Κεφάλαιο 4

Ανάλυση Σημάτων και Συστημάτων στο Πεδίο της Συχνότητας

Ως τώρα, η όποια ανάλυση συζητήσαμε για σήματα και συστήματα περιελάμβανε αποκλειστικά το χώρο του χρόνου. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γνωρίσουμε μια άλλη θεώρηση ενός σήματος (και κατά συνέπεια, ενός συστήματος). Αυτή η θεώρηση λέγεται Ανάλυση Fourier και θα ασχοληθούμε αρκετά με αυτή.

Θα ξεκινήσουμε πρώτα με τη μελέτη *περιοδικών* σημάτων, δηλ. σημάτων άπειρων σε διάρκεια, που επαναλαμβάνουν ένα τμήμα τους, τη λεγόμενη *βασική τους περίοδο*, ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Επειδή όμως η ερώτηση ''*αφού τα περιοδικά σήματα δεν υπάρχουν πουθενά στη φύση, ούτε μπορούν να παραχθούν στο εργαστήριο*[1], *τι ενδιαφέρον έχουν από τη σκοπιά του μηχανικού;*'' έρχεται πολύ εύκολα στο μυαλό, οφείλουμε μια απάντηση. Η απάντηση περιλαμβάνει δυο - τουλάχιστον - συνιστώσες:

1. Για διδακτικούς λόγους: τα περιοδικά σήματα είναι εύκολα στο χειρισμό τους, και τα συμπεράσματα που βγαίνουν από τη μελέτη τους μπορούν να γενικευθούν εύκολα για απεριοδικά σήματα (τα οποία υπάρχουν στη φύση και μπορούν να μελετηθούν στο εργαστήριο).

2. Για πρακτικούς λόγους: σκεφτείτε ότι και η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα θεωρητικό κατασκεύασμα που δεν υπάρχει στην πράξη, όμως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η σημασία της ήταν θεμελιώδης για την κατανόηση της συμπεριφοράς των συστημάτων. Ακριβώς το ίδιο ισχύει και για τα περιοδικά σήματα – μπορεί να μην υπάρχουν στη φύση, αλλά η μελέτη τους μας προσφέρει πολύτιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά των συστημάτων.

Μερικές σελίδες αργότερα, θα διαβάσετε για την *ανάλυση σε Σειρές Fourier*, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά απλά μια μέθοδος αλλαγής οπτικής γωνίας. Ναι, τόσο απλά! Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να δούμε ένα σήμα (ή ένα σύστημα) σε έναν διαφορετικό χώρο, το χώρο των *συχνοτήτων*. Το πώς, θα το δείτε σύντομα. Το *γιατί* όμως είναι ένα σοβαρό ερώτημα, και το παρακάτω παράδειγμα πιστεύουμε θα σας πείσει για την αναγκαιότητα του να μεταβαίνουμε και σε άλλους χώρους πλην αυτού του χρόνου.

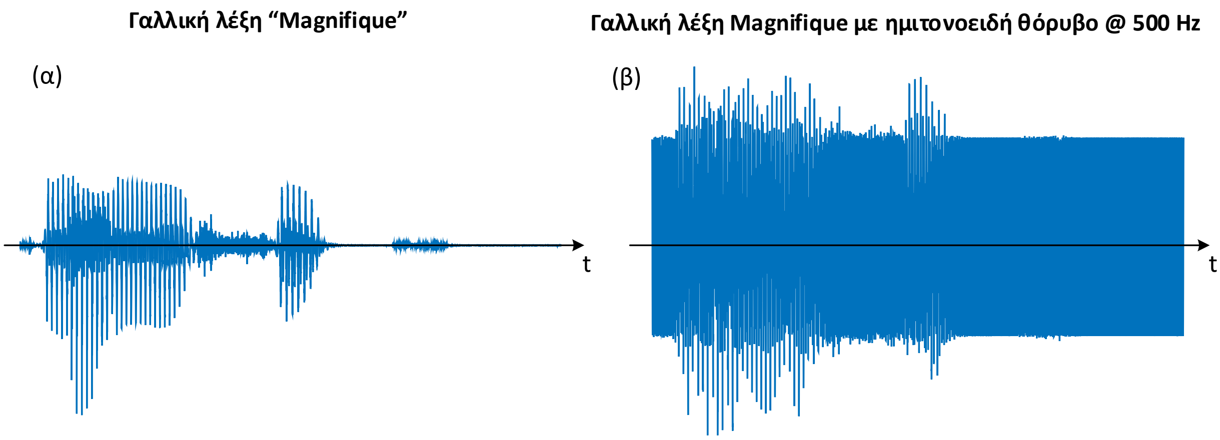
4.1 Μια μικρή εφαρμογή - κίνητρο

Έστω ότι έχουμε ένα σήμα φωνής στο πεδίο του χρόνου, όπως αυτό του Σχήματος 4.1(α). Πρόκειται για τη Γαλλική λέξη ''magnifique''[2]. Ας υποθέσουμε οτι για κάποιο λόγο, ένα ισχυρό ημίτονο πλάτους 0.5, των 500 Hz (θυμηθείτε, 500 Hz σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο, το ημίτονο έχει επαναλάβει τη βασική του περιοδο 500 φορές) προστίθεται στο σημα φωνής, και το οποίο ημίτονο θεωρείται ως ανεπιθύμητο, δηλαδή ως ''θόρυβος ''[3]. Το αποτέλεσμα στο χώρο του χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 4.1(β). Θα θέλαμε να ανακτήσουμε πίσω το αρχικό σήμα χωρίς το θόρυβο. Ασφαλώς στην πράξη δε γνωρίζουμε σχεδόν ποτέ τις ακριβείς παραμέτρους (συχνότητα, πλάτος, φάση) του ημιτόνου, οπότε ας ''προσποιηθούμε'' και σε αυτό το παράδειγμα ότι το ανεπιθύμητο ημίτονο μας είναι εντελώς άγνωστο.

[1] Μην ξεχνάτε ότι τα περιοδικά σήματα ξεκινούν από το $-\infty$ και καταλήγουν στο $+\infty$.

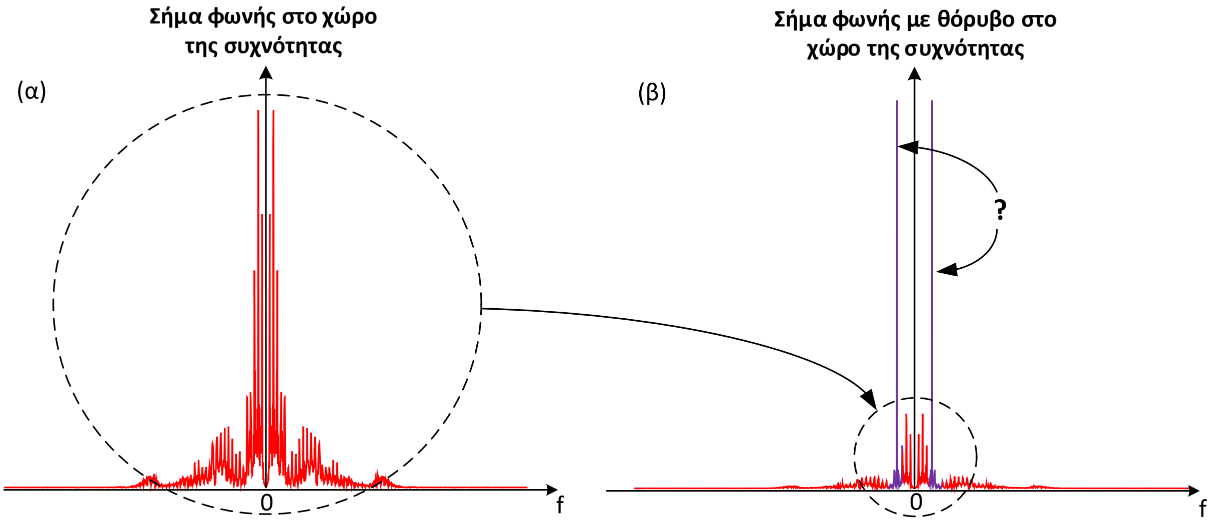
[2] Προφέρεται ''μανιφίκ'' που σημαίνει ''υπέροχος, θαυμάσιος, μαγευτικόσ''.

[3] Το παράδειγμα αυτό δεν απέχει απ' την πραγματικότητα – στα αεροπλάνα, όταν βγαίνει μια ανακοίνωση από τα μικρόφωνα του πιλοτηρίου, ακούγεται πάνω στη φωνή του πιλότου ένα ημίτονο στα 400 Hz, λόγω του ότι η ηλεκτρική ισχύς ειναι στα 400 Hz, εν αντιθέσει με τα σπίτια μας, που είναι $50 - 60$ Hz...



Σχήμα 4.1: *(α) Σήμα φωνής με και (β) χωρίς ημιτονοειδή θόρυβο.*

Όπως μπορείτε να δείτε, είναι τρομερά δύσκολο στην πράξη να ξεχωρίσουμε/ανακτήσουμε το σήμα μας στο πεδίο του χρόνου, μια και φαίνεται να έχει θαφτεί μέσα στο "θόρυβο" του ημιτόνου. Αν θέλαμε να το δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, θα πρέπει να γνωρίζουμε την πλήρη περιγραφή του "θορύβου", δηλ. το πλάτος, τη συχνότητα, και τη φάση του ημιτόνου. Στην πράξη, σπάνια μπορούμε να γνωρίζουμε αυτά τα χαρακτηριστικά. Όμως, αν χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία που θα συζητήσουμε στη συνέχεια, δηλαδή την οπτική πλευρά του πεδίου της συχνότητας, τότε για το καθαρό σήμα θα έχετε το διάγραμμα του Σχήματος 4.2(α), ενώ για το "αλλοιωμένο"



Σχήμα 4.2: *(α) Σήμα φωνής και (β) σήμα φωνής με ημιτονοειδή θόρυβο στο πεδίο των συχνοτήτων.*

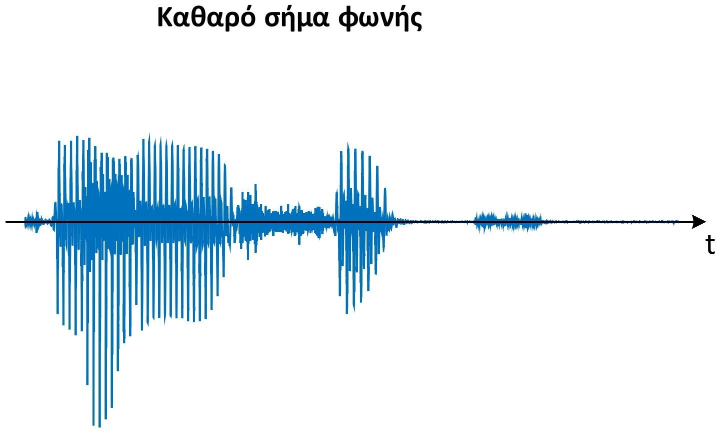
σήμα, θα έχετε το διάγραμμα του Σχήματος 4.2(β). Παρατηρήστε δυο πράγματα:

1. Ο οριζόντιος άξονας είναι πλέον η *συχνότητα* (σε Hz) στα Σχήματα 4.2, και όχι πια ο χρόνος. Πρόκειται για *ακριβώς* τα ίδια σήματα των Σχημάτων 4.1 μόνο που τα βλέπουμε σε έναν άλλο *χώρο*, αυτόν των συχνοτήτων. Το γιατί οι γραφικές παραστάσεις έχουν αυτό το σχήμα, και γιατί φαίνεται να υπάρχουν αρνητικές συχνότητες, θα το συζητήσουμε πολύ σύντομα.

2. Προσέξτε επίσης την αλλαγή της κλίμακας στα διαγράμματα αυτά. Στο διάγραμμα 4.2(β) παρατηρούμε ότι υπάρχουν δυο ισχυρές συνιστώσες - προσέξτε την αλλαγή της κλίμακας - εκατέρωθεν του μηδενός, οι οποίες έχουν σημειωθεί με διαφορετικό χρώμα και είναι εμφανές ότι δεν ανήκουν στο Σχήμα 4.2(α). Αυτές οι συνιστώσες έχουν σημειωθεί με ερωτηματικό και ίσως μπορείτε να μαντέψετε ότι βρίσκονται στις θέσεις $f = \pm 500$ Hz. Σίγουρα λοιπόν αυτές οι δυο μεγάλες κατακόρυφες "γραμμές" οφείλονται στο ημίτονο που προστέθηκε εκ των υστέρων επάνω στο σήμα της φωνής. Το υπόλοιπο σήμα είναι το ίδιο και έχει σημειωθεί με διακεκκομμένες ελλείψεις στα διαγράμματα.

Βλέπουμε λοιπόν τώρα ότι αυτός ο νέος χώρος, ο χώρος των συχνοτήτων, είναι πολύ πιο βοηθητικός στην προσπάθειά μας να ανακτήσουμε το σήμα μας. Η περιγραφή του σήματος σε αυτόν τον χώρο σίγουρα δε μοιάζει καθόλου με την περιγραφή του στο πεδίο του χρόνου, όμως είναι πολύ βολική για το πρόβλημα που συζητάμε. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να μηδενίσουμε τις ισχυρές συνιστώσες που βλέπουμε ότι δεν ανήκουν στο ''καθαρό'' σήμα φωνής (είναι τιμές ενός σήματος, αν το έχουμε καταγεγραμμένο μπορούμε να τις ''πειράξουμε''). Έτσι, θα μπορέσουμε να εξαφανίσουμε το ενοχλητικό σήμα, μια και γνωρίζουμε ότι αντιστοιχεί στον ενοχλητικό ''θόρυβο''. Πράγματι, αν μηδενίσουμε αυτή τη συχνότητα, και αντιστρέψουμε τη διαδικασία πίσω στο χρόνο, θα πάρουμε το Σχήμα 4.3!

Ποιός ήταν ο σκοπός όλου αυτού του – υπεραπλουστευμένου, είναι η αλήθεια – παραδείγματος; Ο σκοπός συνοψίζεται στην εξής παρατηρηση: *Αν μπορούσαμε να έχουμε ένα μαθηματικό εργαλείο που μας μετατρέπει ένα οποιοδήποτε σήμα στο χώρο του χρόνου σε ένα αντίστοιχο στο χώρο των συχνοτήτων, δηλ. θα μπορούσε να μας γράψει το όποιο σήμα $x(t)$ ως συνάρτηση ημιτόνων κάποιων συγκεκριμένων συχνοτήτων (η οποία μπορεί να παρασταθει γραφικά όπως στο Σχήμα 4.2, όπως θα δείτε σύντομα), τότε πολύ εύκολα θα μπορούσαμε να κάνουμε πράγματα που στο πεδίο του χρόνου θα ήταν πολύ δύσκολα ή και αδύνατα!*



Σχήμα 4.3: *Αποθορυβοποιημένο Σήμα Φωνής.*

Το παραπάνω παράδειγμα, όπου απλά μηδενίζουμε μια συχνότητα (δηλ. μηδενίζουμε το πλάτος του αντίστοιχου ημιτόνου – η συχνότητα, ως τιμή, δεν μπορεί να ''μηδενιστεί'') η οποία είναι ανεπιθύμητη, είναι *ένα* μόνο από τα εκατοντάδες παραδείγματα, όπου η αλλαγή χώρου μας λύνει τα χέρια. Αυτό το μαθηματικό εργαλείο μας είναι ήδη γνωστό εδώ και πολλά χρόνια και δεν είναι άλλο από την **Ανάλυση Fourier**...[4]

4.2 Απλές αναπαραστάσεις στο χώρο της συχνότητας

Πώς λοιπόν θα μπορούσαμε να έχουμε μια γραφική παρασταση ενός σήματος στο χώρο των συχνοτήτων; Αυτό το ερώτημα ισοδυναμεί με το πώς θα μπορούσαμε να έχουμε μια μαθηματική έκφραση στο χώρο των συχνοτήτων ενός σήματος που μας δίνεται στο πεδίο του χρόνου. Η πιο απλή τέτοια αναπαράσταση φυσικά δεν είναι άλλη από της απλής μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης, συχνότητας f_0:

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}, \;\; A > 0 \tag{4.1}$$

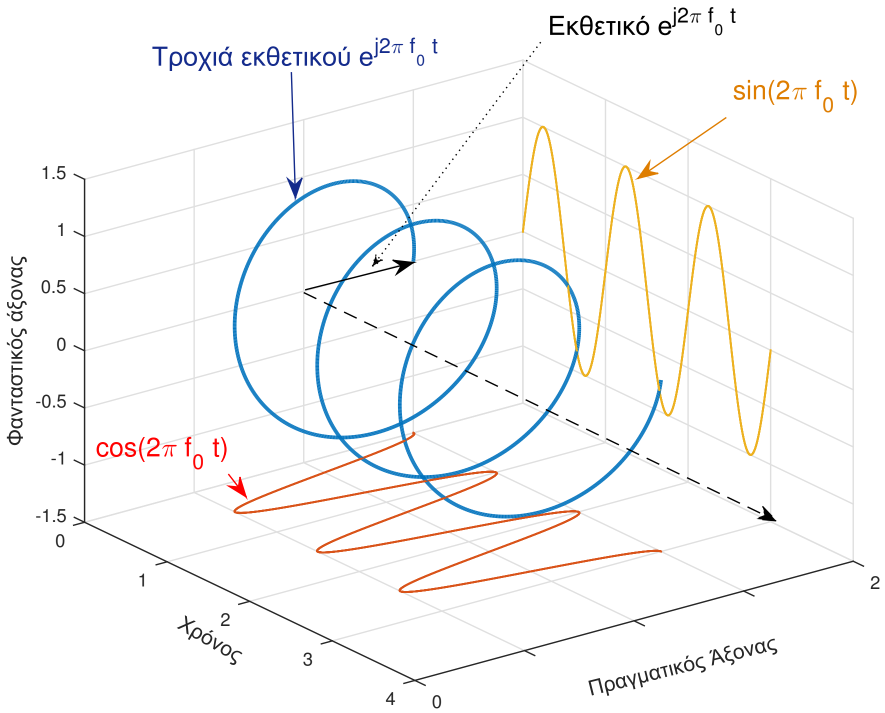
Είναι ένα σήμα που ορίζεται στο χρόνο, με πλάτος A, και με συχνότητα f_0, η οποία είναι σταθερή και συμβολίζει το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί στο μιγαδικό επίπεδο ανά δευτερόλεπτο. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο *συντελεστής* της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης $e^{j2\pi f_0 t}$ είναι η ποσότητα A, πραγματικός θετικός αριθμός. Έχουμε ξαναδεί αυτό το σήμα - γνωρίζουμε ότι αποτελεί ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο, του οποίου το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ισούνται με

$$\Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A\cos(2\pi f_0 t) \tag{4.2}$$

$$\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = A\sin(2\pi f_0 t) \tag{4.3}$$

και, ως υπενθύμιση, αναπαρίσταται όπως στο Σχήμα 4.4. Μια τέτοια αναπαράσταση, παρ΄ ό,τι καθόλα αληθής, δεν είναι ιδιαίτερα βολική. Οπότε, γι΄ αυτό το σήμα, μια διδιάστατη απεικόνιση φαίνεται στο διάγραμμα στο χώρο της συχνότητας στο Σχήμα 4.5. Δυο άξονες, με οριζόντιο τον άξονα των συχνοτήτων και κατακόρυφο τον άξονα του πλάτους, με μια κατακόρυφη γραμμή στη συχνότητα f_0, ύψους A, η οποία συμβολίζει το συντελεστή της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης συχνότητας f_0. Αυτή είναι η αναπαράσταση που ζητάμε και ονομάζεται **φάσμα - spectrum**!

[4]Επειδή ίσως το σκεφτήκατε... αν το ωφέλιμο σήμα $x(t)$ έχει από μόνο του πληροφορία στη συχνότητα ± 500 Hz πριν την πρόσθεση του ημιτόνου, τότε προφανώς αυτή η πληροφορία θα χαθεί με την παραπάνω διαδικασία, και άρα το σήμα που θα πάρουμε στο πεδίο του χρόνου δε θα είναι ακριβως ίδιο με το αρχικό.



Σχήμα 4.4: *Μιγαδική εκθετική συνάρτηση* $Ae^{j2\pi f_0 t}$.

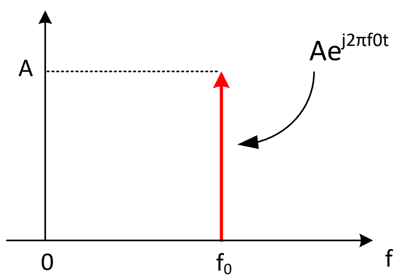
Φυσικά το σήμα που επιλέξαμε είναι το απλούστερο που μπορούσαμε να σκεφτούμε, αλλά δεν παύει να είναι ένα μιγαδικό σήμα! Αν είχαμε ένα πραγματικό σήμα όπως το

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t), \ \ A > 0 \tag{4.4}$$

τότε πώς θα σχεδιάζαμε αυτή τη γραφική αναπαράσταση; Πολύ απλά, γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Euler ότι

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t} \tag{4.5}$$

Οι συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων με συχνότητες $\pm f_0$ είναι τώρα $A/2$, και είναι θετικοί και πραγματικοί συντελεστές. Να λοιπόν που τώρα έχουμε ένα άθροισμα από δυο εκθετικά συχνοτήτων $\pm f_0$, οπότε θα έχουμε ένα διάγραμμα με δυο κατακόρυφες γραμμές που φυσικά αναπαριστούν αυτά τα δυο περιστρεφόμενα διανύσματα: μια στη συχνότητα $-f_0$ και μια στη συχνότητα f_0 Hz, με πλάτη $A/2$. Ας δούμε αυτά τα σχήματα μαζί, τόσο στο χρόνο όσο και στη συχνότητα, στο Σχήμα 4.6. Θα θέλαμε φυσικά η πληροφορία που μας δίνεται από τη φασματική αναπαράσταση του σήματος να είναι ισοδύναμη με αυτή του χρόνου. Δηλ. να μπορούμε, βλέποντας αυτή τη γραφική παράσταση, να καταλαβαίνουμε αμέσως για ποιά μαθηματική μορφή σήματος πρόκειται στο πεδίο του χρόνου. Πιο τυπικά, η μαθηματική/γραφική μορφή στο χώρο της συχνότητας να μπορεί να μετατραπεί *μοναδικά* σε μια μαθηματική μορφή στο πεδίο του χρόνου. Στο παράδειγμά μας, είναι έτσι τα πράγματα; Αρκεί η συχνότητα και το πλάτος που αναγράφονται στη φασματική αναπαράσταση για να περιγράψει πλήρως ένα *οποιοδήποτε* ημίτονο; Η απάντηση είναι όχι! Διότι ένα ημίτονο στη γενική του μορφή γράφεται ως



Σχήμα 4.5: *Απλό παράδειγμα συχνοτικής ανάλυσης.*

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi), \ \ A > 0, \ \ \phi \in [-\pi, \pi) \tag{4.6}$$

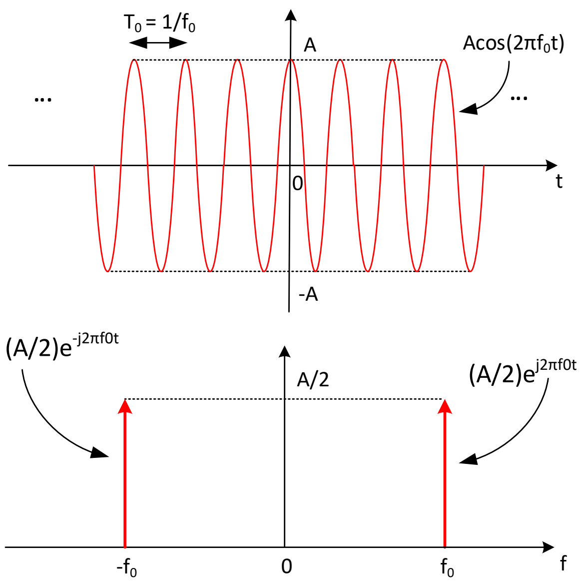
$$= \frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t}e^{j\phi} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t}e^{-j\phi} \tag{4.7}$$

$$= \left(\frac{A}{2}e^{j\phi}\right)e^{j2\pi f_0 t} + \left(\frac{A}{2}e^{-j\phi}\right)e^{-j2\pi f_0 t} \tag{4.8}$$

$$= Z_0 e^{j2\pi f_0 t} + Z_0^* e^{-j2\pi f_0 t} \tag{4.9}$$

Παρατηρήστε τώρα ότι εδώ πλέον οι συντελεστές των εκθετικών, Z_0, Z_0^*, είναι *μιγαδικοί*, και συγκεκριμένα συζυγείς! Αυτοί οι μιγαδικοί συντελεστές ονομάζονται **phasors - φάσορες**, αλλά ο όρος αυτός δε θα χρησιμοποιηθεί συχνά στη συνέχεια.

