

Κεφάλαιο 6

Τυχαία Σήματα και Διαδικασίες

6.1 Εισαγωγή

Μια άλλη σπουδαία κατηγορία σημάτων ισχύος είναι τα τυχαία σήματα. Τι είναι όμως τυχαία σήματα; Είναι σήματα τα οποία δεν έχουν πραγματοποιηθεί ακόμα. Αυτό ίσως να μπερδεύει ακόμα περισσότερο. Αν δεν έχουν πραγματοποιηθεί ακόμα σημαίνει ότι δεν υπάρχουν. Αρα τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για πράγματα/σήματα/αριθμούς που δεν υπάρχουν ακόμα; Και όμως χρησιμοποιούμε σε πολλές περιστάσεις τυχαία σήματα στην καθημερινή μας ζωή. Μάλιστα παίρνουμε αποφάσεις για πράγματα που δεν έχουν πραγματοποιηθεί.

6.1.1 Μια μικρή εφαρμογή - κίνητρο

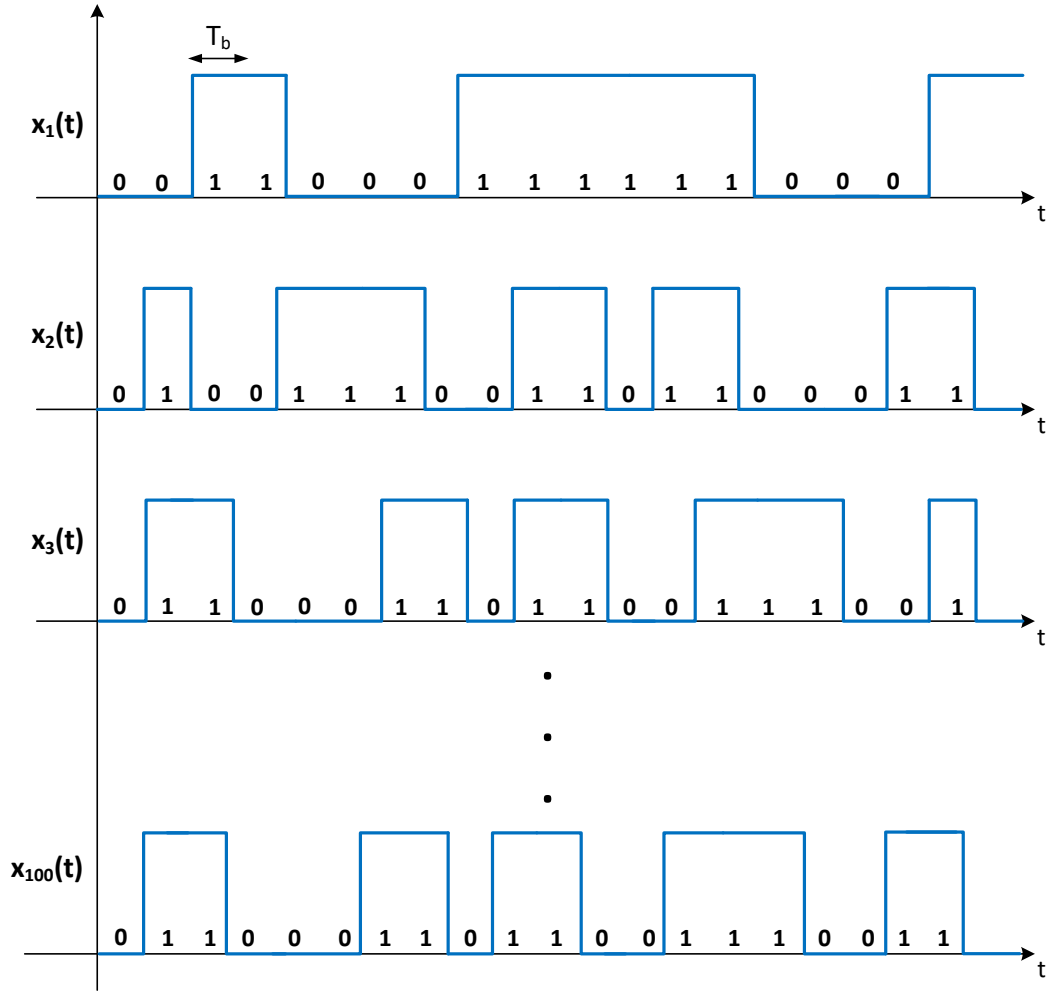
Για να κάνουμε πιο συγκεκριμένο το παράδειγμά μας και να έχει συγγένεια με την επιστήμη των υπολογιστών, ας υποθέσουμε ότι θέλεται να υπολογίσετε το εύρος ζώνης φάσματος που θα χρησιμοποιείτε για τη μετάδοση δεδομένων μεταξύ χρηστών και ενός διακομιστή (server). Όπως ίσως ήδη γνωρίζεται το εύρος ζώνης κοστίζει. Δηλ. δεν μπορείτε να χρησιμοποιείτε απεριόριστο ούτε πολύ μεγάλο εύρος ζώνης για τη μετάδοση δεδομένων τα οποία έχουν πολύ μικρό εύρος ζώνης. Αυτό ονομάζεται σπατάλη ενέργειας και χρημάτων.

Εστω ότι έχετε 100 χρήστες οι οποίοι στέλνουν δεδομένα στον διακομιστή. Τα δεδομένα είναι ψηφιακά επομένως κάθε στιγμή οι δυνατές τιμές του σήματος των δεδομένων μπορεί να είναι 0 ή 1 (δυαδικό σύστημα). Εστω επίσης ότι έχουμε περιθώριο να έχουμε ρυθμό K bits/sec όπου κάθε bit έχει χρονική διάρκεια T_b δευτερόλεπτα. Σας έχουν αναθέσει το σχεδιασμό αυτού του συστήματος που σημαίνει ότι πρέπει να προσδιορίσετε τις απαιτήσεις σε εύρος ζώνης ενός τέτοιου συστήματος. Ένας σωστός σχεδιασμός, που σημαίνει ακριβής σχεδιασμός, θα επηρεάσει την ποιότητα των υπηρεσιών που θα προσφέρεται στους χρήστες-συνδρομητές σας. Μια υποβάθμιση στον υπολογισμό του εύρους ζώνης θα σημαίνει πολλά προβλήματα στην μετάδοση των δεδομένων. Μια υπερεκτίμηση στο εύρος ζώνης θα σημαίνει υψηλότερο κόστος λειτουργίας του συστήματος. Με λίγα λόγια και στις δύο περιπτώσεις εσείς θα χάσετε τη δουλειά σας. Ένα παράδειγμα με πιθανά δεδομένα φαίνονται στο Σχήμα 6.1. Για να συλλάβετε τη σημασία της ανάλυσης τυχαίων σημάτων θα πρέπει να σημειωθεί ότι προφανώς σας ζητάνε να σχεδιάσετε το σύστημα πριν οι χρήστες αρχίσουν να στέλνουν δεδομένα. Δηλαδή πριν υπάρξουν τα δεδομένα-σήματα που αυτοί θα στείλουν. Επομένως θα πρέπει να μελετήσετε τις ιδιότητες αυτών των σημάτων πριν αυτά πραγματοποιηθούν.

Επιστρέφουμε ξανά στο πρόβλημά μας: τι εύρος ζώνης φάσματος θα χρησιμοποιήσουμε; Τι επιλογές έχουμε; Π.χ.

1. Παρατηρούμε μία μόνο κυματομορφή-σήμα. Για παράδειγμα την $x_1(t)$ για κάποιο χρονικό διάστημα, βρίσκουμε το φάσμα πλάτους των συχνοτήτων της (απλά στη συνέχεια: 'φάσμα') και από εκεί το εύρος ζώνης και δεχόμαστε αυτό ως το εύρος ζώνης $\Omega_{\Omega N}$ των γραμμών σύνδεσης (χρηστών).
2. Να επαναλάβουμε το παραπάνω για κάθε χρήστη και έτσι να δεχτούμε διαφορετικό εύρος ζώνης για κάθε έναν από τους χρήστες (κάτι που προφανώς αυξάνει την πολυπλοκότητα της διαχείρισης ενός τέτοιου συστήματος).
3. Να υπολογίσουμε τον μέσο όρο των παραπάνω ευρών φάσματος και να ορίσουμε αυτό σαν εύρος ζώνης $\Omega_{\Omega N}$ των χρηστών.

Ποιό από τα παραπάνω είναι σωστά και κάτω από ποιές συνθήκες;



Σχήμα 6.1: Παράδειγμα διαδικών δεδομένων από 100 χρήστες.

6.2 Τυχαίες Διαδικασίες

Για να αναλύσουμε περισσότερο το πρόβλημά μας θα ήταν καλό να εισάγουμε ορισμούς που θα μας βοηθούσαν στην περιγραφή του.

Τυχαίο ονομάζουμε ένα σήμα αν εξαρτάται κατά ένα τρόπο από έναν τυχαίο νόμο. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (6.1)$$

όπου ϕ είναι μια μεταβλητή που δεν γνωρίζουμε αλλά από την εμπειρία μας ξέρουμε ότι αυτή η μεταβλητή μπορεί να πάρει τιμές από το σύνολο

$$-\pi \leq \phi < \pi \quad (6.2)$$

είναι ένα τυχαίο σήμα. Η στιγμιαία τιμή του σήματος δεν μπορεί να είναι γνωστή αν δεν γνωρίζουμε την τιμή της φάσης μετατόπισης. Επειδή ένα τέτοιο σήμα εξαρτάται τόσο από το χρόνο όσο και από τη φάση, μπορούμε να το περιγράψουμε ως μια συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$x(t, \phi) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (6.3)$$

Παρατηρούμε ότι μπορεί να μη γνωρίζουμε σε κάθε στιγμή τις τιμές του παραπάνω τυχαίου σήματος, όμως γνωρίζουμε π.χ. τα χαρακτηριστικά του φάσματος πλάτους του σήματος: έχει δύο συναρτήσεις Δέλτα με πλάτος ανάλογο του A στις συχνότητες $f = -f_0$ και $f = f_0$.

