

Κεφάλαιο 7

Συστήματα στο χώρο του Laplace

7.1 Εισαγωγή

Ο μετασχ. Laplace είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την ανάλυση συστημάτων. Η ικανότητά του να ερμηνεύει συχνοτικά πλήθος σημάτων, σημαντικά περισσότερων από το μετασχ. Fourier, τον κάνει ιδανικό για τη μελέτη συστημάτων.

Έχουμε δει αρκετά πράγματα για τα συστήματα σε προηγούμενο κεφάλαιο, καθώς και σχετικά με την αιτιότητα και την ευστάθεια ενός συστήματος. Υπάρχουν δεξιόπλευρα, αριστερόπλευρα, αμφίπλευρα, αιτιατά και μη συστήματα που ορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε στην Παράγραφο 6.2.4. Μάλιστα, την αιτιατότητα και την ευστάθεια την είχαμε ορίσει και στις πρώτες μας συζητήσεις για συστήματα, ως την ικανότητα του συστήματος να εξαρτά την έξοδό του μόνο από τωρινές ή παρελθοντικές τιμές της εισόδου (αιτιατότητα) και την ιδιότητα του συστήματος να παράγει φραγμένες εξόδους για φραγμένες εισόδους (ευστάθεια).

Ας δούμε σε αυτό το κεφάλαιο πως όλα αυτά μεταφράζονται στον χώρο του μετασχ. Laplace, πόσο απλοποιούνται, και πως μας βοηθά ο μετασχ. Laplace να λύνουμε πρακτικά προβλήματα.

7.2 Η Συνάρτηση Μεταφοράς

Ας θεωρήσουμε τώρα μια είσοδο της μορφής

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j2\pi f)t} \quad (7.1)$$

σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = T\{x(t)\} = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (7.2)$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (7.3)$$

Ορίζουμε ως **Συνάρτηση Μεταφοράς** το

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \quad (7.4)$$

που δεν είναι άλλο από το μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, και έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$y(t) = H\{e^{st}\} = H(s)e^{st} \quad (7.5)$$

Σας θυμίζει κάτι; ©Βλέπουμε ότι η επίδραση της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος $H(s)$ επάνω σε μια είσοδο της μορφής e^{st} είναι ο πολλαπλασιασμός της με τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$! Θυμηθείτε ότι **ιδιοσυνάρτηση** ενός συστήματος λέγεται το σήμα που περνάει από το σύστημα χωρίς καμιά τροποποίηση πλην του πολλαπλασιασμού του με μια συνήθως μιγαδική σταθερά, όπως είδαμε στο μετασχ. Fourier. Έτσι, αναγνωρίζουμε το e^{st} ως ιδιοσυνάρτηση του ΓΧΑ συστήματος και το $H(s)$ ως η αντίστοιχη **ιδιοτιμή**.

Τώρα, ας εκφράσουμε την μιγαδική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ σε πολική μορφή, ως

$$H(s) = |H(s)|e^{j\phi(s)} \quad (7.6)$$

όπου $|H(s)|$ και $\phi(s)$ είναι το μέτρο και η φάση του $H(s)$, αντίστοιχα. Τώρα, ξαναγράφοντας την έξοδο του συστήματος, θα έχουμε

$$y(t) = |H(s)|e^{j\phi(s)}e^{st} \quad (7.7)$$

Με χρήση του $s = \sigma + j2\pi f$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t}e^{j(2\pi ft + \phi(\sigma + j2\pi f))} \\ &= |H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t} \cos(2\pi ft + \phi(\sigma + j2\pi f)) + j|H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t} \sin(2\pi ft + \phi(\sigma + j2\pi f)) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Μπορούμε εδώ να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα, δεδομένης της εισόδου της μορφής $x(t) = e^{st}$, αλλάζει το πλάτος της εισόδου κατά παράγοντα $|H(\sigma + j2\pi f)|$ και μετατοπίζει τη φάση των ημιτονοειδών συνιστωσών κατά $\phi(\sigma + j2\pi f)$. Το σύστημα δεν αλλάζει ούτε τον παράγοντα σ , ούτε τη συχνότητα f της εισόδου. Ενδιαφέρον! ☺

7.3 Μετασχ. Laplace και Διαφορικές Εξισώσεις Συστημάτων

Τώρα που έχουμε ένα τόσο δυνατό εργαλείο ανάλυσης σημάτων και συστημάτων, μπορούμε να μιλήσουμε ακόμα πιο γενικά για τα συστήματα, θεωρώντας ότι αυτά περιγράφονται από μια διαφορική εξίσωση. Όπως έχουμε πει, πολλά φυσικά και μηχανικά συστήματα μπορούν να αναχθούν σε διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, τα ηλεκτρικά κυκλώματα συνεχούς ή εναλλασσόμενου ρεύματος περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, και η απλοποίηση που συνεπάγεται με την ανάλυσή τους στο χώρο του Laplace είναι σημαντική. Εν γένει λοιπόν, ο μετασχ. Laplace μας επιτρέπει να λύνουμε τέτοιες διαφορικές εξισώσεις πολύ εύκολα, μετατρέποντάς τις σε απλές αλγεβρικές!

Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, έστω το σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές a_k, b_l ,

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l x(t)}{dt^l} \quad (7.9)$$

Έχουμε δει σε προηγούμενα κεφάλαια τον τρόπο λύσης μιας τέτοιας διαφορικής εξίσωσης τόσο στο πεδίο του χρόνου, όσο και σε αυτόν της συχνότητας. Τα προβλήματα που συναντήσαμε - και λύσαμε - ήταν τα ακόλουθα:

(α') Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που δεν είναι ΓΧΑ, δηλ. που έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες. Σε αυτά τα συστήματα, η έξοδος - όπως θα θυμάστε - αποτελείται από δυο συνιστώσες: την απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}(t)$ και την απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}(t)$. Όμως ο δίπλευρος μετασχ. Laplace δεν περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του, άρα δεν μπορεί να μας δώσει την απόκριση μηδενικής εισόδου. Αυτό όμως μπορεί να το κάνει ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace, ο οποίος (δείτε τον Πίνακα 6.1) περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του! Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big|_{t=0^-} \quad (7.10)$$

από το μονόπλευρο μετασχ. Laplace, για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Laplace της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει (Άσκηση XXXX) ότι ο μετασχ. Laplace της εξόδου $Y(s)$ δίνεται σε αυτήν την περίπτωση ως

$$Y(s) = Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s) \quad (7.11)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} X(s) + \frac{\sum_{k=0}^N \sum_{i=1}^k s^{k-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} y(t) \Big|_{t=0^-} + \sum_{l=0}^M \sum_{i=1}^l s^{l-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big|_{t=0^-}}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (7.12)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} X(s) + \frac{\sum_{k=0}^N \sum_{i=1}^k s^{k-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} y(t) \Big|_{t=0^-}}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (7.13)$$

αφού η είσοδος εφαρμόζεται πάντα σε χρονικές στιγμές $t \geq 0$. Παρατηρήστε πόσο εύκολα διαχωρίζονται οι αποκρίσεις μηδενικής εισόδου και μηδενικής κατάστασης.