Αυτό τι σημαίνει; Σημαίνει ότι αν δούμε τη μιγαδική συνάρτηση $Z_0 e^{j2\pi f_0 t}$ ως ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα, τότε αυτό έχει μια αρχική φάση ϕ (δηλ. για $t = 0$ το διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον πραγματικό οριζόντιο άξονα), η οποία δεν μπορεί να παρασταθεί εύκολα στο ίδιο διάγραμμα με το πλάτος $\frac{A}{2}$. Τα ακριβώς ίδια ισχύουν και για το περιστρεφόμενο διάνυσμα $Z_0^* e^{-j2\pi f_0 t}$. Άρα στη γενικότερη μορφή ενός ημιτόνου, δε μας αρκεί μια γραφική παράσταση που να δείχνει το συντελεστή του εκθετικού, γιατί πολύ συχνά ο συντελεστής είναι μιγαδικός (δυο μεταβλητές, A, ϕ)! Χρειάζεται με κάποιο τρόπο να αναπαριστούμε και την (αρχική) *φάση* ϕ της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης ως συνάρτηση της συχνότητας. Θυμηθείτε ότι η φάση ενός ημιτόνου σχετίζεται με τη μετατόπισή του σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα.



Σχήμα 4.6: *Απλό παράδειγμα φασματικής ανάλυσης σήματος στους δυο χώρους.*

Όμως πριν απ'όλα χρειάζεται να συμφωνήσουμε σε κάτι: οι συντελεστές Z_i, Z_i^* των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων $e^{\pm 2\pi f_0 t}$ πρέπει να βρίσκονται σε *πολική* μορφή, δηλ.

$$Z_i = A_i e^{j\phi_i}, \quad \text{με } A_i = |Z_i| > 0, \;\; \phi_i \in [-\pi, \pi] \tag{4.10}$$

Οπότε τελικά, η πλήρης περιγραφή ενός ημιτόνου στο χώρο της συχνότητας περιλαμβάνει δυο φάσματα: ενα που αφορα το πλάτος A_i του μιγαδικού συντελεστή Z_i ως συνάρτηση της συχνότητας (αυτό που έχουμε δει ως τώρα) *και* ένα που αφορα την (αρχική) φάση ϕ_i του μιγαδικού συντελεστή Z_i ως συνάρτηση της συχνότητας. Αυτές οι δυο αναπαραστάσεις λέγονται **φάσμα πλάτους** και **φάσμα φάσης**, αντίστοιχα. Ας δούμε μερικά πιο σύνθετα παραδείγματα.

4.2.1 Περισσότερα παραδείγματα

Παράδειγμα 4.1:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2\cos(2\pi 200 t + \pi/3) + \cos(2\pi 500 t - \pi/6) \tag{4.11}$$

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του.

Λύση:
Προτού σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα, ας δούμε πως αναλύεται αυτό το σήμα. Είναι

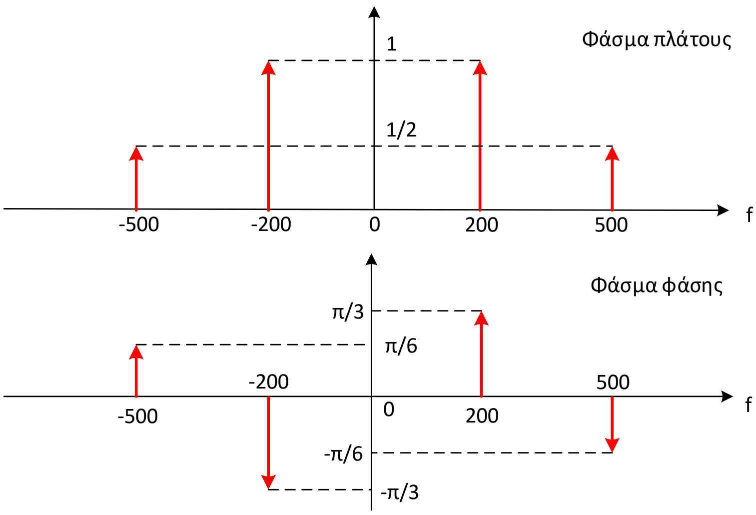
$$x(t) = 2\cos(2\pi 200 t + \pi/3) + \cos(2\pi 500 t - \pi/6) \tag{4.12}$$

$$= e^{j2\pi 200 t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200 t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 500 t} e^{-j\pi/6} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 500 t} e^{j\pi/6} \tag{4.13}$$

$$= \left(e^{j\pi/3}\right) e^{j2\pi 200 t} + \left(e^{-j\pi/3}\right) e^{-j2\pi 200 t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/6}\right) e^{j2\pi 500 t} + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/6}\right) e^{-j2\pi 500 t} \tag{4.14}$$

με τις παρενθέσεις να περικλείουν τους συντελεστές των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων συχνότητας $\pm 200, \pm 500$ Hz. Όπως βλέπετε εδώ, τώρα οι συντελεστές αυτοί είναι μιγαδικοί, $1e^{\pm j\pi/3}$, $\frac{1}{2}e^{\pm j\pi/6}$. Οι συντελεστές αυτοί είναι ήδη στην επιθυμητή πολική μορφή, $A_i e^{j\phi_i}$, με $A > 0$ και $\phi \in [-\pi, \pi]$.

Από αυτήν την αναπαράσταση, μας είναι ξεκάθαρο πώς να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης, καθώς τα A_i θα σχεδιαστούν στο φάσμα πλάτους και τα ϕ_i στο φάσμα φάσης, στις αντίστοιχες συχότητες φυσικά. Δείτε το Σχήμα 4.7.■



Σχήμα 4.7: *Παράδειγμα 4.1: ανάλυσης σήματος.*

Προφανώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους και φάσης οποιωνδήποτε ημιτόνων ή συνδυασμού τους με απλή εφαρμογή των σχέσεων του Euler. Προσέξτε όμως την περίπτωση που οι συντελεστές δεν καταλήγουν τόσο εύκολα σε πολική μορφή. Δείτε το παρακάτω, πιο γενικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.2:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2\cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \tag{4.15}$$

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του.

Λύση:
Οι σχέσεις του Euler μας δίνουν

$$x(t) = 2\cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \tag{4.16}$$

$$= e^{j2\pi 200t}e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t}e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2j}e^{j2\pi 500t}e^{-j\pi/6} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi 500t}e^{j\pi/6} \tag{4.17}$$

$$= \left(e^{j\pi/3}\right)e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3}\right)e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/6}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/6}\right)e^{-j2\pi 500t} \tag{4.18}$$

Εδώ, οι συντελεστές των εκθετικών συναρτήσεων είναι $1e^{\pm j\pi/3}$ και $\pm\frac{1}{2j}e^{\pm j\pi/6}$. Ενώ με τους συντελεστές $1e^{\pm j\pi/3}$ των δυο πρώτων στη σειρά εκθετικών συναρτήσεων είμαστε ευχαριστημένοι (είναι ήδη σε πολική μορφή), δεν ισχύει το ίδιο για τους δυο επόμενους, τους $\pm\frac{1}{2j}e^{\pm j\pi/6}$. Ο λόγος; Αυτοί οι όροι $\pm\frac{1}{j}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, και όχι πραγματικοί, όπως απαιτείται.

Μπορούμε όπως να τους μετατρέψουμε σε φάση, γιατί από τις σχέσεις του Euler ξέρουμε ότι

$$-\frac{1}{j} = j = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2) = e^{j\pi/2} \tag{4.19}$$

$$\frac{1}{j} = -j = \cos(-\pi/2) + j\sin(-\pi/2) = e^{-j\pi/2} \tag{4.20}$$

Οπότε θα έχουμε

$$x(t) = 2\cos(2\pi 200t + \pi/3) + \sin(2\pi 500t - \pi/6) \tag{4.21}$$

$$= \left(e^{j\pi/3}\right)e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3}\right)e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/6}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/6}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (4.22)$$
$$= \left(e^{j\pi/3}\right)e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3}\right)e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j\pi/6}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j\pi/6}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (4.23)$$
$$= \left(e^{j\pi/3}\right)e^{j2\pi 200t} + \left(e^{-j\pi/3}\right)e^{-j2\pi 200t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/3}\right)e^{j2\pi 500t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/3}\right)e^{-j2\pi 500t} \quad (4.24)$$

Προσέξτε ότι όλοι οι μιγαδικοί συντελεστές ($e^{\pm j\pi/3}, \frac{1}{2}e^{\pm j\pi/3}$) των εκθετικών συναρτήσεων $e^{\pm j2\pi 200t}, e^{\pm j2\pi 500t}$ είναι σε πολική μορφή, δηλ. στη μορφή $A_i e^{j\phi_i}$, με $A > 0$ και $\phi \in [-\pi, \pi]$. Αυτός ήταν άλλωστε και ο σκοπός μας. Τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης! Κάντε το! ☺■

Ας δούμε ένα ακόμα πλήρες παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.3:

Έστω το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 3 - 2\cos(2\pi 10t + \pi/9) + \sin(2\pi 15t - \pi/7) \quad (4.25)$$

Ζητείται η περίοδός του, το φάσμα πλάτους, και το φάσμα φάσης του.

Λύση:
Για την περίοδο, γνωρίζουμε ήδη ότι ένα άθροισμα ημιτόνων είναι περιοδικό αν ο λόγος των συχνοτήτων (ή των περιόδων του) είναι λόγος ακεραίων αριθμών. Προφανώς ο λόγος των αριθμών 10 και 15 (συχνότητες σε Hz) είναι λόγος ακεραίων, άρα το σήμα είναι περιοδικό. Η θεμελιώδης του συχνότητα είναι

$$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ}\{10, 15\} = 5 \text{ Hz} \quad (4.26)$$

και άρα η περίοδός του είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.2$ δευτερόλεπτα. Ας αναλύσουμε τώρα το σήμα μας σε μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις, ώστε να σχεδιάσουμε τα φάσματα. Θα είναι

$$x(t) = 3 - 2\cos(2\pi 10t + \pi/9) + \sin(2\pi 15t - \pi/7) \quad (4.27)$$
$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (4.28)$$

Εδώ πρέπει λοιπόν, αφ' ενός να χειριστούμε τους όρους $\pm 1/j$ όπως κάναμε και πριν, αφ' ετέρου να δούμε πως θα χειριστούμε τους συντελεστές των δυο πρώτων εκθετικών συναρτήσεων συχνότητας ± 10 Hz. Κατάρχάς, ας μετατρέψουμε τα $\pm 1/j$ κατάλληλα, στους δυο τελευταίους όρους, αφήνοντας ήσυχους προς το παρόν τους πρώτους. Έχουμε:

$$x(t) = 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2j}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(-\frac{1}{2j}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (4.29)$$
$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j\pi/7}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j\pi/7}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (4.30)$$
$$= 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\right)e^{j2\pi 15t} + \left(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\right)e^{-j2\pi 15t} \quad (4.31)$$

Πλέον τα δυο τελευταία εκθετικά συχνότητας ± 15 Hz έχουν μιγαδικούς συντελεστές γραμμένους σε πολική μορφή. Ας δούμε τώρα τα δυο πρώτα εκθετικά, συχνότητας ± 10 Hz, που έχουν αρνητικό πρόσημο.

Γνωρίζουμε από τις σχέσεις του Euler ότι

$$e^{j\pi} = -1 \quad (4.32)$$
$$e^{-j\pi} = -1 \quad (4.33)$$

Ποιόν από τους δυο όρους θα διαλέξουμε; Η απάντηση είναι *"και τους δυο!"* Απλά θα προσέξουμε η επιλογή που θα κάνουμε να μας δίνει συνολική φάση που θα ανήκει στο $[-\pi, \pi]$! Αν δεν ανήκει εκεί, αλλάζουμε τις επιλογές μας! Ας το δούμε.

Επιλέγουμε να αντικαταστήσουμε το -1 της εκθετικής συνάρτησης συχνότητας 10 Hz με το $e^{-j\pi}$, και το -1

της εκθετικής συνάρτησης συχνότητας -10 Hz με το $e^{j\pi}$. Άρα θα έχουμε:

$$x(t) = 3 - (e^{j\pi/9})e^{j2\pi 10t} - (e^{-j\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \Big(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\Big)e^{j2\pi 15t} + \Big(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\Big)e^{-j2\pi 15t} \tag{4.34}$$

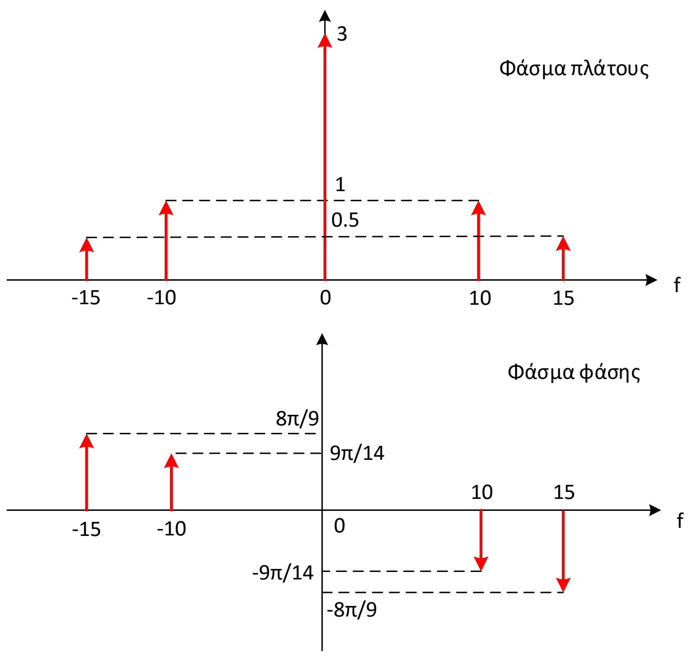
$$= 3 + (e^{j\pi/9}e^{-j\pi})e^{j2\pi 10t} + (e^{-j\pi/9}e^{-j\pi})e^{-j2\pi 10t} + \Big(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\Big)e^{j2\pi 15t} + \Big(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\Big)e^{-j2\pi 15t} \tag{4.35}$$

$$= 3 + (e^{-j8\pi/9})e^{j2\pi 10t} + (e^{j8\pi/9})e^{-j2\pi 10t} + \Big(\frac{1}{2}e^{-j9\pi/14}\Big)e^{j2\pi 15t} + \Big(\frac{1}{2}e^{j9\pi/14}\Big)e^{-j2\pi 15t} \tag{4.36}$$

Βλέπετε ότι με αυτήν την αντιστοίχιση, οι φάσεις που προέκυψαν στους μιγαδικούς συντελεστές των δυο πρώτων εκθετικών συχνότητας ± 10 Hz είναι $\pm 8\pi/9$, που φυσικά ανήκουν στο $[-\pi, \pi]$, ενώ τα μέτρα τους είναι μοναδιαία (πραγματικά και θετικά). Αν κάναμε ανάποδα τις αντιστοιχίες των -1 με τις σχέσεις του Euler, τότε θα προέκυπταν φάσεις με τιμές $\pm 10\pi/9$, που ασφαλώς χρειάζονται περαιτέρω μετατροπή για να ανήκουν στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Τέλος, η σταθερά $c = 3$ πρέπει να εκφραστεί συχνοτικά. Είναι ένας απλός πραγματικός αριθμός, άρα που θα τον συμπεριλάβουμε; Προφανώς στο φάσμα πλάτους. Σε ποιά συχνότητα; Η απάντηση είναι τελικά απλή, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το $c = 3$ γράφεται ως $3e^{j0t}$. Άρα το $c = 3$ είναι το πλάτος της μηδενικής συχνότητας, $f = 0$. Άρα θα το βάλουμε στο φάσμα πλάτους, στη συμβολή των αξόνων, δηλ. στη θέση $f = 0$[5]!

Πλέον όλες οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις έχουν μιγαδικούς συντελεστές που είναι γραμμένοι σε πολική μορφή. Εύκολα ξεχωρίζουμε τα πλάτη από τις φάσεις, οπότε μπορούμε να σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα. Δείτε το Σχήμα 4.8. Πριν κλείσουμε αυτό το παράδειγμα, παρατηρήστε το εξής: το φάσμα πλάτους έχει *άρτια*



Σχήμα 4.8: *Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 4.3.*

συμμετρία, ενώ το φάσμα φάσης έχει *περιττή* συμμετρία! Αυτό ισχύει, όπως θα δούμε και παρακάτω, για *κάθε πραγματικό* περιοδικό σήμα $x(t)$ που αναλύουμε, και προέρχεται από το γεγονός ότι οι μιγαδικοί συντελεστές των θετικών συχνοτήτων που βρήκαμε είναι συζυγείς με τους αντίστοιχους των αρνητικών συχνοτήτων. Είναι ένας καλός τρόπος να ελέγχετε τα αποτελέσματά σας.■

Σχεδίαση Φασμάτων Εκθετικών Αναπαραστάσεων

Συνοψίζοντας, για το σχεδιασμό φάσματος πλάτους και φάσης σε ένα άθροισμα εκθετικών (ή ημιτόνων που τα μετατρέπουμε σε εκθετικά), φροντίζουμε να μετατρέψουμε όλους τους συντελεστές των εκθετικών σε πολική μορφή, δηλ. με θετικούς πραγματικούς αριθμούς ως μέτρο, και προσέχοντας η φάση που προκύπτει να ανήκει στο $[-\pi, \pi]$. Αυτό γίνεται μετατρέποντας τα αρνητικά πρόσημα συντελεστών σε φάση με τη σχέση $e^{\pm j\pi} = -1$, καθώς και τους όρους $\pm 1/j = \mp j$ σε $e^{\pm k\pi/2} = \pm j$.

[5] Τι θα συνέβαινε αν αντί για $c = 3$ ήταν $c = -3$ ο σταθερός όρος; Τότε θα τον γράφαμε ως $c = -3 = 3e^{j\pi}e^{j0t}$, και το πλάτος $A = 3$ θα άνηκε στο φάσμα πλάτους, ενώ η φάση π στο φάσμα φάσης, στην ίδια θέση, $f = 0$!

Δεν καταλήγουν, προφανώς, ομως όλοι οι συνδυασμοί ημιτόνων σε περιοδικό σήμα. Για παράδειγμα, το παραπάνω σημα $x(t)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = \text{M.K.}\Delta\{200, 500\} = 100$ Hz, και άρα περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.01$ δευτερόλεπτα. Όμως, το σήμα $y(t) = \cos(2\pi 50t) - \sin(5t - \pi/4)$ ΔΕΝ είναι περιοδικό, γιατί δεν υπάρχει ο Μ.Κ.Δ των δυο συχνοτήτων (ή αλλιώς, ο λόγος των συχνοτήτων τους δεν είναι λόγος ακεραίων). Εμείς όμως ενδιαφερομαστε ιδιαίτερα για τα περιοδικά σήματα, σε πρώτη φαση. Όταν το σήμα που μας δίνεται είναι σε μορφή αθροίσματος ή γινομένου ημιτόνων, τοτε μπορούμε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και τύπων του Euler, να το γράψουμε σε μορφη αθροίσματος ημιτόνων ή εκθετικών και να σχεδιάσουμε φάσματα πλάτους και φάσης σημάτων, οπως παραπάνω, άσχετα αν είναι το σήμα περιοδικό ή όχι.

Ας δούμε δυο ακόμα παραδείγματα, όπου το σήμα προς ανάλυση δεν είναι σε μορφή αθροίσματος ημιτόνων.

Παράδειγμα 4.4:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t) \tag{4.37}$$

Βρείτε την περίοδο T_0 του σήματος.

Λύση:

Για να βρούμε την περίοδο, θα πρέπει να γράψουμε το $x(t)$ ως άθροισμα ημιτόνων ή/και συνημιτόνων. Είναι:

$$\begin{aligned}
x(t) = \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t) &= \left(\frac{1}{2j}e^{j5\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j5\pi t}\right)^2\left(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\right) &(4.38)\\
&= \left(\frac{1}{4j^2}e^{j10\pi t} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j}e^{j5\pi t}e^{-j5\pi t} + \frac{1}{4j^2}e^{-j10\pi t}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\right) &(4.39)\\
&= \left(-\frac{1}{4}e^{j10\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-j10\pi t}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\right) &(4.40)\\
&= -\frac{1}{8}e^{j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4}e^{j22\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j22\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{j12\pi t} &(4.41)\\
&= \frac{1}{8}e^{j\pi}e^{j32\pi t} + \frac{1}{8}e^{-j\pi}e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4}e^{j22\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j22\pi t} + \frac{1}{8}e^{-j\pi}e^{-j32\pi t} + \frac{1}{8}e^{j\pi}e^{j12\pi t} &(4.42)\\
&= \frac{1}{4}\cos(2\pi 6t + \pi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 11t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 16t + \pi) &(4.43)
\end{aligned}$$

Προφανώς, η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι: $f_0 = \text{M.K.}\Delta(6, 11, 16) = 1$ Hz. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$ s. ■

Παράδειγμα 4.5:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα

$$x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)} \tag{4.44}$$

(α΄) Ποιά είναι η περίοδος του σήματος;

(β΄) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης του σήματος.