Για διαφορετικές τιμές του ϕ ένα διαφορετικό σήμα θα δημιουργείται

$$x(t, \phi_1), x(t, \phi_2), \dots, x(t, \phi_l) \quad (6.4)$$

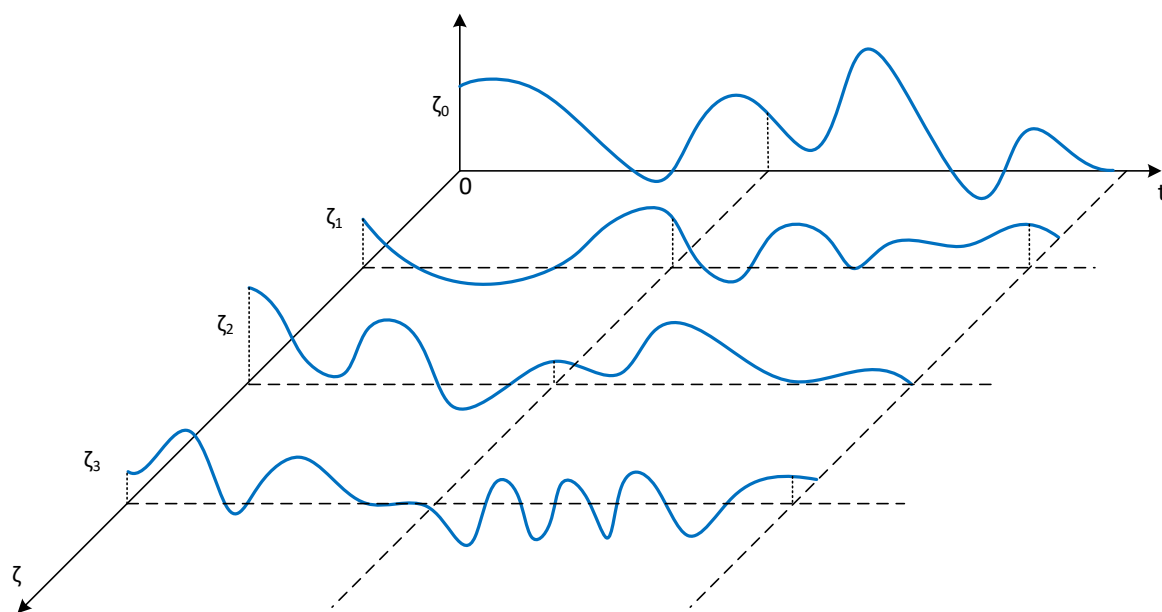
Κάθε φορά που καθορίζουμε την τιμή της φάσης λέμε ότι έχουμε μια πραγματοποίηση του τυχαίου σήματος.

Η οικογένεια όλων αυτών των τυχαίων σημάτων ονομάζεται **τυχαία διαδικασία** και συμβολίζεται ως

$$\{x(t, \zeta)\} \quad (6.5)$$

όπου ζ συμβολίζει την τυχαία φύση της διαδικασίας.

Για κάθε τιμή ζ_i , η τυχαία διαδικασία περιορίζεται σε ένα μέλος της τυχαίας διαδικασίας, $x(t, \zeta_i)$ ή απλά $x(t)$ και ονομάζεται **τυχαίο σήμα**. Ένα παράδειγμα μιας τυχαίας διαδικασίας φαίνεται στο Σχήμα 6.2. Σε μια τέτοια



Σχήμα 6.2: Παράδειγμα τυχαίας διαδικασίας.

περίπτωση αναλύουμε το τυχαίο σήμα στο χρόνο χρησιμοποιώντας χρονικά μεγέθη. Για παράδειγμα ο χρονικός μέσος όρος του τυχαίου σήματος $x(t)$ είναι

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (6.6)$$

και η αυτοσυσχέτιση στο χρόνο είναι

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt \quad (6.7)$$

Για κάθε τιμή του χρόνου t_i η διαδικασία περιορίζεται σε μια τυχαία μεταβλητή $x(t_i, \zeta)$ ή απλά $x(t_i)$. Σε μια τέτοια περίπτωση αναλύουμε το σήμα στατιστικά. Η τυχαία μεταβλητή $x(t_i)$ υπακούει σε κάποιο κανόνα πιθανοτήτων, δηλ. παίρνει τιμές σύμφωνα με κάποια πιθανότητα που καθορίζεται από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής. Για να είμαστε ακριβείς, η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $x(t_i)$ εκφράζει την πιθανότητα να είναι η τυχαία μεταβλητή $x(t_i)$ μικρότερη ή ίση από μια τιμή x

$$F_{x(t_i)}(x) = P(x(t_i) \leq x) \quad (6.8)$$

όπου $P(\cdot)$ δηλώνει την πιθανότητα. Η παράγωγος της $F_{x(t_i)}$ ως προς x δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Function - pdf)

$$f_{x(t_i)}(x) = \frac{dF_{x(t_i)}(x)}{dx} \quad (6.9)$$

Ονομάζουμε *στατιστική μέση τιμή* της τυχαίας μεταβλητής $x(t_i)$

$$\mu_{x(t_i)} = E[x(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x(t_i)}(x) dx \quad (6.10)$$

όπου γενικά $E[x(t_i)]$ δηλώνει την στατιστική αναμενόμενη τιμή και εδώ ειδικά δηλώνει τη στατιστική μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής.

Αν θεωρήσουμε μια άλλη στιγμή t_j τότε ορίζουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής να είναι

$$F_{x(t_i)x(t_j)}(x_1, x_2) = P(x(t_i) \leq x_1, x(t_j) \leq x_2) \quad (6.11)$$

που σημαίνει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή $x(t_i)$ να είναι μικρότερη από μια τιμή x_1 και η τυχαία μεταβλητή $x(t_j)$ να είναι μικρότερη από μια τιμή x_2 . Τότε η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (joint pdf) ορίζεται ως

$$f_{x(t_i)x(t_j)}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_{x(t_i)x(t_j)}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (6.12)$$

Χρησιμοποιώντας την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζουμε την *στατιστική συνάρτηση αυτο-συσχέτισης*

$$R_x(t_i, t_j) = E[x(t_i)x(t_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{x(t_i)x(t_j)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (6.13)$$

Με όμοιο τρόπο ορίζονται οι *στατιστικές συναρτήσεις ετεροσυσχέτισης* για δυο τυχαίες μεταβλητές $x(t_i), y(t_j)$ ως

$$R_{xy}(t_i, t_j) = E[x(t_i)y(t_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{x(t_i)x(t_j)}(x, y) dx dy \quad (6.14)$$

$$R_{yx}(t_i, t_j) = E[y(t_i)x(t_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yx f_{y(t_i)y(t_j)}(y, x) dy dx \quad (6.15)$$

Πολλές φορές οι στατιστικές συσχετίσεις ορίζονται ως

$$R_x(t + \tau, t) = E[x(t + \tau)x(t)] \quad (6.16)$$

$$R_{xy}(t + \tau, t) = E[x(t + \tau)y(t)] \quad (6.17)$$

$$R_{yx}(t + \tau, t) = E[y(t + \tau)x(t)] \quad (6.18)$$

υιοθετώντας τη μεταβλητή τ ως τη διαφορά $|t_i - t_j| = \tau$. Θα δούμε σύντομα ότι αυτός ο συμβολισμός είναι πολύ χρήσιμος. Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού τους.

Παράδειγμα 6.1:

Δύο τυχαίες διαδικασίες $X(t), Y(t)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta) \quad (6.19)$$

$$Y(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \Theta) \quad (6.20)$$

όπου A και f_0 είναι σταθερές και Θ είναι τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανομημένη στο $[0, 2\pi)$. Να βρεθεί η στατιστική ετεροσυσχέτιση των $X(t), Y(t)$, και να δειχθεί ότι:

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \quad (6.21)$$

Λύση:
Είναι

$$\begin{aligned} R_{yx}(t, t + \tau) &= E[Y(t + \tau)X(t)] = E\left[A^2 \cos(2\pi f_0 t + \Theta) \sin\left(2\pi f_0(t + \tau) + \Theta\right)\right] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\sin(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\Theta) - \sin(-2\pi f_0 \tau)] = \frac{A^2}{2} \sin(2\pi f_0 \tau) \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$= R_{xy}(\tau) \quad (6.23)$$

Επίσης

$$\begin{aligned} R_{xy}(t, t + \tau) &= E[X(t + \tau)Y(t)] = E\left[A^2 \sin(2\pi f_0 t + \Theta) \cos\left(2\pi f_0(t + \tau) + \Theta\right)\right] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\sin(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\Theta) + \sin(-2\pi f_0 \tau)] = -\frac{A^2}{2} \sin(2\pi f_0 \tau) \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$= R_{yx}(\tau) \quad (6.25)$$

Από τις Σχέσεις (6.23, 6.25) βλέπουμε ότι ισχύει $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$. ■

Επανερχόμενοι στην περίπτωση της μιας τυχαίας μεταβλητής, αν ο στατιστικός μέσος όρος είναι ανεξάρτητος της χρονικής στιγμής t_i , δηλ.

$$E[x(t_i)] = \text{σταθερά} \quad \forall t_i \quad (6.26)$$

τότε η τυχαία διαδικασία ονομάζεται *στάσιμη πρώτης τάξης*.

Αν επιπλέον η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δεν εξαρτάται από τις χρονικές στιγμές t_i και t_j αλλά μόνο από τη διαφορά τους $\tau = |t_i - t_j|$ (δηλαδή την μεταξύ τους απόσταση), δηλ.

$$R_x(t_i, t_j) = R_x(\tau) \quad (6.27)$$

τότε η τυχαία διαδικασία ονομάζεται *στάσιμη διαδικασία δεύτερης τάξης*. Μια διαδικασία η οποία είναι στάσιμη δεύτερης τάξης ονομάζεται *διαδικασία στάσιμη με την ευρεία έννοια*.

Σε περίπτωση που τα χρονικά μεγέθη (μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση) είναι ίσα με τα στατιστικά μεγέθη (στατιστική μέση τιμή και στατιστική αυτοσυσχέτιση), δηλ.

$$\bar{x} = E[x(t_i)] \quad \forall t_i \quad (6.28)$$

$$\phi_x(\tau) = R_x(\tau) \quad (6.29)$$

τότε η τυχαία διαδικασία ονομάζεται *εργοδική*.

Η ιδιότητα της εργοδικότητας είναι πολύ σημαντική. Σημαίνει ότι, για παράδειγμα, μπορούμε να υπολογίσουμε την αυτοσυσχέτιση στο χρόνο χρησιμοποιώντας την στατιστική αυτοσυσχέτιση αν η τελευταία είναι εύκολα υπολογίσιμη, και αντιστρόφως. Δηλαδή για μια διαδικασία που είναι εργοδική μπορούμε να επιλέξουμε μεταξύ χρονικών και στατιστικών μεγεθών ανάλογα με το πια μεγέθη υπολογίζονται πιο εύκολα. Στην πράξη όμως είναι δύσκολο να δείξουμε την εργοδικότητα μιας διαδικασίας και συνήθως δουλεύουμε με την παραδοχή ότι η διαδικασία είναι εργοδική (μέχρι να διαψευστούμε). Ευτυχώς αρκετές σημαντικές εφαρμογές περιγράφονται από εργοδικές διαδικασίες.

6.2.1 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Παράδειγμα 6.2:

Έστω μια τυχαία διαδικασία $X(t)$ που δίνεται από την σχέση

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

όπου f_0 και θ είναι σταθερές, και A είναι μια τυχαία μεταβλητή. Να διερευνηθεί αν η $X(t)$ είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια.

Λύση:

Για να είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια, πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

$$E[x(t)] = c \in \mathbb{R} \quad (6.30)$$

$$R_x(t_i, t_j) = R_x(|t_i - t_j|) = R_x(\tau). \quad (6.31)$$

Η μέση τιμή είναι

$$E[X(t)] = E[A \cos(2\pi f_0 t + \theta)] = \cos(2\pi f_0 t + \theta) E[A] \quad (6.32)$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η $E[X(t)]$ δεν είναι σταθερή εκτός αν $E[A] = 0$.

