

Κεφάλαιο 2

Σήματα και Συστήματα

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συζητήσουμε ορισμένα βασικά θέματα των σημάτων, με έμφαση στα σήματα συνεχούς χρόνου. Επιπλέον, θα εισάγουμε μερικές βασικές έννοιες και ποιοτικές εξηγήσεις του “πώς και γιατί” της θεωρίας συστημάτων συνεχούς χρόνου, χτίζοντας έτσι ένα στερεό υπόβαθρο κατανόησης της ποσοτικής ανάλυσης που ακολουθεί στα επόμενα κεφάλαια.

2.1.1 Σήματα

Ένα **σήμα** δεν είναι τίποτα άλλο από ένα σύνολο από πληροφορίες ή από δεδομένα. Μερικά παραδείγματα περιλαμβάνουν ένα τηλεφωνικό σήμα, ένα σήμα ήχου, τις μηνιαίες πωλήσεις μιας εφημερίδας, ή τις ημερίσιες τιμές μιας μετοχής του χρηματιστηρίου. Σε όλα αυτά τα παραδείγματα, τα σήματα είναι συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής: του χρόνου. Αυτό δεν είναι κανόνας – ένα σήμα εικόνας ή ένα ηλεκτρικό σήμα που διατρέχει το ανθρώπινο σώμα είναι περισσότερο συναρτήσεις του χώρου παρά του χρόνου. Σε αυτό το σύγγραμμα, θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά σήματα που αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου.

2.1.2 Συστήματα

Τα σήματα μπορούν να επεξεργαστούν περαιτέρω από **συστήματα**, τα οποία μπορούν να τροποποιήσουν ή να εξάγουν πληροφορία από τα σήματα που αναλύουν. Ένα σύστημα επεξεργάζεται ένα σύνολο από σήματα (είσοδοι) και δίνει ένα σύνολο από άλλα σήματα (έξοδοι). Ένα σύστημα μπορεί να αποτελείται από φυσικά στοιχεία, όπως ηλεκτρικά, μηχανικά, ή υδραυλικά συστήματα (υλοποίηση σε υλικό), ή από έναν αλγόριθμο που υπολογίζει την έξοδο από ένα σήμα εισόδου (υλοποίηση σε λογισμικό). Θα μιλήσουμε στη συνέχεια πιο αναλυτικά για τα συστήματα.

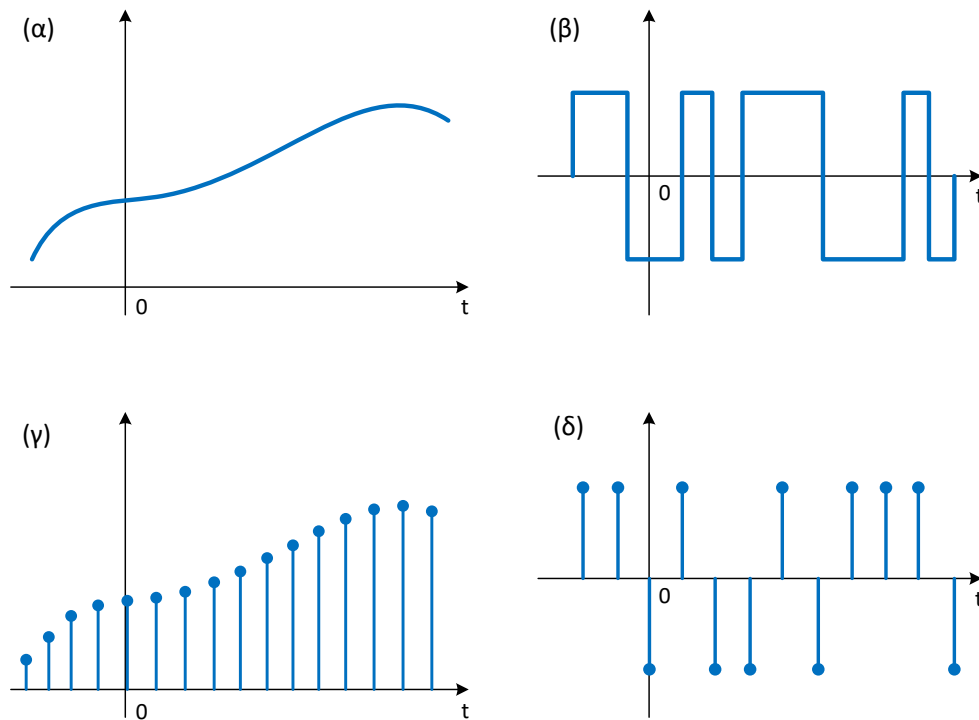
2.2 Κατηγορίες Σημάτων

Υπάρχουν πολλές κατηγορίες σημάτων, από τις οποίες θα θεωρήσουμε μόνο τις παρακάτω, που μας ενδιαφέρουν περισσότερο:

1. Συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου σήματα
2. Αναλογικά και ψηφιακά σήματα
3. Περιοδικά και απεριοδικά σήματα
4. Σήματα ισχύος και ενέργειας
5. Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά σήματα

2.2.1 Σήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

Ένα σήμα που ορίζεται για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής του χρόνου t είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου, και ένα σήμα που ορίζεται μόνο για διακριτές τιμές του $t = nT$, με n ακέραιο αριθμό και T μια σταθερά, είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου. Το τηλεφωνικό σήμα, το σήμα μιας βιντεοκάμερας, καθώς και το τηλεοπτικό



Σχήμα 2.1: Παρδείγματα σημάτων: (α) αναλογικό, συνεχούς χρόνου, (β) ψηφιακό, συνεχούς χρόνου, (γ) αναλογικό, διακριτού χρόνου, (δ) ψηφιακό, διακριτού χρόνου

σήμα¹ είναι σήματα συνεχούς χρόνου. Το ετήσιο ΑΕΠ μιας χώρας σε μια εικοσαετία, οι μηνιαίες πωλήσεις ενός περιοδικού, και οι ημερήσιες διακυμάνσεις των μετοχών στο χρηματιστήριο είναι σήματα διακριτού χρόνου.

2.2.2 Αναλογικά και ψηφιακά σήματα

Η έννοια του αναλογικού σήματος συχνά μπερδεύεται με αυτήν του συνεχούς χρόνου. Ένα σήμα του οποίου το πλάτος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε ένα συνεχές διάστημα είναι ένα *αναλογικό* σήμα. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος ενός αναλογικού σήματος μπορεί να πάρει άπειρες τιμές. Ένα *ψηφιακό* σήμα, απ' την άλλη, είναι εκείνο του οποίου το πλάτος μπορεί να πάρει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών. Ένα ψηφιακό σήμα του οποίου το πλάτος μπορεί να πάρει από M τιμές, ονομάζεται M -αδικό σήμα. Το δυαδικό σήμα ($M = 2$) είναι μια διάσημη υποπερίπτωση του M -αδικού σήματος, με ευρεία εφαρμογή τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Οι όροι *σήμα συνεχούς χρόνου* και *σήμα διακριτού χρόνου* διακρίνουν τη φύση του σήματος κατά μήκος του οριζώντιου άξονα (χρόνος). Οι όροι *αναλογικό* και *ψηφιακό* σήμα διακρίνουν τη φύση του σήματος κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα (πλάτος). Έτσι, είναι ξεκάθαρο ότι ένα αναλογικό σήμα δεν είναι απαραίτητα συνεχούς χρόνου, και ένα ψηφιακό σήμα δεν είναι απαραίτητα διακριτού χρόνου. Το Σχήμα 2.1 δείχνει μερικά ενδεικτικά σήματα διαφόρων κατηγοριών. Το περιεχόμενο του βιβλίου που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει κατά κανόνα την ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου.

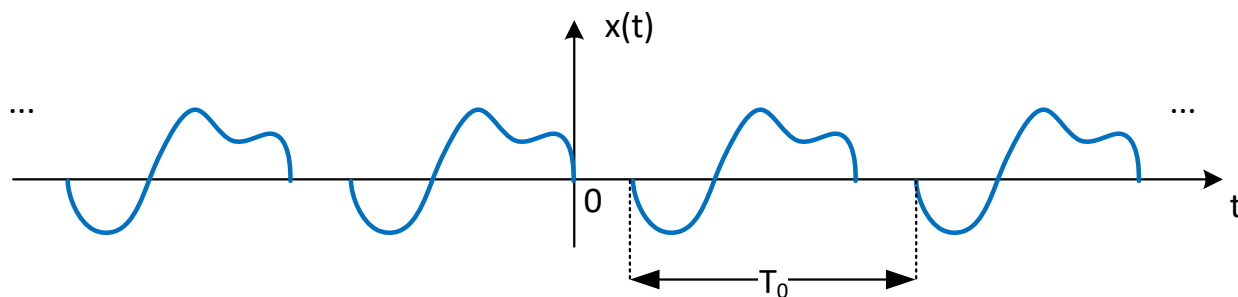
2.2.3 Περιοδικά και απεριοδικά σήματα

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται *περιοδικό* αν για μια σταθερά T_0 ισχύει

$$x(t) = x(t + T_0), \quad \forall t \quad (2.1)$$

Η *μικρότερη* τιμή του T_0 που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση ονομάζεται *περίοδος* του σήματος. Ένα σήμα είναι *απεριοδικό* όταν δεν είναι περιοδικό. Εξ' ορισμού, ένα περιοδικό σήμα παραμένει αμετάβλητο όταν μετακινηθεί στο χρόνο κατά T_0 . Έτσι, ένα περιοδικό σήμα πρέπει να ξεκινάει από το $t = -\infty$ και να συνεχίζεται για πάντα. Προφανώς, τέτοια σήματα δεν υπάρχουν στη φύση ούτε μπορούν να δημιουργηθούν τεχνητά. Ένα περιοδικό σήμα φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Θα μελετήσουμε αρκετά τόσο τα περιοδικά σήματα όσο και τα απεριοδικά στη συνέχεια του βιβλίου.

¹Πριν τη Digea ©

Σχήμα 2.2: Περιοδικό σήμα με περίοδο T_0 .

2.2.4 Σήματα Ισχύος και Ενέργειας

Η κατηγοριοποίηση σημάτων σε σήματα ισχύος και σήματα ενέργειας μπορεί να ιδωθεί υπό το πρίσμα του μεγέθους ενός σήματος.

2.2.4.1 Ενέργεια Σήματος

Μπορούμε να θεωρήσουμε την περιοχή κάτω από το σήμα $x(t)$ ως μια πιθανή μετρική του μεγέθους του σήματος, επειδή λαμβάνει υπόψη του όχι μόνο το πλάτος αλλά και τη διάρκεια του σήματος. Όμως μια τέτοια μετρική θα ήταν προβληματική. Γιατί; Διότι ένα μεγάλης διάρκειας σήμα μπορεί να έχει περιοχές πάνω από τον άξονα και περιοχές κάτω από τον άξονα που αλληλοαναιρούνται, με αποτέλεσμα η μετρική να μας δηλώνει ότι πρόκειται για μικρού μεγέθους σήμα (ακόμα και μηδενικού, αν οι περιοχές αλληλοαναιρούνται ακριβώς). Αυτή η δυσκολία μπορεί να ξεπεραστεί αν ορίσουμε το μέγεθος του σήματος ως την περιοχή κάτω από την καμπύλη $x^2(t)$, η οποία είναι πάντα θετική. Αυτή η μετρική λέγεται **ενέργεια σήματος**, E_x , και ορίζεται ως

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.2)$$

για μιγαδικά σήματα, ενώ για πραγματικά σήματα, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (2.3)$$

Κάποιος θα μπορούσε να σκεφτεί και άλλες μετρικές, όπως η περιοχή κάτω από την $|x(t)|$. Η μετρική που επιλέξαμε όμως είναι όχι μόνο πιο εύκολη να υπολογιστεί αλλά και έχει περισσότερο νόημα γιατί είναι ενδεικτική της ενέργειας που μπορεί να εξαχθεί από το σήμα.

2.2.4.2 Ισχύς Σήματος

Η ενέργεια ενός σήματος πρέπει να είναι πεπερασμένος αριθμός ώστε να έχει νόημα. Μια αναγκαία συνθήκη για αυτό είναι το πλάτος του σήματος να τείνει στο 0 όταν $|t| \rightarrow \infty$. Αλλιώς, το ολοκλήρωμα της Σχέσης (2.3) δε συγκλίνει.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν το πλάτος του σήματος δεν τείνει στο 0 όταν $|t| \rightarrow \infty$, η ενέργεια του σήματος είναι άπειρη. Τότε, μια μετρική με περισσότερο νόημα όσον αφορά το μέγεθος του σήματος θα ήταν η **χρονική μέση τιμή της ενέργειας**, αν υπάρχει. Αυτή η μετρική λέγεται **ισχύς σήματος**. Για ένα πραγματικό σήμα $x(t)$, ορίζουμε την ισχύ, P_x , ως

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (2.4)$$

και φυσικά μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω σχέση και για μιγαδικά σήματα ως

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (2.5)$$

Παρατηρήστε ότι η ισχύς του σήματος $x(t)$ είναι η μέση τιμή του πλάτους του σήματος στο τετράγωνο. Η μέση τιμή μιας συνάρτησης σε ένα μεγάλο διάστημα που πλησιάζει το άπειρο υπάρχει αν η συνάρτηση είναι είτε περιοδική είτε έχει στατιστική κανονικότητα. Αν μια τέτοια συνθήκη δεν ικανοποιείται, η τιμή αυτή μπορεί να μην υπάρχει. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = t$ αυξάνει συνεχώς όσο $t \rightarrow +\infty$ (και φθίνει χωρίς όριο όταν $t \rightarrow -\infty$, και δεν

μπορούμε να ορίσουμε ούτε την ενέργεια ούτε την ισχύ του. Φυσικά, στην πράξη (ή στη φύση) δεν υπάρχουν σήματα ισχύος (αφού απαιτείται άπειρη διάρκεια), όλα τα σήματα που μπορούμε να δημιουργήσουμε είναι σήματα ενέργειας.