Λύση:

Αναπτύσσουμε το σήμα μας σύμφωνα με τους τύπους του Euler:

$$\begin{aligned}
x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)} &= \frac{\frac{1}{2j}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t})}{\frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})} &(4.45)\\
&= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) &(4.46)
\end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις ταυτότητες:

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) &(4.47)\\
a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) &(4.48)
\end{aligned}$$

για τα εκθετικά του αριθμητή. Θα είναι λοιπόν:

$$x(t) = \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) = \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}[(e^{jt})^2 - (e^{-jt})^2 + (e^{jt})^3 - (e^{-jt})^3] \quad (4.49)$$

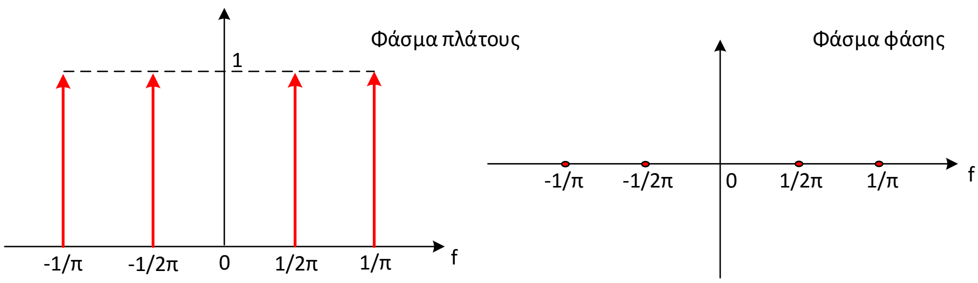
$$= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}[(e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt}) + (e^{jt} - e^{-jt})(e^{j2t} + 1 + e^{-j2t})] \quad (4.50)$$

$$= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t}) = e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t} \quad (4.51)$$

$$= 1 + e^{jt} + e^{-jt} + e^{j2t} + e^{-j2t} = 1 + 2\cos(t) + 2\cos(2t) \quad (4.52)$$

(α′) Με χρήση της κυκλικής συχνότητας $\omega = 2\pi f$, που βολεύει περισσότερο στο παράδειγμα αυτό, η περίοδος του σήματος θα είναι $T_0 = \text{Μ.Κ.Δ.}\{2\pi, 4\pi\} = 2\pi$ s.

(β′) Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 4.9. Παρατηρήστε ότι το φάσμα φάσης είναι μηδενικό για κάθε τιμή συχνότητας. ■



Σχήμα 4.9: Φάσμα Πλάτους και Φάσης Παραδείγματος 4.5.

4.2.2 Μόνο ημίτονα;

Όμως τα περιοδικά σήματα, οπως αυτό της Σχέσης (4.11), έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα όταν τα αναπτύσουμε σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Αυτά τα εκθετικά *έχουν συχνότητες που ειναι ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας του σήματος*! Παρατηρήστε ξανά ότι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος της Σχέσης (4.11) είναι 100 Hz. Οι συχνότητες του σήματος είναι ακέραιες πολλαπλάσιες του 100, δηλ. $\pm 200, \pm 500$. Αυτό ακριβώς αντικατοπτρίζεται και στο φάσμα πλάτους και φάσης.

Τι γίνεται όμως αν το περιοδικό σήμα που μας δίνεται *δεν* είναι σε μορφή αθροίσματος/γινομένου/πηλίκου ημιτόνων; Αν είναι ένας *περιοδικός* τριγωνικός ή τετραγωνικός παλμός[6], τότε ποιό είναι το συχνοτικό του περιεχόμενο; Άρα φυσιολογικά προκύπτει το ερώτημα αν **μπορούμε να εκφράσουμε ένα πραγματικό περιοδικό σήμα ως άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, δηλ. ημιτόνων (μέσω των σχέσεων Euler), με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους. Αν μπορούμε, τότε υπό ποιές συνθήκες και με ποιό σφάλμα (αν υπάρχει);**. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται από τη θεωρία της *Ανάλυσης σε Σειρές Fourier*! Πριν φτάσουμε όμως εκεί, θα ήταν πολύ χρήσιμο για τη διαίσθησή μας και την ομαλή μετάβαση και κατανόηση των Σειρών Fourier, να μελετήσουμε το γενικότερο πρόβλημα της προσέγγισης ενός οποιουδήποτε σήματος από άλλα σήματα.

4.3 Προσέγγιση Σημάτων από Σήματα

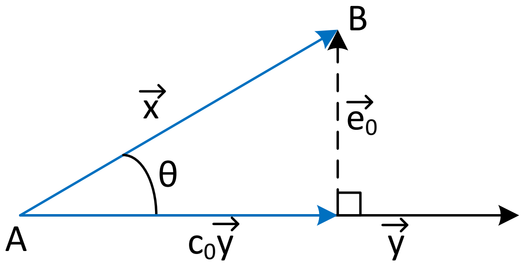
Στις εφαρμοσμένες επιστήμες, η προσέγγιση πολύπλοκων σημάτων από άλλα απλούστερα είναι πολύ συχνό φαινόμενο. Μάλιστα, μια τέτοια προσέγγιση κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, όταν εκφράσαμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ ως συνεχές άθροισμα μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα. Η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα θεμελιώδες σήμα στη μελέτη των συστημάτων, όπως ήδη είδαμε. Στη μελέτη περιοδικών σημάτων, το αντίστοιχο θεμελιώδες σήμα είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα, $e^{j2\pi f_0 t}$, και αυτό φάνηκε ξεκάθαρα στην προηγούμενη παράγραφο, στα απλά παραδείγματα που παρουσιάστηκαν. Η ανάλυση που ακολουθεί σε αυτήν την παράγραφο ξεκινά με έννοιες οι οποίες είναι πιο οικείες στον αναγνώστη, όπως η έννοια των *διανυσμάτων*. Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε τις

[6] Σήματα που εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη στις επιστήμες Η/Υ!

έννοιες στο χώρο των σημάτων, ώστε να καταλήξουμε στην απάντηση του ερωτήματος που τέθηκε νωρίτερα, το οποίο επαναλαμβάνουμε εδώ: *μπορεί να εκφραστεί ένα οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, τα οποία έχουν συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους;*

4.3.1 Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

Γνωρίζουμε ότι ένα *διάνυσμα* στο επίπεδο είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, με αρχή ένα σημείο A και πέρας ένα σημείο B, το οποίο συμβολίζουμε με $\vec{x}$, όπως στο Σχήμα 4.10. Θεωρώντας ένα άλλο διάνυσμα

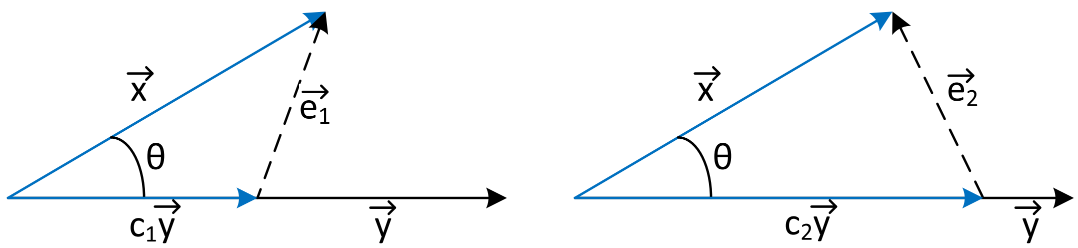


Σχήμα 4.10: *Διάνυσμα $\vec{x}$ και προβολή του, $c_0\vec{x}$, επάνω σε διάνσυμα $\vec{y}$.*

$\vec{y}$, το οποίο σχηματίζει γωνία θ με το διάνυσμα $\vec{x}$, μπορούμε να φέρουμε την κάθετο από το σημείο B επάνω στο διάνυσμα $\vec{y}$. Το διάνυσμα $c_0\vec{y}$ που δημιουργείται ονομάζεται *προβολή* του διανύσματος $\vec{x}$ επάνω στο διάνυσμα $\vec{y}$, με c_0 πραγματική σταθερά. Μπορούμε τότε να εκφράσουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως

$$\vec{x} = c_0\vec{y} + \vec{e}_0 \tag{4.53}$$

με $\vec{e}_0$ όπως στο Σχήμα 4.10. Θα ήταν βολικό να θεωρούμε το διάνυσμα e_0 ως το *διάνυσμα σφάλματος* μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$, γιατί αποτελεί το διάνυσμα που πρέπει να προστεθεί στο διάνυσμα $c\vec{y}$ ώστε αυτό να γίνει ίσο με το διάνυσμα $\vec{x}$. Εύκολα μπορεί κάποιος να σκεφτεί διάφορα διανύσματα σφάλματος $\vec{e}_i$, όπως αυτά που φαίνονται στο Σχήμα 4.11. Οι αντίστοιχες εκφράσεις του διανύσματος $\vec{x}$ συναρτήσει αυτών των διανυσμάτων σφάλματος



Σχήμα 4.11: *Διάφορα δυανύσματα σφάλματος $\vec{e}_i$.*

και του διανύσματος $\vec{y}$ είναι

$$\vec{x} = c_1\vec{y} + \vec{e}_1 \tag{4.54}$$
$$\vec{x} = c_2\vec{y} + \vec{e}_2 \tag{4.55}$$

και τα αντίστοιχα διανύσματα σφάλματος είναι

$$\vec{e}_0 = \vec{x} - c_0\vec{y} \tag{4.56}$$
$$\vec{e}_1 = \vec{x} - c_1\vec{y} \tag{4.57}$$
$$\vec{e}_2 = \vec{x} - c_2\vec{y} \tag{4.58}$$

βάζοντας μαζί και το διάνυσμα σφάλματος e_0, της αρχικής μας προσέγγισης. Αν θέλαμε να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως προσέγγιση του διανύσματος $\vec{y}$, δηλ.

$$\vec{x} = c_i\vec{y} \approx \vec{y} \tag{4.59}$$

τότε ποιά από τις (συνολικά άπειρες) εκφράσεις του διανύσματος $\vec{x}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{y}$ και $\vec{e}_i$ είναι η ''καλύτερη''; Αν και θα μπορούσε κανείς να θέσει διάφορα κριτήρια για την εύρεση της καλύτερης έκφρασης, η πιο διαισθητικά προφανής είναι αυτή που σχετίζεται με το μήκος του διανύσματος σφάλματος, $\vec{e}_i$: όσο μικρότερο το μήκος του διανύσματος σφάλματος, τόσο ''καλύτερη'' η προσέγγιση του διανύσματος $\vec{y}$ από το διάνυσμα $\vec{x}$. Αυτή η προσέγγιση ονομάζεται *προσέγγιση ελάχιστου σφάλματος*. Σε ποιά περίπτωση λοιπόπν είναι το μήκος $|\vec{e}_i|$ ελάχιστο; Η διαίσθησή μας ξανά δεν λαθεύει: όταν το διάνυσμα $\vec{e}_i$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$, δηλ. όπως το διάνυσμα $\vec{e}_0$ στο Σχήμα 4.10. Για να ολοκληρώσουμε την εύρεση της προσέγγισης, αρκεί να βρούμε τη σταθερά c_0. Από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζουν τα διανύσματα αυτά, έχουμε

$$c_0|\vec{y}| = |\vec{x}|\cos(\theta) \Longrightarrow c_0|\vec{y}|^2 = |\vec{y}||\vec{x}|\cos(\theta) = \vec{x}\cdot\vec{y} \Longrightarrow c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y} \tag{4.60}$$

με $\vec{x}\cdot\vec{y}$ το **εσωτερικό γινόμενο** μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$.

Η παραπάνω σχέση εγείρει μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις.

- Αν το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$, δηλ. $\vec{x} \perp \vec{y}$, τότε η Σχέση (4.60) δίνει $c = 0$. Άρα καταλαβαίνουμε ότι δεν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα επάνω στο $\vec{y}$ που να γράφεται ως προσέγγιση του $\vec{x}$ με την έννοια της προβολής.
- Η σχέση $\vec{x} \perp \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = 0$ ονομάζει τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ ως **ορθογώνια** μεταξύ τους.

Άρα λοιπόν μπορέσαμε και εκφράσαμε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{y}$ ως

$$\vec{x} \approx c\vec{y} \tag{4.61}$$

με

$$c = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y} \tag{4.62}$$

δηλ. προσεγγίσαμε το διάνυσμα $\vec{x}$ με όρους - και συγκεκριμένα *έναν* όρο - του διανύσματος $\vec{y}$.

4.3.2 Προβολή Σήματος σε Σήμα

Ας επεκτείνουμε τις έννοιες που μόλις συζητήσαμε από το χώρο των διανυσμάτων στο χώρο των σημάτων. Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε ένα σήμα $x(t)$ με όρους ενός άλλου σήματος $y(t)$, τα οποία ορίζονται στο διάστημα $[t_1, t_2]$. Με άλλα λόγια, θέλουμε να βρούμε τη σταθερά c για την οποία η προσέγγιση

$$x(t) \approx cy(t), \quad t_1 \le t \le t_2 \tag{4.63}$$

είναι η ''καλύτερη'' - ας ονομάζουμε αυτήν την προσέγγιση ως *βέλτιση* στο εξής. Ας ορίσουμε τη *συνάρτηση σφάλματος* ως

$$e(t) = \begin{cases} x(t) - cy(t), & t_1 \le t \le t_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.64}$$

Θα θέλαμε αυτή η συνάρτηση σφάλματος να είναι κατά κάποια έννοια ''ελάχιστη'', ώστε η προσέγγισή μας να είναι βέλτιστη. Μια πολύ δημοφιλής μέθοδος εύρεσης της βέλτιστης προσέγγισης είναι μέσω ελαχιστοποίησης της *ενέργειας* της συνάρτησης σφάλματος, η οποία ορίζεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt \tag{4.65}$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε τη σταθερά c για την οποία η τιμή της E_e είναι ελάχιστη στο διάστημα $[t_1, t_2]$, δεδομένων των $x(t), y(t)$. Θέτοντας την παράγωγο της E_e ως προς c ίση με μηδέν, έχουμε:

$$\frac{dE_e}{dc} = 0 \tag{4.66}$$

$$\frac{d}{dc}\Big(\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt\Big) = 0 \tag{4.67}$$

$$\frac{d}{dc}\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt - \frac{d}{dc}\int_{t_1}^{t_2} 2cx(t)y(t)dt + \frac{d}{dc}c^2\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt = 0 \tag{4.68}$$

$$0 - 2c\frac{d}{dc}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt + c^2\frac{d}{dc}\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt}_{E_y} = 0 \tag{4.69}$$

$$2cE_y = 2\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt \tag{4.70}$$

$$c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt \tag{4.71}$$

όπου E_y η ενέργεια του σήματος $y(t)$. Άρα η σταθερά βέλτιστης προσέγγισης c δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt \tag{4.72}$$

Ας συγκρίνουμε την παραπάνω σχέση με την αντίστοιχη που καταλήξαμε για τα διανύσματα:

$$c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt \quad , \quad c = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y} \tag{4.73}$$

Είναι εμφανές ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$ "μεταφράζεται" σε εμβαδό του γινομένου $x(t)y(t)$ στο χώρο των σημάτων! Ας ορίσουμε λοιπόν το **εσωτερικό γινόμενο** δυο σημάτων $x(t)$, $y(t)$ ως

$$\langle x, y\rangle = \int_A x(t)y(t)dt \tag{4.74}$$

με A το πεδίο ορισμού των δυο σημάτων.

Συνολικά λοιπόν, δείξαμε ότι ένα σήμα $x(t)$ μπορεί να προσεγγιστεί βέλτιστα, υπό την έννοια της *ελάχιστης ενέργειας σφάλματος*, από ένα σήμα $y(t)$ ως

$$x(t) \approx cy(t), \;\; t \in [t_1, t_2] \tag{4.75}$$

με

$$c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \frac{1}{E_y}\langle x, y\rangle \tag{4.76}$$

Παρατηρήστε ότι κι εδώ $\langle x, y\rangle = 0$, τότε τα σήματα ονομάζονται **ορθογώνια** μεταξύ τους, και στην παραπάνω βέλτιστη προσέγγιση ισχύει ότι $\langle e, y\rangle = 0$!

Δυο παραδείγματα θα κάνουν την παραπάνω συζήτηση πιο πρακτική και ξεκάθαρη.

Παράδειγμα 4.6:

Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} t, & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.77}$$

Θέλουμε να το προσεγγίσουμε μέσω του σήματος $y(t) = \sin(t)$ στο $-\pi \leq t \leq \pi$.

(α΄) Δείξτε ότι η βέλτιστη, με την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, προσέγγιση του $x(t)$ από το $y(t)$ είναι η

$$x(t) \approx cy(t) = 2\sin(t), \;\; -\pi \leq t \leq \pi \tag{4.78}$$

(β΄) Σχεδιάστε το σήμα $cy(t) = 2\sin(t)$ στον ίδιο άξονα με το $x(t)$.

(γ΄) Το σφάλμα της παραπάνω προσέγγισης δίνεται από τη σχέση

$$e(t) = x(t) - cy(t) = t - 2\sin(t), \;\; -\pi \leq t \leq \pi \tag{4.79}$$

Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια σφάλματος $E_e = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^2(t)dt$.

(δ΄) Δείξτε ότι $\langle e, y\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e(t)y(t)dt = 0$, δηλ. ότι τα σήματα $e(t)$, $y(t)$ είναι ορθογώνια.

Λύση:

(α΄) Είναι

$$c = \frac{1}{E_y}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)dt = \frac{1}{E_y}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t dt \tag{4.80}$$

με

$$E_y = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt \tag{4.81}$$

$$= \frac{1}{2}t\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi - \frac{1}{4}\cdot 0 \tag{4.82}$$

$$= \pi \tag{4.83}$$

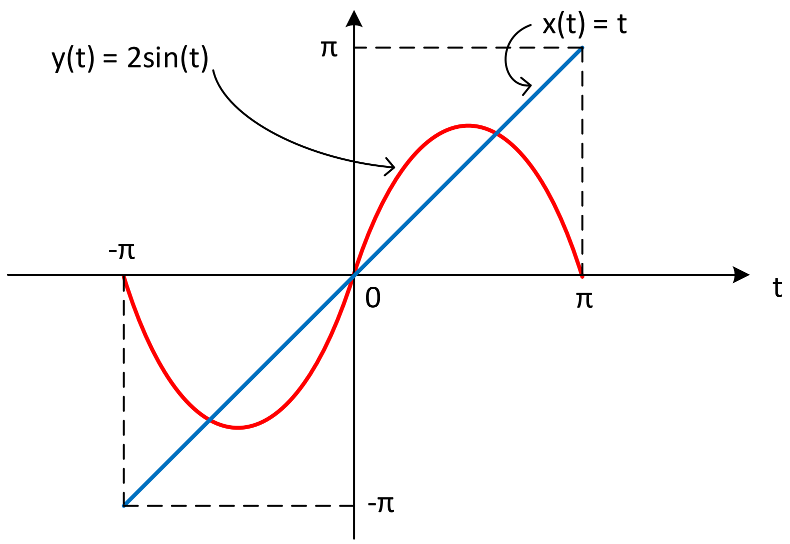
Άρα

$$c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t dt = \frac{1}{\pi}\left(\sin t\Big]_{-\pi}^{\pi} - t\cos t\Big]_{-\pi}^{\pi}\right) = \tag{4.84}$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(0 - \pi\cos\pi + (-\pi)\cos(-\pi)\Big) = \frac{1}{\pi}(\pi + \pi) = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \Longleftrightarrow c = 2 \tag{4.85}$$

Άρα η βέλτιστη προσέγγιση είναι $x(t) = cy(t) = 2\sin t, \quad -\pi \le t \le \pi$

(β΄) Το $x(t)$ και η βέλτιστη προσέγγισή του, $2\sin(t)$, φαίνεται στο Σχήμα 4.12.



Σχήμα 4.12: *Παράδειγμα 4.6: προσέγγιση σήματος από άλλο.*

(γ΄) Έχουμε

$$E_e = \int_{-\pi}^{\pi} e^2(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} (t - 2\sin t)^2 dt \tag{4.86}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 - 4t\sin t + 4\sin^2 t)dt \tag{4.87}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - 4 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt}_{cE_x = 2\pi} + 4 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt}_{E_x = \pi} \tag{4.88}$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big]_{-\pi}^{\pi} - 8\pi + 4\pi = \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3}\right) - 4\pi \tag{4.89}$$

$$= \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi \tag{4.90}$$

(δ΄) Είναι

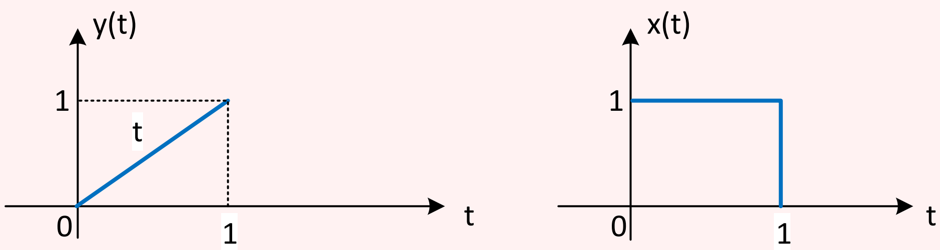
$$\langle e, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e(t)y(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} (t - 2\sin t)\sin t dt \tag{4.91}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt - \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin^2 t dt = 0 \tag{4.92}$$

άρα τα $e(t), y(t)$ είναι ορθογώνια.

Παράδειγμα 4.7:

Έστω τα σήματα του Σχήματος 4.13.



Σχήμα 4.13: *Σχήματα Παραδείγματος* 4.7.

(α΄) Βρείτε τη βέλτιστη, με την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, προσέγγιση του $y(t)$ από το $x(t)$.

(β΄) Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια σφάλματος $E_{e_1} = \int_0^1 e_1^2(t)dt$ για την παραπάνω προσέγγιση.

(γ΄) Βρείτε τη βέλτιστη, με την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, προσέγγιση του $x(t)$ από το $y(t)$.

(δ΄) Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια σφάλματος $E_{e_2} = \int_0^1 e_2^2(t)dt$ για την παραπάνω προσέγγιση.

Λύση:

(α΄) Θέλουμε να βρούμε τη σταθερά c_1 τέτοια ώστε

$$y(t) \approx c_1 x(t) \tag{4.93}$$

Η σταθερά c_1 δίνεται ως

$$c_1 = \frac{1}{E_x}\int_0^1 y(t)x(t)dt = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2} \tag{4.94}$$

αφού

$$E_x = \int_0^1 x^2(t)dt = \int_0^1 dt = t\Big]_0^1 = 1 \tag{4.95}$$

Οπότε το σήμα $y(t)$ γράφεται ως $y(t) \approx \frac{1}{2}x(t), \; t \in [0, 1]$.