Επίσης

$$R_x(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)] = E\left[A^2 \cos(2\pi f_0 t + \theta) \cos\left(2\pi f_0(t + \tau) + \theta\right)\right] \quad (6.33)$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 2\pi f_0 \tau + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta + 2\pi f_0 \tau)]E[A^2] \quad (6.34)$$

Βλέπουμε ότι η αυτοσυσχέτιση της $X(t)$ δεν είναι συνάρτηση μόνο της χρονικής διαφοράς τ , άρα η διεργασία δεν είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια.

Παράδειγμα 6.3:

Να δείξετε ότι αν η $X(t)$ είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια, τότε:

$$E\left[[X(t + \tau) - X(t)]^2\right] = 2[R_x(0) - R_x(\tau)]$$

όπου $R_x(\tau)$ είναι η στατιστική συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της $X(t)$.

Λύση:
Είναι

$$\begin{aligned} E\left[[X(t + \tau) - X(t)]^2\right] &= E[X^2(t + \tau) - 2X(t + \tau)X(t) + X^2(t)] \\ &= E[X^2(t + \tau)] - 2E[X(t + \tau)X(t)] + E[X^2(t)] \end{aligned} \quad (6.35)$$

Γνωρίζουμε ότι $E[X(t + \tau)X(t)] = R_x(\tau)$. Για $\tau = 0$, έχουμε ότι

$$R_x(0) = E[X^2(t)] \quad (6.36)$$

Η Σχέση (6.35) λόγω της Σχέσης (6.36) δίνει

$$E\left[[X(t + \tau) - X(t)]^2\right] = R_x(0) - 2R_x(\tau) + R_x(0) = 2R_x(0) - 2R_x(\tau) = 2(R_x(0) - R_x(\tau)) \quad (6.37)$$

6.2.2 Ενέργεια και Ισχύς Τυχαίων Σημάτων

Έχουμε ήδη ορίσει τα μεγέθη της ενέργειας και της ισχύος ντετερμινιστικών σημάτων. Παρόμοια μπορεί κανείς να ορίσει την ενέργεια και την ισχύ τυχαίων σημάτων. Αν $X(t)$ ένα τυχαίο σήμα με μια πραγματοποίησή του $x(t, \zeta)$, γνωρίζουμε ότι η ενέργεια και η ισχύς κάθε μιας τέτοιας πραγματοποίησης δίνεται ως

$$E_\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t, \zeta) dt \quad (6.38)$$

$$P_\zeta = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t, \zeta) dt \quad (6.39)$$

Είναι εμφανές ότι για διαφορετικό ζ , οι τιμές των E_ζ, P_ζ είναι διαφορετικές. Οπότε μπορούμε να πούμε ότι κι αυτές είναι τυχαίες μεταβλητές, τις οποίες ας συμβολίσουμε με $\mathcal{E}_X$ και $\mathcal{P}_X$ για την ενέργεια και την ισχύ, αντίστοιχα. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την *ενέργεια ενός τυχαίου σήματος* και την *ισχύ ενός τυχαίου σήματος* ως

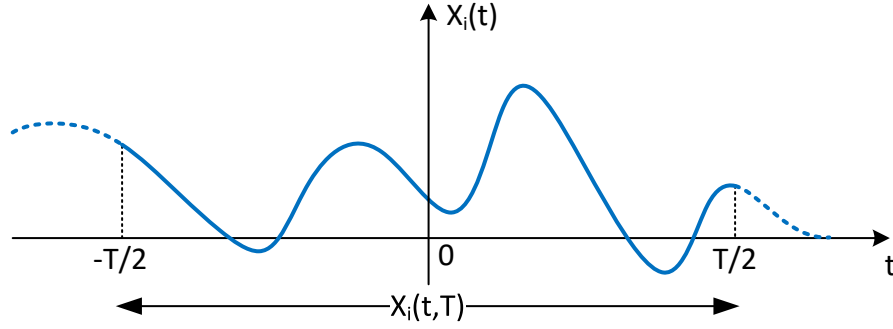
$$E_X = E[\mathcal{E}_X] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^2(t) dt\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X^2(t)] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t, t) dt \quad (6.40)$$

$$P_X = E[\mathcal{P}_X] = E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X^2(t) dt\right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E[X^2(t)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t, t) dt \quad (6.41)$$

Αν η διαδικασία είναι στάσιμη, τότε $P_X = R_X(0)$.

6.3 Τυχαίες Διαδικασίες στο Χώρο της Συχνότητας

Ας επιστρέψουμε στο αρχικό πρόβλημα και ας θεωρήσουμε τον χρήστη i (από τους 100) ο οποίος στέλνει για παράδειγμα το σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 6.3. Για περισσότερη γενικότερα, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο σήμα μιας οποιαδήποτε μορφής (και όχι δυαδικής μορφής όπως στην αρχή του προβλήματος). Γενικά, δεν ισχύει



Σχήμα 6.3: Παράδειγμα σήματος από το χρήστη i .

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_i(t)| dt < \infty \quad (6.42)$$

επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier του σήματος. Αναμενόμενο βέβαια, επειδή όπως είπαμε και στην αρχή είμαστε στην κατηγορία των σημάτων ισχύος. Η τεχνική λοιπόν που θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ είναι να απομονώσουμε μόνο ένα κομμάτι (παράθυρο) του σήματος. Έτσι ας παρατηρήσουμε το σήμα μέσα από ένα παράθυρο μήκους T όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.3. Τότε

$$x_i(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_i(t, T) \quad (6.43)$$

όπου

$$x_i(t, T) = x_i(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (6.44)$$

Ο μετασχ. Fourier του κομματιού μήκους T του σήματος είναι

$$X_i(f, T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t, T) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.45)$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t, T) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.46)$$

Το μέγεθος

$$\Phi_{x_i}(f, T) = \frac{1}{T} |X_i(f, T)|^2 \quad (6.47)$$

ονομάζεται *περιοδόγραμμα*. Η ισχύς που υπάρχει σε αυτό το διάστημα είναι

$$P_{x_i}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{x_i}(f, T) df \quad (6.48)$$

Προφανώς για κάθε χρήστη το περιοδόγραμμα θα είναι διαφορετικό και η μέση τιμή όλων αυτών των περιοδογραμμάτων θα εκφράζει την τάση που υπάρχει στο διάστημα T . Επιπλέον κάθε περιοδόγραμμα είναι μέγεθος στοχαστικό άρα η μέση τιμή αυτών θα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Phi_x(f, T) = E[\Phi_{x_i}(f, T)] \quad (6.49)$$

Ονομάζουμε **φάσμα ισχύος** ή **φασματική πυκνότητα ισχύος**, $\Phi_x(f)$, της στοχαστικής διαδικασίας, το όριο της $\Phi_x(f, T)$ όταν $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\Phi_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \{ \Phi_x(f, T) = E[\Phi_{x_i}(f, T)] \} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_i(f, T)|^2}{T} \right]\end{aligned}\quad (6.50)$$

Για να μην αποκοβόμαστε πολύ από το αρχικό πρόβλημα ... αν εμείς μπορούμε να υπολογίσουμε το φασματική πυκνότητα ισχύος, $\Phi_x(f)$, τότε θα μπορούσαμε να απαντήσουμε στην ερώτηση για το εύρος ζώνης της διαδικασίας. Εδώ λοιπόν έχουμε φτάσει σε έναν τρόπο υπολογισμού: επιλέγουμε μια περιοχή σήματος μήκους T για κάθε χρήστη, υπολογίζουμε τον μετ. Fourier στην κάθε περιοχή και μετά το περιοδογράμμο που αντιστοιχεί σε κάθε μια από αυτές τις περιοχές. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέση τιμή των περιοδογράμμων. Η φασματική πυκνότητα ισχύος τότε θα είναι το όριο του παραπάνω αποτελέσματος όταν το εύρος της περιοχής, T , γίνει πολύ μεγάλο (δηλ. $T \rightarrow \infty$). Προφανώς για να μπορούμε να κάνουμε κάτι τέτοιο θα πρέπει το αρχικό μας σήμα να περιγράφεται αναλυτικά από μια εξίσωση έτσι ώστε στο τέλος να προκύψει μια συνάρτηση ως προς T για να μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο. Επίσης, θα πρέπει να υπάρχει αυτό το όριο. Όλα αυτά βέβαια αν το σήμα μας μπορεί να περιγραφεί με εξισώσεις. Αν δεν έχουμε μια μαθηματική περιγραφή των σημάτων τότε τα παραπάνω δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Ευτυχώς στο συγκεκριμένο πρόβλημα γνωρίζουμε πολύ καλά το σήμα (παίρνει μόνο δύο τιμές, 0 ή 1, και κάθε τιμή έχει διάρκεια T_b δευτερόλεπτα) αν και δεν γνωρίζουμε αναλυτικά μια μαθηματική σχέση που το περιγράφει.

6.3.1 Το Θεώρημα Einstein-Wiener-Khinchin

Πολλές από τις παραπάνω δυσκολίες αποφεύγονται όταν μετακινήθουμε σε χρήση των στατιστικών μεγεθών. Συγκεκριμένα, υπάρχει το περίφημο θεώρημα των Einstein-Wiener-Khinchin που αναφέρει ότι:

Αν μια διαδικασία είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια τότε η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι ο μετασχ. Fourier της στατιστικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης

$$\Phi_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (6.51)$$

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε το περιοδογράμμο του χρήστη x_i

$$\Phi_{x_i}(f, T) = \frac{1}{T} |X_i(f, T)|^2 = \frac{1}{T} X_i^*(f, T) X_i(f, T) \quad (6.52)$$

όπου

$$X_i(f, T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.53)$$

Επομένως

$$\Phi_{x_i}(f, T) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i(u) \text{rect}\left(\frac{u}{T}\right) e^{j2\pi fu} x_i(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi ft} du dt \quad (6.54)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) x_i(u) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{u}{T}\right) e^{-j2\pi f(u-t)} dt du \quad (6.55)$$

όπου θεωρήσαμε το σήμα (χωρίς αυτό να περιορίζει την απόδειξη) να είναι πραγματικό. Επειδή η διεργασία είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια μόνο η απόσταση των χρονικών στιγμών $\tau = u - t$ έχει σημασία και όχι οι συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Αλλάζοντας μεταβλητές στην παραπάνω σχέση, $u = \tau + t$, προκύπτει

$$\Phi_{x_i}(f, T) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) x_i(t + \tau) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t + \tau}{T}\right) e^{-j2\pi f\tau} dt d\tau \quad (6.56)$$

Στην παραπάνω σχέση μόνο οι τιμές $x_i(t)$ και $x_i(t + \tau)$ είναι τυχαίες μεταβλητές. Έτσι η μέση τιμή για όλους τους χρήστες είναι

$$E[\Phi_{x_i}(f, T)] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[x_i(t) x_i(t + \tau)] \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t + \tau}{T}\right) e^{-j2\pi f\tau} dt d\tau \quad (6.57)$$

Ομως

$$E[x_i(t)x_i(t+\tau)] = R_x(\tau) \quad (6.58)$$

Επομένως

$$E[\Phi_{x_i}(f, T)] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t+\tau}{T}\right) e^{-j2\pi f\tau} dt d\tau \quad (6.59)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t+\tau}{T}\right) dt \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (6.60)$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα στην παραπάνω σχέση είναι η αυτοσυσχέτιση δύο τετραγωνικών παλμών διάρκειας T ο κάθε ένας. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η αυτοσυσχέτιση αυτών είναι ένας τριγωνικός παλμός

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t+\tau}{T}\right) dt = T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \quad (6.61)$$

Αρα

$$E[\Phi_{x_i}(f, T)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (6.62)$$

Για να υπολογίσουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος θα πρέπει σύμφωνα με αυτά που έχουμε μάθει να υπολογίσουμε το όριο της παραπάνω σχέσης όταν $T \rightarrow \infty$

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E[\Phi_{x_i}(f, T)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (6.63)$$

Επομένως δείξαμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος μιας διεργασίας η οποία είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια υπολογίζεται από τον μετασχηματισμό Fourier της στατιστικής αυτοσυσχέτισης της διεργασίας, δηλ.

$$\Phi_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (6.64)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (6.65)$$

Αυτό το αποτέλεσμα, πέραν της σημασίας που έχει για την ανάλυση τυχαίων σημάτων, είναι σπουδαίο γιατί ομαδοποιεί όλα τα σήματα, τυχαία και μή, ενέργειας και ισχύος. Έτσι, γνωρίζουμε τώρα από όλα αυτά που έχουμε δει ότι η φασματική πυκνότητα ενός οποιαδήποτε σήματος υπολογίζεται από τον μετασχηματισμό Fourier της (εκάστοτε) συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα βλέπουμε ότι είναι σημαντικό να μπορούμε να υπολογίσουμε τη στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Για τον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης όμως είναι σημαντικό να γνωρίζουμε είτε αναλυτικά είτε πειραματικά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που χαρακτηρίζει τη διαδικασία.

