)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - e^{3\alpha\tau}) = \frac{1}{3\alpha} e^{\alpha\tau}, \tau < 0 \quad (11.184)$$

Συνολικά

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3\alpha} \left(e^{-2\alpha\tau} u(\tau) + e^{\alpha\tau} u(-\tau) \right) \quad (11.185)$$

Η Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας δίνεται ως

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) = \left(\frac{1}{\alpha + j2\pi f} \right)^* \cdot \frac{1}{2\alpha + j2\pi f} \quad (11.186)$$

$$= \frac{1}{(\alpha - j2\pi f)} \cdot \frac{1}{(2\alpha + j2\pi f)} \quad (11.187)$$

$$= \frac{1}{(\alpha - j2\pi f)(2\alpha + j2\pi f)} \quad (11.188)$$

■

Παράδειγμα 11.16:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 5, & t = -2 \\ 2, & t = -1 \\ 2, & t = 1 \\ 5, & t = 2 \\ 0, & \text{άλλου} \end{cases} \quad (11.189)$$

Δείξτε ότι

$$\Phi_x(f) \leq 156 \quad (11.190)$$

Λύση:

Το σήμα - το οποίο είναι σήμα ενέργειας - μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = 5\delta(t+2) + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 5\delta(t-2) \quad (11.191)$$

Η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας $\Phi_x(f)$ δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 \quad (11.192)$$

$$= |5e^{j2\pi 2f} + 2e^{j2\pi f} + 2e^{-j2\pi f} + 5e^{-2j2\pi f}|^2 \quad (11.193)$$

$$= |10 \cos(4\pi f) + 4 \cos(2\pi f)|^2 \quad (11.194)$$

$$= 100 \cos^2(4\pi f) + 80 \cos(4\pi f) \cos(2\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f) \quad (11.195)$$

$$= 100 \cos^2(4\pi f) + 20 \cos(2\pi f) + 20 \cos(6\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f) \quad (11.196)$$

Επειδή $|\cos(x)| \leq 1$ και $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$, έχουμε

$$\Phi_x(f) = 100 \cos^2(4\pi f) + 20 \cos(2\pi f) + 20 \cos(6\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f) \leq 100 + 20 + 20 + 16 = 156 \quad (11.197)$$