(β΄) Η συνάρτηση σφάλματος είναι

$$e_1(t) = t - \frac{1}{2}, \ \ t \in [0,1] \tag{4.96}$$

και η ελάχιστη ενέργεια σφάλματος είναι

$$E_{e_1} = \int_0^1 e_1^2(t)dt = \int_0^1 \Big(t - \frac{1}{2}\Big)^2 dt = \Big(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}t\Big)\Big]_0^1 = \frac{1}{12} \tag{4.97}$$

(γ΄) Θέλουμε να βρούμε τη σταθερά c_2 τέτοια ώστε

$$x(t) \approx c_2 y(t) \tag{4.98}$$

Η σταθερά c_2 δίνεται ως

$$c_1 = \frac{1}{E_y}\int_0^1 x(t)y(t)dt = 3\int_0^1 tdt = 3\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{3}{2} \tag{4.99}$$

αφού

$$E_y = \int_0^1 y^2(t)dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3} \tag{4.100}$$

Οπότε το σήμα $x(t)$ γράφεται ως $x(t) \approx \frac{3}{2}y(t), \ \ t \in [0,1]$.

(δ΄) Η συνάρτηση σφάλματος είναι

$$e_2(t) = 1 - \frac{3}{2}t, \ \ t \in [0,1] \tag{4.101}$$

και η ελάχιστη ενέργεια σφάλματος είναι

$$E_{e_2} = \int_0^1 e_2^2(t)dt = \int_0^1 \Big(1 - \frac{3}{2}t\Big)^2 dt = \frac{1}{4} \tag{4.102}$$

4.3.2.1 Επέκταση σε Μιγαδικά Σήματα

Παρ΄ όλο που η παραπάνω ανάλυση είναι πολύ ενδιαφέρουσα, ο σκοπός μας είναι να ελέγξουμε αν μπορούμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα *μιγαδικών* εκθετικών συναρτήσεων της μορφής $e^{j2\pi k f_0 t}$, τα οποία- όπως βλέπετε - έχουν συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους. Ας επεκτείνουμε λοιπόν την παραπάνω συζήτηση στα μιγαδικά σήματα - η ακριβώς όμοια ανάλυση με πραγματικά σήματα αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Έστω ότι τα σήματα $x(t), y(t)$ είναι μιγαδικά, και ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε το $x(t)$ με χρήση του $y(t)$ στο διάστημα $[t_1, t_2]$. Ορίζοντας τη συνάρτηση σφάλματος $e(t)$ ως

$$e(t) = x(t) - cy(t) \tag{4.103}$$

μπορούμε να αναζητήσουμε τη σταθερά c ελαχιστοποιώντας την ενέργειά της συνάρτησης σφάλματος, η οποία δίνεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - cy(t)|^2 dt \tag{4.104}$$

Έχουμε

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - cy(t)|^2 dt = 0 \tag{4.105}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))(x(t) - cy(t))^* dt = 0 \tag{4.106}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))(x^*(t) - c^*y^*(t))dt = 0 \tag{4.107}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big(x(t)x^*(t) - c^*x(t)y^*(t) - cx^*(t)y(t) + |c|^2 y(t)y^*(t)\Big)dt = 0 \tag{4.108}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big(|x(t)|^2 - c^*x(t)y^*(t) - cx^*(t)y(t) + |c|^2|y(t)|^2\Big)dt = 0 \tag{4.109}$$

Η παραπάνω συνάρτηση ως προς c δεν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο της (λόγω της παρουσίας του όρου $|c|^2$). Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της παραγώγου μιγαδικής συνάρτησης με χρήση των παραγώγων Wirtinger, των οποίων ο ορισμός είναι εκτός σκοπού αυτού του συγγράμματος - θα τις χρησιμοποιήσουμε μόνο για να βρούμε το αποτέλεσμα που ζητάμε. Σύμφωνα με τις παραγώγους Wirtinger, ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial c}c^* = 0 \text{ και } \frac{\partial}{\partial c}cc^* = c^* \tag{4.110}$$

με το συμβολισμό $\partial/\partial c$ να αναφέρεται στη μερική γραμμική παραγώγιση. Θέτοντας λοιπόν ξανά την (μερική) παράγωγο της E_e ως προς c ίση με το μηδέν, έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial c}\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2dt - \frac{\partial}{\partial c}\int_{t_1}^{t_2}c^*x(t)y^*(t)dt - \frac{\partial}{\partial c}\int_{t_1}^{t_2}cx^*(t)y(t)dt + \frac{\partial}{\partial c}|c|^2\int_{t_1}^{t_2}|y(t)|^2dt = 0 \tag{4.111}$$

$$0 - \int_{t_1}^{t_2}x^*(t)y(t)dt + c^*\int_{t_1}^{t_2}|y(t)|^2dt = 0 \tag{4.112}$$

Γνωρίζοντας ότι

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2}|y(t)|^2dt \tag{4.113}$$

για μιγαδικά σήματα, καταλήγουμε

$$-\int_{t_1}^{t_2}x^*(t)y(t)dt + c^*\int_{t_1}^{t_2}|y(t)|^2dt = 0 \tag{4.114}$$

$$c^* = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2}x^*(t)y(t)dt \tag{4.115}$$

$$c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2}x(t)y^*(t)dt \tag{4.116}$$

Άρα η σταθερά βέλτιστης προσέγγισης c δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2}x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{E_y}\langle x, y\rangle \tag{4.117}$$

με $\langle x, y\rangle$ το εσωτερικό γινόμενο μιγαδικών σημάτων $x(t), y(t)$.

Από την τελευταία σχέση, πρέπει να σας είναι προφανές ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle$ είναι διαφορετικό από το εσωτερικό γινόμενο $\langle y, x\rangle$, πράγμα που δεν ίσχυε για πραγματικά σήματα. Για να είναι όμως δυο μιγαδικά σήματα ορθογώνια, αρκεί να ισχύει

$$\langle x, y\rangle = 0 \text{ είτε } \langle y, x\rangle = 0 \tag{4.118}$$

Οποιαδήποτε από τις δυο παραπάνω εξισώσεις ικανοποιείται, είναι αρκετό για να χαρακτηρίσει τα σήματα $x(t), y(t)$ ως ορθογώνια.

4.3.3 Αναπαράσταση Σήματος από Ορθογώνια Σήματα

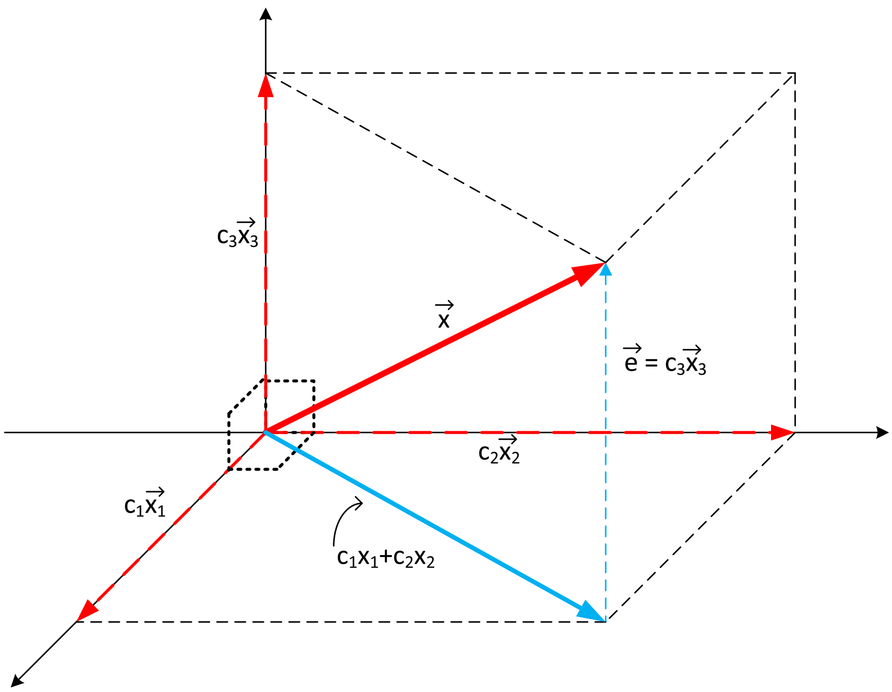
Καταλαβαίνετε ότι λίγα σήματα μπορούν να προσεγγιστούν καλά από ένα μόνο όρο ενός άλλου σήματος. Καιρός να επεκτείνουμε την ανάλυσή μας σε περισσότερα από δυο σήματα. Ας επιστρέψουμε για λίγο στο χώρο των διανυσμάτων. Ας ξεκινήσουμε πρώτα διαισθητικά: γνωρίζετε ότι κάθε σημείο στον τριδιάστατο χώρο - το χώρο που ζούμε και κινούμαστε - μπορεί να παρασταθεί από ένα διάνυσμα και απαιτεί τρεις συντεταγμένες για να περιγραφεί με απόλυτη ακρίβεια, ήτοι το μήκος, το πλάτος, και το ύψος, όπως στο Σχήμα 4.14. Αν λείψει οποιαδήποτε από αυτές τις συντεταγμένες, η περιγραφή σας θα έχει ένα ποσό σφάλματος. Συγκεκριμένα, αν αναπαραστήσουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3 \tag{4.119}$$

τότε το διάνυσμα σφάλματος είναι μηδενικό, αν τα c_i δίνονται από τις σχέσιες

$$c_i = \frac{1}{|\vec{x}_i|^2}\vec{x}\cdot\vec{x}_i \tag{4.120}$$

δηλ. τα $c_i\vec{x}_i$ είναι προβολείς του διανύσματος $\vec{x}$ επάνω στους τρεις άξονες.



Σχήμα 4.14: *Ανάλυση διανύσματος στον τριδιάστατο χώρο.*

Αντίθετα, αν το διάνυσμα $\vec{x}$ γραφεί ως

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 \tag{4.121}$$

τότε το διάνυσμα σφάλματος είναι

$$\vec{e} = \vec{x} - (c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) = c_3\vec{x}_3 \tag{4.122}$$

Όλα αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 4.14.

Μια πρώτη ερώτηση που μπορεί να θέσει κανείς είναι *ποιά είναι τα κατάλληλα διανύσματα $\vec{x}_i$ για τα οποία το διάνυσμα $\vec{x}$ περιγράφεται πλήρως και ακριβώς;*. Καταλαβαίνετε ότι δεν μπορούν να είναι οποιαδήποτε. Η εμπειρία μας οδηγεί στην εύρεση των συντεταγμένων τους: είναι

$$\vec{x}_1 = [1 \;\; 0 \;\; 0] \tag{4.123}$$

$$\vec{x}_2 = [0 \;\; 1 \;\; 0] \tag{4.124}$$

$$\vec{x}_3 = [0 \;\; 0 \;\; 1] \tag{4.125}$$

καθώς αποτελούν τα μοναδιαία διανύσματα για κάθε διάσταση του τριδιάστατου χώρου: μήκος, πλάτος, ύψος.

Ποιά είναι όμως τα χαρακτηριστικά αυτών των διανυσμάτων (ή οποιωνδήποτε άλλων, αν υπάρχουν) που τα κάνει κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα το διάνυσμα $\vec{x}$;

. Μπορείτε να δείξετε ότι είναι *ορθογώνια*: $x_i \perp x_j$ για $i \neq j$. Η Γραμμική Άλγεβρα μας υποδεικνύει - και μπορεί να δειχθεί πολύ εύκολα από τον αναγνώστη - ότι η ορθογωνιότητα συνεπάγεται *γραμμική ανεξαρτησία*. Η γραμμική ανεξαρτησία είναι πολύ σημαντική, καθώς κατά κάποιο τρόπο εννοεί ότι τα διανύσματα αυτά έχουν κάτι ιδιαίτερο, κάτι θεμελιώδες το καθένα, καθώς δεν μπορεί κανένα τους να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

. Παρατηρήστε ότι για ένα διάνυσμα στον τριδιάστατο χώρο απαιτούνται ακριβώς τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα για να τον περιγράψουν πλήρως και ακριβώς. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\vec{x}_i$ συνιστούν ένα *πλήρες σύνολο* ορθογωνίων διανυσμάτων του τριδιάστατου χώρου! Η έννοια της πληρότητας συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει κάποιο διάνυσμα $\vec{x}_4$ στον τριδιάστατο χώρο, το οποίο να είναι ορθογώνιο (και άρα γραμμικά ανεξάρτητο) και με τα τρια προηγούμενα $\vec{x}_i$, για $i = 1, 2, 3$.

Άρα το κλειδί για την αναπαράσταση ενός διανύσματος στον $N-$διάστατο χώρο με μηδενικό διάνυσμα σφάλματος είναι η εύρεση ενός συνόλου N το πλήθος διανυσμάτων που ικανοποιούν την ιδιότητα της *γραμμικής* *ανεξαρτησίας* και της *πληρότητας*. Αυτές οι δυο ιδιότητες μπορούν να εκφραστούν με μια λέξη: το σύνολο αυτό των διανυσμάτων αποτελεί **βάση** του $N-$διάστατου χώρου, δηλ. οποιοδήποτε διάνυσμα ανήκει στο χώρο μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός *όλων* των διανυσμάτων της βάσης, με μηδενικό σφάλμα.

Η επέκταση της παραπάνω ανάλυσης στο χώρο των σημάτων δεν (πρέπει να) είναι προφανής. Αναζητούμε ένα σύνολο σημάτων της μορφής $e^{j2\pi f_k t}$, με $f_k = kf_0$, τα οποία να αναπαριστούν με ''ακρίβεια'' ένα οποιοδήποτε περιοδικό σήμα. Η ανάλυσή μας ως τώρα περιελάμβανε απεριοδικά σήματα, οπότε ας παραμείνουμε σε μια περίοδο του σήματος, $[0, T_0]$. Ας θεωρήσουμε το σύνολο των περιοδικών - με περίοδο k/T_0 το καθένα - μιγαδικών σημάτων

$$\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-N}^{N}, \quad \text{με } k \in \mathbb{Z} \tag{4.126}$$

Ας προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ που ορίζεται στο $[0, T_0]$ ως άθροισμα $2N+1$ τέτοιων σημάτων ως

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.127}$$

με συντελεστές X_k. Ο λόγος των αρνητικών τιμών του k έγκειται στο ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε ένα *πραγματικό* σήμα από άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Γνωρίζουμε από τη σχέση του Euler ότι αυτό μπορεί να συμβεί μόνον όταν οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις έρχονται σε συζυγή ζεύγη (τόσο οι ίδιες όσο και οι συντελεστές τους).

Η συνάρτηση σφάλματος $e(t)$ δίνεται ως

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.128}$$

Η ενέργεια της συνάρτησης σφάλματος, E_e, δίνεται ως

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |e(t)|^2 dt \tag{4.129}$$

Ας βρούμε τα X_i για τα οποία η ενέργεια της συνάρτησης σφάλματος είναι ελάχιστη. Έχοντας ξανά υπόψη τις παραγώγους Wirtinger, είναι

$$\begin{aligned}
\frac{dE_e}{\partial X_i} &= \frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} |e(t)|^2 dt = \frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} \Big] x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Big]^2 dt \\
&= \frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} \Big(x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Big)\Big(x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Big)^* dt \\
&= \frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} \Big(x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Big)\Big(x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t}\Big) dt \\
&= \frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} x^2(t) dt - \frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} x(t) \sum_{k=-N}^{N} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \\
&- \frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} x(t) \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t} dt + \frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} \Big(\sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Big)\Big(\sum_{k=-N}^{N} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t}\Big) dt \qquad (4.130) \\
&= 0 \qquad (4.131)
\end{aligned}$$

Προφανώς

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} x^2(t) dt = 0 \tag{4.132}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} x(t) \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t} dt = \frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} x(t) X_i e^{j2\pi i k f_0 t} dt = \int_0^{T_0} x(t) e^{j2\pi i f_0 t} dt \tag{4.133}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} x(t)\sum_{k=-N}^{N} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t}dt = 0 \tag{4.134}$$

ενώ

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \sum_{k=-N}^{N} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{\partial}{\partial X_i}\int_0^{T_0} \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} X_k X_l^* e^{j2\pi(k-l)f_0 t}dt \tag{4.135}$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_i}\sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} X_k X_l^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t}dt \tag{4.136}$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t}dt \tag{4.137}$$

είναι πολύ σημαντικό. Αν $k = l$, προφανώς το ολοκλήρωμα αυτό ισούται με T_0. Αν $k \neq l$, τότε

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t}dt = \frac{1}{j2\pi(k-l)f_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t}\Big]_0^{T_0} \tag{4.138}$$

$$= \frac{1}{j2\pi(k-l)f_0}(e^{j2\pi(k-l)f_0 T_0} - 1) \tag{4.139}$$

$$= \frac{1}{j2\pi(k-l)f_0}(1-1) = 0 \tag{4.140}$$

Άρα τελικά

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t}dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ T_0, & k = l \end{cases} \tag{4.141}$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathbb{E}$ έχει στοιχεία **ορθογώνια** μεταξύ τους!

Οπότε η Σχέση (4.136) δίνει

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} X_k X_l^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t}dt = \frac{\partial}{\partial X_i} X_i X_i^* \int_0^{T_0} dt = T_0 X_i^* \tag{4.142}$$

Εφαρμόζοντας τις Σχέσεις (4.132,4.133,4.134,4.142) στη Σχέση (4.130) έχουμε

$$\frac{\partial E_e}{\partial X_i} = 0 \tag{4.143}$$

$$-\int_0^{T_0} x(t)e^{j2\pi i f_0 t}dt + T_0 X_i^* = 0 \tag{4.144}$$

$$X_i^* = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{j2\pi i f_0 t}dt \tag{4.145}$$

που *τελικά (!!)* δίνει

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.146}$$

Για τους συντελεστές X_k, μπορεί κανείς να δείξει ότι η ελάχιστη ενέργεια σφάλματος δίνεται από τη σχέση

$$E_e = \int_0^{T_0} x^2(t)dt - T_0\sum_{k=-N}^{N}|X_k|^2 = E_x - T_0\sum_{k=-N}^{N}|X_k|^2 \tag{4.147}$$

Παρατηρήστε ότι η ενέργεια σφάλματος E_e φθίνει όσο αυξάνει το N, δηλ. όσο προσθέτουμε ζεύγη συζυγών μιγαδικών εκθετικών (δηλ. ημιτόνων!). Άρα όταν $N \to +\infty$, θα πρέπει $E_e \to 0$. Όταν αυτό συμβαίνει, τότε το σύνολο $\mathbb{E}$ ονομάζεται **πλήρες**, και τότε η Σχέση (4.127) δεν είναι πια προσέγγιση αλλά ισότητα:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}, \quad t \in [0, T_0] \tag{4.148}$$

υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος πάντα.

Εφόσον το σύνολο $\mathbb{E}$ περιλαμβάνει στοιχεία που είναι ορθογώνια και είναι πλήρες όταν $N \to +\infty$, τότε το σύνολο αυτό αποτελεί **βάση** του χώρου των περιοδικών σημάτων. Η σειρά που περιγράφεται στη Σχέση (4.148) ονομάζεται **Σειρά Fourier**.

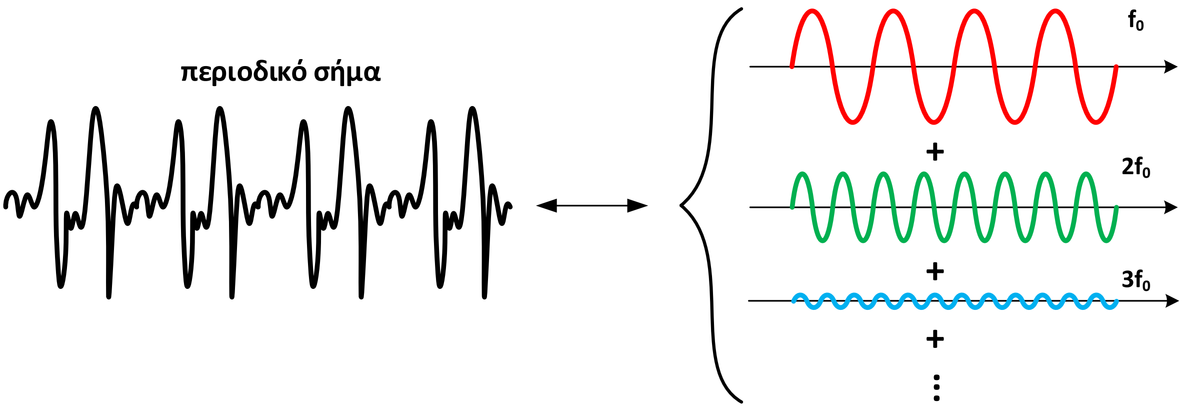
Τέλος, επειδή η ενέργεια σφάλματος E_e φθίνει στο μηδέν, η ενέργεια του αθροίσματος των μιγαδικών εκθετικών ισούται με την ενέργεια του συνολικού σήματος $x(t)$, βάσει της Σχέσης (4.147):

$$E_x = \int_0^{T_0} x^2(t)dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \tag{4.149}$$

Η Σχέση (4.149) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως το **Θεώρημα του Parseval**.

4.4 Ανάλυση σε Σειρές Fourier

Η Ανάλυση Fourier είναι ίσως το βασικότερο εργαλείο ανάλυσης σημάτων, η οποία μας δίνει πληροφορίες για το *συχνοτικό τους περιεχόμενο*, δηλ. για το *ποιές* συχνότητες υπάρχουν στο σήμα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μας πληροφορεί για το *πόσα* και *ποιά* ημίτονα (δηλ. με ποιό πλάτος, συχνότητα, και φάση) πρέπει να προσθέσουμε μεταξύ τους για να πάρουμε το συνολικό σήμα που αναλύουμε. Ένα οπτικό παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 4.15. Με άλλα λόγια, η ανάλυση σε Σειρές Fourier δεν είναι τίποτα παραπάνω από ένα μαθηματικό εργαλείο που μας



Σχήμα 4.15: *Ανάλυση σήματος σε άθροισμα ημιτόνων με ακέραιες πολλαπλάσιες συχνότητες.*

επιτρέπει να γράφουμε ένα οποιδήποτε (ή μάλλον, σχεδόν οποιοδήποτε ☺, όπως θα δούμε σύντομα) περιοδικό, *πραγματικό* σήμα ως ένα άθροισμα ημιτόνων. Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, με περίοδο T_0, αναλύεται σε σειρά Fourier με χρήση των σχέσεων

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}} \tag{4.150}$$

όπου

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt, \;\; k \neq 0} \tag{4.151}$$

και

$$\boxed{X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt} \tag{4.152}$$

με

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \tag{4.153}$$

όπου X_k είναι οι περίφημοι **συντελεστές Fourier**, και η συχνότητα f_0 είναι η γνωστή μας *θεμελιώδης συχνότητα*, γιατί όλα τα εκθετικά στη Σχέση (4.150) έχουν συχνότητες που είναι *ακέραιες πολλαπλάσιες* αυτής. Είδαμε λοιπόν εδώ πως γράφουμε ένα οποιοδήποτε περιοδικό σήμα ως άθροισμα *εκθετικών* μιγαδικών σημάτων, όπως κάναμε στην Παράγραφο 4.2 για τα απλά αθροίσματα ημιτόνων. Η Σειρά Fourier αυτής της μορφής λέγεται **εκθετική ή δίπλευρη σειρά Fourier**.