6.3.2 Ιδιότητες της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος

Για στάσιμες τυχαίες διαδικασίες, συσχετίσαμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος με τη στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, μέσω του μετασχ. Fourier. Οι παρακάτω ιδιότητες είναι πολύ χρήσιμες.

1. $\Phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) d\tau$
2. $E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df$
3. $\Phi_x(f) \geq 0, \forall f$
4. $\Phi_x(f) = \Phi_x(-f)$, για μια πραγματική τυχαία διαδικασία.

6.3.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε μερικά παραδείγματα σε όσα έχουμε αναφέρει ως τώρα.

Παράδειγμα: 6.4

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας

$$x(t) = B \sin(2\pi f_0 t + \Theta) \quad (6.66)$$

όπου το πλάτος B και η συχνότητα f_0 είναι γνωστά μεγέθη (άρα ντετερμινιστικά) ενώ η φάση θ είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[-\pi, \pi)$. Άρα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής θ είναι

$$p_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (6.67)$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν x είναι μια τυχαία μεταβλητή και $g(x)$ μια συνάρτηση αυτής, τότε:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x) dx \quad (6.68)$$

Η στατιστική μέση τιμή για τη χρονική στιγμή t_i δίνεται ως

$$\mu_{x(t_i)} = E[x(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} B \sin(2\pi f_0 t_i + \theta) p_\Theta(\theta) d\theta \quad (6.69)$$

$$= \frac{B}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2\pi f_0 t_i + \theta) d\theta \quad (6.70)$$

$$= 0 \quad (6.71)$$

Προφανώς το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της χρονικής στιγμής που θα επιλέξουμε. Επομένως

$$E[B \sin(2\pi f_0 t + \Theta)] = 0 \quad \forall t_i \quad (6.72)$$

Επίσης, η στατιστική αυτοσυσχέτιση δίνεται ως

$$R_x(t_i, t_j) = E[x(t_i) x(t_j)] = B^2 E[\sin(2\pi f_0 t_i + \Theta) \sin(2\pi f_0 t_j + \Theta)] \quad (6.73)$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \quad (6.74)$$

η παραπάνω σχέση γράφεται

$$R_x(t_i, t_j) = \frac{1}{2} B^2 E[\cos(2\pi f_0 \underbrace{(t_j - t_i)}_{\tau}) - \cos(2\pi f_0(t_j + t_i) + 2\Theta)] \quad (6.75)$$

$$= \frac{1}{2} B^2 \cos(2\pi f_0 \tau) - \frac{1}{2} B^2 \underbrace{E[\cos(2\pi f_0(t_j + t_i) + 2\Theta)]}_0 \quad (6.76)$$

$$= \frac{1}{2} B^2 \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (6.77)$$

Επομένως η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τυχαίας διαδικασίας είναι ένα απλό συνημίτονο. Παρατηρούμε ότι ο στατιστικός μέσος όρος είναι ανεξάρτητος της χρονικής στιγμής που επιλέξαμε και επίσης ότι η συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης εξαρτάται μονάχα από την απόσταση των χρόνων που θεωρήσαμε. Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω η διαδικασία είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των Wiener-Khinchin για να υπολογίσουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος:

$$\Phi_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = F\left\{\frac{1}{2} B^2 \cos(2\pi f_0 \tau)\right\} \quad (6.78)$$

$$= \frac{1}{4} B^2 F\{e^{j2\pi f_0 \tau}\} + \frac{1}{4} B^2 F\{e^{-j2\pi f_0 \tau}\} \quad (6.79)$$

$$= \frac{1}{4} B^2 \delta(f - f_0) + \frac{1}{4} B^2 \delta(f + f_0) \quad (6.80)$$

Άρα το εύρος ζώνης είναι $2f_0$ και η ισχύς του σήματος είναι

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df = \frac{B^2}{2} \quad (6.81)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω διαδικασία είναι εργοδική. Πράγματι, η χρονική μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} B \sin(2\pi f_0 t + a) dt = 0 \quad (6.82)$$

άρα

$$\bar{x} = \mu_x \quad (6.83)$$

Επίσης

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{B^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0 t + \Theta) \sin(2\pi f(t + \tau) + \Theta) dt \quad (6.84)$$

$$= \frac{B^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (6.85)$$

Δηλαδή

$$\phi_x(\tau) = R_x(\tau) \quad (6.86)$$

Ετσι, η τυχαία διαδικασία

$$x(t) = B \sin(2\pi f_0 t + \Theta) \quad (6.87)$$

με φάση Θ να είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[-\pi, \pi)$ είναι και εργοδική.

Παράδειγμα 6.5:

Έστω ένα δείγμα (πραγματοποίηση) της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ η οποία αποτελείται από μια τυχαία ακολουθία δυαδικών συμβόλων 1 και 0. Ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

1. Τα σύμβολα 1 και 0 αναπαρίστανται από παλμούς με πλάτος $+A$ και $-A$, και διάρκεια T_b δευτερόλεπτα.
2. Οι παλμοί δεν είναι συγχρονισμένοι, άρα η θετική χρονική στιγμή έναρξης t_d του πρώτου παλμού είναι ισοπίθανο να συμβεί οποτεδήποτε μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και T_b δευτερολέπτων. Δηλαδή, το t_d μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια ομοιόμορφα κατανομημένη τυχαία μεταβλητή T_d , με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{T_d}(t_d) = \begin{cases} \frac{1}{T_b}, & 0 \leq t_d \leq T_b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.88)$$

3. Κατά ένα οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $(n-1)T_b < t - t_d < nT_b$, όπου n ακέραιος, η παρουσία ενός 1 ή ενός 0 καθορίζεται από τη ρίψη ενός δίκαιου νομίσματος. Δηλ. αν το αποτέλεσμα είναι κορώνα, θα έχουμε ένα 1, ενώ αν το αποτέλεσμα είναι γράμματα, τότε θα έχουμε ένα 0. Αυτά τα δυο σύμβολα είναι ισοπίθανα να συμβούν, και η παρουσία ενός 1 ή ενός 0 σε οποιοδήποτε διάστημα είναι ανεξάρτητη από όλα τα υπόλοιπα διαστήματα.

Υπολογίστε τη μέση τιμή, τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, και τη φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας.

Λύση:

Αφού τα πλάτη $\pm A$ συμβαίνουν με ίση πιθανότητα (είναι δηλ. ισοπίθανα), συνεπάγεται άμεσα ότι η μέση τιμή της τυχαίας διαδικασίας είναι μηδέν, άρα $E[X(t)] = 0$, $\forall t$.

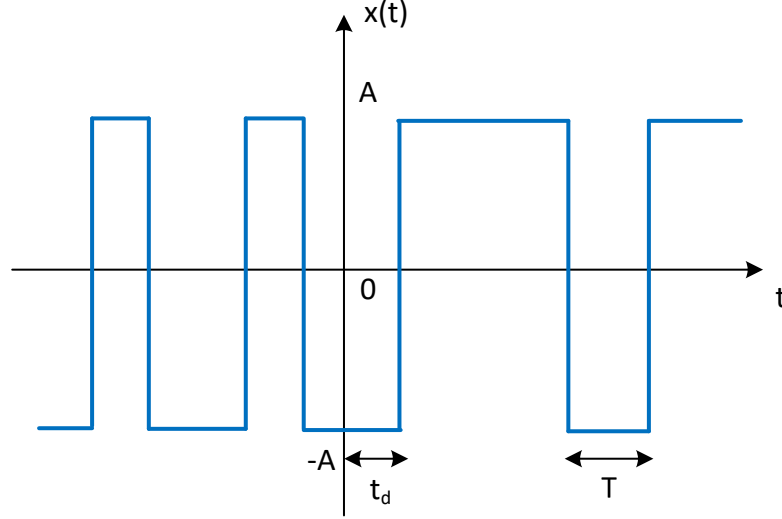
Για να βρούμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_X(t_i, t_j)$, πρέπει να εκτιμήσουμε την ποσότητα $E[X(t_i)X(t_j)]$, όπου $X(t_i), X(t_j)$ είναι τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την παρατήρηση της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ τις χρονικές στιγμές t_i, t_j αντίστοιχα.

Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση $|t_i - t_j| > T_b$. Υπό αυτή τη συνθήκη, οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_i)$ και

$X(t_j)$ συμβαίνουν σε διαφορετικούς παλμούς, και άρα είναι ανεξάρτητες. Τότε θα έχουμε

$$E[X(t_i)X(t_j)] = E[X(t_i)]E[X(t_j)] = 0, \quad |t_i - t_j| > T_b \quad (6.89)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που



Σχήμα 6.4: Πραγματοποίηση τυχαίας διαδικασίας για ένα τυχαίο δυαδικό σήμα Παραδείγματος 6.5.

$$|t_i - t_j| < T_b$$

με $t_i = 0$ και $t_i < t_j$. Σε μια τέτοια κατάσταση, παρατηρούμε στο Σχήμα 6.4 ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_i)$ και $X(t_j)$ συμβαίνουν σε διάστημα όπου λαμβάνει χώρα ο ίδιος παλμός, αν και μόνον αν η καθυστέρηση t_d ικανοποιεί τη συνθήκη

$$t_d < T_b - |t_i - t_j|$$

Δεδομένου λοιπόν αυτού, μπορούμε να ορίσουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή

$$E[X(t_i)X(t_j)|t_d] = \begin{cases} A^2, & t_d < T_b - |t_i - t_j| \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.90)$$

Μπορούμε να πάρουμε τη μέση τιμή $E[X(t_i)X(t_j)]$ αθροίζοντας την παραπάνω δεσμευμένη μέση τιμή για κάθε t_d , άρα

$$E[X(t_i)X(t_j)] = \int_0^{T_b - |t_i - t_j|} A^2 f_{T_d}(t_d) dt_d \quad (6.91)$$

$$= \int_0^{T_b - |t_i - t_j|} \frac{A^2}{T_b} dt_d \quad (6.92)$$

$$= A^2 \left(1 - \frac{|t_i - t_j|}{T_b}\right), \quad |t_i - t_j| < T_b \quad (6.93)$$

Με όμοιο συλλογισμό για οποιαδήποτε άλλη τιμή του t_i , συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός τυχαίου δυαδικού σήματος, που μια πραγματοποίησή του φαίνεται στο Σχήμα 6.4, εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά $|t_i - t_j| = \tau$, δηλ.

$$R_x(\tau) = A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T_b}\right), \quad |\tau| < T_b \quad (6.94)$$

και μηδέν για $|\tau| \geq T_b$. Άρα η διαδικασία είναι στάσιμη, ενώ η αυτοσυσχέτιση είναι το γνωστό μας τριγωνικό σήμα διάρκειας $2T$ και μεγίστου πλάτους A^2 .