Προσέξτε ότι οι μετρικές της ενέργειας και της ισχύος που ορίσαμε δεν έχουν μονάδα μέτρησης (όπως ίσως θα περιμένατε), γιατί δεν τις ορίσαμε με βάση τις έννοιες που γνωρίζετε από τη Φυσική ή τον Ηλεκτρισμό. Οι μονάδες ενέργειας και ισχύος, όπως ορίστηκαν εδώ, εξαρτώνται από τη φύση του σήματος $x(t)$. Αν το $x(t)$ είναι ένα σήμα τάσης, προφανώς η ενέργεια έχει μονάδες μέτρησης V^2s (Volts στο τετράγωνο επί seconds), και η ισχύς του έχει μονάδες μέτρησης V^2 (Volt στο τετράγωνο). Αν το σήμα $x(t)$ είναι σήμα έντασης, οι μονάδες αυτές θα είναι A^2s (Ampere στο τετράγωνο επί seconds) και A^2 (Ampere στο τετράγωνο), αντίστοιχα. Στη συνέχεια του βιβλίου δε θα μας απασχολήσουν τόσο οι μονάδες μέτρησης, μια και η ενέργεια και η ισχύς ενός σήματος θα έχουν την πιο... αφηρημένη έννοια που ορίσαμε παραπάνω. Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.1:

Βρείτε τις καταλλήλες μετρικές μεγέθους των σημάτων που φαινονται στο Σχήμα 2.3.

Λύση:

Στο Σχήμα 2.3(α), το πλάτος του σήματος τείνει στο μηδέν, όσο $|t| \rightarrow \infty$. Έτσι, μια κατάλληλη μετρική του μεγέθους του είναι η ενέργειά του.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} 1^2 dt = \frac{3}{4} \quad (2.6)$$

Στο Σχήμα 2.3(β), το πλάτος του σήματος δεν τείνει στο μηδέν, όσο το $|t| \rightarrow \infty$. Όμως είναι περιοδικό, και έτσι υπάρχει η ισχύς του. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (2.4) για να βρούμε την ισχύ του, θέτοντας βολικές θέσεις για το T όπως στο Σχήμα 2.3(γ). Ας το δούμε.

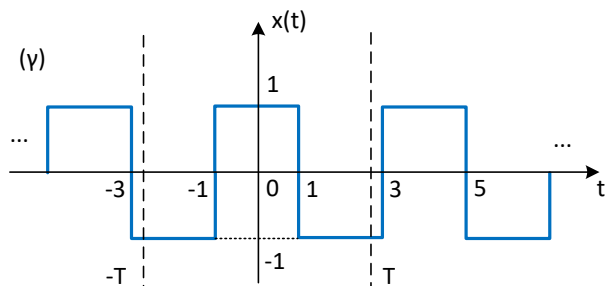
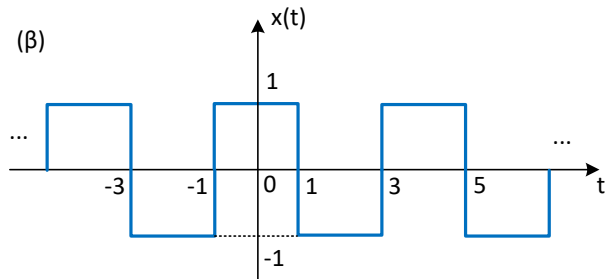
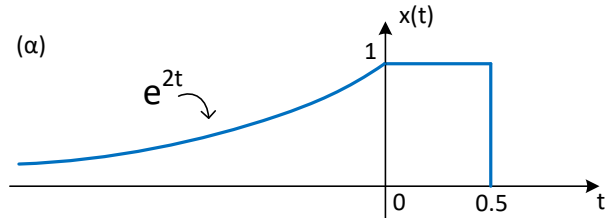
$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (2.7)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^{-1} (-1)^2 dt + \int_{-1}^1 1^2 dt + \int_1^T (-1)^2 dt \right) \quad (2.8)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\left[t \right]_{-T}^{-1} + \left[t \right]_{-1}^1 + \left[t \right]_1^T \right) \quad (2.9)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (1 + T + 2 + T - 1) \quad (2.10)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (2T + 2) = 1 \quad (2.11)$$



Σχήμα 2.3: Παράδειγμα Σημάτων (α) Ενέργειας και (β-γ) Ισχύος.

Μπορούμε να απλοποιήσουμε τη διαδικασία για περιοδικά σήματα (όπως αυτό του Σχήματος 2.3(β)), απλά παρατηρώντας ότι ένα περιοδικό σήμα επαναλαμβάνεται περιοδικά (κάθε 4 δευτερολέπτα, εν προκειμένω). Έτσι, το να βρούμε τη μέση τιμή του $x^2(t)$ σε ένα άπειρο διάστημα είναι όμοιο με το να βρούμε τη μέση τιμή σε μια μόνο περίοδο. Έτσι,

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^3 x^2(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_{-1}^1 1^2 dt + \int_1^3 (-1)^2 dt \right) \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left[t \right]_{-1}^1 + \left[t \right]_1^3 \right) = \frac{1}{4} (2 + 3 - 1) = 1 \quad (2.13)$$

που είναι και το ίδιο αποτέλεσμα με παραπάνω. ■

Παράδειγμα 2.2:

Βρείτε την ισχύ των παρακάτω σημάτων:

$$(\alpha') \quad x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$(\beta') \quad x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2), \quad f_1 \neq f_2$$

$$(\gamma') \quad x(t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t}, \quad \text{με } A \in \mathbb{C}$$

Λύση:
Θα είναι

(α') Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = 1/f_0$. Η πιο βολική μετρική για αυτό το σήμα είναι η ισχύς του. Επειδή το σήμα είναι περιοδικό, μπορούμε να υπολογίσουμε την ισχύ του μετρώντας την ενέργειά του σε μια περίοδο T_0 . Όμως, θα χρησιμοποιήσουμε εδώ τον ορισμό, για να δείτε πως δουλεύει. Είναι

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T \cos(4\pi f_0 t + 2\theta) dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ο πρώτος όρος είναι ίσος με $A^2/2$. Επίσης, ο δεύτερος όρος είναι μηδέν, γιατί το ολοκλήρωμα αναπαριστά ένα εμβαδό κάτω από το ημίτονο σε πολύ ένα μεγάλο διάστημα $2T$, με $T \rightarrow \infty$. Αυτό το εμβαδό είναι το πολύ ίσο με το εμβαδό της μισής περιόδου, λόγω των ακυρώσεων μεταξύ των θετικών και αρνητικών περιοχών του ημιτόνου. Ο δεύτερος όρος είναι αυτό το εμβαδό πολλαπλασιασμένο με $A^2/4T$, με $T \rightarrow \infty$. Είναι ξεκάθαρο ότι αυτός ο όρος είναι μηδέν, άρα

$$P_x = \frac{A^2}{2} \quad (2.15)$$

Αυτό μας δείχνει ότι ένα ημίτονο με πλάτος A έχει ισχύ $A^2/2$, ανεξαρτήτως της τιμής της συχνότητας f_0 (φυσικά πρέπει $f_0 \neq 0$) και της φάσης θ . Σε περίπτωση που $f_0 = 0$, δείξτε εσείς – εξάσκηση! ☹– ότι η ισχύς είναι ίση με A^2 .

(β') Θα έχουμε

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [A_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2)]^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_2^2 \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) dt \\ &\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_1 A_2}{T} \int_{-T}^T \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) dt \end{aligned} \quad (2.16)$$

Τα δυο πρώτα ολοκληρώματα είναι οι ισχύεις των δυο συνημιτόνων, άρα είναι ίσα με $A_1^2/2$ και $A_2^2/2$, μια και το δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Όμοια με το πρώτο ερώτημα, βλέπουμε ότι το τρίτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, άρα²

$$P_x = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} \quad (2.17)$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευτεί σε ένα άθροισμα ημιτόνων με διακριτές συχνότητες

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi f_k t + \theta_k) \quad (2.18)$$

και τότε η ισχύς θα είναι

$$P_x = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \quad (2.19)$$

² Αυτό ισχύει μόνον αν $f_1 \neq f_2$. Τι συμβαίνει όταν $f_1 = f_2$;

(γ') Σε αυτήν την περίπτωση, το σήμα είναι μιγαδικό, και άρα θα έχουμε

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} \right|^2 dt \quad (2.20)$$

Όμως ισχύει ότι $|e^{j2\pi f_0 t}| = 1$, και έτσι $\left| \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} \right|^2 = \left| \frac{A}{2} \right|^2$ και τέλος

$$P_x = \frac{|A|^2}{4} \quad (2.21)$$

Αυτό ήταν λίγο-πολύ αναμενόμενο, καθώς είδαμε πιο πριν ότι ένα ημίτονο πλάτους A έχει ισχύ $A^2/2$. Γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Euler ότι ένα ημίτονο αποτελείται από δυο συζυγή μιγαδικά εκθετικά ως

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (2.22)$$

Θα μπορούσε να υποψιαστεί κανείς ότι η συνολική ισχύς του ημιτόνου κατανέμεται εξίσου και εξ ημισείας στις δυο αυτές μιγαδικές συνιστώσες, αφού καθεμιά έχει πλάτος $A/2$, με την κάθε μια να λαμβάνει ισχύ $|A|^2/4$, πράγμα που επιβεβαιώθηκε αναλυτικά παραπάνω.

■

Εν κατακλείδει, μπορούμε με βάση τα παραπάνω να διαχωρίζουμε αν ένα σήμα $x(t)$ είναι σήμα ενέργειας ή ισχύος ως εξής:

Σήματα Ενέργειας και Ισχύος

- Σήμα ενέργειας:
 - Το πλάτος και η διάρκεια του σήματος είναι πεπερασμένα.
 - Αν το πλάτος είναι πεπερασμένο αλλά όχι και η διάρκεια, τότε πρέπει $x(t) \rightarrow 0$ όταν $|t| \rightarrow \infty$.
- Σήμα ισχύος:
 - Εμφανίζει περιοδικότητα με περίοδο T_0 και *απολύτως φραγμένο* πλάτος, δηλ.

$$|x(t)| < M_x, \quad \forall t \text{ και } M_x \in \mathbb{R} \quad (2.23)$$

- Δεν εμφανίζει περιοδικότητα, αλλά η διάρκεια του σήματος είναι άπειρη με το πλάτος του να είναι *απολύτως φραγμένο*.

Αν δεν ισχύει τίποτε από τα παραπάνω, το σήμα δεν είναι ούτε ενέργειας ούτε ισχύος. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3:

Ελέγξτε ποιά από τα παρακάτω σήματα είναι *ενέργειας*, *ισχύος*, ή *τίποτε* από τα δύο.

(α') $x(t) = e^{at}, \quad a > 0, \quad t \geq 0$

(β') $x(t) = e^{at}, \quad a < 0, \quad t \geq 0$

(γ') $x(t) = 2 \sin(2\pi t)$, αν γνωρίζετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 0$.

(δ') $x(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

(ε') $x(t) = e^{2t}, \quad t \in [0, 1]$

Λύση:

α') Το σήμα δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος. Είναι άπειρης διάρκειας, μη περιοδικό, με μη φραγμένο πλάτος σήματος.

β') Είναι σήμα ενέργειας, γιατί είναι άπειρης διάρκειας και $|x(t)| \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow +\infty$.

$$E_x = \int_0^{+\infty} (e^{at})^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{2at} dt = \frac{1}{2a} (\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2at} - 1) = \frac{1}{2a} (0 - 1) = -\frac{1}{2a}, \quad a < 0 \quad (2.24)$$

γ') Είναι σήμα ισχύος, γιατί είναι περιοδικό με φραγμένο πλάτος. Ας το λύσουμε αναλυτικά.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T 4 \sin^2(2\pi t) dt \quad (2.25)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{T} \int_{-T}^T \sin^2(2\pi t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{T} \int_{-T}^T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\pi t \right) dt \quad (2.26)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T}^T dt - \frac{1}{T} \int_{-T}^T \cos 4\pi t dt \right) \quad (2.27)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} 2T - \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{4\pi} \sin 4\pi t \Big|_{-T}^T \right) \quad (2.28)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{4\pi T} (\sin 4\pi T + \sin 4\pi T) \right) \quad (2.29)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2 \sin 4\pi T}{4\pi T} \right) = 2 - \lim_{T \rightarrow +\infty} 2 \frac{\sin 4\pi T}{4\pi T} = 2 - 0 = 2 \quad (2.30)$$

Άρα $P_x = 2$. Φυσικά ήταν αναμενόμενο, μια και νωρίτερα δείξαμε ότι η ισχύς ενός ημιτόνου ισούται με το πλάτος του σήματος στο τετράγωνο δια δυο.