- (β') Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που είναι ΓΧΑ, δηλ. έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες. Σε αυτά τα συστήματα, η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης. Αφού οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) \quad (7.14)$$

για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Laplace της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Τότε η Σχέση (7.13) γίνεται

$$Y(s) = Y_{zs}(t) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} X(s) \quad (7.15)$$

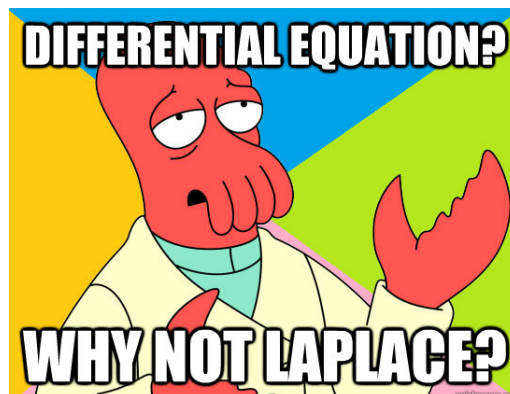
- (γ') Η εύρεση της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ ενός συστήματος. Στο χώρο του Laplace αυτό γίνεται μέσω της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ που χαρακτηρίζει το σύστημα. Τότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και χρησιμοποιούμε ξανά τη σχέση

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) \quad (7.16)$$

για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική και να κατασκευάσουμε το λόγο $Y(s)/X(s)$ που θα μας δώσει τη συνάρτηση μεταφοράς. Από τη Σχέση (7.15), θα έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (7.17)$$

Η ίδια σχέση λαμβάνεται απ' ευθείας και από τη Σχέση (7.15), αφού γνωρίζουμε ότι η απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος αποτελείται από τη συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Στο χώρο του Laplace, η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ και του μετασχ. Laplace της εισόδου $X(s)$. Παρατηρήστε ότι για ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή συνάρτηση πολυωνύμων του s . Αυτό είναι χαρακτηριστικό των ΓΧΑ συστημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.



Σχήμα 7.1: Εύκολη λύση διαφορικών εξισώσεων με μετασχ. Laplace!!

Ας δούμε δυο παραδείγματα που δείχνουν χαρακτηριστικά πώς ο μετασχ. Laplace μπορεί να μας διευκολύνει όταν έχουμε να κάνουμε με συστήματα. Ας υποθέσουμε ότι, όπως και όταν δουλεύαμε στο πεδίο του χρόνου, οι λύσεις μας θα είναι αιτιατές.

Παράδειγμα 7.1:

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \quad (7.18)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 1$ και είσοδο $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

Λύση:

Προφανώς θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγωγίσιμης του μονόπλευρου μετασχ. Laplace. Εφαρμόζοντας την και στα δυο μέλη, έχουμε:

$$L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + L\left\{5\frac{dy(t)}{dt}\right\} + L\{6y(t)\} = L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + L\{x(t)\} \quad (7.19)$$

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) = sX(s) - x(0^-) + X(s) \quad (7.20)$$

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) = sX(s) - 0 + X(s) \quad (7.21)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = X(s)(s + 1) \quad (7.22)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = \frac{s + 1}{s + 4} \quad (7.23)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = \frac{s + 1}{s + 4} + 2s + 11 \quad (7.24)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} \quad (7.25)$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)} \quad (7.26)$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, μια και η τάξη του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μεγαλύτερη της τάξης του αριθμητή. Οπότε

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3} + \frac{C}{s + 4} \quad (7.27)$$

με

$$A = Y(s)(s + 2) \Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 3)(s + 4)} \Big|_{s=-2} = \frac{13}{2} \quad (7.28)$$

$$B = Y(s)(s + 3) \Big|_{s=-3} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 4)} \Big|_{s=-3} = -3 \quad (7.29)$$

$$C = Y(s)(s + 4) \Big|_{s=-4} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 3)} \Big|_{s=-4} = -\frac{3}{2} \quad (7.30)$$

Για να είναι αιτιατή η έξοδος, θα πρέπει $R_y \supset R_1 \cap R_2 \cap R_3$ με

$$R_1 = \{\sigma > -2\} \quad (7.31)$$

$$R_2 = \{\sigma > -3\} \quad (7.32)$$

$$R_3 = \{\sigma > -4\} \quad (7.33)$$

Άρα τελικά θα είναι $R_y = \{\sigma > -2\}$ και

$$Y(s) = \frac{13}{2} \frac{1}{s + 2} - 3 \frac{1}{s + 3} - \frac{3}{2} \frac{1}{s + 4}, \quad \Re\{s\} > -2 \quad (7.34)$$

Οπότε πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο, θα είναι

$$y(t) = \frac{13}{2}e^{-2t}u(t) - 3e^{-3t}u(t) - \frac{3}{2}e^{-4t}u(t) \quad (7.35)$$

που είναι και το ζητούμενο. ■

Παράδειγμα 7.2:

Έστω ότι ένα ΓΧΑ σύστημα $H(s)$ περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t) \quad (7.36)$$

1. Υπολογίστε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.
2. Βρείτε την έξοδο, $y(t)$, του συστήματος όταν η είσοδος είναι της μορφής

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \quad (7.37)$$

Λύση:

1. Μετασχηματίζοντας τη διαφορική εξίσωση στο χώρο του Laplace, έχουμε

$$s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s) \quad (7.38)$$

$$Y(s)(s^2 - s - 2) = X(s) \quad (7.39)$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} \quad (7.40)$$

Άρα

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1}$$

με

$$A = H(s)(s - 2) \Big|_{s=2} = \frac{1}{s + 1} \Big|_{s=2} = \frac{1}{3} \quad (7.41)$$

$$B = H(s)(s + 1) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s - 2} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3} \quad (7.42)$$

και το πεδίο σύγκλισης θα είναι το $\{\Re\{s\} > 2\} = \{\Re\{s\} > 2\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$. Άρα

$$H(s) = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{s - 2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s + 1}, \quad \Re\{s\} > 2 \quad (7.43)$$

και τότε

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) \quad (7.44)$$

2. Η έξοδος θα είναι της μορφής

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s - 2)(s + 1)}X(s) = \frac{1}{(s - 2)(s + 1)} \frac{1}{(s + 2)} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2} \quad (7.45)$$

με

$$A = Y(s)(s - 2) \Big|_{s=2} = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} \Big|_{s=2} = \frac{1}{12} \quad (7.46)$$

$$B = Y(s)(s + 1) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s - 2)(s + 2)} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3} \quad (7.47)$$

$$C = Y(s)(s + 2) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{(s - 2)(s + 1)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{4} \quad (7.48)$$

και άρα

$$Y(s) = \frac{1}{12} \frac{1}{s - 2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{s + 2} \quad (7.49)$$

Επειδή το σύστημα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_H = \{\Re\{s\} > 2\} \quad (7.50)$$

και η είσοδος

$$R_X = \{\Re\{s\} > -2\} \quad (7.51)$$

η έξοδος θα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_Y = \{\Re\{s\} > 2\} \cap \{\Re\{s\} > -2\} = \{\Re\{s\} > 2\} \quad (7.52)$$

Άρα

$$Y(s) = \frac{1}{12} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} \quad (7.53)$$

και στο πεδίο του χρόνου, λαμβάνοντας υπόψη ότι το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο

$$y(t) = \frac{1}{12} e^{2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t) + \frac{1}{4} e^{-2t} u(t) \quad (7.54)$$

■

Παρ' όλου που οι διαφορικές εξισώσεις δημιουργήθηκαν για να αναπαραστήσουν φυσικά συστήματα (και άρα αιτιατά), από μαθηματικής πλευράς μια διαφορική εξίσωση μπορεί να έχει και αντι-αιτιατή χρουστική απόκριση! Για παράδειγμα, η συνάρτηση μεταφοράς

$$H_1(s) = \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} > 0 \quad (7.55)$$

περιγράφει τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t) \quad (7.56)$$

αφού

$$H_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s} \iff sY(s) = X(s) \quad (7.57)$$

και στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t) \quad (7.58)$$

Το ίδιο όμως και η συνάρτηση μεταφοράς

$$H_2(s) = \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} < 0 \quad (!!!) \quad (7.59)$$

αφού ξανά ισχύουν τα παραπάνω! Οι αντίστοιχες χρουστικές αποκρίσεις των δυο αυτών συστημάτων δίνονται - όπως ξέρετε - ως

$$h_1(t) = u(t) \quad (7.60)$$

$$h_2(t) = -u(-t) \quad (7.61)$$

και είναι αιτιατό και αντι-αιτιατό σήμα, αντίστοιχα.

Όπως ήδη γνωρίζετε, για την αιτιατότητα ενός συστήματος απαιτείται επιπλέον πληροφορία (αυτή της αρχικής ηρεμίας του συστήματος). Σε κάθε περίπτωση, όταν αναφερόμαστε σε διαφορικές εξισώσεις (στην χρουστική τους απόκριση, ή στην έξοδο τους) θα υποθέτουμε πάντα ότι όλα αυτά είναι αιτιατά.

Εν γένει όμως, ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να έχει αιτιατή, μη-αιτιατή, ή αντι-αιτιατή χρουστική απόκριση, καθώς η αιτιατότητα δεν είναι απαραίτητη για την υλοποίηση του συστήματος off-line, όπως π.χ. σε λογισμικό ενός υπολογιστή, όπου όλες οι τιμές ενός σήματος έχουν αποθηκευτεί εκ των προτέρων. Ας δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα συστήματος.

Παράδειγμα 7.3:

Έστω το μη-αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+s-2} \quad (7.62)$$

Βρείτε την έξοδο του $y(t)$ όταν στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα $x(t) = -e^{2t}u(-t)$.

Λύση:

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} \quad (7.63)$$

δηλ. έχει δυο πόλους στις θέσεις $s = -2$ και $s = 1$. Ως μη-αιτιατό, θα είναι αμφίπλευρο σήμα. Τα αμφίπλευρα σήματα έχουν πεδίο σύγκλισης που αναπαρίσταται ως μια “λωρίδα” στο μιγαδικό επίπεδο. Άρα το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς θα είναι το $R_H : \{-2 < \Re\{s\} < 1\}$, το οποίο μπορεί να γραφεί και ως

$$R_H = \{-2 < \Re\{s\}\} \cap \{\Re\{s\} < 1\} \quad (7.64)$$

Η είσοδος έχει μετασχ. Laplace

$$x(t) = -e^{2t}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \Re\{s\} < 2 \quad (7.65)$$

Οπότε η έξοδος θα δίνεται ως

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-2)(s-1)} \quad (7.66)$$

$$= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1} \quad (7.67)$$

με A, B, C να δίνονται από το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα ως

$$Y(s) = -\frac{1}{12} \frac{1}{s+2} + \frac{3}{4} \frac{1}{s-2} - \frac{2}{3} \frac{1}{s-1} \quad (7.68)$$

Οι πόλοι του $Y(s)$ βρίσκονται στις θέσεις $s = -2$, $s = 2$, και $s = 1$, άρα το πεδίο σύγκλισης της εξόδου θα είναι

$$R_Y \supset R_H \cap R_X = \{-2 < \Re\{s\} < 1\} \cap \{\Re\{s\} < 2\} = \{-2 < \Re\{s\} < 1\} \quad (7.69)$$

Αν γράψουμε το πεδίο σύγκλισης ως τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης που αντιστοιχούν στους πόλους της εξόδου, θα είναι $R_Y = \{-2 < \Re\{s\} < 1\} = \{\Re\{s\} < 2\} \cap \{\Re\{s\} < 1\} \cap \{\Re\{s\} > -2\}$, και έτσι το σήμα εξόδου στο χρόνο θα είναι αμφίπλευρο σήμα. Πράγματι,

$$y(t) = -\frac{1}{12}e^{-2t}u(t) - \frac{3}{2}e^{2t}u(-t) + \frac{2}{3}e^t u(-t) \quad (7.70)$$

με χρήση των ζευγών του Πίνακα 6.2.