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος, που είναι ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης, θα είναι

$$\Phi_x(f) = F\{A^2 \text{tri}\left(\frac{t}{T_b}\right)\} = A^2 T_b \text{sinc}^2(f T_b) \quad (6.95)$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευθεί ως ακολούθως: παρατηρήστε ότι η Φασματική Πυκνότητα *Ενέργειας* (δηλ. το τετράγωνο του μέτρου του μετασχ. Fourier) ενός τετραγωνικού παλμού $g(t)$ πλάτους A και διάρκειας T_b δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_g(f) = A^2 T_b^2 \text{sinc}^2(f T_b) \quad (6.96)$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε ότι η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος $\Phi_x(f)$ μιας τυχαίας δυαδικής διαδικασίας με σύμβολα 1 και 0, τα οποία αναπαρίστανται με παλμούς $g(t)$ και $-g(t)$, αντίστοιχα, ισούται με τη Φασματική Πυκνότητα *Ενέργειας* του παλμού $g(t)$, διά τη διάρκεια του συμβόλου T_b .

Παράδειγμα 6.6:

Έστω η τυχαία διαδικασία

$$x(t) = \sum_k A_k \cos(2\pi f_k t + \Phi_k), \quad (6.97)$$

με Φ_k τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο $[-\pi, \pi]$. Τα A_k, f_k θεωρούνται σταθερά.

α') Δείξτε ότι η $x(t)$ είναι στάσιμη $2^{\text{ης}}$ τάξης.

β') Δείξτε ότι η $x(t)$ είναι εργοδική.

γ') Βρείτε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της διαδικασίας.

Λύση:

α') Για να είναι στάσιμη $2^{\text{ης}}$ τάξης, πρέπει να ισχύουν:

$$E[x(t_i)] = c \in \mathbb{R} \quad \forall t_i \quad (6.98)$$

$$R_x(t_i, t_j) = R_x(|t_i - t_j|) = R_x(\tau). \quad (6.99)$$

Είναι

$$E[x(t)] = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_k A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k) \frac{1}{2\pi} d\phi_k \quad (6.100)$$

$$= \sum_k A_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f_k t + \phi_k) d\phi_k = 0 \quad (6.101)$$

γιατί

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x + y) dx = 2 \cos(y) \cdot \sin \pi = 0 \quad (6.102)$$

Επίσης,

$$R(t_i, t_j) = E[x(t_i)x(t_j)] = E\left[\sum_k A_k \cos(2\pi f_k t_i + \Phi_k) \sum_k A_k \cos(2\pi f_k t_j + \Phi_k)\right] \quad (6.103)$$

$$= \sum_k A_k^2 E[\cos(2\pi f_k t_i + \Phi_k) \cos(2\pi f_k t_j + \Phi_k)] \quad (6.104)$$

$$= \sum_k \frac{A_k^2}{2} \left(E[\cos(2\pi f_k(t_i - t_j))] + E[\cos(2\pi f_k(t_i + t_j) + 2\Phi_k)] \right) \quad (6.105)$$

$$= \sum_k \frac{A_k^2}{2} \cos(2\pi f_k \tau) \quad (6.106)$$

$$= R_x(\tau) \quad (6.107)$$

Άρα η διαδικασία είναι στάσιμη $2^{\text{ης}}$ τάξης.

β') Για να είναι εργοδική, πρέπει

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = E[x(t)] = 0 \quad (6.108)$$

$$\phi_k(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau) dt = R_x(\tau) = \sum_k \frac{A_k^2}{2} \cos(2\pi f_k \tau) \quad (6.109)$$

Είναι

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k A_k \frac{1}{2\pi f_k} \sin(2\pi f_k t + \phi_k) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \quad (6.110)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k \frac{A_k}{2\pi f_k} 2 \cos \phi_k \sin \left(2\pi f_k \frac{T}{2} \right) = \sum_k A_k \cdot 2 \cos \phi_k \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\sin \left(\frac{2\pi f_k T}{2} \right)}{2\pi f_k} \quad (6.111)$$

$$= \sum_k A_k \cos \phi_k \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\frac{2\pi f_k T}{2} \right)}{\frac{2\pi f_k T}{2}} = \sum_k A_k \cos \phi_k \lim_{T \rightarrow \infty} \text{sinc}(f_k T) = 0 \quad (6.112)$$

Εντελώς ανάλογα, και με χρήση της ταυτότητας

$$\sin \theta - \sin \phi = 2 \cos \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right) \quad (6.113)$$

αποδεικνύεται ότι:

$$\phi_x(\tau) = \sum_k \frac{A_k^2}{2} \cos(2\pi f_k \tau) \quad (6.114)$$

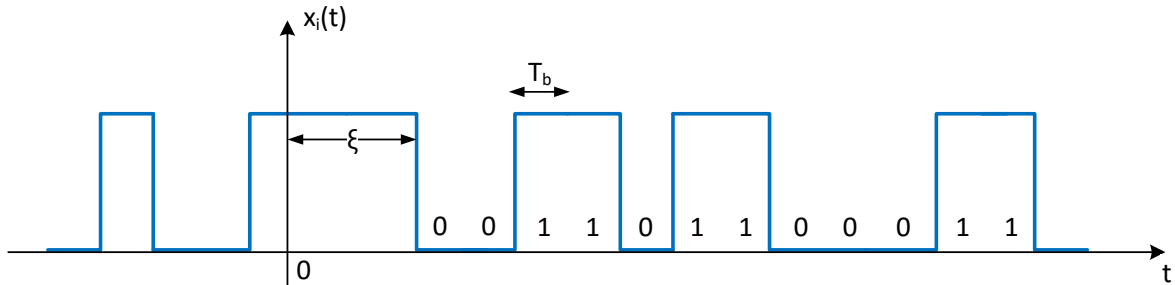
γ') Η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_k(\tau)\} = F\{R_x(\tau)\} = F\left\{ \sum_k \frac{A_k^2}{2} \cos(2\pi f_k \tau) \right\} = \sum_k \frac{A_k^2}{2} F\{\cos(2\pi f_k \tau)\} \quad (6.115)$$

$$= \sum_k \frac{A_k^2}{2} \left(\frac{1}{2} \delta(f - f_k) + \frac{1}{2} \delta(f + f_k) \right) \quad (6.116)$$

$$= \sum_k \frac{A_k^2}{4} \left(\delta(f - f_k) + \delta(f + f_k) \right) \blacksquare \quad (6.117)$$

Επιστρέφοντας στο αρχικό πρόβλημα, ας θεωρήσουμε ένα υποτιθέμενο δυαδικό σήμα που στέλνει ο χρήστης x_i το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 6.5. Αν θεωρήσουμε ότι:



Σχήμα 6.5: Παράδειγμα σήματος από το χρήστη i .

1. Τα δεδομένα κάθε χρήστη βρίσκονται σε διαφορετική θέση ξ από το σημείο παρατήρησης ($t = 0$), όπου $0 \leq \xi < T$. Δηλαδή, ξ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι η τυχαία αυτή μεταβλητή κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, T_b)$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διεργασίας είναι ανεξάρτητη του χρόνου t και επομένως η διεργασία είναι στάσιμη.

2. Θεωρούμε επίσης ότι η τιμές που θα έχει το σήμα σε διάφορες χρονικές στιγμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει

$$f_{x(t_i) x(t_j)}(x_1, x_2) = \frac{f_{x(t_i)}(x_1)}{f_{x(t_j)}(x_2)} \quad (6.118)$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες μπορούμε να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίδεται από τη σχέση

$$R_x(t) = \sigma_x^2 \left(1 - \frac{|t|}{T_b}\right) + \mu_x^2 \quad (6.119)$$

όπου σ_x^2 είναι η διασπορά (variance) της διαδικασίας και μ_x η μέση τιμή της. Ας το δείξουμε.

Η τυχαία διαδικασία $X(t)$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα μιας σταθερής τυχαίας διαδικασίας $\bar{X}$ που αποτελεί τη μέση τιμή της $X(t)$ και μιας διαδικασίας $X_z(t)$ που έχει μηδενική μέση τιμή, δηλ.

$$X(t) = \bar{X} + X_z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\hat{X}(t) \quad (6.120)$$

με

$$X_z(t) = \frac{1}{2}\hat{X}(t) \quad (6.121)$$

και $\hat{X}(t)$ είναι η τυχαία διαδικασία του Παραδείγματος 2 για $A = 1$. Η αυτοσυσχέτιση τότε θα είναι

$$R_x(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\hat{X}(t)\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\hat{X}(t+\tau)\right)\right] \quad (6.122)$$

$$= E\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\hat{X}(t) + \frac{1}{4}\hat{X}(t+\tau) + \frac{1}{4}\hat{X}(t)\hat{X}(t+\tau)\right] \quad (6.123)$$

$$= E\left[\frac{1}{4}\right] + E\left[\frac{1}{4}\hat{X}(t)\right] + E\left[\frac{1}{4}\hat{X}(t+\tau)\right] + E\left[\frac{1}{4}\hat{X}(t)\hat{X}(t+\tau)\right] \quad (6.124)$$

$$= \frac{1}{4} + 0 + 0 + \frac{1}{4}R_{\hat{x}}(\tau) \quad (6.125)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}R_{\hat{x}}(\tau) \quad (6.126)$$

γιατί

$$E[\hat{X}(t)] = E[\hat{X}(t+\tau)] = 0 \quad (6.127)$$

από το Παράδειγμα 2, όπου δείξαμε ότι

$$R_{\hat{x}}(\tau) = A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T_b}\right), \quad |\tau| < T_b \quad (6.128)$$

Οπότε

$$R_x(\tau) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}R_{\hat{x}}(\tau) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{|\tau|}{T_b}\right), \quad |\tau| < T_b \quad (6.129)$$

