3.4 Μερικά χρήσιμα μοντέλα σημάτων

Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε μερικά νέα σήματα (δηλ. νέες συναρτήσεις, που δεν έχουμε δει ξανά ποτέ) που θα μας αποδειχθούν πολύ χρήσιμα. Αυτά είναι τέσσερα: (α) η βηματική συνάρτηση (step function), (β) ο τετραγωνικός παλμός (rectangular pulse), (γ) ο τριγωνικός παλμός (triangular pulse), και (δ) η κρουστική συνάρτηση Δέλτα (Delta function).

3.4.1 Η βηματική συνάρτηση $u(t)$

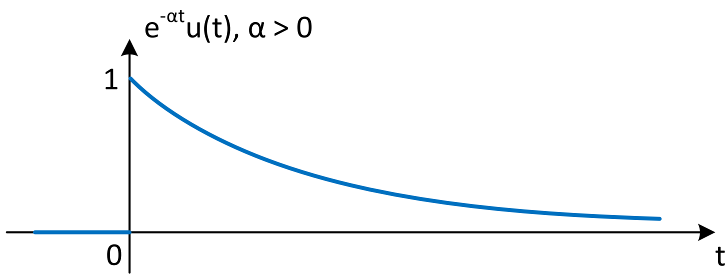
Σε πολλά από τα παραδείγματά μας ως τώρα, τα σήματά μας έχουν μηδενικές τιμές για $t < 0$, δηλ. ξεκινούν τη χρονική στιγμή $t = 0$. Αυτά τα σήματα λέγονται *αιτιατά*. Τέτοια σήματα μπορούν να περιγραφούν εύκολα με τη χρήση της περίφημης *βηματικής συνάρτησης* $u(t)$, της οποίας ο ορισμός είναι πολύ απλός:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{3.54}$$

Μπορείτε να φανταστείτε τη βηματική συνάρτηση ως ένα σήμα-''διακόπτη'', που είναι μηδέν για $t < 0$ (κλειστός διακόπτης) και γίνεται μονάδα για $t > 0$ (ανοιχτός διακόπτης). Αν θέλουμε λοιπόν ένα σήμα μας να ξεκινάει από το $t = 0$ (δηλ. να έχει μηδενικές τιμές για $t < 0$), απλά το πολλαπλασιάζουμε με τη βηματική συνάρτηση $u(t)$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 3.10. Αντίστοιχα, αν θέλουμε να ξεκινάει από μια χρονική στιγμή

Σχήμα 3.10: *Η βηματική συνάρτηση* $u(t)$.

$t = t_0 > 0$, το πολλαπλασιάζουμε με τη βηματική $u(t - t_0)$. Για παράδειγμα, το σήμα $e^{-at}, a > 0$ αναπαρίσταται γραφικά ως ένα άπειρης διάρκειας εκθετικό που ξεκινά από το $t = -\infty$. Αν θέλουμε να βρούμε την αιτιατή του μορφή, απλά θα πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με τη βηματική συνάρτηση, παίρνοντας τη γραφική παράσταση του Σχήματος 3.11 και η μαθηματική μορφή θα είναι φυσικά η $e^{-at}u(t)$. Η βηματική απόκριση αποδεικνύεται επίσης



Σχήμα 3.11: *Η αιτιατή εκθετική συνάρτηση* $e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

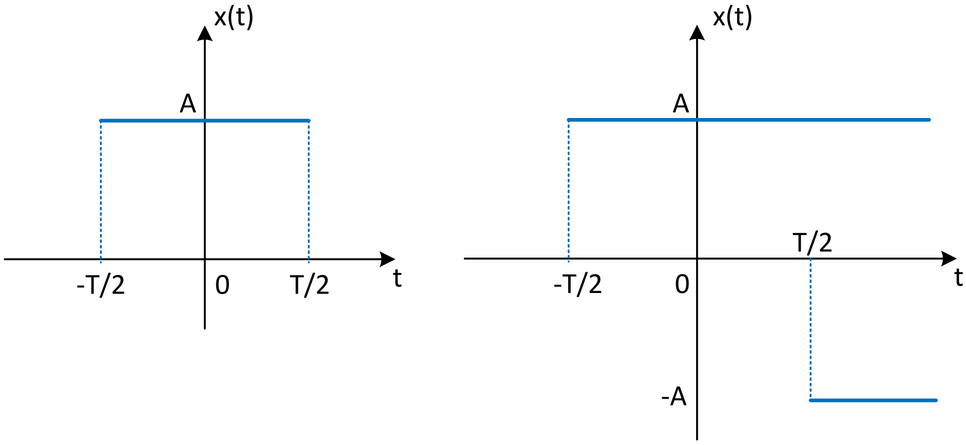
πολύ χρήσιμη στην περιγραφή συναρτήσεων που έχουν ανά διαστήματα διαφορετικές μαθηματικές αναπαραστάσεις. Αυτά τα σήματα έχουν διαφορετική μαθηματική περιγραφή ανά τμήματα του χρόνου. Μια τέτοια σύνθετη περιγραφή αποδεικνύεται άβολη όταν θέλουμε να κάνουμε πράξεις με σήματα. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε τη βηματική συνάρτηση, τότε θα έχουμε *μια* και μόνο μαθηματική έκφραση για κάθε τιμή του t!