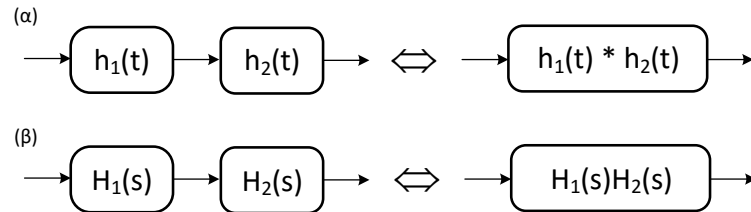
7.3.1 Διατάξεις Συστημάτων

Ας δούμε μερικές γνωστές διατάξεις συστημάτων και πως αυτές αναπαρίστανται στο χώρο του Laplace.

7.3.1.1 Συστήματα σε Σειρά

Πολλές φορές, μας βολεύει να βάζουμε πολλά συστήματα σε σειρά μεταξύ τους, δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο σύστημα που εκτελεί επεξεργασία στην είσοδό του. Όταν έχουμε τέτοια συστήματα σε σειρά, όπως στο Σχήμα 7.2(α), η έξοδος του $h_1(t)$ περνάει ως είσοδος στο $h_2(t)$. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα αυτά αποτελούν ένα μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί τη συνέλιξη των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του χρόνου.

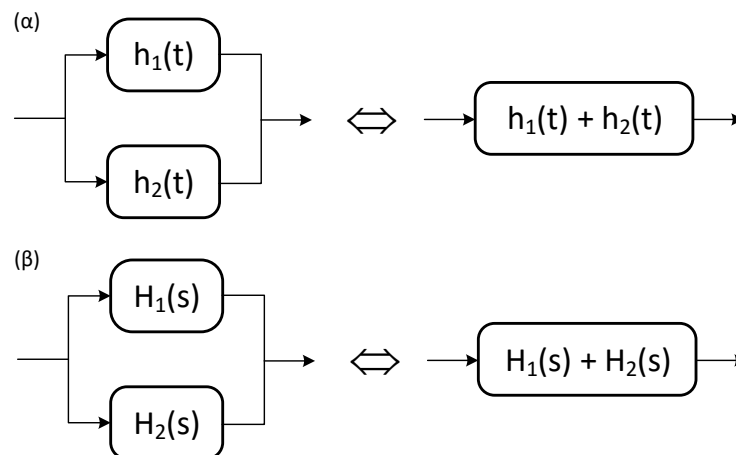
Όμως ξέρουμε πολύ καλά ότι η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στη συχνότητα (δηλ. στο χώρο s , των μιγαδικών συχνοτήτων, του Μετασχ. Laplace). Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο συστήματα σε σειρά στο χρόνο ισοούνται με ένα σύστημα στη συχνότητα, όπου περιγράφεται από το γινόμενο των μετασχηματισμών τους, όπως στο Σχήμα 7.2(β).



Σχήμα 7.2: Συστήματα σε Σειρά: (α) δυο συστήματα σε σειρά στο χώρο του χρόνου και το ισοδύναμο σύστημα, (β) δυο συστήματα σε σειρά στο χώρο του Laplace και το ισοδύναμο σύστημα.

7.3.1.2 Συστήματα σε Παράλληλη

Άλλες φορές, μας βολεύει να βάζουμε πολλά συστήματα παράλληλα μεταξύ τους, δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο σύστημα που εκτελεί επεξεργασία στην είσοδό του. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως στο Σχήμα 7.3(α), η αρχική είσοδος περνάει και στο $h_1(t)$ και στο $h_2(t)$. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα αυτά αποτελούν ένα μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί το άθροισμα των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του χρόνου. Περνώντας στο χώρο της συχνότητας, ξέρουμε πολύ καλά ότι οι μετασχηματισμοί που έχουμε ορίσει είναι



Σχήμα 7.3: Συστήματα σε Παράλληλη: (α) δυο συστήματα σε παράλληλη στο χώρο του χρόνου και το ισοδύναμο σύστημα, (β) δυο συστήματα σε παράλληλη στο χώρο του Laplace και το ισοδύναμο σύστημα.

γραμμικοί. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο συστήματα παράλληλα στο χρόνο ισούνται με ένα σύστημα στη συχνότητα, όπου περιγράφεται επίσης από το άθροισμα των μετασχηματισμών τους, όπως στο Σχήμα 7.3(β). Φυσικά υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί συστημάτων σε σειρά και παράλληλα, αλλά η βασική αρχή ανάλυσης ακολουθεί την παραπάνω διαδικασία.

7.3.2 Πόλοι και Μηδενικά στο s -επίπεδο

Έχουμε ήδη ορίσει ένα όνομα για το μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος: συμφωνήσαμε να τον λέμε **Συνάρτηση Μεταφοράς**. Για να λάβουμε περισσότερη πληροφορία για τη συνάρτηση μεταφοράς, θα ήταν πολύ βολικό να τη γράψουμε σε μορφή παραγόντων, ως

$$H(s) = A \frac{\prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} \quad (7.71)$$

με A μια σταθερά. Οι αριθμοί c_k, d_k λέγονται **μηδενικά** και **πόλοι**, αντίστοιχα. Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή αντίστοιχα. Εν γένει, ονομάζουμε **πολούς** τα σημεία του s -επιπέδου που απειρίζουν το $H(s)$. Αντίστοιχα, ονομάζουμε **μηδενικά** τα σημεία του s -επιπέδου που μηδενίζουν το $H(s)$. Σίγουρα τέτοια σημεία είναι οι ρίζες του παρονομαστή και οι ρίζες του αριθμητή αντίστοιχα, δηλ. τα σημεία c_k, d_k . Όμως, σε περιπτώσεις που η τάξη του αριθμητή είναι διαφορετική από του παρονομαστή, μπορεί να υπάρχουν κι άλλα μηδενικά ή πόλοι. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.4:

Θεωρήστε τις απλές αιτιατές συναρτήσεις μεταφοράς

$$H_1(s) = \frac{s-2}{s-3}, \Re\{s\} > 3 \quad (7.72)$$

$$H_2(s) = \frac{s-2}{s^2}, \Re\{s\} > 0 \quad (7.73)$$

$$H_3(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+1)}, \Re\{s\} > 3 \quad (7.74)$$

$$H_4(s) = \frac{1}{s}, \Re\{s\} > 0 \quad (7.75)$$

Βρείτε και σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά τους.