Παρατηρήστε ότι για ισοπίθανη εμφάνιση των συμβόλων 1 και 0, η τυχαία διαδικασία έχει μέση τιμή

$$\mu_x = E[X(t)] = \frac{1}{2} \quad (6.130)$$

και άρα

$$\mu_x^2 = \frac{1}{4} \quad (6.131)$$

ενώ η τυπική απόκλιση της διαδικασίας σ_x^2 είναι

$$\sigma_x^2 = E[X^2(t)] - \mu_x^2 = R_x(0) - \mu_x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (6.132)$$

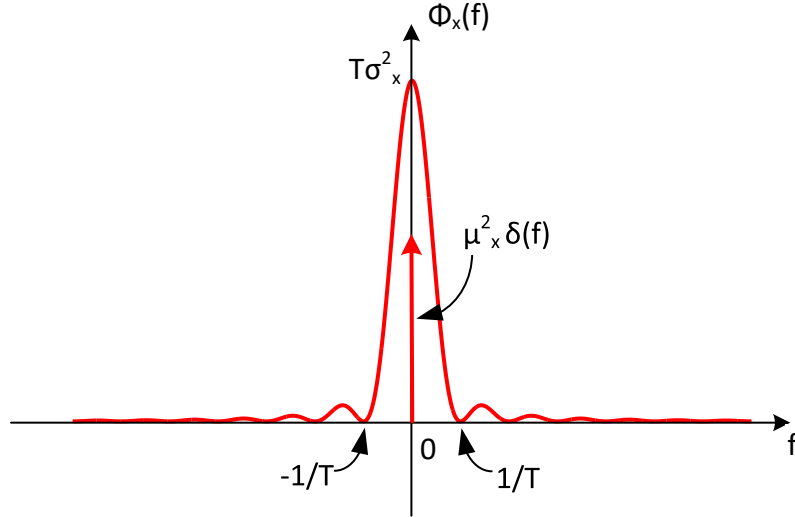
και άρα η αυτοσυσχέτιση μπορεί να γραφεί ως

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \text{tri}\left(\frac{\tau}{T_b}\right) + \mu_x^2 \quad (6.133)$$

Από το θεώρημα των Wiener-Khinchin η φασματική πυκνότητα ισχύος της διαδικασίας είναι

$$\Phi_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = \sigma_x^2 T_b \text{sinc}^2(f T_b) + \mu_x^2 \delta(f) \quad (6.134)$$

και έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα. 6.6. Από το Σχήμα 6.6 παρατηρούμε ότι ουσιαστικά η ισχύς της διαδικασίας



Σχήμα 6.6: Φασματική πυκνότητα ισχύος της διαδικασίας αποστολής δυαδικών δεδομένων με παλμούς όπου κάθε παλμός έχει διάρκεια T_b δευτερόλεπτα.

βρίσκεται μεταξύ των συχνοτήτων $f = -1/T_b$ και $f = 1/T_b$. Δηλαδή έχουμε ένα εύρος ζώνης $\Delta f = 2/T_b$.

Τι μπορούμε να πούμε για την παράμετρο T_b ; Καταρχήν καταλαβαίνουμε ότι το T_b εξαρτάται από τον αριθμό των bits/s, δηλαδή τον ρυθμό με τον οποίο έχουμε σχεδιάσει το κανάλι επικοινωνίας. Μεγάλος ρυθμός σημαίνει μικρό T_b . Αυτό σημαίνει ότι οι χρήστες θα είναι ευχαριστημένοι γιατί μεταφέρουν τα δεδομένα τους γρήγορα. Όμως σύμφωνα με τη σχέση της φασματικής πυκνότητας ισχύος που υπολογίσαμε (και όπως φαίνεται και από το Σχήμα 6.6) μικρό T_b σημαίνει μεγάλο εύρος ζώνης (όσο μεγαλύτερο το εύρος ζώνης, τόσο μεγαλύτερη η ισχύς που χρειαζόμαστε για να υποστηρίξουμε τέτοιους υψηλούς ρυθμούς, άρα μεγαλύτερο το κόστος λειτουργίας). Αντίθετα, αν έχουμε χαμηλούς ρυθμούς θα έχουμε μεγάλο T_b άρα μικρό εύρος ζώνης κ.λ.π.

Αν το εύρος ζώνης είναι δεδομένο (όπως συνήθως) τότε η παραπάνω ανάλυση μπορεί να μας βοηθήσει να σχεδιάσουμε το σύστημα επικοινωνίας επιλέγοντας ρυθμό μετάδοσης σε σχέση με πόσους χρήστες θα μπορούμε να εξυπηρετούμε ταυτόχρονα.

6.4 Τυχαίες διαδικασίες και Συστήματα

Η σημασία των τυχαίων διαδικασιών στη μελέτη συστημάτων και των αποκρίσεών τους είναι μεγάλη, διότι μπορούν να μοντελοποιήσουν τόσο την πληροφορία όσο και το θόρυβο που υπάρχει έμφυτος σε κάθε πραγματικό σύστημα. Ο όρος θόρυβος περιγράφει οποιοδήποτε ανεπιθύμητο σήμα αλλοιώνει το σήμα εισόδου ενός συστήματος με οποιονδήποτε τρόπο. Σε αυτήν την Παράγραφο, θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεδομένης μιας τυχαίας διαδικασίας στην είσοδό του.

Έστω μια στάσιμη διαδικασία $X(t)$ με μέση τιμή μ_X και αυτοσυσχέτιση $R_X(\tau)$, η οποία παρουσιάζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με χρονική απόκριση $h(t)$. Η έξοδος $Y(t)$ δίνεται από τη γνωστή σχέση

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (6.135)$$

Η μέση τιμή της εξόδου θα είναι

$$\mu_Y = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) h(t - \tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(\tau)] h(t - \tau) d\tau \quad (6.136)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_X h(t - \tau) d\tau = \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) d\tau \quad (6.137)$$

Άρα η μέση τιμή της εξόδου δίνεται από τη σχέση

$$\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \quad (6.138)$$

που σημαίνει ότι είναι ανεξάρτητη του χρόνου t . Η αυτοσυσχέτιση της εξόδου $E[Y(t_1)Y(t_2)]$ δίνεται ως

$$E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[Y(t_1)Y(t_2)] = E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)h(t_1 - u)du\right)Y(t_2)\right] \quad (6.139)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(u - t_2)h(t_1 - u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(w)h(t_1 - t_2 - w)dw \quad (6.140)$$

$$= R_{XY}(\tau) * h(\tau) \quad (6.141)$$

Η από κοινού αυτοσυσχέτιση $R_{XY}(\tau)$ δίνεται ως

$$E[X(t_1)Y(t_2)] = E\left[X(t_1) \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)h(t_2 - u)du\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t_1)X(u)]h(t_2 - u)du \quad (6.142)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t_1 - u)h(t_2 - u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t_1 - t_2 - w)h(-w)dw \quad (6.143)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t - w)h(-w)dw = R_X(\tau) * h(-\tau) \quad (6.144)$$

Η Σχέση (6.141) λόγω της Σχέσης (6.144) δίνει

$$E[Y(t_1)Y(t_2)] = R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau) \quad (6.145)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δηλώνουν ότι η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος είναι επίσης στάσιμη, αφού η μέση τιμή της είναι σταθερή και η αυτοσυσχέτισή της εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά $\tau = |t_2 - t_1|$. Επίσης, η είσοδος $X(t)$ και η έξοδος $Y(t)$ είναι από κοινού στάσιμες.

Ας δούμε πως μετατρέπονται τα παραπάνω στο χώρο της συχνότητας. Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \quad (6.146)$$

δεν είναι άλλο από την τιμή της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$ για $f = 0$, δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = H(0) \quad (6.147)$$

Άρα η μέση τιμή της εξόδου γράφεται

$$\mu_Y = \mu_X H(0) \quad (6.148)$$

Οι συσχετίσεις μετατρέπονται σε φασματικές πυκνότητες, ως

$$\Phi_Y(f) = \Phi_X(f)H(f)H^*(f) = \Phi_X(f)|H(f)|^2 \quad (6.149)$$

αφού

$$F\{h(-t)\} = H^*(f) \quad (6.150)$$

Επίσης

$$\Phi_{XY}(f) = \Phi_X(f)H^*(f) \quad (6.151)$$

για τη Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος της εισόδου και της εξόδου. Από τις γνωστές ιδιότητες των φασματικών πυκνοτήτων,

$$\Phi_{YX}(f) = \Phi_{XY}^*(f) = \Phi_X(f)H(f) \quad (6.152)$$

6.5 Άθροισμα Τυχαίων Διαδικασιών

Πολλές φορές στην πράξη εμφανίζεται το άθροισμα δυο (ή περισσότερων) τυχαίων μεταβλητών, όπως για παράδειγμα κατά τη μετάδοση ενός σήματος μέσα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Ας δούμε τι συμβαίνει σε μια τέτοια περίπτωση.

Έστω $Z(t) = X(t) + Y(t)$ το άθροισμα δυο στάσιμων τυχαίων διαδικασιών, με $X(t), Y(t)$ από κοινού στάσιμες τυχαίες διαδικασίες. Τότε

$$R_Z(t, t + \tau) = E[Z(t)Z(t + \tau)] = E[(X(t) + Y(t))(X(t + \tau) + Y(t + \tau))] \quad (6.153)$$

$$= E[X(t)X(t + \tau)] + E[X(t)Y(t + \tau)] + E[Y(t)X(t + \tau)] + E[Y(t)Y(t + \tau)] \quad (6.154)$$

$$= R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) \quad (6.155)$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος της παραπάνω διαδικασίας είναι

$$\Phi_Z(f) = \Phi_X(f) + \Phi_Y(f) + \Phi_{XY}(f) + \Phi_{YX}(f) \quad (6.156)$$

$$= \Phi_X(f) + \Phi_Y(f) + \Phi_{XY}(f) + \Phi_{XY}^*(f) \quad (6.157)$$

$$= \Phi_X(f) + \Phi_Y(f) + 2\Re\{\Phi_{XY}(f)\} \quad (6.158)$$

Παρατηρούμε ότι και στις δυο περιπτώσεις, υπάρχουν όροι που συσχετίζουν τις τυχαίες διαδικασίες $X(t), Y(t)$. Αν όμως οι τυχαίες διαδικασίες $X(t), Y(t)$ είναι ασυσχέτιστες, τότε

$$R_{XY}(\tau) = \mu_X \mu_Y \quad (6.159)$$

και αν κάποια τυχαία διαδικασία από τις δυο έχει μηδενική μέση τιμή, τότε $R_{XY}(\tau) = 0$. Μόνον τότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$R_Z(t, t + \tau) = \Phi_X(f) + \Phi_Y(f) \quad (6.160)$$

και άρα

$$\Phi_Z(f) = \Phi_X(f) + \Phi_Y(f) \quad (6.161)$$

Παράδειγμα 6.7:

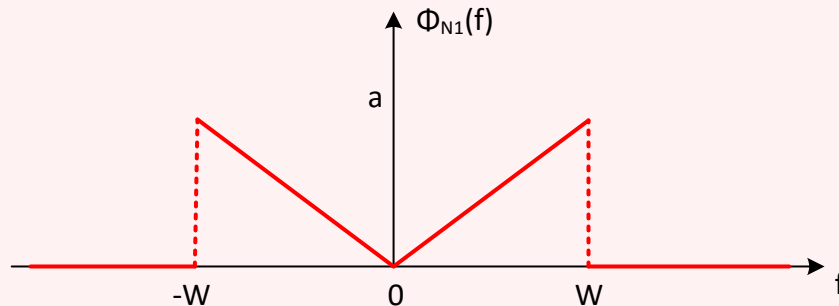
Ένα ζεύγος τυχαίων διαδικασιών $n_1(t)$ και $n_2(t)$ σχετίζονται ως

$$n_2(t) = n_1(t) \cos(2\pi f_0 t + \Theta) - n_1(t) \sin(2\pi f_0 t + \Theta) \quad (6.162)$$

όπου f_0 σταθερή, και Θ είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.163)$$

Η τυχαία διαδικασία $n_1(t)$ είναι στάσιμη και η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος της, $\Phi_{N_1}(f)$, δίνεται στο Σχήμα 6.7.