3.4.2 Ο Τετραγωνικός Παλμός

Ο τετραγωνικός παλμός είναι πολύ χρήσιμος και θα τον χρησιμοποιήσουμε αρκετά στη συνέχεια, οπότε ας του δώσουμε ένα βολικό όνομα κι έναν ορισμό. Ας τον πούμε rect, από τη συντομογραφία του rectangular[3]. Οπότε ας ορίσουμε ότι

$$\text{παλμός πλάτους A στο διάστημα } \Big(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\Big) = A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) = \begin{cases} A, & t\in(-T/2,T/2) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{3.55}$$

όπως στο Σχήμα 3.12. Παρατηρήστε ότι η διάρκεια του παλμού αναφέρεται ως παρονομαστής του ορίσματος της



Σχήμα 3.12: *Ορισμός βασικού παλμού με βηματικές συναρτήσεις.*

rect(·). Από τον ορισμό φαίνεται ότι ο παλμός είναι άρτια συνάρτηση του t. Έτσι, ο παλμός θα γραφτεί με χρήση βηματικών ως

$$A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) = A(u(t-(-T/2)) - u(t-T/2)) = A\Big(u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})\Big) \tag{3.56}$$

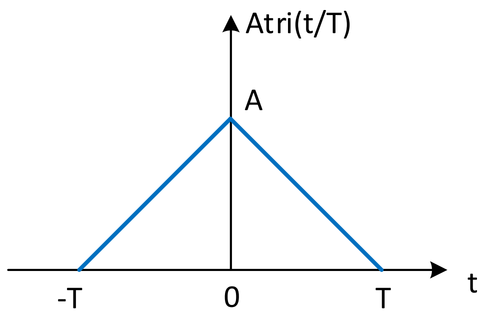
3.4.3 Ο Τριγωνικός Παλμός

Αντίστοιχα μπορεί να οριστεί ο *τριγωνικός* παλμός, τον οποίο θα συμβολίζουμε ως tri, από τη συντομογραφία του triangular[4]. Οπότε ας ορίσουμε ότι

$$\text{τριγωνικός παλμός πλάτους A στο διάστημα } \Big(-T,T\Big) = A\mathrm{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big) = \begin{cases} A\Big(1-\frac{|t|}{T}\Big), & t\in(-T,T) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{3.57}$$

όπως στο Σχήμα 3.13.

Από τον ορισμό φαίνεται ότι ο τριγωνικός παλμός είναι επίσης άρτια συνάρτηση του t. Παρατηρήστε ότι η *μισή* διάρκεια του τριγωνικού παλμού αναφέρεται ως παρονομαστής του ορίσματος της tri(·) - σε αντίθεση με τον τετραγωνικό παλμό, όπου όλη η διάρκειά του εμφανιζόταν ως παρονομαστής στο όρισμα του rect. Ο λόγος αυτής της ‘‘ασυνέπειας ’’ στο συμβολισμό θα φανεί στη συνέχεια.



Σχήμα 3.13: *Τριγωνικός παλμός.*

3.4.4 Κρουστική Συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$

Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα (ή συνάρτηση Δέλτα απλά, ή ακόμα απλούστερα, $\delta(t)$, από δω και πέρα), είναι μια από τις σημαντικότερες συναρτήσεις στην ανάλυση σημάτων και συστημάτων. Ακριβέστερα, δε θα έλεγε κανείς ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι συνάρτηση με την αυστηρή έννοια του όρου. Η συνάρτηση Δέλτα είναι μια

[3]Τετραγωνικός, στα Αγγλικά.
[4]Τριγωνικός, στα Αγγλικά.