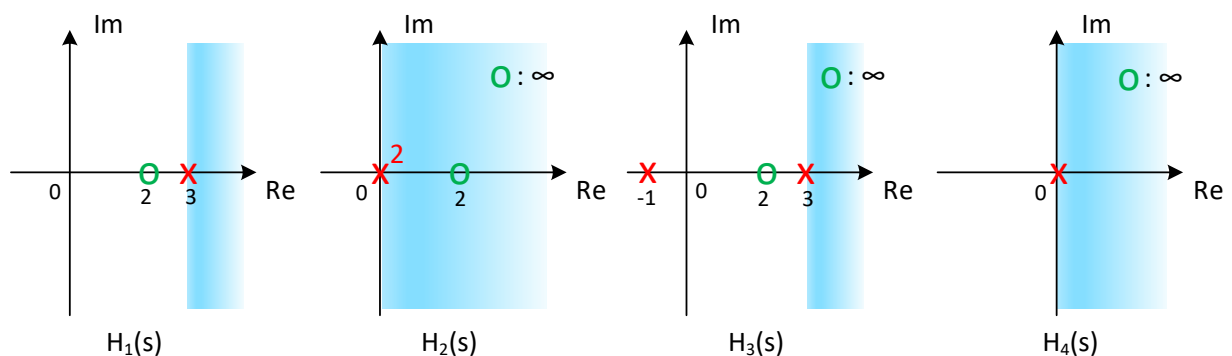
Λύση:

Το $H_1(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = 3$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$.

Το $H_2(s)$ έχει έναν πόλο τάξης 2 στο $s = 0$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$. Όμως, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει ακόμα ένα μηδενικό στο άπειρο.

Το $H_3(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = 3$, έναν πόλο στο $s = -1$, και ένα μηδενικό στο $s = 2$. Όμως, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει κι ένα ακόμη μηδενικό στο άπειρο.

Το $H_4(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = 0$. Όμως, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει ένα μηδενικό στο άπειρο. Το Σχήμα 7.4 δείχνει τη θέση των πόλων και των μηδενικών για κάθε σύστημα, καθώς και το πεδίο σύγκλισης. ■



Σχήμα 7.4: Πόλοι, μηδενικά, και πεδία σύγκλισης των συστημάτων του Παραδείγματος 7.4.

Τα παραπάνω παραδείγματα μας προδίδουν ένα γενικό κανόνα: **Σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, υπάρχουν τόσοι πόλοι, οσα και μηδενικά.** Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ως εξής:

Έστω μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ως

$$H(s) = A \frac{\prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} \quad (7.76)$$

Τότε

$$H(s) = A \frac{s^M \prod_{k=1}^M (1 - \frac{c_k}{s})}{s^N \prod_{k=1}^N (1 - \frac{d_k}{s})} = A s^{M-N} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - \frac{c_k}{s})}{\prod_{k=1}^N (1 - \frac{d_k}{s})} \quad (7.77)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

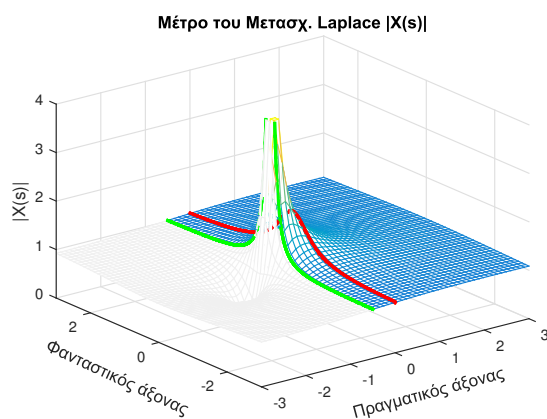
- Έστω ότι $M > N$, άρα συνεπάγεται ότι έχουμε θετική δύναμη του s στον όρο μπροστά από το κλάσμα, άρα θα έχουμε $M - N$ πόλους στο άπειρο.
- Αν $M < N$, τότε ο όρος s^{M-N} γράφεται ως $1/s^{M-N}$, με $M - N > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, το σύστημα θα έχει $M - N$ μηδενικά στο άπειρο.
- Στην τετριμμένη περίπτωση όπου $M = N$, δεν υπάρχουν πόλοι ή μηδενικά στο άπειρο, και οι πόλοι και τα μηδενικά δίνονται μόνο από τις ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή και του αριθμητή αντίστοιχα.

Θα ήταν ενδιαφέρον να γνωρίζουμε πώς μοιάζουν οι πόλοι και τα μηδενικά στο s -επίπεδο και πως επηρεάζουν τόσο τη συνάρτηση μεταφοράς όσο και την απόκριση συχνότητας, δηλ. το μετασχ. Fourier της χρονικής απόκρισης $h(t)$. Έστω η ρητή συνάρτηση

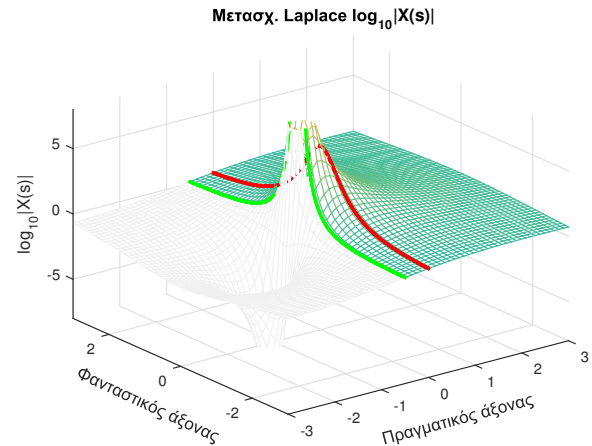
$$H(s) = \frac{s+1}{s+\frac{1}{2}} \quad (7.78)$$

με $\Re\{s\} > -\frac{1}{2}$, δηλ. με έναν πόλο στο $s = -\frac{1}{2}$ και ένα μηδενικό στο $s = -1$.