Μα ένα λεπτό... Πριν είπαμε ότι η ανάλυση Fourier μας αναλύει το σήμα και σε ημίτονα. Πού βρίσκονται αυτά στις παραπάνω σχέσεις; Μα φυσικά, απ΄ τις γνωστές σχέσεις του Euler, μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε εκθετική αναπράσταση, που έχει προκύψει από ανάλυση *πραγματικού* σήματος, σε ημιτονοειδή αναπαράσταση. Θυμηθείτε:

$$\cos(\theta t) = \frac{e^{j(\theta t)} + e^{-j(\theta t)}}{2}, \quad \sin(\theta t) = \frac{e^{j(\theta t)} - e^{-j(\theta t)}}{2j} \tag{4.154}$$

Άρα ουσιαστικά οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις είναι κι αυτές ημίτονα, όταν βρίσκονται σε συζυγή ζεύγη. Ας δούμε πως γίνεται αυτή η μετατροπή.

$$\begin{align} x(t) &= X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.155}\\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.156}\\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \tag{4.157}\end{align}$$

Όπως όμως είπαμε, μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε οι συντελεστές X_k έρχονται σε συζυγή ζεύγη, δηλ. $X_k^* = X_{-k}$. Άρα

$$\begin{align} x(t) &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \tag{4.158}\\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \tag{4.159}\end{align}$$

Όμως

$$X_k^* = \Big(|X_k| e^{j\phi_k}\Big)^* = |X_k|^* (e^{j\phi_k})^* = |X_k| e^{-j\phi_k} \tag{4.160}$$

Άρα

$$\begin{align} x(t) &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \tag{4.161}\\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} \tag{4.162}\\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \tag{4.163}\\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \Big(e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \Big) \tag{4.164}\\ &= \boxed{X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \tag{4.165}\end{align}$$

Άρα δείξαμε ότι κάθε πραγματικό, περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί και ως άθροισμα ημιτόνων με πλάτη $2|X_k|$, συχνότητες kf_0, και φάσεις ϕ_k. Το παραπάνω ανάπτυγμα λέγεται **τριγωνομετρική ή μονόπλευρη Σειρά Fourier**, και δείχνει ξεκάθαρα πώς αναλύεται ένα περιοδικό, πραγματικό σήμα σε ένα άθροισμα από ημίτονα με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους! ■

Πριν πάμε σε παραδείγματα, ας ξεκινήσουμε πρώτα μερικές παρατηρήσεις σχετικά με την ανάλυση σε Σειρές Fourier.

4.4.1 Παρατηρήσεις

1. Ας ξεκινήσουμε από κάτι πολύ σημαντικό: *όλες* οι συχνότητες της Σχέσης (4.150) είναι *ακέραιες πολλαπλάσιες* μιας συγκεκριμένης, της θεμελιώδους συχνότητας, που ορίζεται ώς το αντίστροφο της βασικής περιόδου του σήματος. Αυτό σημαίνει ότι τα φάσματα πλάτους και φάσης που - θα δούμε πως - προκύπτουν θα πρέπει να έχουν γραμμές μόνο στις συχνότητες kf_0, $k \in Z$, και πουθενά αλλού!

2. Το ολοκλήρωμα στη Σχέση (4.151) μας πληροφορεί ότι για να βρούμε τους συντελεστές X_k κάθε εκθετικής συνάρτησης, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το περιοδικό σήμα $x(t)$ με τις περίφημες *συναρτήσεις βάσης*, και για την ακρίβεια τις συζυγείς τους $e^{-j2\pi k f_0 t}$, και να ολοκληρώσουμε το αποτέλεσμα σε μια περίοδο - οποιαδήποτε περίοδο του σήματος, όχι απαραίτητα από 0 ως T_0! Μπορούμε να βάλουμε στα άκρα του ολοκληρώματος όποιο διάστημα μιας βασικής περιόδου μας βολεύει, αρκεί να αποτελεί ένα τμήμα βασικής περιόδου του σήματος! Περισσότερα για τους συντελεστές Fourier σε επόμενη παρατήρηση...

3. Ίσως παρατηρήσατε ότι, για πραγματικά σήματα, ο όρος X_0 εξ' ορισμού δεν είναι τίποτα άλλο παρά το (αλγεβρικό) εμβαδό μιας περιόδου του σήματος. Άρα ο όρος X_0 είναι απλά η μέση τιμή του σήματος. Πραγματικός αριθμός *πάντα*, για πραγματικά σήματα!

4. Αντίθετα, οι συντελεστές X_k, $k \neq 0$ δεν είναι απαραίτητα πραγματικοί αριθμοί, συνήθως μάλιστα είναι μιγαδικοί. Το είδαμε άλλωστε σε προηγούμενες παραγράφους, στα σήματα που μελετήσαμε. Για το λόγο αυτό, οι συντελεστές X_k μπορούν - και συνήθως πρέπει, γιατί μας βοηθά στη σχεδίαση των φασμάτων - να γραφούν σε πολική μορφή:
$$X_k = |X_k|e^{j\angle X_k} = |X_k|e^{j\phi_k} \tag{4.166}$$
Το $|X_k|$ - επανάληψη μήτηρ μαθήσεως - αποτελεί το ***μέτρο*** των συντελεστών Fourier (πάντα θετικό) και το $\angle X_k = \phi_k$ αποτελεί τη ***φάση*** αυτών. Η φάση *πάντα* εκφράζεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Υπάρχουν πολλές ιδιότητες σχετικά με τους συντελεστές X_k ανάλογα με το είδος του σήματος $x(t)$. Για παράδειγμα, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε ισχύει ότι $X_k^* = X_{-k}$, δηλ. οι συντελεστές για αρνητικά k είναι απλά οι συζυγείς συντελεστές των όρων θετικών k. Προσοχή! Αυτό ισχύει μόνο για *πραγματικά*, περιοδικά σήματα $x(t)$!

5. Σημαντικό είναι επίσης να παρατηρήσουμε ότι τα πραγματικά σήματα $x(t)$ που αναπτύσσονται σε Σειρά Fourier ως
$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \tag{4.167}$$
μπορούν να γραφούν ως
$$x(t) = X_0 + 2\Re\Big\{\sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)}\Big\} \tag{4.168}$$
Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα μπορεί να ιδωθεί ως το πραγματικό μέρος ενός αθροίσματος περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, οι οποίες έχουν συχνότητες kf_0 και αρχικές φάσεις ϕ_k. Είναι ενδιαφέρον να παρουσιαστεί αυτή η οπτική στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν.

4.4.2 Ύπαρξη Σειράς Fourier

Είπαμε πιο πριν ότι μπορούμε να γράψουμε *σχεδόν* οποιοδήποτε περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier. Ποιές είναι αυτές οι συνθήκες που καθορίζουν πότε μπορούμε να γράψουμε ένα περιοδικό σήμα ως σειρά Fourier και πότε οχι; Προφανώς τα σήματα που δεν μπορούν να αναπτυχθούν κατά Fourier πρέπει να είναι κάπως ασυνήθιστα. Αν και από τη σκοπιά του μηχανικού δε μας ενδιαφέρουν τέτοια σήματα, μια και υπάρχουν μόνο στη θεωρία, ενδιαφέρον είναι να δούμε ποιές είναι οι συνθήκες που καθορίζουν την ύπαρξη ή όχι του αναπτύγματος Fourier.

Υπάρχουν **δύο** βασικές συνθήκες για την ύπαρξη της σειράς Fourier.

(α') Οι συντελεστές X_k πρέπει να εχουν πεπερασμένο μέτρο, δηλ. $|X_k| < \infty$. Αυτό αποδεικνύεται ότι συμβαίνει μόνον όταν
$$|X_k| = \frac{1}{T_0}\Big|\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\Big| \leq \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|dt < \infty \tag{4.169}$$

Η Σχέση 4.169 ονομάζεται *ασθενής συνθήκη του Dirichlet.* Αν μια συνάρτηση $x(t)$ ικανοποιεί την ασθενή συνθήκη του Dirichlet, η ύπαρξη της σειράς Fourier είναι εγγυημένη, αλλά μπορεί η σειρά να μη συγκλίνει σε κάθε σημείο. Για παράδειγμα, αν ένα σημα $x(t)$ απειρίζεται σε κάποιο σημείο, τότε προφανώς κανένα άθροισμα ημιτόνων δεν μπορει να αναπαραστήσει αυτήν την περιοχή, οπότε η σειρά που θα αναπαριστά το σήμα θα είναι "προβληματική" σε αυτήν την περιοχή, με άλλα λόγια, δε θα συγκλίνει. Παρόμοια, αν ένα σήμα έχει άπειρα σημεία μεγιστου-ελαχίστου σε μια περίοδό του. Έτσι, απαιτούμε μια ακόμα συνθήκη.

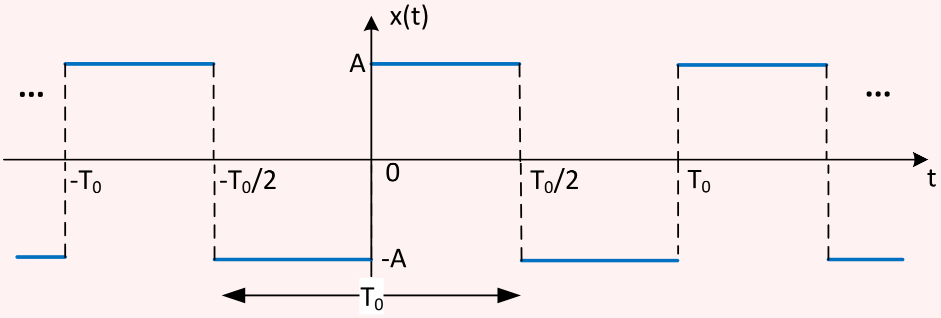
(β′) Το σήμα $x(t)$ πρέπει να εχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων σε μια περίοδό του, και πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένων ασυνεχειών σε μια περίοδό του. Αυτές οι δυο συνθήκες λέγονται *ισχυρές συνθήκες του Dirichlet.* Αξίζει να σημειωθεί οτι οποιοδήποτε σήμα μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση (υπό την προσέγγιση της περιοδικότητας φυσικά) ικανοποιεί τις ισχυρές συνθήκες του Dirichlet, και άρα έχει σειρά Fourier που συγκλίνει. Έτσι, στην πράξη, η φυσική ύπαρξη του σήματος ειναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της σειράς Fourier του.

4.4.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Έχοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις υπόψη μας, ας δούμε τέσσερα χαρακτηριστικά παραδείγματα, πλήρως α-ναλυτικά.

Παράδειγμα 4.8:

Βρείτε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 4.16.



Σχήμα 4.16: *Παράδειγμα 4.8 Ανάλυσης σε Σειρά Fourier.*

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η περίοδός του είναι ίση με T_0 (περιλαμβάνονται σε αυτή δυο παλμοί, ένας πάνω κι ένας κάτω). Αυτό το σήμα λοιπόν γράφεται σε μια περίοδο ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < T_0/2 \\ \\ -A, & 0 \leq T_0/2 < t \leq T_0 \end{cases} \tag{4.170}$$

Θα έχουμε λοιπόν:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} Adt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0}(-A)dt \tag{4.171}$$

$$= \frac{A}{T_0}\int_0^{T_0/2} dt - \frac{A}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} dt = \frac{A}{T_0}t\Big]_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0}t\Big]_{T_0/2}^{T_0} \tag{4.172}$$

$$= \frac{A}{T_0}\Big(\frac{T_0}{2} - 0\Big) - \frac{A}{T_0}\Big(T_0 - \frac{T_0}{2}\Big) = \frac{A}{2}\frac{T_0}{2} - \frac{A}{T_0}T_0 + \frac{A}{T_0}\frac{T_0}{2} \tag{4.173}$$

$$= \frac{A}{2} - A + \frac{A}{2} = 0 \tag{4.174}$$

που ήταν αναμενόμενο, καθώς έχουμε σε μια περίοδο δύο παλμούς ίσου εμβαδού ($AT_0/2$) που βρίσκονται εκατέρωθεν του οριζόντιου άξονα. Οπότε το συνολικό αλγεβρικό εμβαδό είναι μηδέν σε μια περίοδο.

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} Ae^{-j2\pi k f_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} Ae^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.175}$$

$$= \frac{A}{T_0}\int_0^{T_0/2} e^{-j2\pi k f_0 t}dt - \frac{A}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.176}$$

$$= \frac{A}{T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_0^{T_0/2} - \frac{A}{T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_{T_0/2}^{T_0} \tag{4.177}$$

$$= \frac{A}{T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}(e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0) - \frac{A}{T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}(e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}}) \tag{4.178}$$

Ξέρουμε ότι $f_0T_0 = 1$, και με αντικατάσταση έχουμε

$$X_k = \frac{A}{T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}(e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0) - \frac{A}{T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}(e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}}) \tag{4.179}$$

$$= -\frac{A}{j2k\pi}(e^{-jk\pi} - 1) + \frac{A}{j2k\pi}(e^{-j2k\pi} - e^{-jk\pi}) = -\frac{A}{j2k\pi}(e^{-jk\pi} - 1) + \frac{A}{j2k\pi}(1 - e^{-jk\pi}) \tag{4.180}$$

$$= \frac{A}{j2k\pi}(1 - e^{-jk\pi}) + \frac{A}{j2k\pi}(1 - e^{-jk\pi}) = \frac{A}{jk\pi}(1 - e^{-jk\pi}) \tag{4.181}$$

κι επειδή $e^{-jk\pi} = (-1)^k$, έχουμε

$$X_k = \frac{A}{jk\pi}(1-(-1)^k) = \begin{cases} \frac{2A}{jk\pi}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi}e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} \tag{4.182}$$

γιατί προφανώς το $1-(-1)^k$ είναι μηδέν για k άρτια, και 2 για k περιττά. Οπότε σε πρώτη φάση, η Σειρά Fourier μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{k\pi}e^{-j\pi/2}e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.183}$$

ή αλλιώς, περιλαμβάνοντας μόνο τα περιττά k,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2A}{(2k-1)\pi}e^{-j\pi/2}\right)e^{j2\pi(2k-1)f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2A}{(2k-1)\pi}e^{j(2\pi(2k-1)f_0t-\pi/2)} \tag{4.184}$$

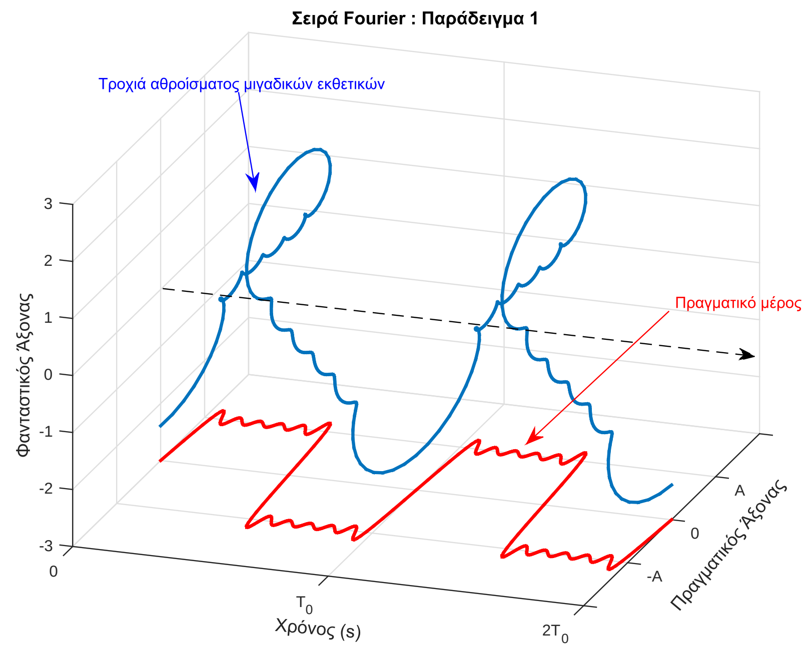
Αυτή λοιπόν είναι η εκθετική σειρά Fourier που αντιστοιχεί στο δεδομένο περιοδικό σήμα $x(t)$. Ας βρούμε και τη μονόπλευρη σειρά Fourier.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty}\frac{4A}{k\pi}\cos\left(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.185}$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4A}{(2k-1)\pi}\sin(2\pi(2k-1)f_0t) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4A}{(2k-1)\pi}\Re\{e^{j(2\pi(2k-1)f_0t-\pi/2)}\} \tag{4.186}$$

Το άθροισμα 11 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 4.17.

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε φάσμα πλάτους και φάσης από τους συντελεστές X_k που βρήκαμε; Κάποιος θα μπορούσε να πει ότι οι συντελεστές X_k είναι ήδη διαθέσιμοι και γραμμένοι σε πολική μορφή. Αυτό όμως είναι λάθος, γιατί ο όρος k στον παρονομαστή του X_k μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Αυτό σημαίνει ότι για $k < 0$, το $\frac{2A}{k\pi}$ θα λάβει αρνητικό πρόσημο, οπότε δεν μπορεί να είναι πλέον μέτρο (δηλ. θετικό). Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να διαχωρίσουμε τις καταστάσεις σε *περιττά* $k > 0$ και $k < 0$, στη σχέση του X_k που βρήκαμε. Η φιλοσοφία είναι η ίδια με αυτή όταν συζητούσαμε για αθροίσματα ημιτόνων και τους μιγαδικούς συντελεστές



Σχήμα 4.17: *Σειρά Fourier Παραδείγματος 4.8 στο μιγαδικό χώρο για 6 μη μηδενικούς όρους.*

τους. Άρα θα έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{k\pi}e^{-j\pi/2} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi}e^{-j\pi/2}, & k>0,\ \text{περιττά} \\ \\ \frac{2A}{(-|k|)\pi}e^{-j\pi/2}, & k<0,\ \text{περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi}e^{-j\pi/2}, & k>0,\ \text{περιττά} \\ \\ -\frac{2A}{|k|\pi}e^{-j\pi/2}, & k<0,\ \text{περιττά} \end{cases} \tag{4.187}$$

$$= \begin{cases} \frac{2A}{k\pi}e^{-j\pi/2}, & k>0,\ \text{περιττά} \\ \\ \frac{2A}{|k|\pi}e^{j\pi}e^{-j\pi/2}, & k<0,\ \text{περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi}e^{-j\pi/2}, & k>0,\ \text{περιττά} \\ \\ \frac{2A}{|k|\pi}e^{j\pi/2}, & k<0,\ \text{περιττά} \end{cases} \tag{4.188}$$

Τώρα έχουμε πλέον την πολική μορφή που θέλουμε. Το μέτρο είναι

$$|X_k| = \frac{2A}{|k|\pi}, \quad k \in \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm7, \cdots\} \tag{4.189}$$

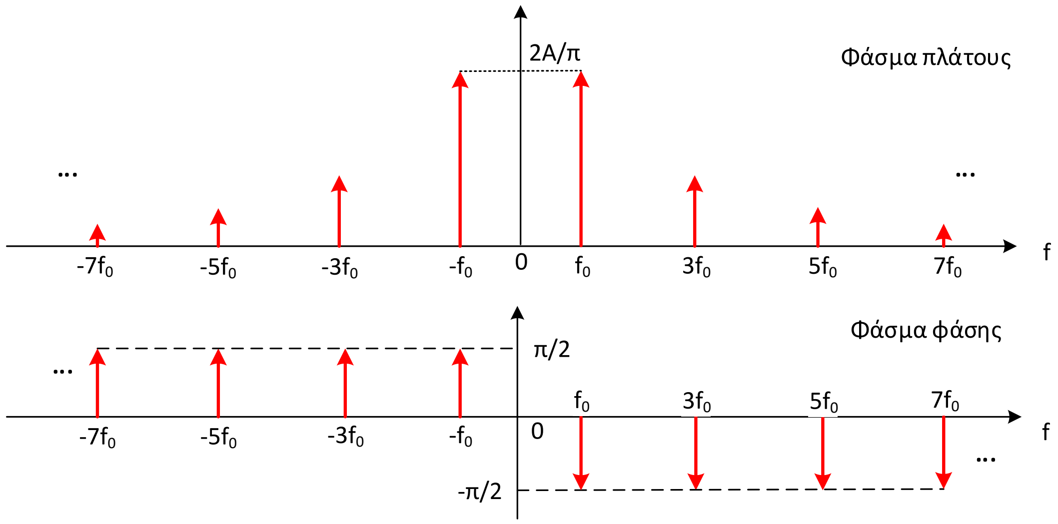
$$X_0 = 0 \tag{4.190}$$

και η φάση είναι

$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} -\pi/2, & k>0 \text{ και περιττά} \\ \pi/2, & k<0 \text{ και περιττά} \end{cases} \tag{4.191}$$

$$\angle X_0 = 0 \tag{4.192}$$

Έτσι, ο σχεδιασμός του φάσματος πλάτους και φάσματος φάσης είναι τετριμμένη υπόθεση, αρκεί να βάλουμε μερικές ενδεικτικές τιμές (λίγες) του k, στις παραπάνω σχέσεις και να λάβουμε τελικά φάσματα όπως αυτό του Σχήματος 4.18.



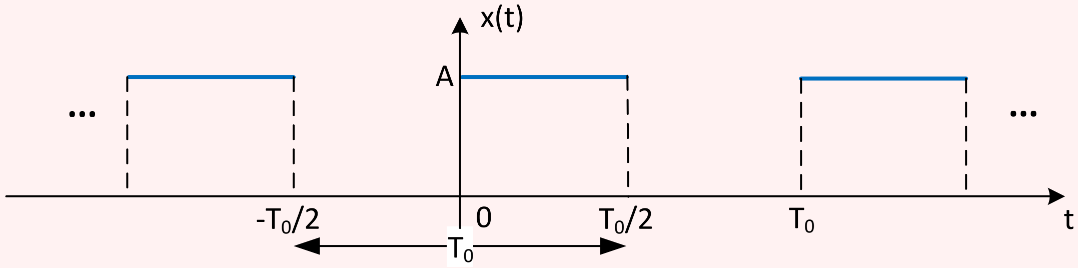
Σχήμα 4.18: *Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 4.8.*

Παράδειγμα 4.9:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του T_0 ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t \leq T_0 \end{cases} \tag{4.193}$$

και φαίνεται στο Σχήμα 4.19.