δ') Είναι άπειρης διάρκειας και φραγμένου πλάτους, άρα είναι σήμα ισχύος.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^0 (-1)^2 dt + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T 1^2 dt \quad (2.31)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} t \Big|_{-T}^0 + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} t \Big|_0^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} T + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} T \quad (2.32)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (2.33)$$

ε') Είναι σήμα πεπερασμένης διάρκειας και πλάτους, άρα είναι σήμα ενέργειας.

$$E_x = \int_0^1 e^{4t} dt = \frac{1}{4} (e^4 - 1) \quad (2.34)$$

■

2.2.5 Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά σήματα

Ένα σήμα του οποίου η φυσική περιγραφή είναι πλήρως γνωστή, είτε σε μαθηματική μορφή είτε σε γραφική μορφή, λέγεται *ντετερμινιστικό* σήμα. Ένα σήμα που δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς αλλά είναι γνωστό μόνο μέσω πιθανοτικής περιγραφής, όπως η μέση τιμή, η διασπορά, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κλπ, λέγεται *στοχαστικό* ή *τυχαίο* σήμα. Σε σχετικό Κεφάλαιο, θα συζητήσουμε βασικές έννοιες τυχαίων σημάτων και τη σημασία τους σε πρακτικές εφαρμογές.

2.3 Μετασχηματισμοί Σημάτων

Ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της ανάλυσης σημάτων και συστημάτων είναι αυτό του μετασχηματισμού ενός σήματος. Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να τροποποιήσουμε σήματα ήχου ή ομιλίας (audio transformations) ώστε να ακούγονται σε υψηλότερη ή χαμηλότερη ταχύτητα αναπαραγωγής, τότε πρέπει να μετασχηματίσουμε τη μεταβλητή του χρόνου. Επίσης, στα συστήματα σύνθεσης ομιλίας από κείμενο που βασίζονται στη συνένωση

ηχογραφημένων τμημάτων φωνής (concatenated speech synthesis), το σήμα εισόδου (ομιλία) υφίσταται κάποιες τροποποιήσεις, όπως για παράδειγμα η χρονική ολίσθηση, με σκοπό την εύρεση της βέλτιστης θέσης σύνδεσης μεταξύ διαδοχικών τμημάτων ηχογράφησης, και κατά συνέπεια την αύξηση της ποιότητας της σύνθεσης. Τέλος, στα συστήματα ραντάρ (aircraft detection), το σήμα που ανακλάται από το αεροσκάφος συσχετίζεται με το σήμα που εστάλη από τη συσκευή ραντάρ ώστε να βρεθεί η θέση και η ταχύτητα του αεροσκάφους.

Εδώ θα συζητήσουμε τρεις χρήσιμους και πολύ απλούς μετασχηματισμούς σημάτων οι οποίοι εκτελούνται επάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλ. του χρόνου: χρονική ολίσθηση, κλιμάκωση, και αντιστροφή. Όπως θα δείτε αμέσως, οι μετασχηματισμοί αυτοί δεν είναι τίποτε περισσότερο από απλές πράξεις επάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή t .

2.3.1 Χρονική Ολίσθηση

Θεωρήστε ένα σήμα $x(t)$ και το ίδιο σήμα καθυστερημένο κατά t_0 δευτερόλεπτα, το οποίο συμβολίζουμε με $y(t)$. Ό,τι συμβαίνει στο σήμα $x(t)$, συμβαίνει και στο σήμα $y(t)$ με καθυστέρηση T δευτερόλεπτα. Άρα

$$y(t + T) = x(t) \quad (2.35)$$

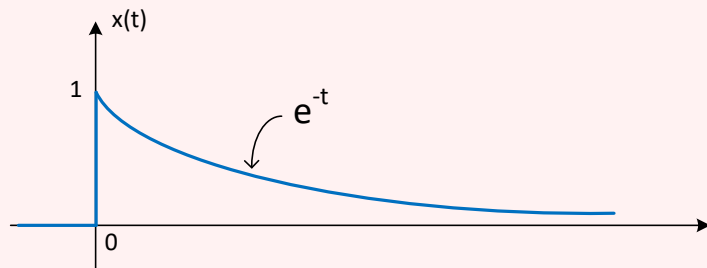
και

$$y(t) = x(t - T) \quad (2.36)$$

Έτσι, για να ολισθήσουμε χρονικά ένα σήμα κατά t_0 , αντικαθιστούμε το t με το $t - t_0$. Έτσι, το $x(t - t_0)$ αντιπροσωπεύει το $x(t)$, έχοντας υποστεί ολίσθηση κατά t_0 δευτερόλεπτα. Αν το t_0 είναι θετικό, η ολίσθηση είναι προς τα δεξιά (καθυστέρηση), αλλιώς η ολίσθηση είναι προς τα αριστερά (προήγηση). Έτσι, το $x(t - 2)$ είναι το $x(t)$ καθυστερημένο κατά 2 δευτερόλεπτα, και το $x(t + 2)$ είναι το $x(t)$ που προηγείται 2 δευτερόλεπτα. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.4:

Μια εκθετική συνάρτηση $x(t) = e^{-t}$ που φαίνεται στο Σχήμα 2.4 καθυστερεί κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο.



Σχήμα 2.4: Παράδειγμα χρονικής ολίσθησης ενός σήματος: σήμα $x(t)$

Σχεδιάστε και περιγράψτε μαθηματικά την ολισθημένη συνάρτηση. Επαναλάβετε αν η $x(t)$ προηγείται κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο.

Η συνάρτηση του Σχήματος μπορεί να παρασταθεί μαθηματικά ως

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Έστω ότι $x_d(t) = x(t - 1)$ είναι η καθυστερημένη συνάρτηση (μετατοπισμένη προς τα δεξιά) κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο, όπως στο Σχήμα 2.5(α). Η μαθηματική της περιγραφή προκύπτει αντικαθιστώντας όπου t το $t - 1$. Άρα

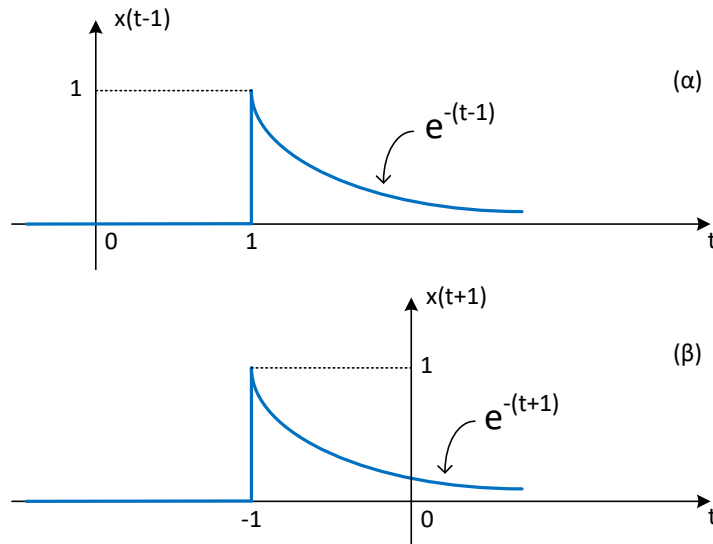
$$x(t) = \begin{cases} e^{-(t-1)}, & t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1 \\ 0, & t - 1 < 0 \Leftrightarrow t < 1 \end{cases} \quad (2.38)$$

Έστω ότι $x_a(t) = x(t + 1)$ είναι η συνάρτηση που προηγείται (μετατόπιση προς τα αριστερά) κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο, όπως στο Σχήμα 2.5(β). Η μαθηματική της περιγραφή προκύπτει αντικαθιστώντας το t με το $t + 1$.

Άρα

$$x(t) = \begin{cases} e^{-(t+1)}, & t+1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -1 \\ 0, & t+1 < 0 \Leftrightarrow t < -1 \end{cases} \quad (2.39)$$

■



Σχήμα 2.5: Παράδειγμα χρονικής ολίσθησης ενός σήματος: (α) σήμα $x(t)$ καθυστερημένο κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο, (β) $x(t)$ προηγούμενο κατά $t_0 = 1$ δευτερόλεπτο.

2.3.2 Χρονική Κλιμάκωση

Η συμπίεση ή η διαστολή ενός σήματος στο χρόνο είναι γνωστή ως χρονική κλιμάκωση. Θεωρήστε το σήμα $x(t)$ και το σήμα $y(t)$ που είναι το $x(t)$ συμπιεσμένο στο χρόνο με παράγοντα $0 < a < 1$. Έτσι, ό,τι συμβαίνει στο σήμα $x(t)$ σε κάποιο χρόνο t , επίσης συμβαίνει στο $y(t)$ αλλά σε χρόνο t/a , έτσι ώστε

$$y(t/a) = x(t) \quad (2.40)$$

και

$$y(t) = x(at) \quad (2.41)$$

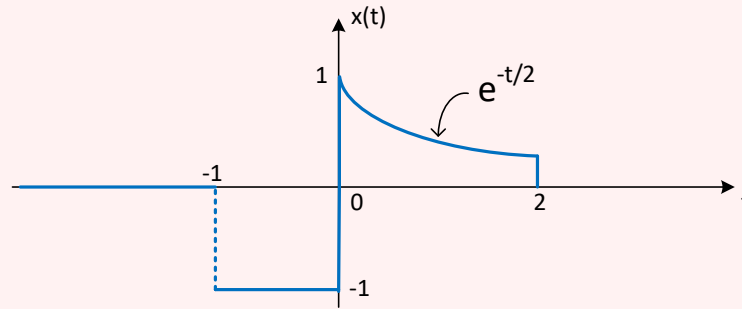
Με παρόμοιο συλλογισμό, μπορούμε να δείξουμε ότι αν το $x(t)$ αν επεκταθεί στο χρόνο κατά έναν παράγοντα $a > 1$ δίνεται ως

$$y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right) \quad (2.42)$$

Συνοψίζοντας, για να κάνουμε χρονική κλιμάκωση ενός σήματος κατά ένα παράγοντα a , αντικαθιστούμε το t με το at . Αν $a > 1$, η κλιμάκωση μετατρέπεται σε χρονική συμπίεση, ενώ αν $0 < a < 1$, η κλιμάκωση γίνεται χρονική διαστολή.

Παράδειγμα 2.5:

Το Σχήμα 2.6 δείχνει ένα σήμα $x(t)$.



Σχήμα 2.6: Παράδειγμα χρονικής κλιμάκωσης ενός σήματος: σήμα $x(t)$.

Σχεδιάστε και περιγράψτε μαθηματικά το συμπίεσμένο κατά παράγοντα 2 σήμα. Επαναλάβετε για το διεσταλμένο κατά παράγοντα 2 σήμα.

Το σήμα $x(t)$ μπορεί να περιγραφεί ως

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t < 0 \\ e^{-t/2}, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.43)$$

Το Σχήμα 2.7(α) δείχνει το σήμα $x_e(t)$, που είναι το $x(t)$ με χρονική διαστολή κατά παράγοντα $a = 2$. Κατά συνέπεια, μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως $x(t/2)$, που προκύπτει αντικαθιστώντας το t με το $t/2$. Έτσι:

$$x_e(t) = x(t/2) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t/2 < 0 \Leftrightarrow -2 \leq t < 0 \\ e^{-t/4}, & 0 \leq t/2 < 2 \Leftrightarrow 0 \leq t < 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.44)$$

Παρατηρήστε ότι τις χρονικές στιγμές $t = -1$ και $t = 2$ στο $x(t)$ ανταποκρίνονται στις χρονικές στιγμές $t = -2$ και $t = 4$ στο συμπίεσμένο σήμα $x(t/2)$.

Το Σχήμα 2.7(β) δείχνει το σήμα $x_c(t)$, που είναι συμπίεσμένο κατά παράγοντα $a = 2$. Κατά συνέπεια, μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως $x(2t)$, που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το t με το $2t$, έτσι:

$$x_c(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq 2t < 0 \Leftrightarrow -0.5 \leq t < 0 \\ e^{-t/2}, & 0 \leq 2t < 2 \Leftrightarrow 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.45)$$

Παρατηρήστε ότι τις χρονικές στιγμές $t = -1$ και $t = 2$ στο $x(t)$ ανταποκρίνονται στις χρονικές στιγμές $t = -0.5$ και $t = 1$ στο συμπίεσμένο σήμα $x(2t)$. ■

2.3.3 Χρονική Αντιστροφή

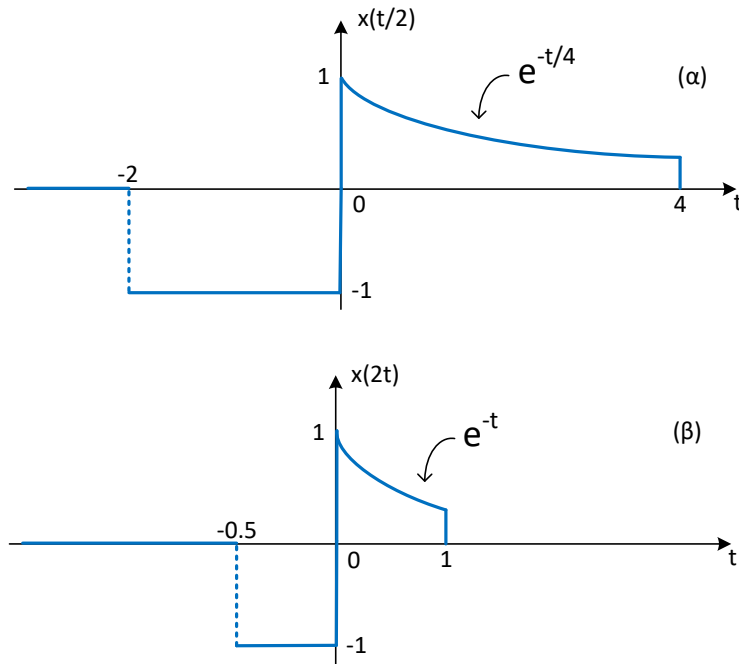
Θεωρήστε ένα σήμα $x(t)$. Για να αντιστρέψουμε χρονικά το $x(t)$, το περιστρέφουμε κατά 180 μοίρες γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. Αυτή η αντιστροφή μας δίνει το $y(t) = x(-t)$. Έτσι

$$y(-t) = x(t) \quad (2.46)$$

και

$$y(t) = x(-t) \quad (2.47)$$

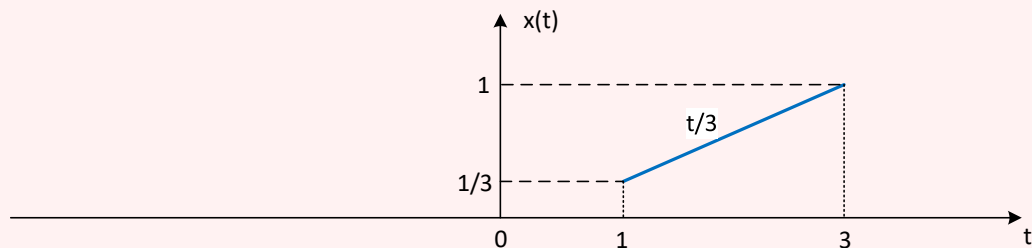
Άρα, για να αντιστρέψουμε χρονικά ένα σήμα, αντικαθιστούμε το t με το $-t$. Έτσι, η αντιστροφή χρόνου του $x(t)$ μας δίνει το $x(-t)$.