Σχήμα 6.7: Φασματική Πυκνότητα Ισχύος τυχαίας διαδικασίας $n_1(t)$ Παραδείγματος 6.7.

Βρείτε και σχεδιάστε την αντίστοιχη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος $\Phi_{N_2}(f)$ της τυχαίας διαδικασίας $n_2(t)$.

Λύση:

Θα βρούμε την $R_{n_2}(\tau)$ ως

$$R_{n_2}(\tau) = E[n_2(t)n_2(t+\tau)] \quad (6.164)$$

$$= E\left[\left(n_1(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta) - n_1(t)\sin(2\pi f_0 t + \Theta)\right)\left(n_1(t+\tau)\cos(2\pi f_0(t+\tau) + \Theta) - \right. \quad (6.165)$$

$$\left. - n_1(t+\tau)\sin(2\pi f_0(t+\tau) + \Theta)\right) \right] \quad (6.166)$$

$$= E\left[n_1(t)n_1(t+\tau)\cos(2\pi f_0 t + \Theta) \cdot \cos(2\pi f_0(t+\tau) + \Theta)\right] - \quad (6.167)$$

$$- E\left[n_1(t)n_1(t+\tau)\cos(2\pi f_0 t + \Theta) \cdot \sin(2\pi f_0(t+\tau) + \Theta)\right] - \quad (6.168)$$

$$- E\left[n_1(t)n_1(t+\tau)\sin(2\pi f_0 t + \Theta) \cdot \cos(2\pi f_0(t+\tau) + \Theta)\right] + \quad (6.169)$$

$$+ E\left[n_1(t)n_1(t+\tau)\sin(2\pi f_0 t + \Theta) \cdot \sin(2\pi f_0(t+\tau) + \Theta)\right] \quad (6.170)$$

$$= E[n_1(t)n_1(t+\tau)\cos(2\pi f_0 \tau)] - E[n_1(t)n_1(t+\tau)\sin(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\Theta)] \quad (6.171)$$

$$= E[n_1(t)n_1(t+\tau)]\cos(2\pi f_0 \tau) - E[n_1(t)n_1(t+\tau)] \cdot E[\sin(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\Theta)] \quad (6.172)$$

Επειδή η Θ είναι ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή, ο όρος $E[\sin(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\Theta)] = 0$, άρα τελικά

$$E[n_2(t)n_2(t+\tau)] = E[n_1(t)n_1(t+\tau)]\cos(2\pi f_0 \tau) \quad (6.173)$$

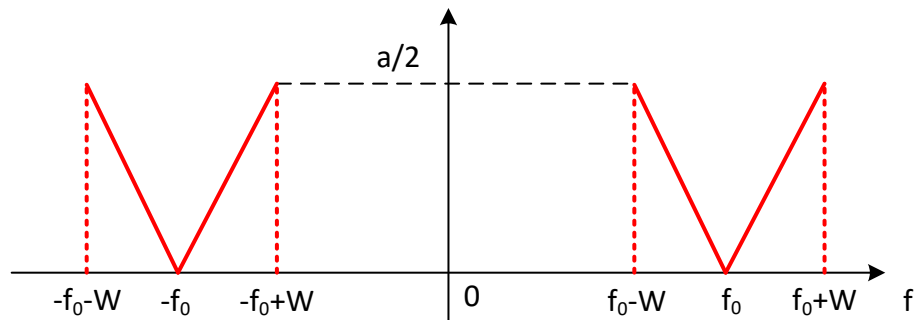
Επειδή η $n_1(t)$ είναι στάσιμη, θα είναι:

$$R_{n_2}(\tau) = R_{n_1}(\tau)\cos(2\pi f_0 \tau) \quad (6.174)$$

η οποία έχει μετασχ. Fourier ως

$$\Phi_{n_2}(f) = \frac{1}{2}\Phi_{n_1}(f-f_0) + \frac{1}{2}\Phi_{n_1}(f+f_0) \quad (6.175)$$

και απεικονίζεται στο Σχήμα 6.8.



Σχήμα 6.8: Φασματική Πυκνότητα Ισχύος τυχαίας διαδικασίας $n_2(t)$ Παραδείγματος 6.7.

6.6 Γκαουσιανή Διαδικασία

Οι Γκαουσιανές διαδικασίες παίζουν σημαντικό ρόλο σε πολλές εφαρμογές. Ο κύριος λόγος γι' αυτό είναι ότι η γκαουσιανή διαδικασία μοντελοποιεί πολύ καλά την τυχαία κίνηση των ηλεκτρονίων εντός των ηλεκτρικών αγωγών. Η κίνηση αυτή ονομάζεται *θερμικός θόρυβος*. Κάθε κίνηση ενός μεμονωμένου ηλεκτρονίου μπορεί να θεωρηθεί ως μια μικρή συνεισφορά στη ροή των ηλεκτρονίων μέσα σε έναν αγωγό, που δεν είναι άλλο από το γνωστό *ηλεκτρικό ρεύμα*. Αν θεωρήσουμε ότι κάθε ηλεκτρόνιο¹ συμπεριφέρεται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, τότε το συνολικό ρεύμα μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων, όμοια κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (δείτε την Παράγραφο 1.6.11) μας πληροφορεί ότι το άθροισμα αυτών (δηλ. το συνολικό ρεύμα) ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή.

Επιπροσθέτως, μια γκαουσιανή διαδικασία έχει τα πλεονεκτήματα της ευκολίας στη χρήση και της εφαρμογής σε προβλήματα επεξεργασίας ήχου και εικόνας, για τον έλεγχο της ευρωστίας αλγορίθμων σε δυσμενείς συνθήκες.

Μια τυχαία διαδικασία $X(t)$ λέγεται *γκαουσιανή* αν οι τυχαίες μεταβλητές $\{X(t_i)\}_{i=1}^n$ έχουν από κοινού γκαουσιανή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για κάθε n και για όλα τα $t_1, t_2, \dots, t_n$. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η μέση τιμή μ_X και η αυτοσυσχέτιση $R_X(t_1, t_2)$ αρκούν για να δώσουν πλήρη στατιστική περιγραφή για τη διαδικασία.

Μπορούν να δειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες, οι οποίες παραθέτονται χωρίς απόδειξη:

1. Για μια γκαουσιανή διαδικασία, η αυστηρή στασιμότητα και η στασιμότητα με την ευρεία έννοια είναι ισοδύναμες.
2. Αν μια γκαουσιανή διαδικασία παρουσιαστεί ως είσοδος σε ένα ευσταθές ΓΧΑ σύστημα, η έξοδος είναι επίσης γκαουσιανή.
3. Για διαδικασίες από κοινού γκαουσιανές, η μη-συσχέτιση και η ανεξαρτησία είναι ισοδύναμες.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.8:

Η τυχαία διαδικασία $W(t)$ ορίζεται ως

$$W(t) = X \cos(2\pi f_0 t) + Y \sin(2\pi f_0 t) \quad (6.176)$$

όπου X, Y είναι δυο ανεξάρτητες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ^2 η καθεμιά.

(α') Βρείτε τη μέση τιμή της τυχαίας διαδικασίας $W(t)$, $\mu_{W(t)} = E[W(t)]$.

(β') Βρείτε τη στατιστική αυτοσυσχέτισή της, $R_{W(t)}(t + \tau, t)$. Είναι η $W(t)$ στάσιμη;

(γ') Απαντήστε στα παραπάνω ερωτήματα στην περίπτωση που $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$.

Λύση:

(α') Είναι

$$\mu_{W(t)} = E[W(t)] = E[X \cos 2\pi f_0 t + Y \sin 2\pi f_0 t] \quad (6.177)$$

$$= E[X] \cos 2\pi f_0 t + E[Y] \sin 2\pi f_0 t = 0 \iff E[W(t)] = 0 \quad (6.178)$$

(β') Είναι

$$R_W(t, t + \tau) = E[W(t)W(t + \tau)] \quad (6.179)$$

$$\begin{aligned} &= E \left[(X \cos 2\pi f_0 t + Y \sin 2\pi f_0 t) (X \cos 2\pi f_0(t + \tau) + Y \sin 2\pi f_0(t + \tau)) \right] \\ &= E[X^2 \cos 2\pi f_0 t \cdot \cos 2\pi f_0(t + \tau)] + E[XY \cos 2\pi f_0 t \cdot \sin 2\pi f_0(t + \tau)] + \end{aligned} \quad (6.180)$$

¹Η τουλάχιστον η πλειονότητά τους...

$$+ E[YX \sin 2\pi f_0 t \cdot \cos 2\pi f_0(t + \tau)] + E[Y^2 \sin 2\pi f_0 t \cdot \sin 2\pi f_0(t + \tau)] \quad (6.181)$$

Επειδή $E[XY] = E[X]E[Y]$ και $E[YX] = E[Y]E[X] = 0$, λόγω ανεξαρτησίας των X, Y θα είναι:

$$R_{W(t,t+\tau)} = E[X^2] \cos 2\pi f_0 t \cdot \cos 2\pi f_0(t + \tau) + E[Y^2] \sin 2\pi f_0 t \cdot \sin 2\pi f_0(t + \tau) \quad (6.182)$$

$$= E[X^2] \left(\frac{1}{2} \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) \right) + E[Y^2] \left(\frac{1}{2} \cos 2\pi f_0 \tau - \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) \right) \quad (6.183)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{\sigma^2}{2} \cos(4\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 \tau) + \frac{\sigma^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau - \frac{\sigma^2}{2} \cos(4\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 \tau) \quad (6.184)$$

$$= \sigma^2 \cos 2\pi f_0 \tau$$

Άρα η $W(t)$ είναι στάσιμη.

(γ') Είναι

$$E[W(t)] = E[X] \cos 2\pi f_0 t + E[Y] \sin 2\pi f_0 t = 0 \quad (6.185)$$

και

$$R_W(t, t + \tau) \stackrel{(6.183)}{=} E[X^2] \left(\frac{1}{2} \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) \right) + E[Y^2] \left(\frac{1}{2} \cos 2\pi f_0 \tau - \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) \right) \quad (6.186)$$

$$= \frac{\sigma_X^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{\sigma_X^2}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) + \frac{\sigma_Y^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau - \frac{\sigma_Y^2}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) \quad (6.187)$$

$$= \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) \quad (6.188)$$

άρα η $W(t)$ δεν είναι στάσιμη.