Σχήμα 4.19: *Περιοδικός Παλμός Παραδείγματος 4.9.*

Λύση:
Εφαρμόζοντας τις σχέσεις μας, θα έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} Adt = \frac{A}{T_0}\int_0^{T_0/2} dt = \frac{A}{T_0}t\Big]_0^{T_0/2} = \frac{A}{T_0}\left(\frac{T_0}{2} - 0\right) = \frac{AT_0}{2T_0} = \frac{A}{2} \tag{4.194}$$

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} Ae^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.195}$$

$$= \frac{A}{T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_0^{T_0/2} = -\frac{A}{j2\pi k}\left(e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - e^0\right) \tag{4.196}$$

$$= -\frac{A}{j2\pi k}\left(e^{-j\pi k} - 1\right) = \frac{A}{j2\pi k}(1 - e^{-j\pi k}) \tag{4.197}$$

Όμως,

$$e^{-j\pi k} = \left(e^{-j\pi}\right)^k = (-1)^k \tag{4.198}$$

άρα

$$X_k = \frac{A}{j2\pi k}(1 - e^{-j\pi k}) = \frac{A}{j2\pi k}(1 - (-1)^k) \tag{4.199}$$

Προφανώς το $1 - (-1)^k$ είναι μηδέν για k άρτια, και $1 - (-1) = 2$ για k περιττά. Οπότε

$$X_k = \frac{A}{j2\pi k}(1 - (-1)^k) = \begin{cases} \dfrac{A}{j\pi k}, & k \text{ περιττά} \\ \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{A}{\pi k}e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \\ \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases} \tag{4.200}$$

Άρα καταλήγουμε ότι

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k}e^{-j\pi/2}e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k}e^{j(2\pi k f_0 t - \pi/2)} \tag{4.201}$$

Η αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά Fourier θα είναι

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό} \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k}e^{j(2\pi k f_0 t - \pi/2)} = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{\pi k}\cos(2\pi k f_0 t - \pi/2) \tag{4.202}$$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k-1)}\cos(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k-1)}\Re\{e^{j(2\pi(2k-1)f_0 t - \pi/2)}\} \tag{4.203}$$

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης. Υπενθυμίζουμε ότι

$$X_k = \frac{A}{\pi k}e^{-j\pi/2} \tag{4.204}$$

και ότι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το k μπορεί να πάρει και αρνητικές περιττές τιμές, οπότε πρέπει να το λάβουμε υπόψη μας στην πολική μορφή. Είναι:

$$X_k = \frac{A}{k\pi}e^{-j\pi/2} = \begin{cases} \dfrac{A}{k\pi}e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \\ \dfrac{A}{(-|k|)\pi}e^{-j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{A}{k\pi}e^{-j\pi/2}, & k > 0, \text{ περιττά} \\ \\ \dfrac{A}{|k|\pi}e^{j\pi/2}, & k < 0, \text{ περιττά} \end{cases} \tag{4.205}$$

Άρα τελικά το μέτρο είναι

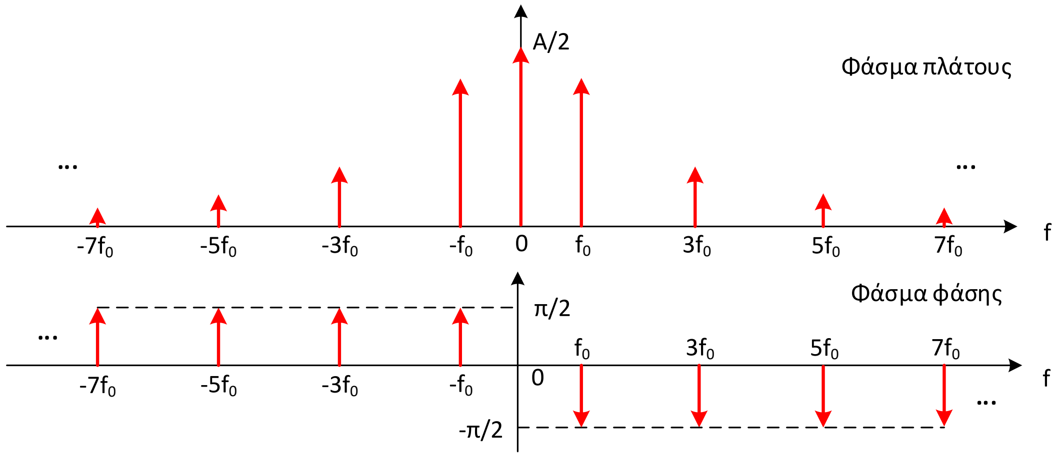
$$|X_k| = \frac{A}{|k|\pi}, \quad k \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \cdots\} \tag{4.206}$$

και η φάση είναι

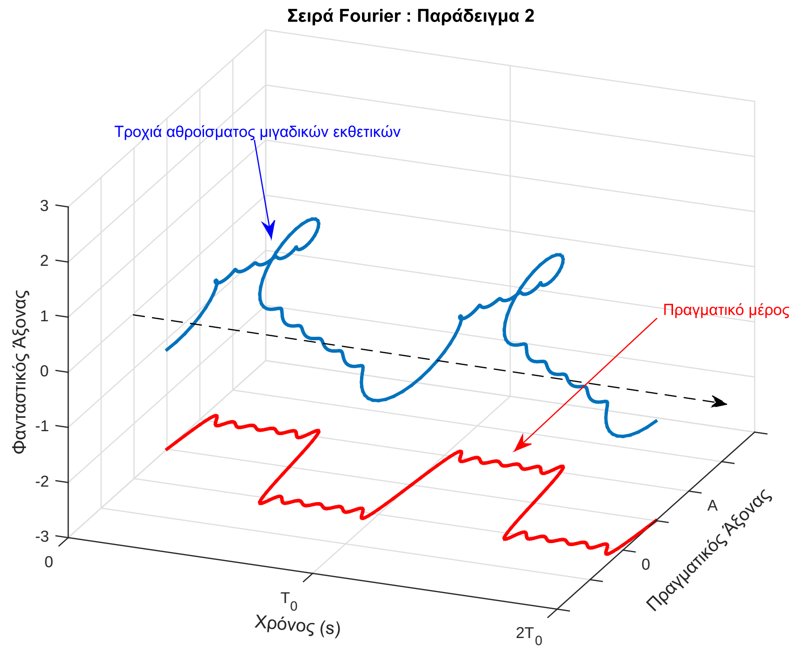
$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} -\pi/2, & k > 0 \text{ και περιττά} \\ \pi/2, & k < 0 \text{ και περιττά} \end{cases} \tag{4.207}$$

Έτσι, ο σχεδιασμός του φάσματος πλάτους και φάσματος φάσης είναι τετριμμένη υπόθεση, αρκεί να βάλουμε μερικές ενδεικτικές τιμές (λίγες) του k, στις παραπάνω σχέσεις και να λάβουμε τελικά φάσματα όπως αυτό του Σχήματος 4.20.

Το άθροισμα 6 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 4.21.



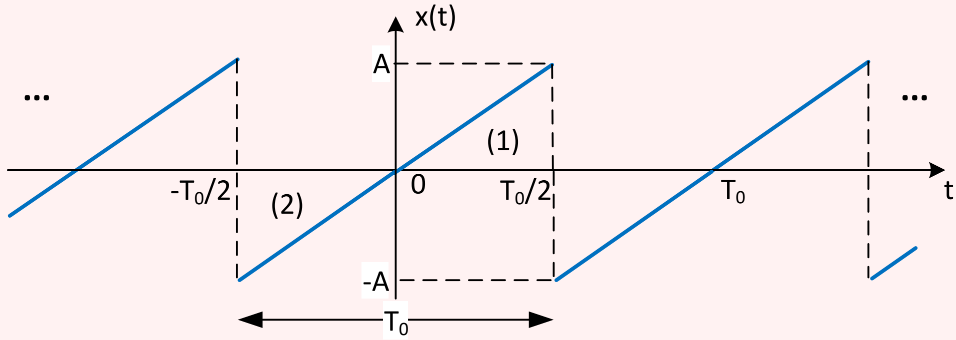
Σχήμα 4.20: *Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 4.9.*



Σχήμα 4.21: *Σειρά Fourier Παραδείγματος 4.9 στο μιγαδικό χώρο για 6 όρους.*

Παράδειγμα 4.10:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.22.



Σχήμα 4.22: *Περιοδικό Σήμα Παραδείγματος 4.10.*

Λύση:
Επιλέγουμε ως περίοδο το διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$. Η πλάγια ευθεία που ορίζεται εκεί περνάει από τα σημεία $(0,0), (T_0/2, A)$, άρα θα έχει τη μορφή

$$y - 0 = \frac{A-0}{T_0/2 - 0}(t-0) \Longleftrightarrow y = \frac{2A}{T_0}t = x(t) \tag{4.208}$$

Έτσι θα έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{2A}{T_0}tdt = 2A\frac{t^2}{2}\Big]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = 0 \tag{4.209}$$

Εναλλακτικά, θέλουμε το εμβαδό του σήματος σε μια περίοδο, επί $1/T_0$. Στο διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$, έχουμε δυο ορθογώνια τρίγωνα (σημειωμένα με (1), (2) στο Σχήμα), που έχουν εμβαδό $T_0/2 \times A = \frac{AT_0}{2}$ το καθένα. Όμως το ένα είναι κάτω από τον άξονα ενώ το άλλο επάνω, άρα το αλγεβρικό άθροισμα είναι μηδέν.

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{2A}{T_0}te^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{2A}{T_0^2}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} te^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.210}$$

Με χρήση του δοσμένου ολοκληρώματος, θα έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{T_0^2}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} te^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{2A}{T_0^2}\left[\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{(-j2\pi k f_0)}\Big(t - \frac{1}{(-j2\pi k f_0)}\Big)\right]_{-T_0/2}^{T_0/2} \tag{4.211}$$

$$= \frac{2A}{T_0^2}\left(-\frac{e^{-j2\pi k f_0 T_0/2}}{j2\pi k f_0}\Big(\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0}\Big) + \frac{e^{j2\pi k f_0 T_0/2}}{j2\pi k f_0}\Big(-\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0}\Big)\right) \tag{4.212}$$

Κάνοντας πράξεις, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις

$$f_0 T_0 = 1 \tag{4.213}$$

$$e^{jk\pi} = (-1)^k \tag{4.214}$$

και συμμαζεύοντας την κατάσταση ☺, έχουμε

$$X_k = \frac{2A}{T_0^2}\frac{e^{-jk\pi}}{(-j2\pi k f_0)}\Big(\frac{T_0}{2} + \frac{1}{j2\pi k f_0}\Big) + \frac{2A}{T_0^2}\frac{e^{jk\pi}}{j2\pi k f_0}\Big(\frac{1}{j2\pi k f_0} - \frac{T_0}{2}\Big) \tag{4.215}$$

$$= \frac{2A}{T_0}\frac{T_0}{2}\frac{(-1)^k}{(-j2\pi k)} + \frac{2A}{T_0}\frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{(-1)^k}{(-j2\pi k)} + \frac{2A}{T_0}\frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{(-1)^k}{j2\pi k} - \frac{2A}{T_0}\frac{T_0}{2}\frac{(-1)^k}{j2\pi k} \tag{4.216}$$

$$= -\frac{(-1)^k}{j2\pi k} - 2A\frac{(-1)^k}{(j2\pi k)^2} + 2A\frac{(-1)^k}{(j2\pi k)^2} \tag{4.217}$$

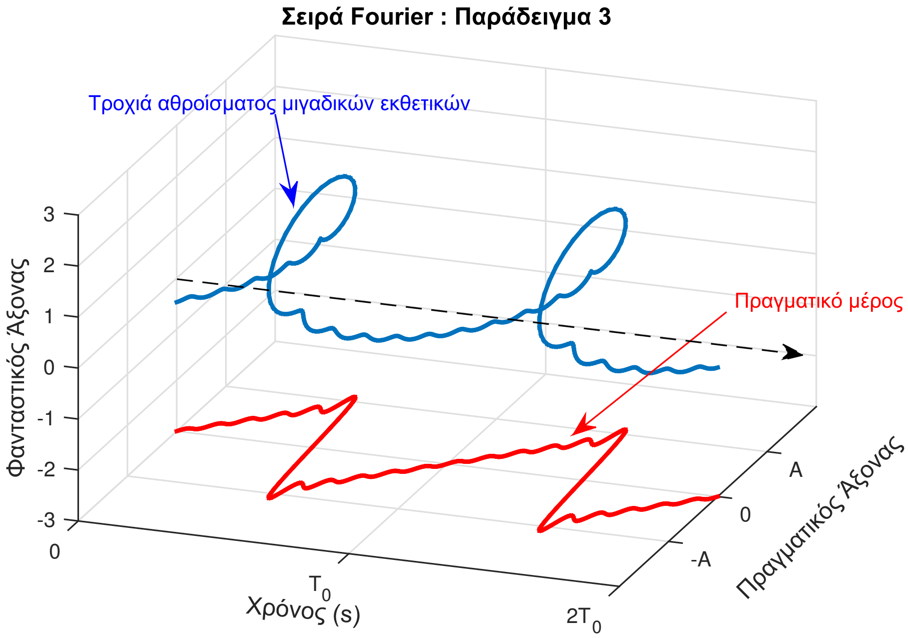
$$= -A\frac{(-1)^k}{jk\pi} = \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{j\pi/2} \tag{4.218}$$

Ουφ! Τελικά η πλήρης μορφή της δίπλευρης Σειράς Fourier ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{j(2\pi k f_0 t + \pi/2)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \Re\Big\{\frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{j(2\pi k f_0 t + \pi/2)}\Big\} \tag{4.219}$$

Το άθροισμα 11 περιστρεφόμενων μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται στο Σχήμα 4.23.

Για να σχεδιάσουμε, τέλος, φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης πρέπει να γράψουμε τους συντελεστές X_k σε πολική μορφή. Εδώ θέλει προσοχή, γιατί όχι μόνο ο όρος k στον παρονομαστή, αλλά και ο όρος $(-1)^k$ του



Σχήμα 4.23: *Σειρά Fourier Παραδείγματος 4.10 στο μιγαδικό χώρο για 11 όρους.*

αριθμητή πρέπει να ληφθεί υπόψη. Άρα

$$X_k = \begin{cases} \dfrac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ \\ -\dfrac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ \\ \dfrac{A}{k\pi} e^{-j\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια} \\ \\ \dfrac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά} \end{cases} \tag{4.220}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια , θετικά} \\ \\ \dfrac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά , θετικά} \\ \\ -\dfrac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια , αρνητικά} \\ \\ -\dfrac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά , αρνητικά} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{A}{k\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτια , θετικά} \\ \\ \dfrac{A}{k\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττά , θετικά} \\ \\ \dfrac{A}{|k|\pi} e^{-j\pi/2}, & k \text{ άρτια , αρνητικά} \\ \\ \dfrac{A}{|k|\pi} e^{j\pi/2}, & k \text{ περιττά , αρνητικά} \end{cases} \tag{4.221}$$

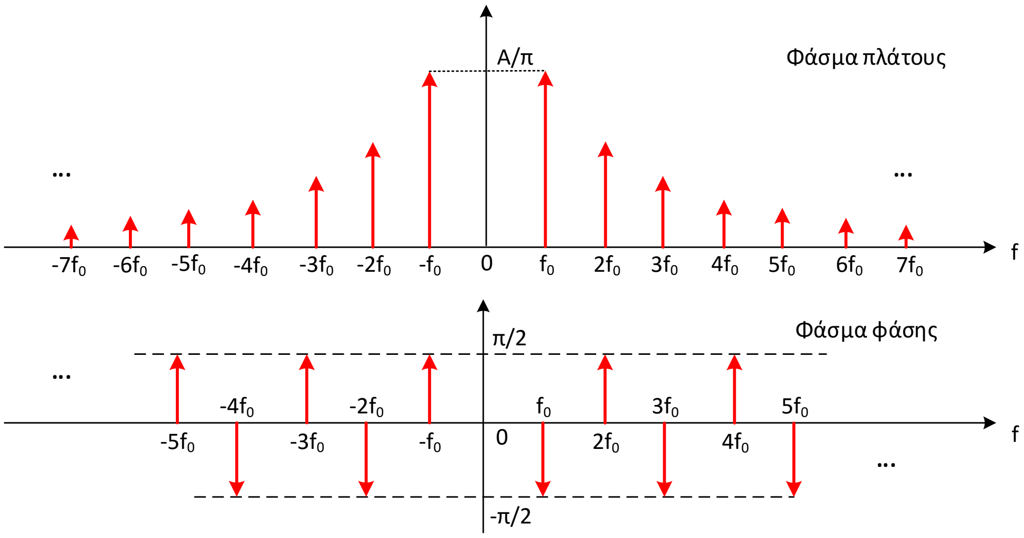
Τώρα πλέον είναι εμφανές ότι

$$|X_k| = \frac{A}{|k|\pi}, \;\; k \in Z - \{0\} \tag{4.222}$$

και

$$\angle X_k = \phi_k = \begin{cases} \pi/2, & k > 0 \text{ και άρτια}, \;\; k < 0 \text{ και περιττά} \\ -\pi/2, & k > 0 \text{ και περιττά}, \;\; k < 0 \text{ και άρτια} \end{cases} \tag{4.223}$$

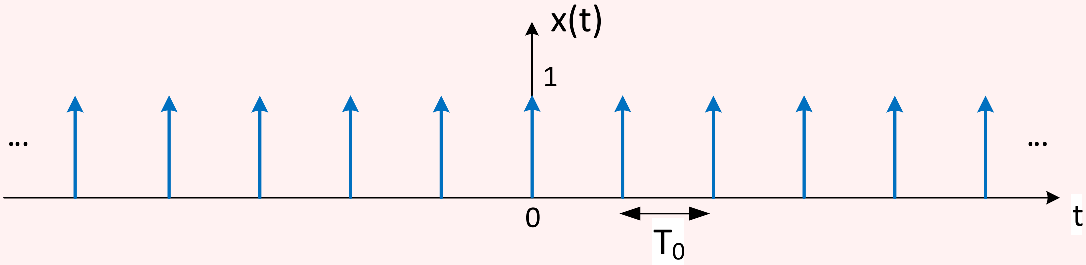
Οπότε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα 4.24.



Σχήμα 4.24: *Φάσμα πλάτους και φάσης Παραδείγματος 4.10.*

Παράδειγμα 4.11:

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.25.



Σχήμα 4.25: *Περιοδικό Σήμα Παραδείγματος 4.11.*

Λύση:
Επιλέγουμε ως περίοδο το διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$. Ας βρούμε το X_0 πρώτα.

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)dt = \frac{1}{T_0} \tag{4.224}$$

αφού το εμβαδό της συνάρτησης Δέλτα είναι συγκεντρωμένο τη χρονική στιγμή $t = 0$. Όμοια για το X_k, έχουμε

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.225}$$

$$= \frac{1}{T_0}e^{j2\pi k f_0 t}\Big]_{t=0} = \frac{1}{T_0} \tag{4.226}$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές Fourier είναι πραγματικοί, σταθεροί και ίσοι με

$$X_k = \frac{1}{T_0} \tag{4.227}$$

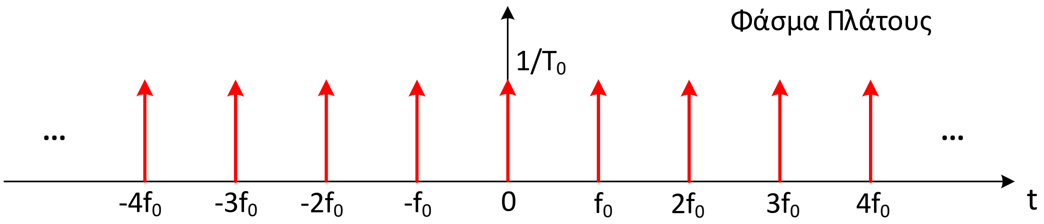
Οπότε η εκθετική Σειρά Fourier του σήματος του Σχήματος 4.25 γράφεται ως

$$x(t) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.228}$$

και η αντίστοιχη τριγωνομετρική ως

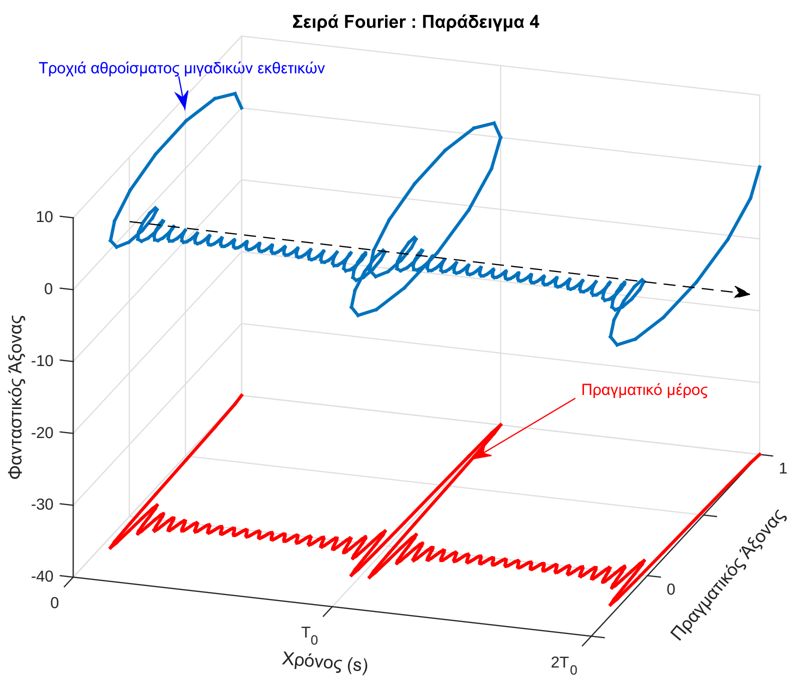
$$x(t) = \frac{2}{T_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\cos(2\pi k f_0 t) = \frac{2}{T_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\Re\{e^{j2\pi k f_0 t}\} \tag{4.229}$$

Το φάσμα πλάτους φαίνεται στο Σχήμα 4.26, ενώ το φάσμα φάσης είναι μηδενικό (και δεν παρουσιάζεται στο σχήμα). Το άθροισμα 20 μιγαδικών εκθετικών για δυο περιόδους, καθώς και το πραγματικό τους μέρος φαίνεται



Σχήμα 4.26: *Φάσμα Πλάτους Παραδείγματος 4.11.*

στο Σχήμα 4.27.



Σχήμα 4.27: *Σειρά Fourier Παραδείγματος 4.11 στο μιγαδικό χώρο για 20 όρους.*

4.4.4 Μερικές ακόμα παρατηρήσεις

1. Τα μαθηματικά που περιγράφουν την ανάλυση Fourier πρέπει να σας είναι ξεκάθαρα, σαν απλά μαθηματικά. Το πρόβλημα είναι ότι δεν πρέπει να αρκείστε σε αυτό. Πρέπει να καταλάβετε πώς αυτά ερμηνεύονται απ΄τη σκοπιά του μηχανικού. Δείξαμε ότι κάθε *πραγματικό, περιοδικό σήμα* μπορεί να γραφεί στη μορφή μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier ως

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \tag{4.230}$$

όπου $A_0 = X_0$, $A_k = 2|X_k|$, και $\phi_k = \angle X_k$. Είναι προφανές ότι η Σχέση (4.230) προκύπτει εύκολα αν έχουμε βρει όλους τους αγνώστους της Σχέσης (4.150). Αυτή η σχέση είναι πλήρως ισοδύναμη με την αντίστοιχη σχέση των εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων. Μάλιστα υπάρχουν κλειστοί τύποι για τον υπολογισμό των A_k χωρίς τη χρήση του X_k.