Σχήμα 2.7: Παράδειγμα χρονικής κλιμάκωσης ενός σήματος: (α) σήμα $x(t)$ διεσταλμένο κατά παράγοντα $a = 2$, (β) σήμα $x(t)$ συμπιεσμένο κατά παράγοντα $a = 2$.

Παράδειγμα 2.6:

Για το σήμα του Σχήματος 2.8,



Σχήμα 2.8: Παράδειγμα χρονικής αντιστροφής ενός σήματος: σήμα $x(t)$

σχεδιάστε το $x(-t)$, που είναι το ανεστραμμένο $x(t)$.

Τις χρονικές στιγμές 1 και 3 του $x(t)$ αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές -1 και -3 στο $x(-t)$. Επειδή $x(t) = t/3$, έχουμε $x(-t) = -t/3$. Μπορούμε να περιγράψουμε τα σήματα ως

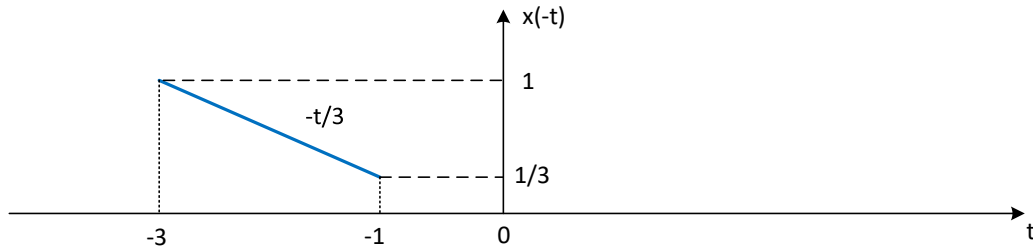
$$x(t) = \begin{cases} t/3, & 1 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.48)$$

και η αντεστραμμένη έκδοση του $x(t)$, δηλ. το $x(-t)$ προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το t με το $-t$ στο $x(t)$ ως

$$x(-t) = \begin{cases} -t/3, & 1 \leq -t \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq t \leq -1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.49)$$

Το σήμα $x(-t)$ φαίνεται στο Σχήμα 2.9.





Σχήμα 2.9: Παράδειγμα χρονικής αντιστροφής ενός σήματος: σήμα $x(-t)$

2.4 Μερικά χρήσιμα μοντέλα σημάτων

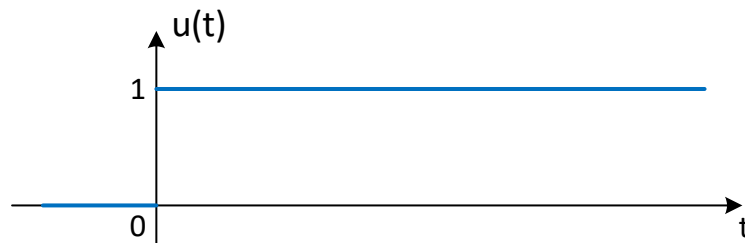
Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε μερικά νέα σήματα (δηλ. νέες συναρτήσεις, που δεν έχουμε δει ξανά ποτέ) που θα μας αποδειχθούν πολύ χρήσιμα. Αυτά είναι τέσσερα: (α) η βηματική συνάρτηση (step function), (β) ο τετραγωνικός παλμός (rectangular pulse), (γ) ο τριγωνικός παλμός (triangular pulse), και (δ) η κρουστική συνάρτηση Δέλτα (Delta function).

2.4.1 Η βηματική συνάρτηση $u(t)$

Σε πολλά από τα παραδείγματά μας ως τώρα, τα σήματά μας έχουν μηδενικές τιμές για $t < 0$, δηλ. ξεκινούν τη χρονική στιγμή $t = 0$. Αυτά τα σήματα λέγονται *αιτιατά*. Τέτοια σήματα μπορούν να περιγραφούν εύκολα με τη χρήση της περιφημής *βηματικής συνάρτησης* $u(t)$, της οποίας ο ορισμός είναι πολύ απλός:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Μπορείτε να φανταστείτε τη βηματική συνάρτηση ως ένα σήμα-“διακόπτη”, που είναι μηδέν για $t < 0$ (κλειστός διακόπτης) και γίνεται μονάδα για $t > 0$ (ανοιχτός διακόπτης). Αν θέλουμε λοιπόν ένα σήμα μας να ξεκινάει από το $t = 0$ (δηλ. να έχει μηδενικές τιμές για $t < 0$), απλά το πολλαπλασιάζουμε με τη βηματική συνάρτηση $u(t)$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.10. Αντίστοιχα, αν θέλουμε να ξεκινάει από μια χρονική στιγμή

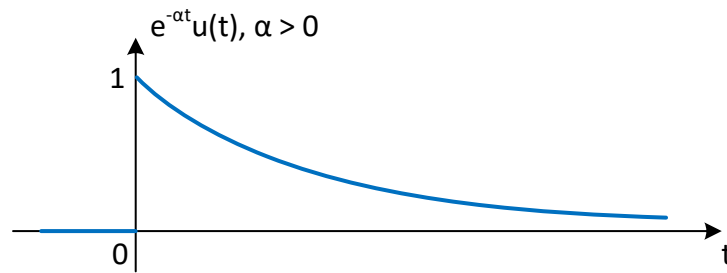
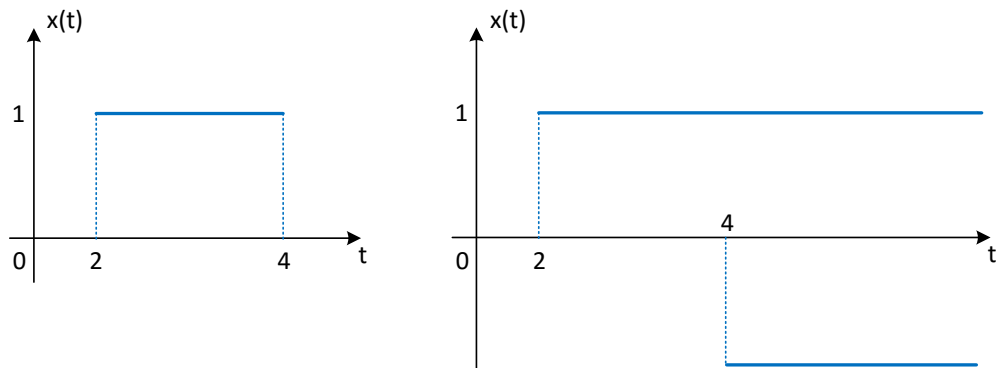


Σχήμα 2.10: Η βηματική συνάρτηση $u(t)$.

$t = t_0 > 0$, το πολλαπλασιάζουμε με τη βηματική $u(t - t_0)$. Για παράδειγμα, το σήμα e^{-at} , $a > 0$ αναπαρίσταται γραφικά ως ένα άπειρης διάρκειας εκθετικό που ξεκινά από το $t = -\infty$. Αν θέλουμε να βρούμε την αιτιατή του μορφή, απλά θα πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με τη βηματική συνάρτηση, παίρνοντας τη γραφική παράσταση του Σχήματος 2.11 και η μαθηματική μορφή θα είναι φυσικά η $e^{-at}u(t)$. Η βηματική απόκριση αποδεικνύεται επίσης πολύ χρήσιμη στην περιγραφή συναρτήσεων που έχουν ανά διαστήματα διαφορετικές μαθηματικές αναπαραστάσεις. Αυτά τα σήματα έχουν διαφορετική μαθηματική περιγραφή ανά τμήματα του χρόνου. Μια τέτοια σύνθετη περιγραφή αποδεικνύεται άβολη όταν θέλουμε να κάνουμε πράξεις με σήματα. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε τη βηματική συνάρτηση, τότε θα έχουμε μια και μόνο μαθηματική έκφραση για κάθε τιμή του t !

Δείτε για παράδειγμα το σήμα του Σχήματος 2.12(α). Μπορούμε να γράψουμε τον παλμό του Σχήματος (2.12)(α) ως συνάρτηση βηματικών συναρτήσεων, απλά παρατηρώντας ότι είναι ουσιαστικά το άθροισμα δυο μετατοπισμένων βηματικών συναρτήσεων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.12(β). Η βηματική συνάρτηση $u(t)$ καθυστερημένη κατά T δευτερόλεπτα είναι η $u(t - T)$. Από το Σχήμα 2.12(β), είναι εμφανές ότι ένας μοναδιαίος παλμός στο $[2, 4]$ γράφεται ως

$$x(t) = u(t - 2) - u(t - 4) \quad (2.51)$$

Σχήμα 2.11: Η αιτιατή εκθετική συνάρτηση $e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

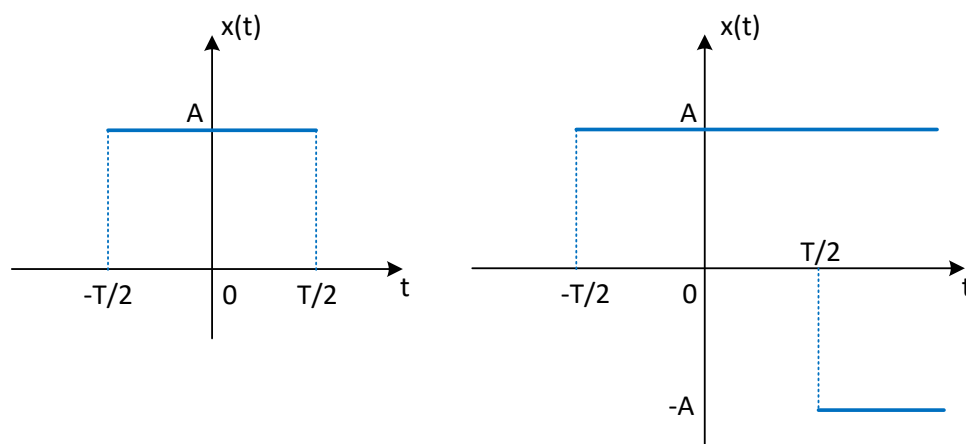
Σχήμα 2.12: Αναπαράσταση ενός παλμού με βηματικές συναρτήσεις.

2.4.2 Ο Τετραγωνικός Παλμός

Ο τετραγωνικός παλμός είναι πολύ χρήσιμος και θα τον χρησιμοποιήσουμε αρκετά στη συνέχεια, οπότε ας του δώσουμε ένα βολικό όνομα κι έναν ορισμό. Ας τον πούμε *rect*, από τη συντομογραφία του *rectangular*³. Οπότε ας ορίσουμε ότι

$$\text{παλμός πλάτους } A \text{ στο διάστημα } \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A, & t \in (-T/2, T/2) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.52)$$

όπως στο Σχήμα 2.13. Παρατηρήστε ότι η διάρκεια του παλμού αναφέρεται ως παρονομαστής του ορίσματος της



Σχήμα 2.13: Ορισμός βασικού παλμού με βηματικές συναρτήσεις.

$\text{rect}(\cdot)$. Από τον ορισμό φαίνεται ότι ο παλμός είναι άρτια συνάρτηση του t . Έτσι, ο παλμός θα γραφτεί με χρήση

³Τετραγωνικός, στα Αγγλικά.

βηματικών ως

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) = A(u(t - (-T/2)) - u(t - T/2)) = A\left(u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \quad (2.53)$$

και για το παράδειγμα του Σχήματος 2.12, θα είναι

$$\text{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) = u(t-2) - u(t-4) \quad (2.54)$$

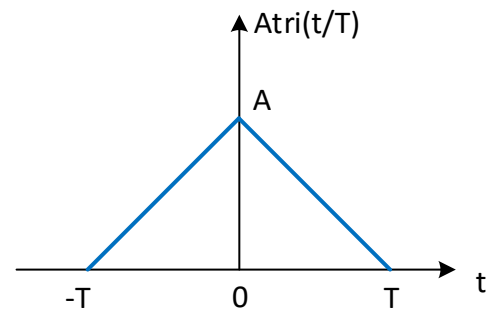
2.4.3 Ο Τριγωνικός Παλμός

Αντίστοιχα μπορεί να οριστεί ο *τριγωνικός* παλμός, τον οποίο θα συμβολίζουμε ως *tri*, από τη συντομογραφία του *triangular*⁴. Οπότε ας ορίσουμε ότι

$$\text{τριγωνικός παλμός πλάτους } A \text{ στο διάστημα } (-T, T) = \text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & t \in (-T, T) \\ 0, & \text{άλλοι} \end{cases} \quad (2.55)$$

όπως στο Σχήμα 2.14.