Παράδειγμα 6.9:

Μια στάσιμη, γκαουσιανή διαδικασία $X(t)$ έχει μηδενική μέση τιμή και φασματική πυκνότητα ισχύος $S_x(f)$. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X η οποία προέρχεται από παρατήρηση της διαδικασίας τη χρονική στιγμή t_i .

Λύση:

Για να περιγραφεί πλήρως μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή χρειάζονται μόνο η μέση τιμή και η διασπορά της. Έστω σ_x^2 και μ_x η διασπορά και η μέση τιμή αντίστοιχα, της τυχαίας μεταβλητής X που προέρχεται από παρατήρηση της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ τη χρονική στιγμή t_i . Αφού η τυχαία διαδικασία είναι μηδενικής μέσης τιμής, είναι

$$E[X(t)] = E[X] = \mu_x = 0 \quad (6.189)$$

Η διασπορά σχετίζεται με τη μέση τιμή ως

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - \mu_x^2 = E[X^2] \quad (6.190)$$

λόγω της Σχέσης (6.189). Όμως

$$E[X^2] = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df \quad (6.191)$$

Άρα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X γράφεται ως

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df}} e^{-\frac{x^2}{2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df}} \quad (6.192)$$

6.7 Λευκή Διαδικασία

Ενα άλλο σημαντικό παράδειγμα τυχαίου σήματος είναι η λευκή διαδικασία (white process). Σίγουρα έχετε ακούσει για το διάσημο (μέχρι και ταινία έχει γίνει!)² λευκό θόρυβο: υπάρχει στο ραδιόφωνό σας όταν δεν μπορείτε να πιάσετε σταθμό (παράσιτα), και στην (αναλογική) τηλεόρασή σας όταν δεν πιάνετε κανένα τηλεοπτικό σήμα (“χιόνια”) - βέβαια και στις δυο περιπτώσεις, ο θόρυβος δεν είναι απολύτως λευκός αλλά συνδυασμός πολλών ειδών θορύβου. Ας δούμε μερικές στατιστικές και φασματικές ιδιότητές του.

Ας ξεκινήσουμε από τον όρισμό της λευκής διαδικασίας, που χρησιμοποιείται για να δηλώσει μια τυχαία διαδικασία της οποίας η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος είναι σταθερή για όλες τις συχνότητες, δηλ.

$$\Phi_{X(t)}(f) = C, \quad \forall f, \quad C \in \mathbb{R} \quad (6.193)$$

Ίσως εδώ να σκεφτήκατε τον παραλληλισμό με τον όρο λευκό φως, στο οποίο υπάρχουν όλες οι συχνότητες του ορατού φωτός, δηλ. όλα τα χρώματα του ορατού φάσματος.

Η σημασία των λευκών διαδικασιών στην πράξη προέρχεται από το γεγονός ότι ο θερμικός θόρυβος, δηλ. ο θόρυβος που προκαλείται από την τυχαία κίνηση των ηλεκτρονίων μέσα σε έναν ηλεκτρικό αγωγό, και ο οποίος συμβαίνει ανεξαρτήτως της τάσης που εφαρμόζουμε στα άκρα του, μπορεί να μοντελοποιηθεί αρκετά καλά από μια λευκή διαδικασία. Όπως φαντάζεστε, η ανάλυση οποιουδήποτε ηλεκτρικού συστήματος πρέπει να περιλαμβάνει την τυχαία αυτή διαδικασία που μοντελοποιεί τις επιδράσεις του ανεπιθύμητου, αλλά αναπόφευκτου, θερμικού θορύβου.

Αν προσπαθήσουμε, με βάση τη Σχέση (6.193), να βρούμε την ισχύ P της λευκής διαδικασίας, θα έχουμε

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{X(t)}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} C df = \infty \quad (!!)$$

Προφανώς καμιά φυσική διαδικασία δεν μπορεί να έχει άπειρη ισχύ, και άρα μια λευκή διαδικασία δεν έχει νόημα ως φυσική διαδικασία. Όμως, η κβαντομηχανική έχει δείξει ότι ο θερμικός θόρυβος έχει Φασματική Πυκνότητα Ισχύος ίση με

$$\Phi_n(f) = \frac{\hbar f}{2(e^{\frac{\hbar f}{kT}} - 1)} \quad (6.195)$$

με $\hbar = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \times \text{s}$ η σταθερά του Planck, $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ η σταθερά του Boltzmann, και T η θερμοκρασία σε Kelvin. Μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι

$$\Phi_n(0) = \frac{kT}{2} \quad (6.196)$$

και ότι

$$\lim_{f \rightarrow +\infty} \Phi_n(f) \rightarrow 0 \quad (6.197)$$

Άρα η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος $\Phi_n(f)$ του θερμικού θορύβου δεν είναι σταθερή (και άρα λευκή), και μάλιστα η τιμή της φθίνει στο μηδέν όταν $f \rightarrow +\infty$! Πώς τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι μπορεί να μοντελοποιηθεί ως λευκή διαδικασία; Το κλειδί εδώ είναι ότι ο ρυθμός με τον οποίο φθίνει στο μηδέν είναι πολύ πολύ αργός. Συγκεκριμένα, η $\Phi_n(f)$ πέφτει στο 90% της μέγιστης τιμής της όταν $f \approx 2 \times 10^{12} \text{ Hz}$, δηλ. περίπου στα 2 THz! Η συχνότητα αυτή είναι αρκετά εκτός των συχνοτικών ορίων των συμβατικών ηλεκτρονικών συσκευών.

Άρα μπορεί θεωρητικά ο θερμικός θόρυβος να μην είναι λευκός, όμως σε όλες τις πρακτικές εφαρμογές μπορεί να μοντελοποιηθεί ως τέτοιος με Φασματική Πυκνότητα Ισχύος ίση με $\frac{kT}{2}$. Η ποσότητα kT συνήθως συμβολίζεται στη βιβλιογραφία ως N_0 , οπότε η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του θερμικού - στο εξής, λευκού - θορύβου γράφεται ως

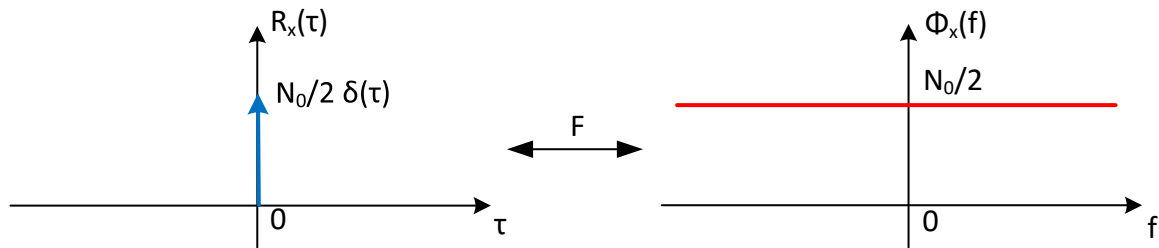
$$\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2} \quad (6.198)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, $R_n(\tau)$, του λευκού θορύβου υπολογίζεται εύκολα ως

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (6.199)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα σημαίνει ότι αν δειγματοληπτήσουμε το λευκό θόρυβο τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 , με $t_1 \neq t_2$, οι τυχαίες μεταβλητές που θα προκύψουν θα είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστες. Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 6.9.

²<http://www.imdb.com/title/tt0375210/>



Σχήμα 6.9: Αριστερά: Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για ένα σήμα λευκού θορύβου. Δεξιά: Φασματική πυκνότητα ισχύος του ίδιου σήματος.

Παράδειγμα 6.10:

Έστω ότι λευκός θόρυβος με Φασματική Πυκνότητα Ισχύος $\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2}$ περνά από ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση σε συχνότητα $H(f)$. Μπορεί ναδειχθεί ότι στην έξοδο, ο θόρυβος δε θα είναι πια απαραίτητα λευκός. Τα χαρακτηριστικά του φίλτρου είναι αυτά που καθορίζουν τις φασματικές ιδιότητες της εξόδου του ΓΧΑ συστήματος.

Συγκεκριμένα, δείξαμε ότι η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος της εξόδου, $\Phi_Y(f)$, σχετίζεται με την αντίστοιχη της εισόδου ως

$$\Phi_Y(f) = \Phi_X(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 \quad (6.200)$$

Αν θελήσουμε να βρούμε την ισχύ της εξόδου, τότε έχουμε

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_Y(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \quad (6.201)$$

Άρα για να βρούμε την ισχύ της εξόδου, πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \quad (6.202)$$

Για να το κάνουμε αυτό, ορίζουμε το *Ισοδύναμο Εύρος Ζώνης Θορύβου - Noise-Equivalent Bandwidth*, B_{neq} , ως

$$B_{neq} = \frac{1}{2H_{max}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \quad (6.203)$$

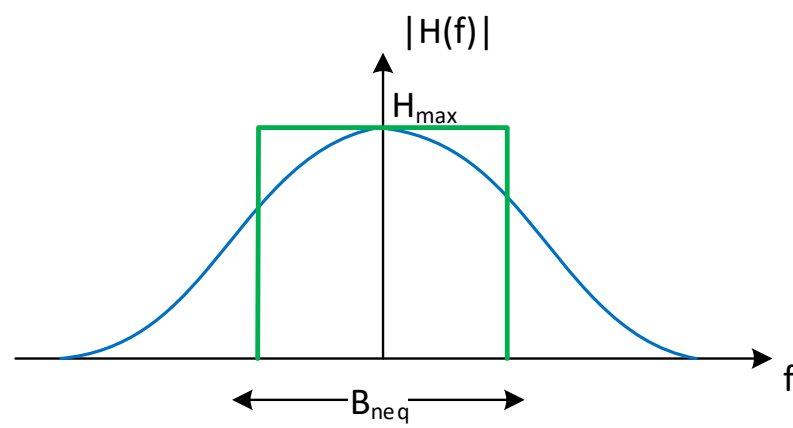
με H_{max} τη μέγιστη τιμή του $|H(f)|$. Το Ισοδύναμο Εύρος Ζώνης Θορύβου ορίζεται ως το εύρος ζώνης ενός τετραγωνικού παλμού (στη συχνότητα) ο οποίος περιέχει την ίδια ισχύ θορύβου με αυτήν του πραγματικού φίλτρου $H(f)$. Το Ισοδύναμο Εύρος Ζώνης Θορύβου για ένα τυπικό φίλτρο απόκρισης φάσματος $|H(f)|$ φαίνεται στο Σχήμα 6.10. Αυτό σημαίνει ότι το εμβαδό κάτω από το τετραγωνικό παλμό είναι ίδιο με το εμβαδό του $|H(f)|^2$. Με βάση αυτόν τον ορισμό θα έχουμε

$$P_Y = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \quad (6.204)$$

$$= \frac{N_0}{2} \times 2B_{neq}H_{max}^2 \quad (6.205)$$

$$= N_0B_{neq}H_{max}^2 \quad (6.206)$$

Έτσι ο υπολογισμός της ισχύος της εξόδου είναι απλή υπόθεση, γιατί συνήθως το B_{neq} δίδεται από τους κατασκευαστές των φίλτρων.



Σχήμα 6.10: Ισοδύναμο Εύρος Ζώνης Θορύβου.