2. Αν θέλαμε να περιγράψουμε διαισθητικά την ανάλυση Fourier (όχι μόνο τη Σειρά, αλλά και κάθε άλλη συχνοτική ανάλυση που θα δούμε), τότε μια ταιριαστή αναλογία είναι αυτή της συνταγής ενός ανάμεικτου χυμού φρούτων! ☺Το ολοκλήρωμα X_k παίρνει το χυμό ($x(t)$) και μας βρίσκει τη ‘‘συνταγή’’. Πώς; Περνά το χυμό ($x(t)$) μέσα από μια σειρά από k φίλτρα ($e^{-j2\pi k f_0 t}$), όπου το κάθε φίλτρο κρατά μόνο ένα συστατικό του χυμού και μας λέει μάλιστα και την ποσότητα (X_k) που υπάρχει! Η διαδικασία όμως πρέπει να είναι αναστρέψιμη, δηλ. πρέπει να μπορούμε αναμειγνύοντας ξανά τα συστατικά ($e^{j2\pi k f_0 t}$) στις σωστές ποσότητες (X_k) να πάρουμε πίσω το χυμό ($x(t)$) : αυτό το αναλαμβάνει το άθροισμα της σειράς Fourier!

   Για να μπορεί όμως να ισχύσει μια τέτοια διαδικασία πρέπει:

   (α′) **Τα φίλτρα να είναι ανεξάρτητα:** το φίλτρο που ‘‘πιάνει’’ το χυμό μπανάνα πρέπει να πιάνει μόνο χυμό μπανάνας, και τίποτε άλλο. Αν περάσουμε από το φίλτρο αυτό μερικά πορτοκάλια, η ένδειξη θα πρέπει να δείχνει μηδέν. Αυτό, στην ορολογία των μαθηματικών εξασφαλίζεται από τη *γραμμική ανεξαρτησία* των συναρτήσεων $e^{-j2\pi k f_0 t}$. Γνωρίζετε από τη Γραμμική Άλγεβρα την έννοια της ανεξαρτησίας: σε ένα σύνολο διανυσμάτων, ένα οποιοδήποτε από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Στα δικά μας ενδιαφέροντα, η έννοια αυτή σημαίνει ότι ένα μιγαδικό εκθετικό $e^{-j2\pi k f_0 t}$ πρέπει να μην περιέχει πληροφορία για το μιγαδικό εκθετικό $e^{-j2\pi(k+1)f_0 t}$, που πράγματι συμβαίνει, γιατί τα μιγαδικά εκθετικά είναι *ορθογώνια* μεταξύ τους.

   (β′) **Τα φίλτρα πρέπει να είναι πλήρη:** τα φίλτρα μας πρέπει να ‘‘πιάνουν’’ μέχρι και το τελευταίο συστατικό του χυμού. Δε θα μπορέσουμε ποτέ να φτιάξουμε τον αρχικό χυμό ($x(t)$) αν π.χ. λείπει το φίλτρο για το χυμό ροδάκινο. ☺Αυτό εξασφαλίζεται από το ότι η προβολή του σήματος $x(t)$ γίνεται επάνω σε κάθε συχνότητα πολλαπλάσια της θεμελιώδους.

   (γ′) **Τα συστατικά πρέπει να είναι ‘‘συνδυάσιμα’’:** Τα συστατικά πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα ανεξαρτήτως της σειράς με την οποία συνδυάζονται.

3. Μετά από το παραπάνω πολύ διαισθητικό παράδειγμα, ας πάμε λίγο στην πραγματικότητα. Έστω οτι αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, και ένας συντελεστής Fourier είναι $X_3 = 2e^{j\pi/4}$, τότε αυτό τι μας λέει; Δεδομένου ότι το περιοδικό σήμα συντίθεται από μιγαδικά εκθετικά ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.231}$$

   ο προαναφερθέντας συντελεστής μας λέει ότι το εκθετικό $e^{j2\pi 3 f_0 t}$ συνεισφέρει στη σύνθεση του σήματος με πλάτος 2 και φάση $\pi/4$. Αν αυτό σας φαντάζει κάπως δυσνόητο (αν και δε θα έπρεπε), τότε αφού το σήμα ειναι πραγματικό, θα έχει και ένα συντελεστή $X_{-3} = X_3^* = 2e^{-j\pi/4}$. Αν προσθέσουμε τις εκθετικές συναρτήσεις $X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t}$ θα έχουμε:

$$X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t} = 2e^{j(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)} + 2e^{-j(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)} = 4\cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4) \tag{4.232}$$

   Αυτό ξεκάθαρα δηλώνει ότι το περιοδικό σήμα που αναλύουμε περιέχει τον όρο $4\cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)$, με άλλα λόγια, για να κατασκευάσουμε το σήμα που αναλύουμε είναι *αναγκαίο* να χρησιμοποιήσουμε ένα ημίτονο με συχνότητα $f_3 = 3f_0$, πλάτος $A = 4$, και φάση $\phi = \pi/4$ (μεταξύ άλλων ημιτονων, πιθανότατα). Έτσι λοιπόν, τώρα σας ειναι ξεκάθαρο τι ακριβώς σημαίνουν οι συντελεστές Fourier όσον αφορά τη σημασια τους στην ανάλυση και στη σύνθεση.

4. Φυσικά παρατηρείτε ότι η σειρά Fourier αποτελείται από άπειρα εκθετικά (ή ημίτονα). Στην πράξη, δεν μπορούμε να έχουμε άπειρα ημίτονα. Αναγκαστικά κρατάμε έναν αριθμό από αυτά, και άρα η προσέγγιση ενός περιοδικού σήματος από πεπερασμένα ημίτονα θα είναι αναγκαστικά με σφάλμα.

5. Τέλος, είδαμε ότι μια βολική αναπαράσταση της ανάλυσης σε σειρές Fourier είναι η σχεδίαση του *φάσματος πλάτους* και του *φάσματος φάσης*. Οι φασματικές αναπαραστάσεις (και οι δυο μαζί) μας δίνουν *όλη* την απαραίτητη πληροφορία για το περιοδικό σήμα. Με άλλα λόγια, αν έχουμε τις φασματικές αναπαραστάσεις, μπορούμε να βρούμε την σειρά Fourier που αυτές αντιπροσωπεύουν. Σημαντικό: θυμίζεται ότι στο φάσμα πλάτους αναπαριστούμε τις ποσότητες $|X_k|$, δηλ. το πως αλλάζει το πλάτος των συντελεστών ανά συχνότητα, ενώ στο φάσμα φάσης αναπαριστούμε τις ποσότητες $\angle X_k$, που δηλώνει το πως αλλάζει η φάση των συντελεστών ανά συχνότητα, δηλ. ποιά είναι η σχετική μετατόπιση των ημιτόνων.

6. Προσέξτε ότι το μέτρο των συντελεστών Fourier, $|X_k|$, είναι σταθερό ή φθίνει στο 0 όσο το $k \to +\infty$. Αυτό είναι γενικό φαινόμενο στο φάσμα πλάτους, όταν έχουμε άπειρο πλήθος ημιτόνων. Δε θα μπορούσαν οι

συντελεστές $|X_k|$ να μεγαλώνουν όσο $f \to \infty$, γιατί ένα τέτοιο άθροισμα ημιτόνων θα έδινε συνολικά άπειρο πλάτος στο περιοδικό σήμα. Έχοντας αυτό στο μυαλό σας, και την προηγούμενη παρατήρηση, μπορείτε να ελέγχετε τις απαντήσεις σας στο φάσμα πλάτους σε θεωρητικές ασκήσεις. Τονίζεται ότι το παραπάνω ισχύει όταν αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα σε *άπειρο* πλήθος από ημίτονα. Όταν π.χ. έχουμε ένα άθροισμα

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} 2|X_k|\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \tag{4.233}$$

ή

$$x(t) = \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.234}$$

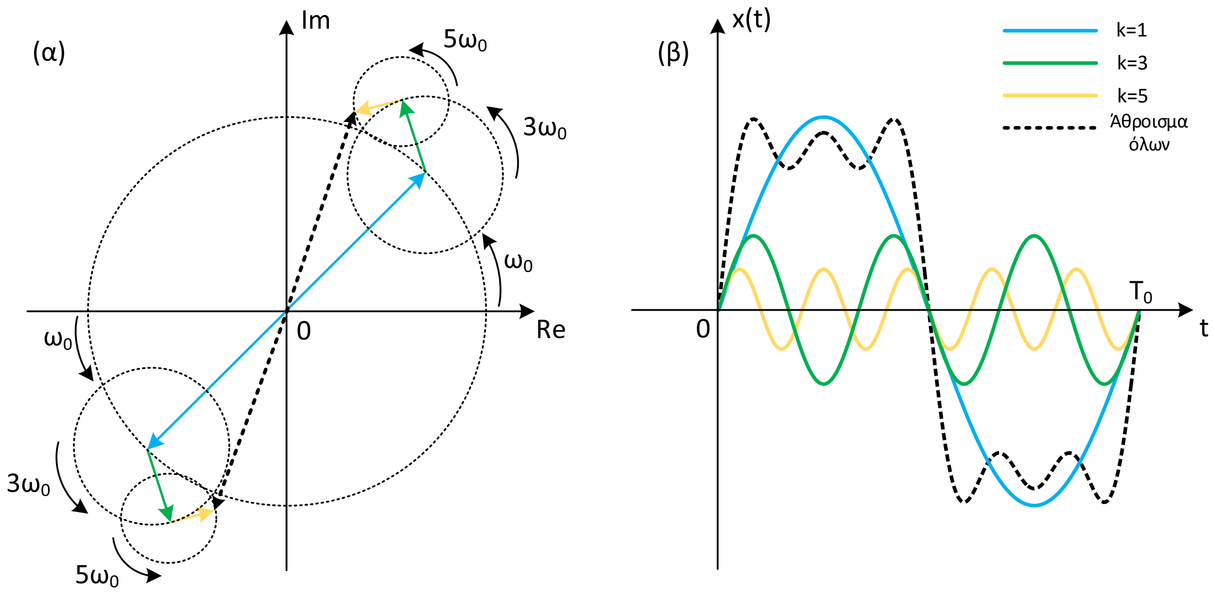
τότε έχουμε πεπερασμένου πλήθους ημίτονα [7], άρα τα A_k ή τα X_k μπορούν να έχουν όποια κατανομή θέλουν, όσο αυξάνει το k. Φυσικά αν αυτά τα N ημίτονα προέρχονται ως προσέγγιση άπειρου πλήθους ημιτόνων, προφανώς θα ακολουθούν την κατανομή που συζητήσαμε (σταθερά ή φθίνοντα πλάτη $|X_k|$).

7. Σίγουρα ένα στοιχείο που θα σας ξενίζει αρκετά είναι αυτό των αρνητικών συχνοτήτων των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Ξέρουμε ότι συχνότητα είναι ο αριθμός επαναλήψεων ενός τμήματος σήματος στη μονάδα του χρόνου, και αναμφίβολα αυτός ο αριθμός είναι μια θετική ποσότητα. Δεν μπορούμε να έχουμε $f_0 = -4$ επαναλήψεις ανά δευτερόλεπτο! Άρα πώς ερμηνεύεται μια αρνητική συχνότητα; Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία, μπορούμε να εκφράσουμε ένα ημίτονο αρνητικής συχνότητας $-f_0$ ως

$$\cos(-2\pi f_0 t + \theta) = \cos(-(2\pi f_0 t - \theta)) = \cos(2\pi f_0 t - \theta) \tag{4.235}$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει καθαρά ότι η συχνότητα του ημιτόνου είναι $|f_0|$, και είναι θετική. Πώς τώρα όμως ερμηνεύουμε τις φασματικές γραμμές στις αρνητικές συχνότητες; Ένας ασφαλής τρόπος είναι να πούμε απλά ότι το φάσμα είναι μια γραφική αναπαράσταση των συντελεστών $|X_k|$ συναρτήσει του f. Η παρουσία αρνητικών συχνοτήτων απλά σημαίνει ότι υπάρχει ένα εκθετικό μιας τέτοιας αρνητικής συχνότητας στη σειρά Fourier που αναλύουμε. Απλό, έτσι δεν είναι; ☺

8. Τα Σχήματα 4.17, 4.21, και 4.23 δείχνουν το άθροισμα μερικών από τα πρώτα μιγαδικά εκθετικά, καθώς και το πραγματικό του μέρος. Θα ήταν περισσότερο ενδιαφέρον και διορατικό να δούμε τη συνεισφορά *καθενός* μιγαδικού εκθετικού στη σύνθεση ενός περιοδικού σήματος. Δείτε το Σχήμα 4.28. Αριστερά, βλέπουμε



Σχήμα 4.28: *Σύνθεση πραγματικού σήματος από περιστρεφόμενα μιγαδικά εκθετικά: (α) περιστρεφόμενα μιγαδικά εκθετικά, (β) το πραγματικό τους μέρος.*

τα τρία πρώτα μη μηδενικού πλάτους περιστρεφόμενα μιγαδικά εκθετικά, κυκλικής συχνότητας $\omega_0 = 2\pi f_0$, $3\omega_0$, $5\omega_0$, καθώς και το άθροισμά τους. Η σχεδίασή τους είναι τέτοια ώστε να μπορεί να είναι εμφανές

[7] Έχουμε N ημίτονα στην πρώτη περίπτωση, πόσα στη δεύτερη;

το πως αθροίζονται. Δεξιά, βλέπουμε το πραγματικό μέρος καθενός από τα μιγαδικά εκθετικά, καθώς και το άθροισμά τους, που συνιστά το περιοδικό σήμα του Παραδείγματος 1. Το σχήμα δείχνει δυο χρονικές στιγμές, μια στο πρώτο και μια στο τρίτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου.

9. Υπάρχει μια ακόμα αναπαράσταση περιοδικών σημάτων κατά Fourier, η οποία είναι η ακόλουθη:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2\pi k f_0 t) \tag{4.236}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)dt \tag{4.237}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)dt \tag{4.238}$$

Οι παραπάνω συντελεστές a_k, b_k σχετίζονται με τους γνωστούς συντελεστές X_k ως

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k), & k > 0 \\ \frac{1}{2}a_0, & k = 0 \\ X_k^*, & k < 0 \end{cases} \tag{4.239}$$

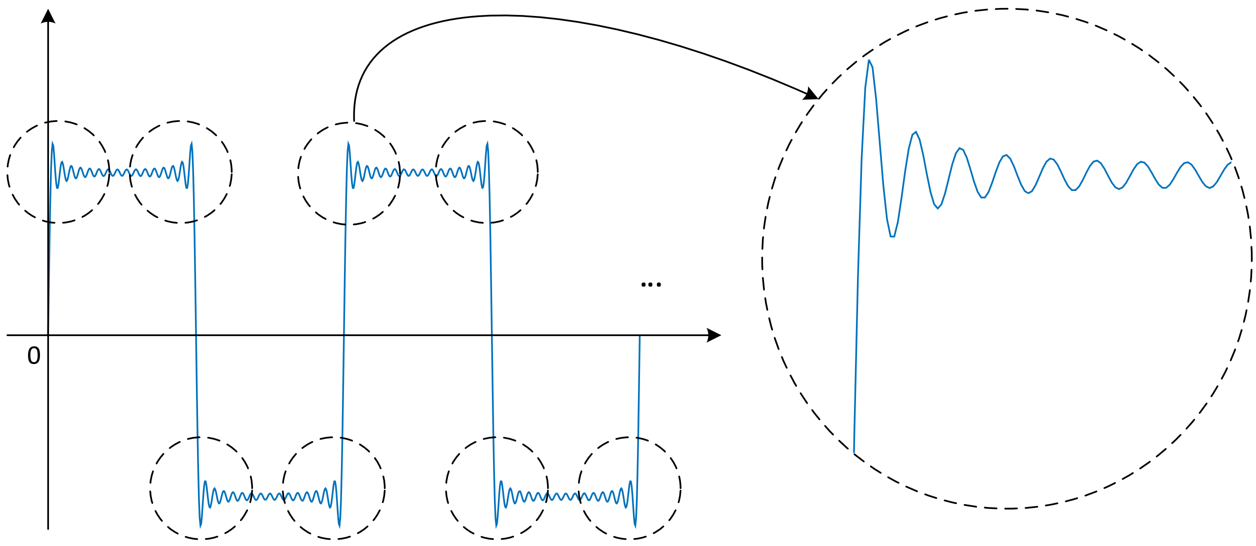
10. Ίσως γνωρίζετε ότι τα "Στοιχεία" του Αλεξανδρινού μαθηματικού Ευκλείδη είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα στην ιστορία της ανθρωπότητας. Η μελέτη και εμπέδωση των 13 βιβλίων των "Στοιχείων" ήταν και παραμένει ζόρικη υπόθεση! Κάποια στιγμή, ο βασιλιάς της Αλεξάνδρειας, Πτολεμαίος ο Α΄, ζήτησε από τον Ευκλείδη έναν τρόπο να μάθει Γεωμετρία πιο εύκολο από τη μελέτη των "Στοιχείων". Η απάντηση του μεγάλου μαθηματικού ήταν λακωνική, σαφής, και έμεινε στην Ιστορία: *"Δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη Γεωμετρία!"*.

   Αν λοιπόν ζούσε σήμερα ο J. B. Fourier, και τον ρωτούσατε ποιός είναι ο πιο εύκολος τρόπος να μάθετε Σειρές Fourier, θα σας απαντούσε όπως ο μεγάλος μαθηματικός της Αρχαιότητας: "Δεν υπάρχει εύκολος δρόμος για τις Σειρές Fourier!". Αυτό σημαίνει ότι για τις Σειρές Fourier απαιτείται αρκετή *εξάσκηση*!

4.5 Το φαινόμενο Gibbs

Σε όλα τα παραδείγματα που έχουμε δει ως τώρα, θα παρατηρήσατε ότι το συντιθέμενο σήμα δεν είναι μια ακριβής "ρέπλικα" του εκάστοτε σήματος που αναλύεται, αλλά παρουσιάζει ταλαντώσεις, τόσο στα διαστήματα που το αρχικό σήμα είναι γραμμικό ή σταθερό, όσο και στα σημεία ασυνέχειας. Μάλιστα στα τελευταία, η τιμή της Σειράς Fourier είναι σημαντικά μεγαλύτερη από οποιοδήποτε άλλο σημείο. Ας πάρουμε για παράδειγμα το σήμα του Παραδείγματος 1 που παρουσιάστηκε νωρίτερα, του οποίου η Σειρά Fourier φαίνεται στο Σχήμα 4.29. Επάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί όλα τα σημεία ασυνέχειας και οι ταλαντώσεις τις Σειράς Fourier που συμβαίνουν. Όλες οι Σειρές Fourier που απεικονίζονται στις προηγούμενες σελίδες χρησιμοποιούν πεπερασμένου πλήθους ημίτονα για τη σύνθεση. Θα περίμενε λοιπόν κανείς ότι όσο προσθέτουμε ημίτονα στη Σειρά Fourier, τόσο θα μειώνονται αυτές οι ταλαντώσεις. Ιδανικά, όταν το πλήθος των ημιτόνων N τείνει στο ∞, τότε γνωρίζουμε ότι η ενέργεια σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν, οπότε θα περίμενε κανείς η Σειρά Fourier να "ταυτίζεται" με το αρχικό περιοδικό σήμα.

Αν δοκιμάσουμε πειραματικά να προσθέσουμε πολλά ημίτονα, θα δούμε ότι όντως η Σειρά Fourier προσεγγίζει πολύ καλά το περιοδικό σήμα στα διαστήματα όπου το σήμα είναι γραμμικό ή σταθερό, αλλά στα σημεία ασυνέχειας παρατηρείται η ίδια προβληματική κατάσταση, με ισχυρές ταλαντώσεις της Σειράς Fourier γύρω από αυτά τα σημεία. Αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται να αντιτίθεται στο γεγονός ότι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο φθίνει στο μηδέν όσο προσθέτουμε ημίτονα στη Σειρά Fourier. Πράγματι, αυτή η φαινομενική αντίθεση προβλήματισε για πολύ καιρό τους μηχανικούς και τους μαθηματικούς. Την εξήγηση έδωσε τελικά ο J. W. Gibbs, δείχνοντας ότι το φαινόμενο αυτό μπορεί να συμβαίνει ακριβώς λόγω των ασυνεχειών του αρχικού σήματος - και μόνο παρουσία αυτών - ακόμα κι αν πράγματι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν! Συγκεκριμένα, ο Gibbs έδειξε ότι η Σειρά Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή του περιοδικού σήματος σε κάθε σημείο, εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, όπου η Σειρά Fourier συγκλίνει στη μέση τιμή των τιμών του περιοδικού σήματος εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας. Η Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων που δεν παρουσιάζουν ασυνέχειες λέγεται ότι συγκλίνει *ομοιόμορφα* σε όλα τα σημεία της περιόδου του περιοδικού σήματος, ενώ για ασυνεχή περιοδικά σήματα, η Σειρά Fourier συγκλίνει σε κάθε σημείο της περιόδου πλην των σημείων ασυνέχειας.



Σχήμα 4.29: *Το φαινόμενο Gibbs στα σημεία ασυνέχειας ενός περιοδικού σήματος.*

Τέλος, θυμηθείτε ότι η εύρεση των συντελεστών Fourier βασίζεται στην έννοια της *ελάχιστης ενέργειας σφάλματος* E_e μεταξύ του περιοδικού σήματος και της προσέγγισής του από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, και όχι στην ελάχιστη διαφορά των δυο σημάτων ή στην ελάχιστη διαφορά σε κάθε σημείο. Αυτός ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών Fourier επιτρέπει στην ενέργεια σφάλματος να τείνει στο μηδέν όσο αυξάνει το πλήθος των ημιτόνων, και ταυτόχρονα να υπάρχουν σημεία όπου η διαφορά της Σειράς Fourier με το περιοδικό σήμα να μην είναι μηδενική (μη ομοιόμορφη σύγκλιση)!

4.6 Ιδιότητες Σειρών Fourier

Υπάρχουν πολλές χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, που βοηθούν σε πολλές εφαρμογές. Ο Πίνακας 4.1 απεικονίζει τις περισσότερες.

4.6.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Παρακάτω ακολουθούν αποδείξεις των ιδιοτήτων, καθώς και ένα παράδειγμα χρήσης τους σε καθεμιά. Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα έχει συντελεστές Fourier X_k, και - όπου απαιτείται - ένα δεύτερο περιοδικό σήμα $y(t)$ με περίοδο T_0 έχει συντελεστές Fourier Y_k.