Από τον ορισμό φαίνεται ότι ο τριγωνικός παλμός είναι επίσης άρτια συνάρτηση του t . Παρατηρήστε ότι η *μισή* διάρκεια του τριγωνικού παλμού αναφέρεται ως *παρονομαστής* του ορίσματος της $\text{tri}(\cdot)$ - σε αντίθεση με τον τετραγωνικό παλμό, όπου όλη η διάρκειά του εμφανιζόταν ως *παρονομαστής* στο όρισμα του rect . Ο λόγος αυτής της “ασυνέπειας” στο συμβολισμό θα φανεί στη συνέχεια.



Σχήμα 2.14: Τριγωνικός παλμός.

2.4.4 Κρουστική Συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$

Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα (ή συνάρτηση Δέλτα απλά, ή ακόμα απλούστερα, $\delta(t)$, από δω και πέρα), είναι μια από τις σημαντικότερες συναρτήσεις στην ανάλυση σημάτων και συστημάτων. Ακριβέστερα, δε θα έλεγε κανείς ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι συνάρτηση με την αυστηρή έννοια του όρου. Η συνάρτηση Δέλτα είναι μια *γενικευμένη* συνάρτηση⁵.

Η συνάρτηση Δέλτα ορίζεται ως

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (2.56)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.57)$$

Βλέπετε ότι η συνάρτηση Δέλτα δεν ορίζεται με κάποιο κλειστό τύπο όπως οι περισσότερες συναρτήσεις. Μπορούμε όμως να φανταστούμε τη συνάρτηση Δέλτα ως μια ψηλή, πολύ πολύ στενή “έκδοση” του τετραγωνικού παλμού που είδαμε νωρίτερα, με μοναδιαίο εμβαδό (όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα της Σχέσης (2.57)). Η διάρκεια ϵ του παλμού θα έχει πολύ πολύ μικρή τιμή $\epsilon \rightarrow 0$. Έτσι, το ύψος του παλμού θα έχει πολύ μεγάλη τιμή, $\frac{1}{\epsilon}$ (για να ικανοποιείται η σχέση του εμβαδού $\frac{1}{\epsilon}\epsilon = 1$). Οπότε, η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τετραγωνικός παλμός με απειροστά μικρή διάρκεια, και απειροστά μεγάλο πλάτος, αλλά εμβαδό ίσο με μονάδα! Περίεργο, έτσι δεν είναι; ©Το Σχήμα 2.15 δείχνει τη θεωρητική αναπαράσταση της συνάρτησης Δέλτα, και την προσέγγισή της από τετραγωνικό παλμό, όπως την εξηγήσαμε μόλις. Τι είναι λοιπόν αυτό το τόσο σπουδαίο που καθιστά τη συνάρτηση Δέλτα χρήσιμη για τους μηχανικούς; Ίσως έχετε ήδη καταλάβει ότι η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσομοιώσει ένα *ακαριαίας* φύσως σήμα, που δρα στιγμιαία και ύστερα εξαφανίζεται. Ένα τέτοιο - θεωρητικό - σήμα είναι πολύ χρήσιμο στη μελέτη των συστημάτων, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

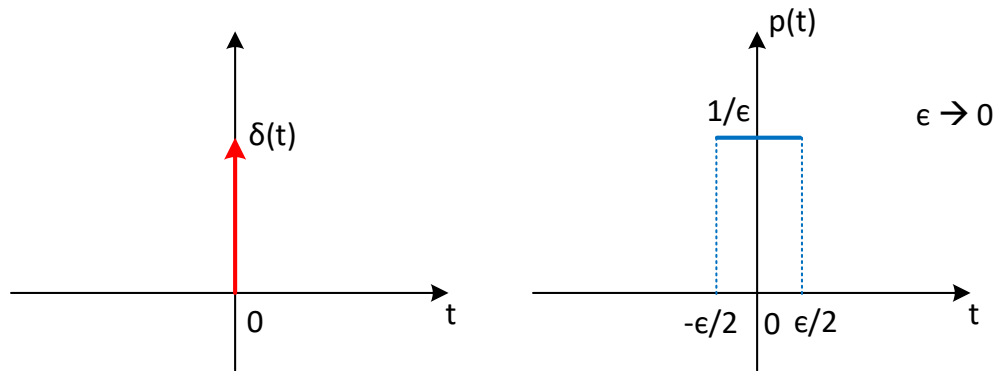
2.4.4.1 Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα

Ας δούμε τι συμβαίνει όταν πολλαπλασιάσουμε τη συνάρτηση Δέλτα με μια άλλη συνάρτηση $x(t)$, η οποία είναι συνεχής στο $t = 0$. Αφού η συνάρτηση Δέλτα είναι μη μηδενική μόνο για $t = 0$, και η τιμή της $x(t)$ για $t = 0$ είναι προφανώς $x(0)$, τότε θα έχουμε

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (2.58)$$

⁴Τριγωνικός, στα Αγγλικά.

⁵Μια γενικευμένη συνάρτηση ορίζεται από την επίδρασή της σε άλλες συναρτήσεις ή από τις τιμές της για κάθε χρονική στιγμή t .

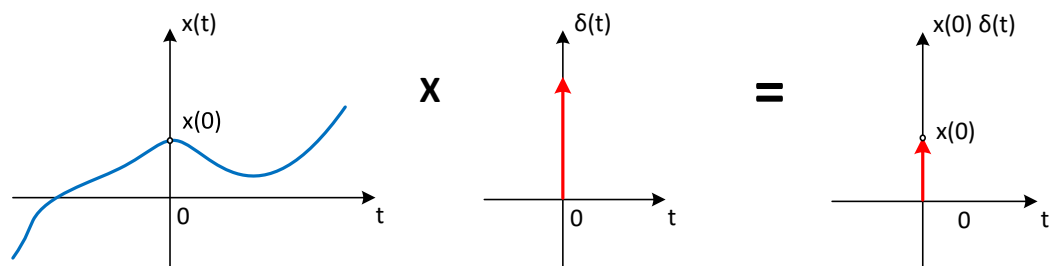


Σχήμα 2.15: Συνάρτηση Δέλτα: ορισμός και προσέγγισή της.

Όμοια, αν η $x(t)$ πολλαπλασιαστεί από μια μετατοπισμένη έκδοση της $\delta(t)$, έστω την $\delta(t - T)$ (η οποία είναι μια συνάρτηση Δέλτα τη χρονική στιγμή $t = T$), θα έχουμε

$$x(t)\delta(t - T) = x(T)\delta(t - T) \quad (2.59)$$

Τι σημαίνουν τα παραπάνω; Σημαίνουν ότι ο πολλαπλασιασμός μιας συνάρτησης Δέλτα με μια συνάρτηση $x(t)$, μας δίνει την ίδια συνάρτηση Δέλτα με πλάτος την τιμή της συνάρτησης $x(t)$ τη χρονική στιγμή που ορίζεται η συνάρτηση Δέλτα! Με άλλα λόγια, η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να δειγματοληπτήσει μια άλλη συνάρτηση, ανάλογα με τη θέση (χρονική στιγμή) που θα διαλέξουμε να την τοποθετήσουμε! Αυτή η ιδιότητα φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 2.16.



Σχήμα 2.16: Δειγματοληπτική ικανότητα συνάρτησης Δέλτα.

Άρα, αν έχουμε ένα κάπως ασυνήθιστο σήμα, που ορίζεται μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, όπως το

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = -2 \\ -1, & t = 0 \\ 2, & t = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.60)$$

τότε η συνάρτηση Δέλτα θα μας βοηθούσε να το γράψουμε ως

$$x(t) = 1\delta(t + 2) - 1\delta(t) + 2\delta(t - 3) \quad (2.61)$$

Τώρα, αν ολοκληρώσουμε τη Σχέση (2.58), θα έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = x(0) \quad (2.62)$$

λόγω της Σχέσης (2.58), και δεδομένου πάντα ότι η $x(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την παραπάνω σχέση ως εξής: το εμβαδό του γινομένου μιας συνάρτησης $x(t)$ με τη συνάρτηση Δέλτα ισούται με την

τιμή της συνάρτησης τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm T)dt = x(\mp T) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm T)dt = x(\mp T) \quad (2.63)$$

Η ερμηνεία της παραπάνω σχέσης είναι ακριβώς η ίδια με προηγουμένως, μόνο που πλέον η τιμή της συνάρτησης εξαρτάται από τη θέση της συνάρτησης Δέλτα.

Παραπάνω είδατε κάποιες πράξεις που μπορούν να γίνουν με τη συνάρτηση Δέλτα. Αυτό δε σημαίνει ότι όλες οι κοινές πράξεις που γίνονται σε συνήθεις συναρτήσεις μπορούν να γίνουν και με τη συνάρτηση Δέλτα. Για παράδειγμα, επιτρέπεται η ολίσθηση, καθώς και το άθροισμα με άλλες συναρτήσεις. Δε θα προτείναμε να την υψώσετε στο τετράγωνο, να υψώσετε στο τετράγωνο τη μεταβλητή t του ορίσμά της, ή να την πολλαπλασιάσετε με μια συνάρτηση που δεν είναι συνεχής στο σημείο που βρίσκεται η συνάρτηση Δέλτα.

Η συνάρτηση Δέλτα έχει επιπλέον τις ακόλουθες ιδιότητες, οι οποίες παρατίθενται χωρίς απόδειξη.

$$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}, \quad a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2.64)$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (2.65)$$

2.4.4.2 Σχέση Συνάρτησης Δέλτα και Βηματικής Συνάρτησης

Τέλος, μια πολύ σημαντική ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα είναι ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t) \quad (2.66)$$

δηλ. η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης που είδαμε νωρίτερα ισούται με τη συνάρτηση Δέλτα. Το “μυστικό” αυτής της σχέσης είναι ότι αν σκεφτούμε τη βηματική συνάρτηση ως μια ασυνέχεια (μια και από την τιμή 0 αλλάζει ακαριαία στην τιμή 1, όταν $t = 0$), τότε μόλις ορίσαμε την παράγωγο της ασυνέχειας!⁶

Κατ’ αρχάς, γνωρίζετε ότι μια συνάρτηση που είναι ασυνεχής σε ένα σημείο - όπως η βηματική συνάρτηση - δεν μπορεί να έχει παράγωγο με τη συνήθη έννοια. Ας κάνουμε όμως την ερώτηση: “αν η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είχε παράγωγο $\frac{d}{dt}u(t)$, τότε ποιές θα ήταν οι ιδιότητές της;” Ας ξεκινήσουμε από τα απλά: προφανώς η βηματική συνάρτηση έχει παράγωγο μηδέν σε όλα τα σημεία της, πλην του $t = 0$. Άρα μια πρώτη ιδιότητα θα πρέπει να είναι η

$$\frac{d}{dt}u(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (2.67)$$

Μια δεύτερη ιδιότητα της βηματικής συνάρτησης προέρχεται από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού: για $t_1 < 0 < t_2$, πρέπει

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}u(t)dt = u(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = u(t_2) - u(t_1) = 1 - 0 = 1 \quad (2.68)$$

Άρα μια δεύτερη ιδιότητα πρέπει να είναι η

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}u(t)dt = 1, \quad \forall \quad t_1 < 0 < t_2 \quad (2.69)$$

Καμιά συνάρτηση - με την αυστηρή έννοια του όρου - δεν έχει αυτές τις δυο ιδιότητες! Δείτε όμως τις Σχέσεις (;;). Αν $t_1 \rightarrow -\infty$ και $t_2 \rightarrow +\infty$, υπάρχει απόλυτη ταύτιση των σχέσεων! Άρα η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση Δέλτα.

Ας θεωρήσουμε τη Σχέση (2.66) ως αληθής. Τότε, η παράγωγος της $u(t)$ πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}u(t)x(t)dt = u(t)x(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\frac{d}{dt}x(t)dt \quad (2.70)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)u(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)u(t) - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)dt \quad (2.71)$$

⁶ Βεβαίως γνωρίζετε ότι μια ασυνεχής συνάρτηση δεν παραγωγίζεται με τη συνήθη έννοια της παραγώγου.... γι’ αυτό και η παραπάνω παράγωγος ονομάζεται γενικευμένη παράγωγος, όπως η συνάρτηση Δέλτα είναι μια γενικευμένη συνάρτηση.

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - 0 - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} x(t) dt \quad (2.72)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - x(t) \Big|_0^{+\infty} \quad (2.73)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) + \lim_{t \rightarrow 0} x(t) \quad (2.74)$$

$$= x(0) \quad (2.75)$$

δεδομένου ότι η $x(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$. Άρα δείξαμε ότι η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης ικανοποιεί την ιδιότητα της δειγματοληψίας της συνάρτησης Δέλτα. Άρα είναι και αυτή μια συνάρτηση Δέλτα!