Φυσικά δεν μπορούμε να την αναπαραστήσουμε σχηματικά, γιατί είναι μιγαδική συνάρτηση. Όμως μπορούμε να αναπαραστήσουμε το μέτρο της, $|H(s)|$. Δείτε το Σχήμα 7.5α'. Στο σχήμα αυτό βλέπουμε τη συνάρτηση



(α') $|H(s)|$



(β') $\log_{10}|H(s)|$

Σχήμα 7.5: Αναπαραστάσεις του μέτρου του μετασχ. Laplace $H(s) = \frac{s+1}{s+\frac{1}{2}}$, με $\Re\{s\} > -1/2$.

$|H(s)| = \left| \frac{s+1}{s+\frac{1}{2}} \right|$ ως γενική συνάρτηση του s . Το έγχρωμο τμήμα αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό Laplace ο οποίος ορίζεται μόνο στο πεδίο σύγκλισης $\Re\{s\} > -1/2$, ενώ με γκριζο χρώμα αναπαρίσταται το τμήμα της συνάρτησης που δεν ανήκει στο μετασχηματισμό. Βλέπετε ότι όταν το γράφημα παίρνει μεγάλη τιμή (έχει δηλαδή κορυφή), τότε σε εκείνη τη θέση στο s -επίπεδο, υπάρχει πόλος (εδώ, $s = -1/2$), ενώ όπου το γράφημα παίρνει χαμηλή τιμή (έχει δηλ. “τρύπες” ☺), τότε εκεί έχουμε μηδενικό (εδώ $s = -1$, το οποίο βρίσκεται εκτός πεδίου σύγκλισης). Η πράσινη γραμμή αναπαριστά το σύνορο του πεδίου σύγκλισης $\Re\{s\} = -1/2$, ενώ η κόκκινη γραμμή αναπαριστά το φανταστικό άξονα $j2\pi f$ όπου εκεί ορίζεται, όπως ξέρετε, ο μετασχ. Fourier.

Στο παράδειγμα αυτό, ο πόλος φαίνεται ξεκάθαρα, αλλά δεν ισχύει τόσο για το μηδενικό. Αυτό μπορούμε να το βελτιώσουμε αν αναπαραστήσουμε το $\log|H(s)|$. Αυτό συνήθως γίνεται για τρεις λόγους:

1. Η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η μονοτονία της $|H(s)|$ διατηρείται.
2. Επίσης, η λογαριθμική συνάρτηση έχει τις εξής ωραίες ιδιότητες:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty \quad (7.79)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty \quad (7.80)$$

Αυτό σημαίνει ότι η σχηματική αναπαράσταση του $|H(s)|$ θα τείνει στο $+\infty$ όταν υπάρχει πόλος, ενώ θα τείνει στο $-\infty$ όταν υπάρχει μηδενικό, διευκολύνοντας την οπτική αναγνώριση των πόλων και μηδενικών. Δείτε το Σχήμα 7.5β'.

3. Η γνωστή σχέση

$$Y(s) = X(s)H(s) \quad (7.81)$$

συνεπάγεται ότι τα πλάτη των μετασχηματισμών Laplace σχετίζονται ως

$$|Y(s)| = |X(s)||H(s)| \quad (7.82)$$

Η παραπάνω σχέση σχετίζει πολλαπλασιαστικά το $|X(s)|$ με το $|H(s)|$. Δεν είναι τόσο εύκολο να βρούμε διαισθητικά το αποτέλεσμα του γινομένου δυο συναρτήσεων, εκτός αν είναι πολύ απλές. Η εφαρμογή του

λογαρίθμου μετατρέπει το γινόμενο σε άθροισμα μέσω της σχέσης

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad (7.83)$$

και συγκεκριμένα

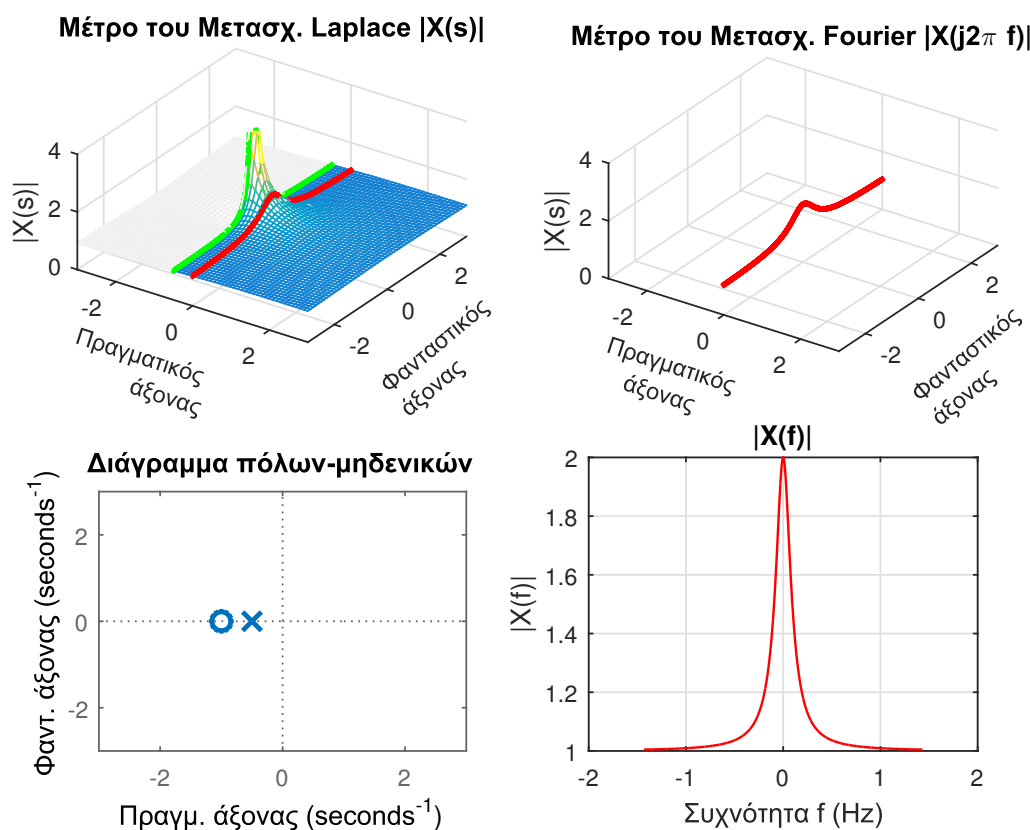
$$\log |Y(s)| = \log |X(s)| + \log |H(s)| \quad (7.84)$$