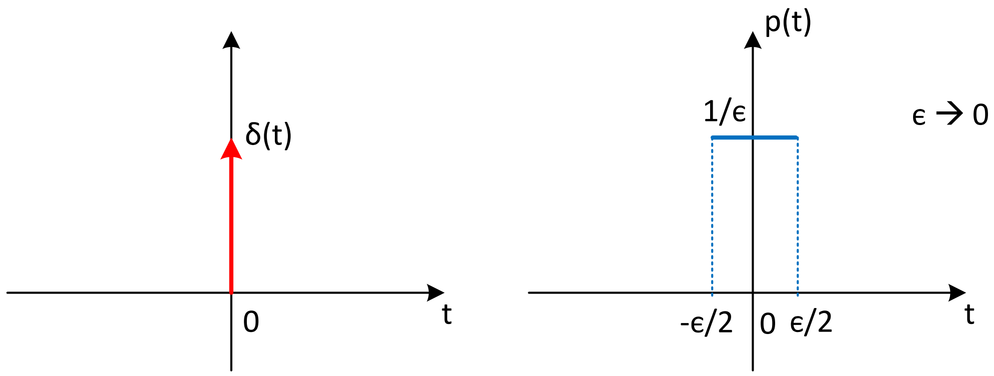
γενικευμένη συνάρτηση[5].

Η συνάρτηση Δέλτα ορίζεται ως

$$\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0 \tag{3.58}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{3.59}$$

Βλέπετε ότι η συνάρτηση Δέλτα δεν ορίζεται με κάποιο κλειστό τύπο όπως οι περισσότερες συναρτήσεις. Μπορούμε όμως να φανταστούμε τη συνάρτηση Δέλτα ως μια ψηλή, πολύ πολύ στενή "έκδοση" του τετραγωνικού παλμού που είδαμε νωρίτερα, με μοναδιαίο εμβαδό (όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα της Σχέσης (3.59)). Η διάρκεια ϵ του παλμού θα έχει πολύ πολύ μικρή τιμή $\epsilon \to 0$. Έτσι, το ύψος του παλμού θα έχει πολύ μεγάλη τιμή, $\frac{1}{\epsilon}$ (για να ικανοποιείται η σχέση του εμβαδού $\frac{1}{\epsilon}\epsilon = 1$). Οπότε, η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να θεωρηθεί ως ενας τετραγωνικός παλμός με απειροστά μικρή διάρκεια, και απειροστά μεγάλο πλάτος, αλλά εμβαδό ίσο με μονάδα! Περίεργο, έτσι δεν είναι; ☺Το Σχήμα 3.14 δείχνει τη θεωρητική αναπαράσταση της συνάρτησης Δέλτα, και την προσέγγισή της από τετραγωνικό παλμό, όπως την εξηγήσαμε μόλις. Τι είναι λοιπόν αυτό το τόσο σπουδαίο που καθιστά τη



Σχήμα 3.14: *Συνάρτηση Δέλτα: ορισμός και προσέγγισή της.*

συνάρτηση Δέλτα χρήσιμη για τους μηχανικούς; Ίσως έχετε ήδη καταλάβει ότι η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσομοιώσει ένα *ακαριαίας* φύσως σήμα, που δρα στιγμιαία και ύστερα εξαφανίζεται. Ένα τέτοιο - θεωρητικό - σήμα είναι πολύ χρήσιμο στη μελέτη των συστημάτων, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

3.4.4.1 Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα

Ας δούμε τι συμβαίνει οταν πολλαπλασιάσουμε τη συνάρτηση Δέλτα με μια άλλη συνάρτηση $x(t)$, η οποία είναι συνεχής στο $t = 0$. Αφού η συνάρτηση Δέλτα είναι μη μηδενική μόνο για $t = 0$, και η τιμή της $x(t)$ για $t = 0$ είναι προφανώς $x(0)$, τότε θα έχουμε