Άμεση συνέπεια της Σχέσης (2.66) είναι ότι

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.76)$$

2.4.4.3 Παράγωγοι της συνάρτησης Δέλτα

Η παράγωγος της συνάρτησης Δέλτα ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} \delta(t) x(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \frac{d}{dt} x(t) dt = - \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0} \quad (2.77)$$

Όμοια ορίζεται η n -οστή παράγωγος ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t) x(t) dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} x(0) \Big|_{t=0} \quad (2.78)$$

2.4.5 Το μιγαδικό εκθετικό $e^{j2\pi f_0 t}$

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο περί μαθηματικού υποβάθρου, εισάγαμε την περίφημη σχέση του Euler, η οποία επαναλαμβάνεται χάρin ευκολίας παρακάτω:

$$Ae^{j\theta} = \Re\{Ae^{j\theta}\} + j\Im\{Ae^{j\theta}\} = A \cos(\theta) + jA \sin(\theta) \quad (2.79)$$

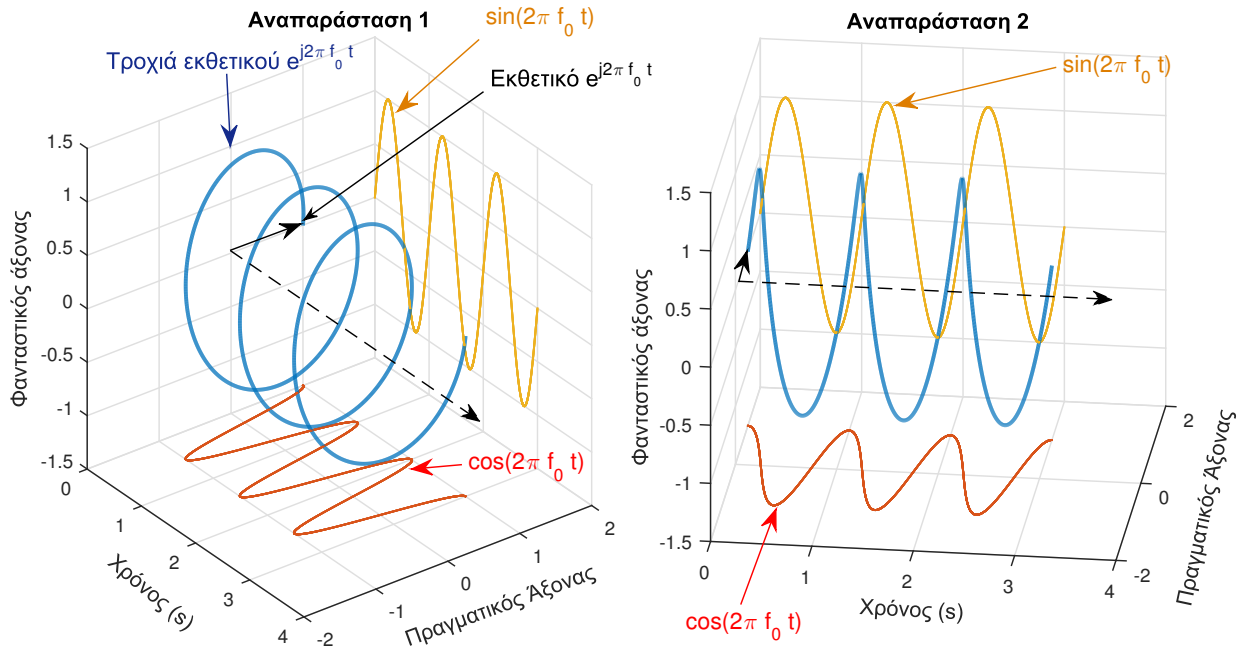
με A το πλάτος του εκθετικού. Αν το θ είναι της μορφής $\theta = 2\pi f_0 t$, τότε στο διδιάστατο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών, η σχέση περιγράφει ένα διάνυσμα σταθερού μήκους A στο μιγαδικό επίπεδο το οποίο περιστρέφεται συνεχώς σε έναν κύκλο ακτίνας A , με γωνιακή (ή κυκλική) συχνότητα $2\pi f_0$ rad/s. Αν ορίζουμε έναν τρίτο άξονα, αυτόν του χρόνου t , τότε ο χώρος γίνεται τριδιάστατος και το περιστρεφόμενο διάνυσμα ορίζει μια σπειροειδή τροχιά στο χώρο αυτό. Η περιστροφή αυτή γίνεται φυσικά με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$ rad/s, ή εναλλακτικά με συχνότητα f_0 Hz. Αυτό σημαίνει ότι το περιστρεφόμενο διάνυσμα εκτελεί f_0 πλήρεις “σπειροειδείς κύκλους” ανά δευτερόλεπτο.

Διάφορες όψεις - για καλύτερη κατανόηση - αυτής της κίνησης του περιστρεφόμενου διανύσματος - μοναδιαίου μήκους - φαίνονται στο Σχήμα 2.17, μαζί με το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του. Με χρήση της συζυγίας, οι σχέσεις του Euler δίνουν επίσης τις παρακάτω σχέσεις για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού:

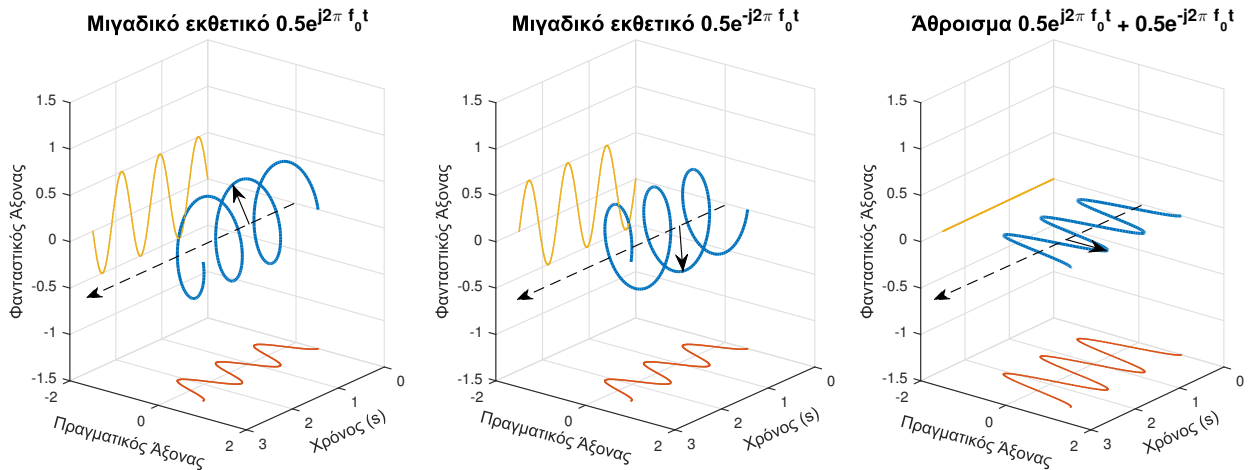
$$\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (2.80)$$

$$\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A \sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (2.81)$$

Ας πάρουμε τη Σχέση (2.80), η οποία περιγράφει ένα ημίτονο ως άθροισμα ενός συζυγούς ζεύγους μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων με πλάτη $\frac{A}{2}$. Ας απεικονίσουμε την κίνηση των περιστρεφόμενων διανυσμάτων που αντιστοιχούν στο ζεύγος αυτό. Βλέπουμε στο Σχήμα 2.18 (για $A = 1$) ότι η τροχιά τους είναι αντίθετες: η μιγαδική εκθετική συνάρτηση $\frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t}$ περιστρέφεται με την ορθή μαθηματική φορά, ενώ η αντίστοιχη $\frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$ περιστρέφεται με την αντίθετη μαθηματική φορά. Σε κάθε χρονική στιγμή t , τα φανταστικά μέρη τους έχουν το ίδιο μέτρο, $|\frac{A}{2} \sin(2\pi f_0 t)|$, αλλά αντίθετα πρόσημα, ενώ τα πραγματικά τους μέρη είναι ακριβώς ίδια. Το άθροισμα των διανυσμάτων αυτών για κάθε t ισούται με το διπλάσιο πραγματικό μέρος της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης. Σε περίπτωση που το πλάτος A είναι μιγαδικό, δηλ. είναι της μορφής



Σχήμα 2.17: Μιγαδική εκθετική συνάρτηση $e^{j2\pi f_0 t}$, μαζί με το πραγματικό και φανταστικό μέρος της, από δυο όψεις στον τριδιάστατο μιγαδικό χώρο.



Σχήμα 2.18: Συζυγείς μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις και το πραγματικό άθροισμά τους. Το περιστρεφόμενο μιγαδικό εκθετικό διάνυσμα (με μαύρο χρώμα) βρίσκεται σε τυχαία θέση του άξονα του χρόνου (διακεκομμένη μαύρη γραμμή).

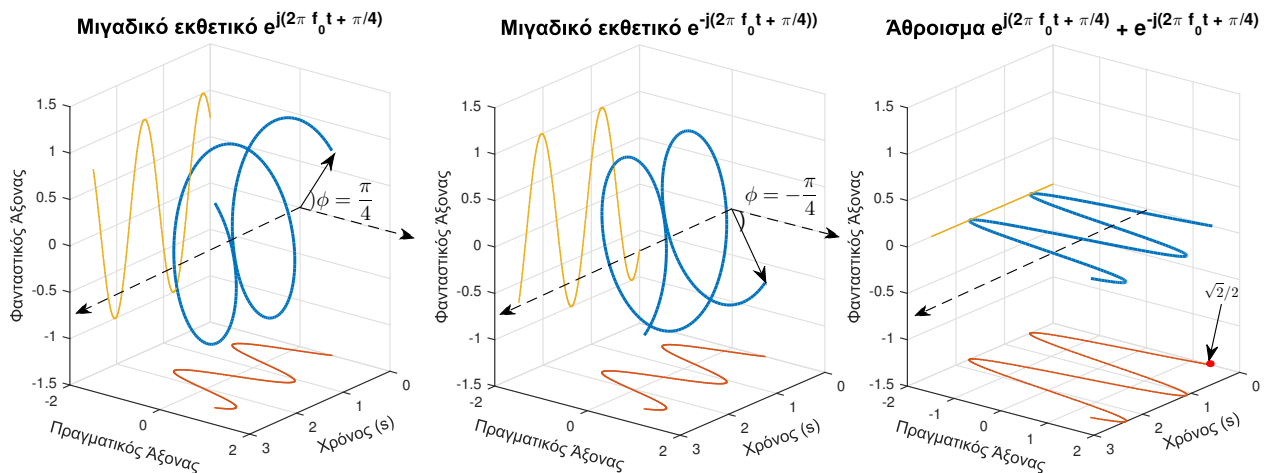
$$A = |A|e^{j\phi} \quad (2.82)$$

τότε η γωνία ϕ συμβολίζει την αρχική φάση της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης, και οι αντίστοιχες σχέσεις γίνονται

$$\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = |A| \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{|A|}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + \frac{|A|}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} \quad (2.83)$$

$$\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = |A| \sin(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{|A|}{2j} e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} - \frac{|A|}{2j} e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} \quad (2.84)$$

δηλ. το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης έχει μια αρχική φάση ϕ για $t = 0$ με τιμή $\cos(\phi)$ και $\sin(\phi)$ αντίστοιχα. Στο Σχήμα 2.19 μπορείτε να δείτε τη συμπεριφορά του ζεύγους συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων για $A = 1$ και $\phi = \frac{\pi}{4}$, καθώς και του αθροίσματός τους. Από τα παραπάνω είναι εμφανής η σχέση ημιτόνων και συνημιτόνων με το συζυγές ζεύγος μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων $e^{\pm j(2\pi f_0 t + \phi)}$,



Σχήμα 2.19: Συζυγείς μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις με αρχική φάση $\phi = \pi/4$ και το πραγματικό άθροισμά τους. Το περιστρεφόμενο μιγαδικό διάνυσμα (με μαύρο χρώμα) βρίσκεται σε τυχαία θέση του άξονα του χρόνου (διακεκομμένη μαύρη γραμμή)

σύμφωνα με τις Σχέσεις (2.83,2.84):

- Ένα συνημίτονο πλάτους A , συχνότητας f_0 , και φάσης ϕ μπορεί να ειπωθεί ως το πραγματικό μέρος ενός περιστρεφόμενου μιγαδικού εκθετικού διανύσματος $Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$.
- Ένα ημίτονο πλάτους A , συχνότητας f_0 , και φάσης ϕ μπορεί να ειπωθεί ως το φανταστικό μέρος ενός περιστρεφόμενου μιγαδικού εκθετικού διανύσματος $Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$.
- Ένα συνημίτονο πλάτους A , συχνότητας f_0 , και φάσης ϕ μπορεί να ειπωθεί ως το άθροισμα δυο συζυγών περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών διανυσμάτων $\frac{A}{2}e^{\pm j(2\pi f_0 t + \phi)}$.
- Ένα ημίτονο πλάτους A , συχνότητας f_0 , και φάσης ϕ μπορεί να ειπωθεί ως τη διαφορά δυο συζυγών περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών διανυσμάτων $\frac{A}{2}e^{\pm j(2\pi f_0 t + \phi)}$.

2.5 Συστήματα

Όπως αναφέραμε στις πρώτες γραμμές αυτού του κεφαλαίου, τα συστήματα χρησιμοποιούνται για να επεξεργαστούν ή να εξάγουν πληροφορία από σήματα.

Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται από τρία στοιχεία: την είσοδό του, την έξοδό του, και τις αρχές από τις οποίες διέπεται η λειτουργία του. Οι αρχές λειτουργίας του δεν είναι τίποτε άλλο από το μαθηματικό μοντέλο που μπορεί κανείς να αναπτύξει για να περιγράψει τη σχέση που συνδέει την είσοδο με την έξοδό του. Για παράδειγμα, ένα ηλεκτρικό κύκλωμα διέπεται από τους γνωστούς από τη Φυσική νόμους του Kirchhoff, και από τις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν την τάση και την ένταση του ρεύματος στα άκρα των στοιχείων του (αντιστάσεις, πυκνωτές, κλπ.). Το σύνολο αυτών των εξισώσεων αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο του ηλεκτρικού κυκλώματος.