πράγμα που μας επιτρέπει να βρίσκουμε διασθητικά το αποτέλεσμα του γινομένου των φασματικών αποκρίσεων, μια και η πρόσθεση δυο γραφικών παραστάσεων είναι πιο εύκολη από τον πολλαπλασιασμό τους.

4. Η λογαριθμική κλίμακα σχετίζεται με τη μέτρηση ηχητικών πηγών σε deci-Bel (dB), και εμφανίζεται πολύ συχνά στην πράξη.

Για τους σκοπούς μας, θα προτιμήσουμε τη μη-λογαριθμική αναπαράσταση στη συνέχεια.

Είπαμε όμως νωρίτερα ότι μπορούμε μέσω του μετασχ. Laplace, να βρούμε το μετασχ. Fourier, αν θέσουμε $s = j2\pi f$. Αυτό σημαίνει ότι εκτιμούμε το $H(s)$ μόνον επάνω στο φανταστικό άξονα. Άρα, για να βρούμε το $|H(f)|$ παίρνουμε μια κατακόρυφη “φέτα” του $|H(s)|$ πάνω από το φανταστικό άξονα. Αν το κάνουμε αυτό στη συνάρτηση μεταφοράς της Σχέσης (7.78), και απεικονίσουμε το μέτρο της, θα πάρουμε μια διδιάστατη αναπαράσταση, όπως στο Σχήμα 7.6, όπου φαίνεται η “φέτα” του μέτρου του μετασχ. Fourier και η γνωστή μας, διδιάστατη αναπαράσταση του $|H(f)|$, όπως θα τη σχεδιάζαμε στο χαρτί. Η μαθηματική μορφή του $|H(f)|$ δίνεται από τη συνάρτηση



Σχήμα 7.6: Εκτιμώντας το μέτρο του Μετασχ. Fourier από το μέτρο του $|H(s)|$.

μεταφοράς $H(s)$ ως

$$|H(s)| \Big|_{s=j2\pi f} = \left| \frac{j2\pi f + 1}{j2\pi f - \frac{1}{2}} \right| = \frac{|j2\pi f + 1|}{|j2\pi f - \frac{1}{2}|} = \sqrt{\frac{1 + 4\pi^2 f^2}{\frac{1}{4} + 4\pi^2 f^2}} \quad (7.85)$$

δεδομένου ότι το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

7.4 Ευστάθεια Συστήματος

Ένα νέο στοιχείο που θα εισάγουμε τώρα είναι η έννοια της *ευστάθειας*, με όρους μετασχ. Laplace. Θυμίζουμε ότι ένα σύστημα λέγεται ευσταθές όταν παράγει φραγμένη έξοδο για μια δεδομένη φραγμένη είσοδο. Δηλ.

$$\text{Αν } |x(t)| < M_x \Rightarrow |y(t)| < M_y \quad (7.86)$$

όπου M_x, M_y πραγματικοί αριθμοί. Ας θυμηθούμε πως “μετραφράζεται” η ευστάθεια με όρους κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος. Είναι

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau < M_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau \quad (7.87)$$

Αυτό σημαίνει ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος $y(t)$, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau < M_h < \infty \quad (7.88)$$

με $M_h \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το $h(t)$ πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Όμως αυτό το ολοκλήρωμα μας θυμίζει ακριβώς τη συνθήκη ύπαρξης του Μετασχ. Fourier του $h(t)$ μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματός του!! Άρα μπορούμε να πούμε γενικότερα ότι

Ευστάθεια Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Κριτήριο ευστάθειας (και άρα ύπαρξης του μετασχ. Fourier μέσω του ολοκληρώματός του) για οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα είναι η συμπερίληψη του φανταστικού άξονα $j2\pi f$ ($\Re\{s\} = \sigma = 0$) μέσα στο πεδίο σύγκλισης της συναρτησης μεταφοράς $H(s)$ που το περιγράφει.

Ας δούμε λίγο περισσότερο τι συμβαίνει σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις.

Έστω ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ για ένα αιτιατό σύστημα (χωρίς βλάβη της γενικότητας) εκφράζεται με χρήση του αντιστρόφου μετασχ. Laplace ως

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t), \quad \Re\{s\} > \max\{\Re\{s_k\}\} \quad (7.89)$$

όπου s_k οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, οι οποίοι είναι απλοί (χωρίς πολλαπλότητα), χάριν απλούστευσης. Τότε θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N |A_k| e^{s_k t} u(t) dt = \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{s_k t}| e^{j2\pi f t} dt = \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{s_k t}| dt \quad (7.90)$$

Καταλήξαμε πλέον ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος, και άρα το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει να ισχύει ότι η συνάρτηση $e^{-s_k t}$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Αυτό προφανώς συμβαίνει *μόνον* όταν $\Re\{s_k\} = \sigma_k < 0$! Πότε ισχύει όμως αυτό; Φυσικά όταν **όλοι** οι πόλοι s_k του $H(s)$ βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο! Άρα

Ευστάθεια Αιτιατού Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα ορίζεται ο μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