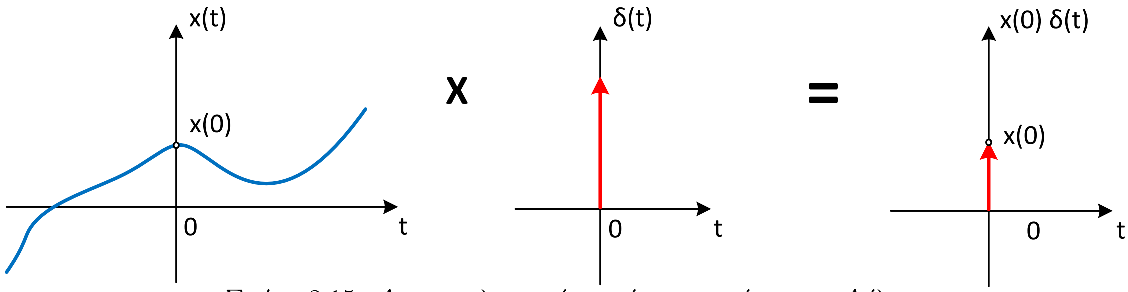
$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \tag{3.60}$$

Όμοια, αν η $x(t)$ πολλαπλασιαστεί από μια μετατοπισμένη έκδοση της $\delta(t)$, έστω την $\delta(t-T)$ (η οποία είναι μια συνάρτηση Δέλτα τη χρονική στιγμή $t = T$), θα έχουμε

$$x(t)\delta(t-T) = x(T)\delta(t-T) \tag{3.61}$$

Τι σημαίνουν τα παραπάνω; Σημαίνουν ότι ο πολλαπλασιασμός μιας συνάρτησης Δέλτα με μια συνάρτηση $x(t)$, μας δίνει την ίδια συνάρτηση Δέλτα με πλάτος την τιμή της συνάρτησης $x(t)$ τη χρονική στιγμή που ορίζεται η συνάρτηση Δέλτα! Με άλλα λόγια, η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να *δειγματοληπτήσει* μια άλλη συνάρτηση, ανάλογα με τη θέση (χρονική στιγμή) που θα διαλέξουμε να την τοποθετήσουμε! Αυτή η ιδιότητα φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 3.15.

[5]Μια γενικευμένη συνάρτηση ορίζεται από *την επίδρασή της σε άλλες συναρτήσεις* ή από τις τιμές της για κάθε χρονική στιγμή t.



Σχήμα 3.15: *Δειγματοληπτική ικανότητα συνάρτησης Δέλτα.*

Άρα, αν έχουμε ένα κάπως ασυνήθιστο σήμα, που ορίζεται μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, όπως το

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = -2 \\ -1, & t = 0 \\ 2, & t = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{3.62}$$

τότε η συνάρτηση Δέλτα θα μας βοηθούσε να το γράφουμε ως

$$x(t) = 1\delta(t+2) - 1\delta(t) + 2\delta(t-3) \tag{3.63}$$

Τώρα, αν ολοκληρώσουμε τη Σχέση (3.60), θα έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = x(0) \tag{3.64}$$

δεδομένου πάντα ότι η $x(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την παραπάνω σχέση ως εξής: το εμβαδό του γινομένου μιας συνάρτησης $x(t)$ με τη συνάρτηση Δέλτα ισούται με την τιμή της συνάρτησης τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm T)dt = x(\mp T)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm T)dt = x(\mp T) \tag{3.65}$$

Η ερμηνεία της παραπάνω σχέσης είναι ακριβώς η ίδια με προηγουμένως, μόνο που πλέον η τιμή της συνάρτησης εξαρτάται από τη θέση της συνάρτησης Δέλτα.

Παραπάνω είδατε κάποιες πράξεις που μπορούν να γίνουν με τη συνάρτηση Δέλτα. Αυτό δε σημαίνει ότι όλες οι κοινές πράξεις που γίνονται σε συνήθεις συναρτήσεις μπορούν να γίνουν και με τη συνάρτηση Δέλτα. Για παράδειγμα, επιτρέπεται η ολίσθηση, καθώς και το άθροισμα με άλλες συναρτήσεις. Δε θα προτείναμε να την υψώσετε στο τετράγωνο, να υψώσετε στο τετράγωνο τη μεταβλητή t του ορίσματός της, ή να την πολλαπλασιάσετε με μια συνάρτηση που *δεν* είναι συνεχής στο σημείο που βρίσκεται η συνάρτηση Δέλτα.