Παρόλο που τα ηλεκτρικά κυκλώματα είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα συστήματος στις Επιστήμες Μηχανικού Η/Υ, το να συνδέσουμε την έννοια του συστήματος με ένα συγκεκριμένο είδος υλοποίησης θα ήταν αρκετά περιοριστικό. Θα προτιμήσουμε λοιπόν μια πιο αφαιρετική έννοια για τα συστήματα που θα συζητήσουμε. Θα μπορούσε κανείς να τα δει ως “μαύρα κουτιά”, των οποίων οι εσωτερικές λεπτομέρειες υλοποίησης δεν μας ενδιαφέρουν, παρά μόνο η επίδρασή τους στις εισόδους που δέχονται και το αποτέλεσμα (έξοδοι) που παράγουν. Επίσης, τα συστήματα μπορεί να είναι πολλαπλών εισόδων και πολλαπλών εξόδων ή μιας εισόδου και μιας εξόδου. Στο παρόν σύγγραμμα, θα μας απασχολήσουν σχεδόν αποκλειστικά συστήματα μιας εισόδου και μιας εξόδου. Τέτοια συστήματα αποκαλούνται Single Input - Single Output (SISO) συστήματα.

Ένα SISO σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τελεστής $T[\cdot]$ ο οποίος εφαρμόζεται στην είσοδο $x(t)$ του συστήματος, και παράγει μια έξοδο $y(t)$. Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = T[x(t)] \quad (2.85)$$

2.5.1 Κατηγορίες Συστημάτων

Τα συστήματα διακρίνονται σε ορισμένες κατηγορίες, τις πιο σημαντικές από τις οποίες θα συζητήσουμε εδώ.

2.5.1.1 Γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα

Τα γραμμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ικανοποιούνται δυο συγκεκριμένες ιδιότητες: η ιδιότητα της προσθετικότητας και η ιδιότητα της ομογένειας.

Η ιδιότητα της προσθετικότητας αναφέρει ότι αν σε ένα σύστημα εφαρμόσουμε δυο διαφορετικές εισόδους $x_i(t)$, με $i = 1, 2$, και πάρουμε δυο διαφορετικές εξόδους $y_i(t)$, με $i = 1, 2$, τότε αν εφαρμόσουμε ως είσοδο το άθροισμα όλων των δυο εισόδων

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (2.86)$$

θα λάβουμε ως έξοδο το άθροισμα των επιμέρους εξόδων

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (2.87)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί για N εισόδους.

Επιπλέον, η ιδιότητα της ομογένειας σχετίζεται με την κλιμάκωση της εισόδου κατά παράγοντα a . Η ιδιότητα της ομογένειας ικανοποιείται αν για το ζεύγος εισόδου-εξόδου

$$x(t) \longrightarrow y(t) \quad (2.88)$$

ισχύει το ζεύγος

$$ax(t) \longrightarrow ay(t) \quad (2.89)$$

για κάθε πραγματικό ή φανταστικό αριθμό a .

Οι δυο παραπάνω ιδιότητες από κοινού μας δίνουν την ιδιότητα της **γραμμικότητας**, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως εξής: αν

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \quad (2.90)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \quad (2.91)$$

είναι ζεύγη εισόδου-εξόδου για ένα σύστημα, τότε για οποιεσδήποτε μιγαδικές ή πραγματικές σταθερές a, b , το

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t) \quad (2.92)$$

είναι ζεύγος εισόδου-εξόδου για το ίδιο σύστημα. Αν θέλαμε να εκφράσουμε τη γραμμικότητα περιγραφικά, γραμμικά είναι τα συστήματα στα οποία αν εφαρμόσουμε ως είσοδο ένα άθροισμα σημάτων, θα πάρουμε ως έξοδο το άθροισμα των εξόδων που θα παίρναμε αν είχαμε δώσει ως είσοδο ένα-ένα τα σήματα, κι όχι όλα μαζί ως άθροισμα. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 2x(t+1) - 3x(t-4) \quad (2.93)$$

είναι γραμμικό, ενώ το σύστημα

$$y(t) = \sqrt{x(t)} \quad (2.94)$$

δεν είναι γραμμικό, όπως επίσης και το

$$y(t) = x^2(t) \quad (2.95)$$

δεν είναι γραμμικό. Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική, οπότε ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.7:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{3}x(2-t) + x(t) \quad (2.96)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $ax_1(t)$ η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \frac{1}{3}ax_1(2-t) + ax_1(t) = a\left(\frac{1}{3}x_1(2-t) + x_1(t)\right) \quad (2.97)$$

ενώ για είσοδο $bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y_2(t) = \frac{1}{3}bx_2(2-t) + bx_2(t) = b\left(\frac{1}{3}x_2(2-t) + x_2(t)\right) \quad (2.98)$$

Για είσοδο $ax_1(t) + bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y(t) = \frac{1}{3}(ax_1(2-t) + bx_2(2-t)) + ax_1(t) + bx_2(t) \quad (2.99)$$

$$= \frac{1}{3}ax_1(2-t) + \frac{1}{3}bx_2(2-t) + ax_1(t) + bx_2(t) \quad (2.100)$$

$$= a\left(\frac{1}{3}x_1(2-t) + x_1(t)\right) + b\left(\frac{1}{3}x_2(2-t) + x_2(t)\right) \quad (2.101)$$

$$= y_1(t) + y_2(t) \quad (2.102)$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό. ■

Παράδειγμα 2.8:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{x(t+1)} \quad (2.103)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $ax_1(t)$, η έξοδος είναι

$$y_1(t) = \frac{1}{ax_1(t+1)} \quad (2.104)$$

ενώ για είσοδο $bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y_2(t) = \frac{1}{bx_2(t+1)} \quad (2.105)$$

Για είσοδο $ax_1(t) + bx_2(t)$, η έξοδος είναι

$$y(t) = \frac{1}{ax_1(t+1) + bx_2(t+1)} \neq y_1(t) + y_2(t) \quad (2.106)$$

άρα το σύστημα δεν είναι γραμμικό. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της ομογένειας, απλά παρατηρώντας ότι

$$ax(t) \not\rightarrow ay(t) \quad (2.107)$$

Οπότε θα μπορούσαμε να αποφανθούμε εξ' αρχής ότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό, παρ' όλα αυτά προχωρήσαμε το παράδειγμα ως το τέλος για λόγους πληρότητας. ■

Τα παραπάνω συστήματα ήταν αντιπροσωπευτικά για το πως μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα σύστημα είναι γραμμικό ή όχι. Στην πράξη, τα περισσότερα φυσικά συστήματα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις. Ας δούμε δυο τέτοια παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.9:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) \quad (2.108)$$

είναι γραμμικό.

Λύση:

Για είσοδο $x_1(t)$, η έξοδος είναι

$$\frac{d}{dt}y_1(t) + 2y_1(t) = x_1(t) \quad (2.109)$$

ενώ για είσοδο $x_2(t)$, η έξοδος είναι

$$\frac{d}{dt}y_2(t) + 2y_2(t) = x_2(t) \quad (2.110)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με a και b αντίστοιχα, έχουμε

$$\frac{d}{dt}ay_1(t) + 2ay_1(t) = ax_1(t) \quad (2.111)$$

$$\frac{d}{dt}by_2(t) + 2by_2(t) = bx_2(t) \quad (2.112)$$

Το άθροισμά τους δίνει

$$\frac{d}{dt}ay_1(t) + 2ay_1(t) + \frac{d}{dt}by_2(t) + 2by_2(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (2.113)$$

Όμως η παραπάνω σχέση δεν είναι άλλη από τη Σχέση (2.108) με

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (2.114)$$

$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t) \quad (2.115)$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό. ■

Εύκολα μπορεί να γενικεύσει κανείς το παραπάνω αποτέλεσμα για μια διαφορική εξίσωση N -οστού βαθμού: η διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dt^k} b_k x(t) \quad (2.116)$$

αναπαριστά ένα γραμμικό σύστημα. Οι συντελεστές a_k, b_k της διαφορικής εξίσωσης μπορούν να είναι σταθεροί ή συναρτήσεις του χρόνου. Στη συνέχεια, θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με *σταθερούς συντελεστές*.

Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πάρα πολύ σημαντική καθώς απλοποιεί αρκετά την ανάλυση των συστημάτων. Στην πράξη, σχεδόν όλα τα συστήματα είναι *μη γραμμικά* για μεγάλες τιμές εισόδου. Όμως για μικρές τιμές εισόδου, η λειτουργία τους είναι σχεδόν απόλυτα γραμμική. Παρ' όλο που τα μη γραμμικά συστήματα έχουν συγκεκριμένα πλεονεκτήματα, είναι αρκετά δύσκολα στην ανάλυσή τους και αποτελούν μια κατηγορία από μόνα τους.

2.5.1.2 Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβλητά συστήματα

Τα συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα είναι αυτά για τα οποία οι παράμετροί τους δεν αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου, δηλ. η έξοδός τους δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο t ως παράγοντα. Σε τέτοια συστήματα, αν το

$$x(t) \longrightarrow y(t) \quad (2.117)$$

είναι ένα ζεύγος εισόδου-εξόδου, τότε

$$x(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0) \quad (2.118)$$

δηλ. αν η είσοδος καθυστερήσει κατά t_0 , τότε η έξοδος θα είναι ίδια με πριν, μόνο που θα είναι κι αυτή καθυστερημένη κατά t_0 .

Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 3x(t + 2) - 2\cos(x(t - 2)) \quad (2.119)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ το σύστημα

$$y(t) = tx(t) \quad (2.120)$$

είναι χρονικά μεταβλητό. Ας το αποδείξουμε.

Παράδειγμα 2.10:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = 3x(t+2) - 2\cos(x(t-2)) \quad (2.121)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:Για είσοδο $x(t-t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = 3x(t-t_0+2) - 2\cos(x(t-t_0-2)) \quad (2.122)$$

Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$y(t-t_0) = 3x(t-t_0+2) - 2\cos(x(t-t_0-2)) \quad (2.123)$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι ίδιες, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. ■

Παράδειγμα 2.11:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = tx(t) \quad (2.124)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:Για είσοδο $x(t-t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = tx(t-t_0) \quad (2.125)$$

Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$y(t-t_0) = (t-t_0)x(t-t_0) \quad (2.126)$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις δεν είναι ίδιες, άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό. ■

Παράδειγμα 2.12:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = 4x(t) \quad (2.127)$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:Για είσοδο $x(t-t_0)$, η έξοδος του συστήματος είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = 4x(t-t_0) \quad (2.128)$$

με $z(t)$ την έξοδο όταν η είσοδος είναι $x(t-t-0)$. Αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά $t = t_0$, θα έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t-t_0) = 4x(t-t_0) = \frac{d^2}{dt^2}z(t) \quad (2.129)$$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά αμεταβλητό. ■

Στη συνέχεια, θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα.

2.5.1.3 Δυναμικά και μη-δυναμικά συστήματα

Τα δυναμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία η έξοδός τους απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 2x(t) \quad (2.130)$$

είναι ένα μη-δυναμικό σύστημα, ενώ το σύστημα

$$y(t) = e^{x(t-1)} \quad (2.131)$$

είναι ένα σύστημα δυναμικό. Τα μη-δυναμικά συστήματα ονομάζονται στη βιβλιογραφία και ως συστήματα *χωρίς μνήμη*. Αντίστοιχα, τα δυναμικά συστήματα ονομάζονται και ως συστήματα *με μνήμη*. Ο λόγος αυτής της ονοματοδοσίας πρέπει να σας είναι προφανής.

2.5.1.4 Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα

Τα αιτιατά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου δεν απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = 2x(t-1) + \sin(x(t)) \quad (2.132)$$

είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα

$$y(t) = x(t-2)^2 + 4x(t+4) \quad (2.133)$$

είναι μη αιτιατό, επειδή για τον υπολογισμό του $y(t)$ απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου, η $x(t+4)$.

Πιο περιγραφικά, ένα αιτιατό σύστημα είναι ένα σύστημα το οποίο δεν παράγει κάποια έξοδο προτού εφαρμοστεί σε αυτό μια είσοδος. Αν το σύστημα παράγει έξοδο πριν την είσοδο, σημαίνει ότι το σύστημα γνωρίζει τη μελλοντική είσοδο και παράγει έξοδο βάσει αυτής της γνώσης, και άρα είναι μη αιτιατό.

Προφανώς, κάθε σύστημα υλοποιήσιμο σε πραγματικό χρόνο πρέπει να είναι αιτιατό. Οπότε κάποιος θα μπορούσε να θέσει το ερώτημα “γιατί να μελετήσει κανείς τότε ένα μη αιτιατό σύστημα;” Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έχει - τουλάχιστον - τρεις συνιστώσες:

1. Ένα μη αιτιατό σύστημα απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να παράξει έξοδο. Αν όμως η είσοδος είναι διαθέσιμη σε κάποιον αποθηκευτικό χώρο (μνήμη), τότε το σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί, αφού οι μελλοντικές τιμές της εισόδου είναι διαθέσιμες. Αυτό σημαίνει ότι τα μη αιτιατά συστήματα είναι μεν πραγματοποιήσιμα, αλλά όχι σε πραγματικό χρόνο. Παρ’ όλα αυτά, η χρησιμότητά τους είναι μεγάλη, καθώς υπάρχουν πολλές εφαρμογές (επεξεργασία φωνής, ήχου, εικόνων, γεωφυσική, μετεωρολογία, ανάλυση βιοσημάτων) όπου η είσοδος υπάρχει ολόκληρη διαθέσιμη σε μια π.χ. βάση δεδομένων.
2. Ένα μη αιτιατό σύστημα μπορεί να κάνει πράγματα που ένα αιτιατό σύστημα δεν μπορεί. Για παράδειγμα, στα πρότυπα συμπίεσης εικόνας και ήχου (MP3, JPEG, MPEG κλπ), η υψηλή συμπίεση επιτυγχάνεται επειδή ο αλγόριθμος συμπίεσης (ο οποίος αποτελεί το σύστημα) γνωρίζει μελλοντική πληροφορία της εισόδου (ήχος, εικόνα, βίντεο), την οποία χρησιμοποιεί για να αυξήσει την επίδοσή του (συμπιεσμένη έξοδος).
3. Τα μη αιτιατά συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως το άνω όριο των επιδόσεων αιτιατών συστημάτων. Όπως θα δούμε αργότερα, ένα αιτιατό *φίλτρο* (δηλ. ένα σύστημα που επιλέγει την “ποσότητα” του σήματος εισόδου που θα περάσει στην έξοδο) εισάγει πάντα *παραμόρφωση* στο σήμα εισόδου του, μεταβάλλοντάς το με ανεπιθύμητο (αλλά ελεγχόμενο) τρόπο. Όμως, ένα μη αιτιατό *φίλτρο* μπορεί να σχεδιαστεί έτσι ώστε να εισάγει μηδενική ανεπιθύμητη παραμόρφωση στο σήμα εξόδου του.