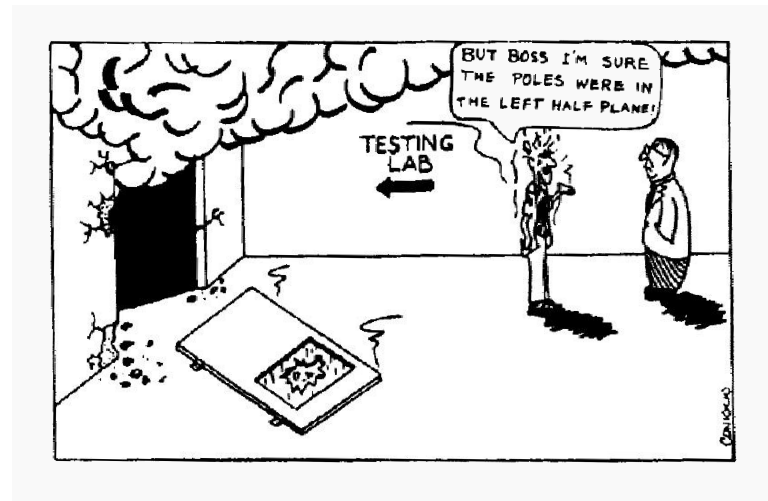
Με αντίστοιχη ανάλυση προκύπτει ότι

Ευστάθεια Αντι-αιτιατού Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Ένα αντι-αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα ορίζεται ο μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Φυσικά οι δυο τελευταίες συνθήκες ευστάθειας είναι υποπεριπτώσεις - εύκολα μπορείτε να συμπεράνετε ότι και για τις δυο αυτές υποπεριπτώσεις, ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισής τους.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.



Σχήμα 7.7: Προσοχή στην ευστάθεια των συστημάτων!!

Παράδειγμα 7.5:

Ένα ευσταθές ΓΧΑ σύστημα έχει τις παρακάτω εισόδους και εξόδους, $x(t)$ και $y(t)$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιήστε το μετασχ.Laplace για να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος.

$$(\alpha') \quad x(t) = e^{-t}u(t), \quad y(t) = e^{-2t} \cos(t)u(t)$$

$$(\beta') \quad x(t) = e^{-2t}u(t), \quad y(t) = -2e^{-t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$$

$$(\gamma') \quad x(t) = e^{2t}u(-t), \quad y(t) = e^{-t}u(t)$$

Λύση:
Είναι

(α') Προφανώς

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (7.91)$$

άρα αρκεί να βρούμε τα $X(s), Y(s)$. Έχουμε

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (7.92)$$

αφού το σήμα είναι δεξιόπλευρο. Επίσης

$$y(t) = e^{-2t} \cos(t)u(t) \longleftrightarrow Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1}, \quad \Re\{s\} > -2 \quad (7.93)$$

και άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}}{\frac{1}{s+1}} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)^2+1} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5} \quad (7.94)$$

Η τάξη του αριθμητή είναι ίδια με του παρονομαστή, άρα πρέπει πρίν κάνουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να κάνουμε διαίρεση των πολυωνύμων. Κάνοντας διαίρεση πολυωνύμων, θα έχουμε

$$H(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5} = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2+1} \quad (7.95)$$

Εδώ μπορούμε να ακολουθήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση αντι της Ανάπτυξης σε Μερικά Κλάσματα.

Βλέπουμε ότι ο παρονομαστής μας θυμίζει δυο πολύ γνωστά ζεύγη μετ. Laplace, τα

$$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) u(t) \longleftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}, \quad \Re\{s\} > -\Re\{a\} \quad (7.96)$$

$$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) u(t) \longleftrightarrow \frac{2\pi f_0}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}, \quad \Re\{s\} > -\Re\{a\} \quad (7.97)$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε τον αριθμητή με τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιήσουμε τους παραπάνω τύπους. Δηλ.

$$H(s) = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2 + 1} = 1 - \frac{(s+2)}{(s+2)^2 + 1} - \frac{1}{(s+2)^2 + 1} \quad (7.98)$$

Επίσης, το πεδίο σύγκλισης για αυτά τα δυο σήματα είναι το $\Re\{s\} > -2$, το οποίο συμφωνεί με το χαρακτηριστικό της ευστάθειας του συστήματος που μας λέει η εκφώνηση, άρα

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t} \cos(t) u(t) - e^{-2t} \sin(t) u(t) \quad (7.99)$$

(β') Όμοια, έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2, \quad Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+3}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (7.100)$$

άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \quad (7.101)$$

με

$$A = H(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{-4(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=-1} = -2 \quad (7.102)$$

και

$$B = H(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)} \Big|_{s=-3} = -2 \quad (7.103)$$

Το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς θα είναι τέτοιο ώστε

$$\{Re\{s\} > -1\} \supset R_H \cap \{\Re\{s\} > -2\} \quad (7.104)$$

και δεδομένου ότι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στις θέσεις $s = -1$, $s = -3$, το μόνο πιθανό πεδίο σύγκλισης είναι το

$$R_H = \{\Re\{s\} > -1\} \quad (7.105)$$

Οπότε

$$H(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{-2}{s+3} \longleftrightarrow h(t) = -2e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) \quad (7.106)$$

που είναι και το ζητούμενο.

(γ') Έχουμε

$$X(s) = -\frac{1}{s-2}, \quad \Re\{s\} < 2 \quad (7.107)$$

και

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (7.108)$$

Άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = -\frac{s+1}{s-2} \quad (7.109)$$

Εδώ ο βαθμός του πολωνύμου του αριθμητή ισούται με τον αντίστοιχο του παρονομαστή, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα αν πρώτα δεν κάνουμε διαίρεση των πολωνύμων. Παρ' όλο που η διαίρεση είναι απλή, ας δούμε έναν διαφορετικό τρόπο. Έχουμε

$$H(s) = -\frac{s+1}{s-2} = -s \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-2} \quad (7.110)$$

Ο μοναδικός πόλος του συστήματος βρίσκεται στη θέση $s = 2$, άρα η μόνη επιλογή πεδίου σύγκλισης για να είναι το σύστημα ευσταθές είναι το $R_H = \{\Re\{s\} < 2\}$. Οπότε, σύμφωνα με τους πίνακες ιδιοτήτων και

ζευγών μετασχ. Laplace, θα έχουμε

$$h(t) = \frac{d}{dt}e^{2t}u(-t) + e^{2t}u(-t) = 2e^{2t}u(-t) - \delta(t) + e^{2t}u(-t) = 3e^{2t}u(-t) - \delta(t) \quad (7.111)$$

Επιβεβαιώστε την παραπάνω απάντηση κάνοντας διαίρεση των πολωνύμων και ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. ■