Η συνάρτηση Δέλτα έχει επιπλέον τις ακόλουθες ιδιότητες, οι οποίες παρατίθενται χωρίς απόδειξη.

$$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}, \quad a \in \Re - \{0\} \tag{3.66}$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \tag{3.67}$$

3.4.4.2 Σχέση Συνάρτησης Δέλτα και Βηματικής Συνάρτησης

Τέλος, μια πολύ σημαντική ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα είναι ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t) \tag{3.68}$$

δηλ. η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης που είδαμε νωρίτερα ισούται με τη συνάρτηση Δέλτα. Το ‘‘μυστικό’’ αυτής της σχέσης είναι ότι αν σκεφτούμε τη βηματική συνάρτηση ως μια ασυνέχεια (μια και από την τιμή 0 αλλάζει ακαριαία στην τιμή 1, όταν $t = 0$), τότε μόλις ορίσαμε την παράγωγο της ασυνέχειας![6]

Κατ' αρχάς, γνωρίζετε ότι μια συνάρτηση που είναι ασυνεχής σε ένα σημείο - όπως η βηματική συνάρτηση - δεν μπορεί να έχει παράγωγο με τη συνήθη έννοια. Ας κάνουμε όμως την ερώτηση: *''αν η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είχε παράγωγο $\frac{d}{dt}u(t)$, τότε ποιές θα ήταν οι ιδιότητές της;''* Ας ξεκινήσουμε από τα απλά: προφανώς η βηματική συνάρτηση έχει παράγωγο μηδέν σε όλα τα σημεία της, πλην του $t = 0$. Άρα μια πρώτη ιδιότητα θα πρέπει να είναι η

$$\frac{d}{dt}u(t) = 0, \;\; t \neq 0 \tag{3.69}$$

Μια δεύτερη ιδιότητα της βηματικής συνάρτησης προέρχεται από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού: για $t_1 < 0 < t_2$, πρέπει

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}u(t)dt = u(t)\Big]_{t_1}^{t_2} = u(t_2) - u(t_1) = 1 - 0 = 1 \tag{3.70}$$

Άρα μια δεύτερη ιδιότητα πρέπει να είναι η

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}u(t)dt = 1, \;\; \forall \;\; t_1 < 0 < t_2 \tag{3.71}$$

Καμιά συνάρτηση - με την αυστηρή έννοια του όρου - δεν έχει αυτές τις δυο ιδιότητες! Δείτε όμως τις Σχέσεις (3.58,3.59). Αν $t_1 \to -\infty$ και $t_2 \to +\infty$, υπάρχει απόλυτη ταύτιση των σχέσεων! Άρα η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση Δέλτα!

Ας θεωρήσουμε τη Σχέση (3.68) ως αληθής. Τότε, η παράγωγος της $u(t)$ πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}u(t)x(t)dt = u(t)x(t)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\frac{d}{dt}x(t)dt \tag{3.72}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} x(t)u(t) - \lim_{t\to-\infty} x(t)u(t) - \int_{0}^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)dt \tag{3.73}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} x(t) - 0 - \int_{0}^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)dt \tag{3.74}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} x(t) - x(t)\Big]_{0}^{+\infty} \tag{3.75}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} x(t) - \lim_{t\to+\infty} x(t) + \lim_{t\to 0} x(t) \tag{3.76}$$

$$= x(0) \tag{3.77}$$

δεδομένου ότι η $x(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$. Άρα δείξαμε ότι η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης ικανοποιεί την ιδιότητα της δειγματοληψίας της συνάρτησης Δέλτα. Άρα είναι και αυτή μια συνάρτηση Δέλτα!

Άμεση συνέπεια της Σχέσης (3.68) είναι ότι

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{3.78}$$

3.4.4.3 Παράγωγοι της συνάρτησης Δέλτα

Η παράγωγος της συνάρτησης Δέλτα ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\delta(t)x(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\frac{d}{dt}x(t)dt = -\frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0} \tag{3.79}$$

Όμοια ορίζεται η $n-$οστή παράγωγος ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n}\delta(t)x(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}x(0)\Big|_{t=0} \tag{3.80}$$

[6] Βεβαίως γνωρίζετε ότι μια ασυνεχής συνάρτηση δεν παραγωγίζεται με τη συνήθη έννοια της παραγώγου.... γι' αυτό και η παραπάνω παράγωγος ονομάζεται *γενικευμένη παράγωγος*, όπως η συνάρτηση Δέλτα είναι μια γενικευμένη συνάρτηση.