2.5.1.5 Ευσταθή και ασταθή συστήματα

Τα συστήματα που είναι ευσταθή είναι αυτά για τα οποία ισχύει:

$$|x(t)| < M_x \implies |y(t)| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathbb{R} \quad (2.134)$$

Πιο περιγραφικά, αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ’ απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατ’ απόλυτη τιμή.

Για παράδειγμα, το σύστημα

$$y(t) = x(t-1) + t \quad (2.135)$$

δεν είναι ευσταθές, όπως επίσης και το σύστημα

$$y(t) = \frac{t}{x(t+2)} \quad (2.136)$$

ενώ το σύστημα

$$y(t) = \sin(x(t)) \quad (2.137)$$

είναι ευσταθές. Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.13:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = x(t-1) + t \quad (2.138)$$

είναι ευσταθές.

Λύση:

Αν η είσοδος $x(t)$ είναι φραγμένη από έναν πραγματικό αριθμό M_x , δηλ.

$$|x(t)| < M_x \quad (2.139)$$

τότε η έξοδος $y(t)$ θα είναι

$$|y(t)| = |x(t-1) + t| \leq |x(t-1)| + |t| < M_x + |t| \rightarrow +\infty \quad (2.140)$$

όταν $t \rightarrow \pm\infty$. Άρα το σύστημα είναι ασταθές. ■

Παράδειγμα 2.14:

Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = e^{x(t-2)} \quad (2.141)$$

είναι ευσταθές.

Λύση:

Αν η είσοδος $x(t)$ είναι φραγμένη από έναν πραγματικό αριθμό M_x , δηλ.

$$|x(t)| < M_x \quad (2.142)$$

τότε η έξοδος $y(t)$ θα είναι

$$|y(t)| = |e^{x(t-2)}| \leq |e^{M_x}| < +\infty \quad (2.143)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα το σύστημα είναι ευσταθές. ■

Από όλες αυτές τις κατηγορίες σημάτων, τα πιο σημαντικά είναι τα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα (ΓΧΑ) συστήματα, και σε τέτοια θα αναφερόμαστε από εδώ και πέρα. Η ευστάθεια ή η αιτιατότητα είναι επιθυμητές ιδιότητες αλλά δε θα τις θεωρήσουμε πάντα δεδομένες, οπότε θα αναφερόμαστε ρητά σε αυτές όταν χρειάζεται.

Συνοψίζοντας, έχουμε:

Ιδιότητες Συστημάτων

• Γραμμικότητα: Αν

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \quad (2.144)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \quad (2.145)$$

είναι ζεύγη εισόδου-εξόδου για ένα σύστημα, τότε για οποιεσδήποτε μιγαδικές ή πραγματικές σταθερές a, b , το

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t) \quad (2.146)$$

είναι ζεύγος εισόδου-εξόδου για το ίδιο σύστημα.

- **Χρονική Αμεταβλητότητα:** Αν

$$x(t) \longrightarrow y(t) \quad (2.147)$$

είναι ένα ζεύγος εισόδου-εξόδου, τότε

$$x(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0) \quad (2.148)$$

δηλ. αν η είσοδος καθυστερήσει κατά t_0 , τότε η έξοδος θα είναι ίδια με πριν, μόνο που θα είναι κι αυτή καθυστερημένη κατά t_0 .

- **Δυναμικότητα:** Δυναμικά συστήματα λέγονται τα συστήματα για τα οποία η έξοδός τους απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί.
- **Αιτιατότητα:** Αιτιατά συστήματα λέγονται τα συστήματα για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου δεν απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου.
- **Ευστάθεια:** Ευσταθή λέγονται τα συστήματα για τα οποία ισχύει:

$$|x(t)| < M_x \implies |y(t)| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathbb{R} \quad (2.149)$$

δηλ. αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή.

Ας δούμε ένα παράδειγμα για όλες τις παραπάνω ιδιότητες των συστημάτων.

Παράδειγμα 2.15:

Εξετάστε αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, ευσταθή, και αιτιατά.

1. $y(t) = 2x(t - 1) + 3x(t - 3)$
2. $y(t) = t^2 x^2(t + 2) - x(t)$
3. $y(t) = x^2(t - 4),$
4. $y(t) = \log_{10}(|x(t)|),$
5. $y(t) = \frac{1}{x(t)},$ με $x(t) \neq 0$

Λύση:

1. • Το σύστημα $y(t) = 2x(t - 1) + 3x(t - 3)$ είναι γραμμικό. Ας το δείξουμε. Έστω

$$y_1(t) = 2ax_1(t - 1) + 3ax_1(t - 3)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $ax_1(t)$. Έστω

$$y_2(t) = 2bx_2(t - 1) + 3bx_2(t - 3)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $bx_2(t)$. Έχουμε

$$y_1(t) + y_2(t) = 2ax_1(t - 1) + 3ax_1(t - 3) + 2bx_2(t - 1) + 3bx_2(t - 3)$$

και

$$y_{1+2}(t) = 2ax_1(t - 1) + 3ax_1(t - 3) + 2bx_2(t - 1) + 3bx_2(t - 3)$$

που είναι ταυτόσημα, άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

- Το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο γιατί αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = 2x(t - t_0 - 1) + 3x(t - t_0 - 3)$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = 2x(t - t_0 - 1) + 3x(t - t_0 - 3)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι αιτιατό, γιατί για να υπολογίσουμε μια δεδομένη τιμή της εξόδου (π.χ. την $y(0)$), χρειαζόμαστε παρελθούσες τιμές της εισόδου (τις $x(-1), x(-3)$).
- Το σύστημα είναι, τέλος, ευσταθές γιατί αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, $|x(t)| < M_x$, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη, γιατί

$$|y(t)| = |2x(t - 1) + 3x(t - 3)| < 2M_x + 3M_x = 5M_x = M_y$$

2. • Το σύστημα $y(t) = t^2 x^2(t + 2) - x(t)$ δεν είναι γραμμικό. Έστω

$$y_1(t) = t^2 a x_1^2(t + 2) - a x_1(t)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $a x_1(t)$. Έστω

$$y_2(t) = t^2 b x_2^2(t + 2) - b x_2(t)$$

η έξοδος του συστήματος για είσοδο $b x_2(t)$. Έχουμε

$$y_1(t) + y_2(t) = t^2 a x_1^2(t + 2) - a x_1(t) + t^2 b x_2^2(t + 2) - b x_2(t)$$

και

$$y_{1+2}(t) = t^2 (a x_1(t + 2) + b x_2(t + 2))^2 - (a x_1(t) + b x_2(t))$$

που προφανώς δεν είναι ταυτόσημα, άρα το σύστημα είναι μη γραμμικό.

- Το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό, γιατί αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = t^2 x^2(t - t_0 + 2) - x(t - t_0)$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = (t - t_0)^2 x^2(t - t_0 + 2) - x(t - t_0)$$

που ΔΕΝ είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι μη αιτιατό, γιατί για τον υπολογισμό μιας δεδομένης τιμής της εξόδου (π.χ. $y(0)$), απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου ($x(2)$).
- Το σύστημα είναι, τέλος, ασταθές γιατί αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, $|x(t)| < M_x$, τότε η έξοδος είναι μη-φραγμένη, γιατί

$$|y(t)| = |t^2 x^2(t + 2) + (-x(t))| < |t^2 x^2(t + 2)| + |x(t)| < t^2 M_x^2 + M_x \rightarrow +\infty$$

όταν $t \rightarrow \pm\infty$.

3. • Το σύστημα είναι μη γραμμικό, με παρόμοια απόδειξη με το προηγούμενο ερώτημα.
- Το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, διότι αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = x^2(t - t_0 - 4)$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = x^2(t - t_0 - 4)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι αιτιατό, γιατί απαιτούνται μόνο παρελθοντικές τιμές της εισόδου για τον υπολογισμό μιας οποιασδήποτε τιμής της εξόδου.
- Το σύστημα είναι προφανώς ευσταθές, γιατί αν $|x(t)| < M_x$, τότε $|y(t)| = |x^2(t - 4)| < M_x^2$.

4. • Το σύστημα είναι μη γραμμικό. Έστω

$$y_1(t) = \log_{10}(|ax_1(t)|)$$

η έξοδος για είσοδο $ax_1(t)$. Έστω

$$y_2(t) = \log_{10}(|bx_2(t)|)$$

η έξοδος για είσοδο $bx_2(t)$. Είναι

$$y_1(t) + y_2(t) = \log_{10}(|ax_1(t)|) + \log_{10}(|bx_2(t)|)$$

ενώ

$$y_{1+2}(t) = \log_{10}(|ax_1(t) + bx_2(t)|) \neq y_1(t) + y_2(t)$$

άρα μη γραμμικό.

- Επίσης, το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο γιατί αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$, τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = \log_{10} |x(t - t_0)|$$

και η καθυστέρηση της εξόδου κατά t_0 δίνεται ως

$$y(t - t_0) = \log_{10} |x(t - t_0)|$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε νωρίτερα.

- Το σύστημα είναι αιτιατό.
- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί αν $|x(t)| < M_x$, τότε $|y(t)| = |\log_{10}(|x(t)|)| < \log_{10}(M_x) < \pm\infty$.

5. Εξασκηθείτε! ☺

■

2.6 Ασκήσεις

1. Σχεδιάστε τα παρακάτω σήματα:

(α') $e^{-2t}u(t-2)$

(β') $u(t^2 - 4)$

(γ') $4\text{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

(δ') $\text{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

2. Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.150)$$

Σχεδιάστε τα σήματα $x(t)$, $x(t-1)$, $x(t+1)$, καθώς και το άθροισμά τους.

3. Σχεδιάστε το περιοδικό με περίοδο T σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T/2 \\ -\frac{2}{T}t + 2, & T/2 \leq t < T \end{cases} \quad (2.151)$$

4. Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0.5(3-2t), & 1 \leq t < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.152)$$

Σχεδιάστε το σήμα $x(t)$ καθώς και τα σήματα $x(2t)$, $x(t/2)$.

5. Έστω ότι ένα σήμα $x(t)$ έχει μηδενικές τιμές για $t < 3$. Δώστε τις τιμές του t για τις οποίες τα παρακάτω σήματα έχουν μηδενικές τιμές.

$$x(1-t) \quad (2.153)$$

$$x(1-t) + x(2-t) \quad (2.154)$$

$$x(1-t)x(2-t) \quad (2.155)$$

6. Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 0 \\ 2, & 0 \leq t < 1 \\ -t+2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.156)$$

Σχεδιάστε το σήμα $x(t)$ καθώς και τα σήματα $x(t-1)$, $x(2-t)$, $x(2t)$, και $x(t/2)$.

7. Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leq t < 0 \\ 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ t-3, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.157)$$

Σχεδιάστε τα σήματα $x(t-2)$, $x(1-t)$, $x(2t+2)$, $x(2-t/3)$, $(x(t) + x(2-t))u(1-t)$, $x(t)(\delta(t+3/2) - \delta(t-3/2))$.

8. Ελέγξτε αναλυτικά αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, ευσταθή, αιτιατά, και δυναμικά.

$$(\alpha') \quad y(t) = t/x(t)$$

$$(\beta') \quad y(t) = \sqrt{x(t-1)} - \sin(x(t))$$

$$(\gamma') \quad y(t) = x(t) - 3x(t+2)$$

9. Ελέγξτε αναλυτικά αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, ευσταθή, αιτιατά, και δυναμικά.

$$(\alpha') \quad y(t) = x(t) \sin(t)$$

$$(\beta') \quad y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$(\gamma') \quad y(t) = x(-2t)$$

$$(\delta') \quad y(t) = x(t-1) + x(1-t)$$

10. Αποδείξτε ότι

$$(\alpha') \quad (t^4 + 4)\delta(t) = 4\delta(t)$$

$$(\beta') \quad e^{-3t}\delta(t-4) = e^{-12}\delta(t-4)$$

$$(\gamma') \quad \cos(t^2 - \pi)\delta(t) = -\delta(t)$$

$$(\delta') \quad \frac{t^3+1}{t^2+15}\delta(t-1) = \frac{1}{8}\delta(t-1)$$

11. Αποδείξτε ότι

$$(\alpha') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = 1$$

$$(\beta') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5(x-t)}\delta(2-t)dt = e^{-5(x-2)}$$

$$(\gamma') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-8)\cos(\pi t)dt = 1$$