4.6.1.1 Γραμμικότητα

Οι συντελεστές Fourier του αθροίσματος $z(t) = Ax(t) + By(t)$ δίνονται ως

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} z(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}(Ax(t)+By(t))e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.240}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} Ax(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0} By(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.241}$$

$$= \frac{A}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{B}{T_0}\int_{T_0} y(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.242}$$

$$= AX_k + BY_k \tag{4.243}$$

Άρα

$$\boxed{Ax(t)+By(t) \longleftrightarrow AX_k + BY_k} \tag{4.244}$$

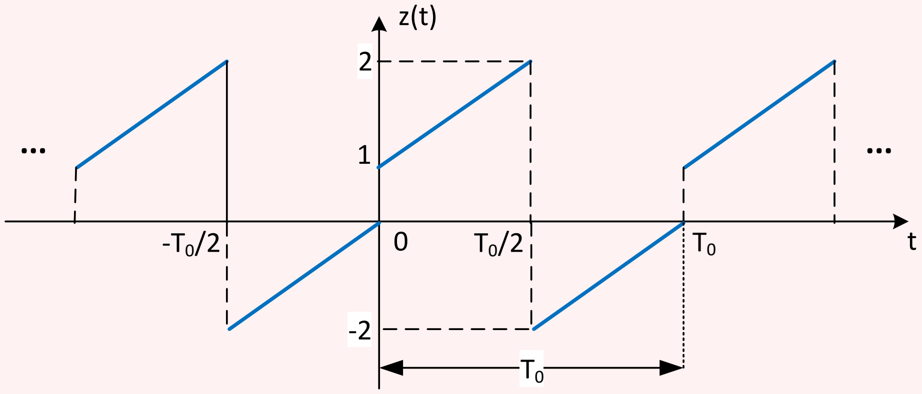
Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	**Περιοδικό σήμα**	**Συντελεστές Fourier**
	$\mathbf{x(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X^*_{-k}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \|X_k\| = \|X_{-k}\|, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} \|x(t)\|^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|X_k\|^2$

Πίνακας 4.1: *Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier*

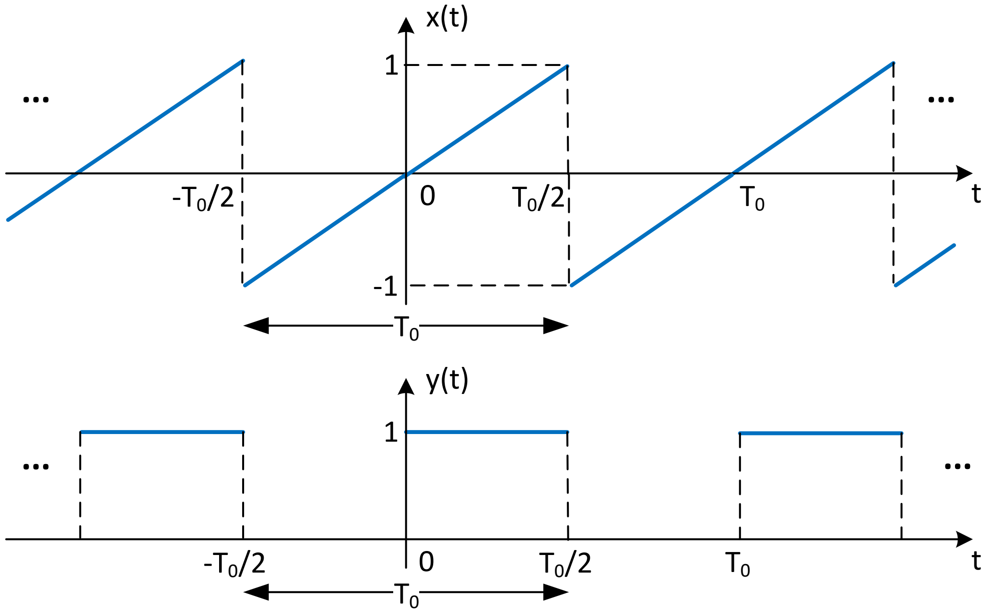
Παράδειγμα 4.12:

Βρείτε τους συντελεστές Fourier του περιοδικού με περίοδο T_0 σήματος $z(t)$ του Σχήματος 4.30.



Σχήμα 4.30: *Εφαρμογή της Γραμμικότητας: περιοδικό σήμα* $z(t)$.

Το περιοδικό σήμα του Σχήματος 4.30 μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των περιοδικών σημάτων που φαίνονται στο Σχήμα 4.31. Αυτά τα περιοδικά σήματα όμως είναι γνωστά από τα παραδείγματα. Οι συντελεστές



Σχήμα 4.31: *Εφαρμογή της Γραμμικότητας: περιοδικά σήματα* $x(t), y(t)$.

Fourier τους είναι οι

$$X_k = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} \tag{4.245}$$

$$Y_k = \frac{1}{2\pi k}(1-(-1)^k)e^{-j\pi/2} \tag{4.246}$$

Άρα οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος του Σχήματος 4.30 είναι

$$Z_k = X_k + Y_k = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} + \frac{1}{2\pi k}(1-(-1)^k)e^{-j\pi/2} \tag{4.247}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi k}e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ -\frac{1}{\pi k}e^{j\pi/2} + \frac{1}{\pi k}e^{-j\pi/2}, & k \text{ περιττό} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi k}e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ -\frac{2}{\pi k}\sin(\pi/2), & k \text{ περιττό} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi k}e^{j\pi/2}, & k \text{ άρτιο} \\ -\frac{2}{\pi k}, & k \text{ περιττό} \end{cases} \tag{4.248}$$

4.6.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $y(t) = x(t - t_0)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t-t_0)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(u)e^{-j2\pi k f_0 (u-t_0)}du \tag{4.249}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(u)e^{-j2\pi k f_0 t_0}e^{-j2\pi k f_0 u}du = \frac{1}{T_0}e^{-j2\pi k f_0 t_0}\int_{T_0} x(u)e^{-j2\pi k f_0 u}du \tag{4.250}$$

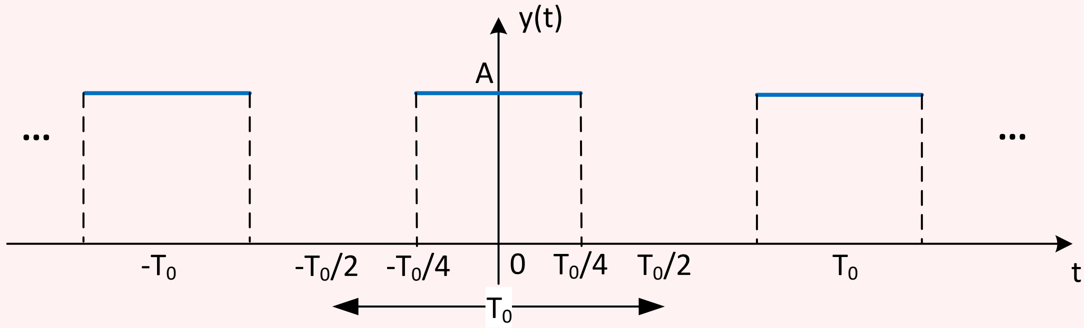
$$= X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0} \tag{4.251}$$

Άρα

$$\boxed{x(t-t_0) \longleftrightarrow X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}} \tag{4.252}$$

Παράδειγμα 4.13:

Βρείτε τους συντελεστές Fourier του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 4.32.



Σχήμα 4.32: *Εφαρμογή της Χρονικής Μετατόπισης: περιοδικό σήμα* $y(t) = x(t - t_0)$.

Το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 4.32 δεν είναι άλλο από το σήμα $x(t)$ του Σχήματος 4.19 μετατοπισμένο κατά $t_0 = -T_0/4$. Οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $y(t)$ θα είναι

$$Y_k = X_k e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{4}} = \frac{A}{j2\pi k}(1-(-1)^k)e^{j\pi k/2} = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιο} \\ \frac{A}{\pi k}e^{j\left(\frac{\pi}{2}(k-1)\right)}, & k \text{ περιττό} \end{cases} \tag{4.253}$$

4.6.1.3 Μετατόπιση στη Συχνότητα

Αντικαθιστώντας το δείκτη k των συντελεστών Fourier X_k με $k - M$, όπου M ακέραιος αριθμός, τότε οι συντελεστές μπορούν να γραφούν ως

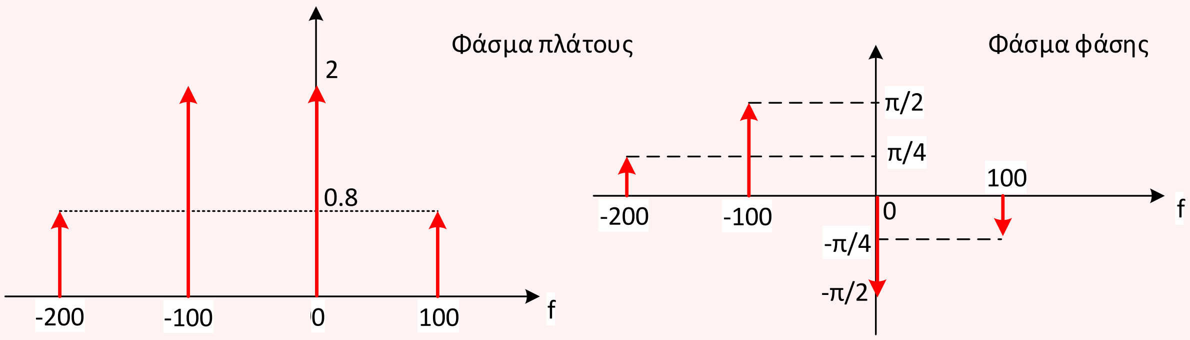
$$X_{k-M} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi(k-M)f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}e^{j2\pi M f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \left(x(t)e^{j2\pi M f_0 t}\right)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.254}$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές X_{k-M} αντιστοιχούν στο περιοδικό σήμα $x(t)e^{j2\pi M f_0 t}$, δηλ. στον πολλαπλασιασμό του αρχικού σήματος $x(t)$ με μια μιγαδική εκθετικού συνάρτηση συχνότητας Mf_0. Σημειώστε ότι η αντικατάσταση $k \leftarrow k - M$ αντιστοιχεί σε μια *μετατόπιση* των φασματικών γραμμών κατά M. Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, τότε τα φάσματα πλάτους και φάσης θα έχουν τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία, αντίστοιχα. Μια οποιαδήποτε μετατόπιση των φασμάτων κατά M, οδηγεί σε άρση αυτών των συμμετριών, με αποτέλεσμα το περιοδικό σήμα στο χρόνο να μην είναι πια πραγματικό, όπως φαίνεται και από την παραπάνω ιδιότητα (πολλαπλασιασμός στο χρόνο με ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα).
Άρα

$$\boxed{x(t)e^{j2\pi M f_0 t} \longleftrightarrow X_{k-M}} \tag{4.255}$$

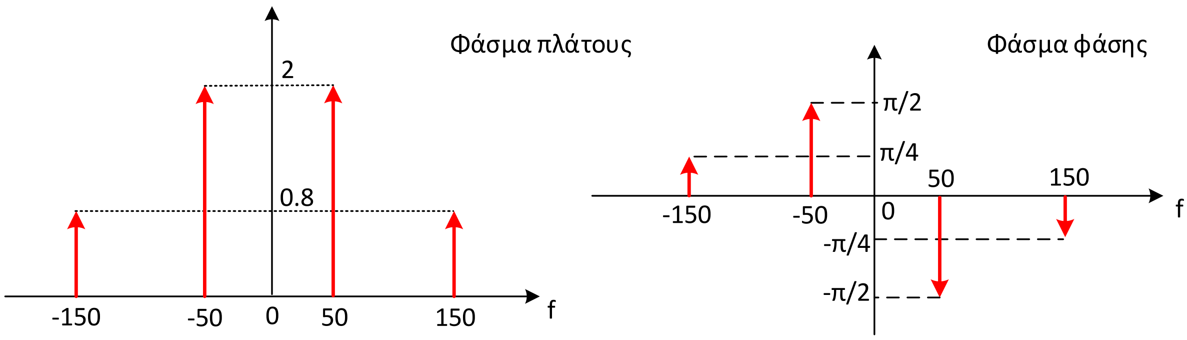
Παράδειγμα 4.14:

Έστω τα φάσματα του Σχήματος 4.33. Βρείτε το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί σε αυτά.



Σχήμα 4.33: *Εφαρμογή της Συχνοτικής Μετατόπισης: μετατοπισμένο φάσμα.*

Θα μπορούσαμε να βρούμε αναλυτικά το σήμα στο χρόνο από την πληροφορία των φασμάτων, αλλά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα φάσματα του Σχήματος 4.33 δεν είναι άλλα από τα φάσματα του Σχήματος 4.34, τα οποία έχουν θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 50$ Hz, μετατοπισμένα αριστερά κατά $M = 1$, δηλ. μετατοπισμένα κατά $M = -1$. Τα φάσματα του Σχήματος 4.34 πληροφορούν ότι το περιοδικό σήμα στο χρόνο $x(t)$ δίνεται ως



Σχήμα 4.34: *Εφαρμογή της Συχνοτικής Μετατόπισης: μη μετατοπισμένο φάσμα.*

$$x(t) = 4\cos(2\pi 50t - \pi/2) + \cos(2\pi 150t - \pi/4) \tag{4.256}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα, το σήμα στο χρόνο $y(t)$ που αντιστοιχεί στα φάσματα του Σχήματος 4.33 είναι το

$$y(t) = e^{-j2\pi 50t}x(t) = 4e^{-j2\pi 50t}\cos(2\pi 50t - \pi/2) + e^{-j2\pi 50t}\cos(2\pi 150t - \pi/4) \tag{4.257}$$

4.6.1.4 Συζυγία στο Χρόνο

Για ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$, οι συντελεστές Fourier του συζυγούς σήματος $y(t) = x^*(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\Big(\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt\Big)^* \tag{4.258}$$

$$= \frac{1}{T_0}\Big(\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi(-k) f_0 t}dt\Big)^* = X^*_{-k} \tag{4.259}$$

Άρα

$$\boxed{x^*(t) \longleftrightarrow X^*_{-k}} \tag{4.260}$$

Παράδειγμα 4.15:

Αν ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = -\frac{2}{\pi k} + \frac{j}{\pi k} \tag{4.261}$$

βρείτε τους συντελεστές του συζυγούς σήματος, $y(t) = x^*(t)$.

Οι συντελεστές Fourier του συζυγούς του $y(t) = x^*(t)$ είναι

$$Y_k = X^*_{-k} = \frac{2}{\pi k} - \frac{j}{\pi k} \tag{4.262}$$

4.6.1.5 Αντιστροφή στο Χρόνο

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = x(-t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(-t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(u)e^{j2\pi k f_0 u}du \tag{4.263}$$

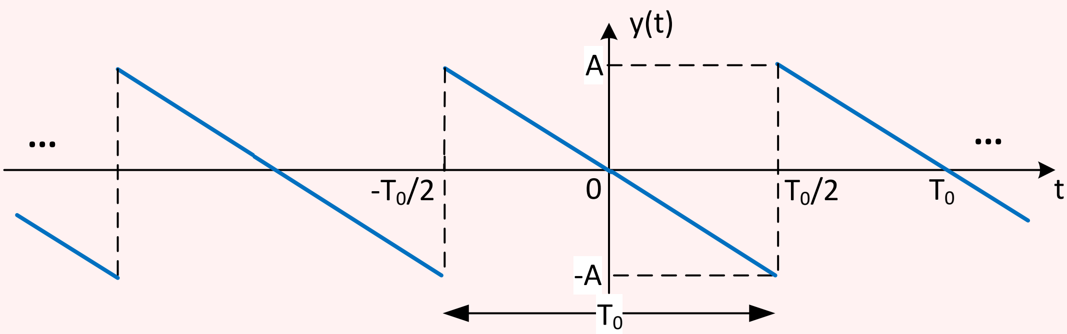
$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(u)e^{-j2\pi(-k) f_0 u}du = X_{-k} \tag{4.264}$$

Άρα

$$\boxed{x(-t) \longleftrightarrow X_{-k}} \tag{4.265}$$

Παράδειγμα 4.16:

Το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 4.35



Σχήμα 4.35: *Εφαρμογή της Αντιστροφής στο Χρόνο: περιοδικό σήμα* $y(t) = x(-t)$.

δεν είναι άλλο από το περιοδικό σήμα του Σχήματος 4.22 ανεστραμμένο στο χρόνο. Βρείτε τους συντελεστές Fourier του.

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = X_{-k} = -\frac{A}{\pi k}(-1)^{-k} e^{j\pi/2} = \frac{A}{\pi k}(-1)^k e^{-j\pi/2} \tag{4.266}$$

4.6.1.6 Στάθμιση στο Χρόνο

Αν ορίσουμε το περιοδικό σήμα $x(t)$ και το αναπτύξουμε σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.267}$$

τότε το σταθμισμένο στο χρόνο σήμα $y(t) = x(at)$, με $a > 0$, θα είναι

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 (at)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k (af_0) t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k \frac{a}{T_0} t} \tag{4.268}$$

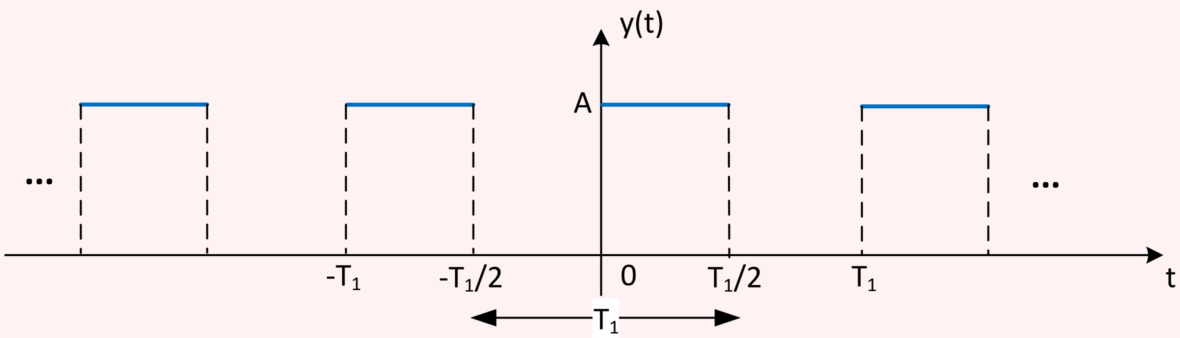
Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές X_k δεν μεταβλήθηκαν καθόλου, αλλά άλλαξε η θεμελιώδης συχνότητα από f_0 σε af_0, και άρα και η περίοδος από T_0 σε $\frac{T_0}{a}$. Αυτό σημαίνει ότι οι αποστάσεις των φασματικών γραμμών στο φάσμα πλάτους και φάσης αλλάζουν!

Άρα

$$\boxed{x(at) \longleftrightarrow X_k \text{ με } \hat{T}_0 = \frac{T_0}{a}} \tag{4.269}$$

Παράδειγμα 4.17:

Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $y(t)$ του Σχήματος 4.36.



Σχήμα 4.36: *Εφαρμογή της Κλιμάκωσης στο Χρόνο: περιοδικό σήμα* $y(t) = x(2t)$.

Το περιοδικό αυτό σήμα είναι μια συμπιεσμένη εκδοχή του σήματος του Σχήματος 4.19, κατά παράγοντα $a = 2$. Βρείτε τους συντελεστές Fourier του.

Οι συντελεστές Fourier Y_k είναι οι ίδιοι με του Παραδείγματος 2, δηλ.

$$Y_k = X_k = \begin{cases} \dfrac{A}{\pi k} e^{-k\pi/2}, & k \text{ περιττό} \\ 0, & k \text{ άρτιο} \end{cases} \tag{4.270}$$

με τη διαφορά ότι η περίοδος είναι ίση με $T_1 = \frac{T_0}{2}$.

4.6.1.7 Περιοδική Συνέλιξη

Έστω το περιοδικό σήμα $z(t)$ που ορίζεται ως

$$z(t) = \int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{4.271}$$

Οι συντελεστές Fourier του δίνονται ως

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\Big(\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\Big)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tau)\Big(\int_{T_0} y(t-\tau)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\Big)d\tau \tag{4.272}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tau)T_0 Y_k e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau = T_0 Y_k \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau \tag{4.273}$$

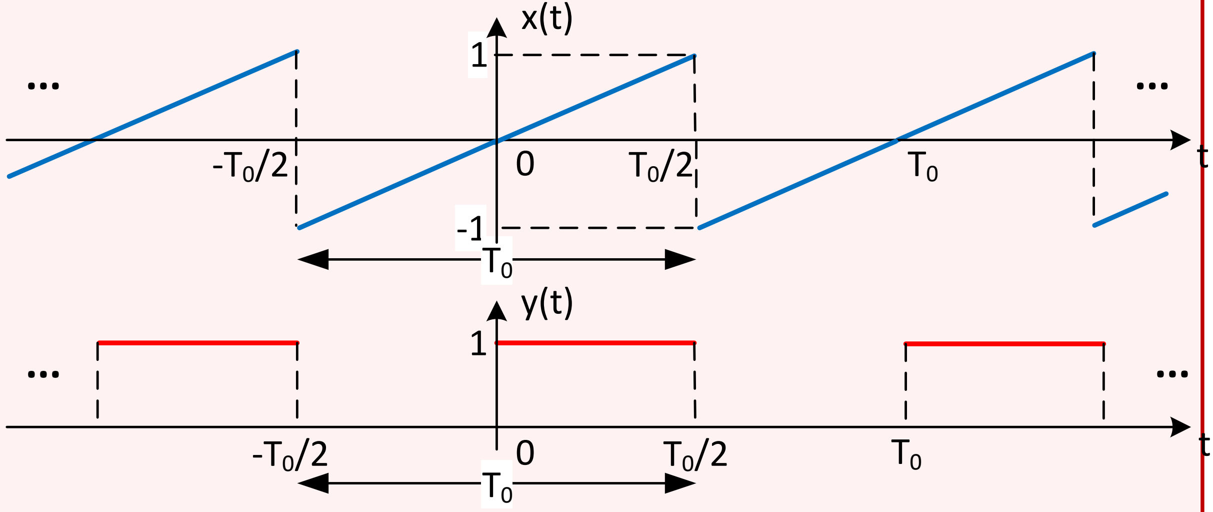
$$= T_0 Y_k X_k \tag{4.274}$$

Άρα

$$\boxed{\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \longleftrightarrow T_0 X_k Y_k} \tag{4.275}$$

Παράδειγμα 4.18:

Υπολογίστε την περιοδική συνέλιξη των σημάτων που φαίνονται στο Σχήμα 4.37.



Σχήμα 4.37: *Εφαρμογή της Περιοδικής Συνέλιξης στο Χρόνο: περιοδικά σήματα $x(t), y(t)$.*

Κατασκευάζοντας το σήμα $y(t-\tau)$, έχουμε τις περιπτώσεις που απεικονίζονται στο Σχήμα 4.38. Η περιοδική συνέλιξη υπολογίζεται σε μια περίοδο, στο διάστημα $(-T_0/2, T_0/2]$. Στην περίπτωση (α) έχουμε

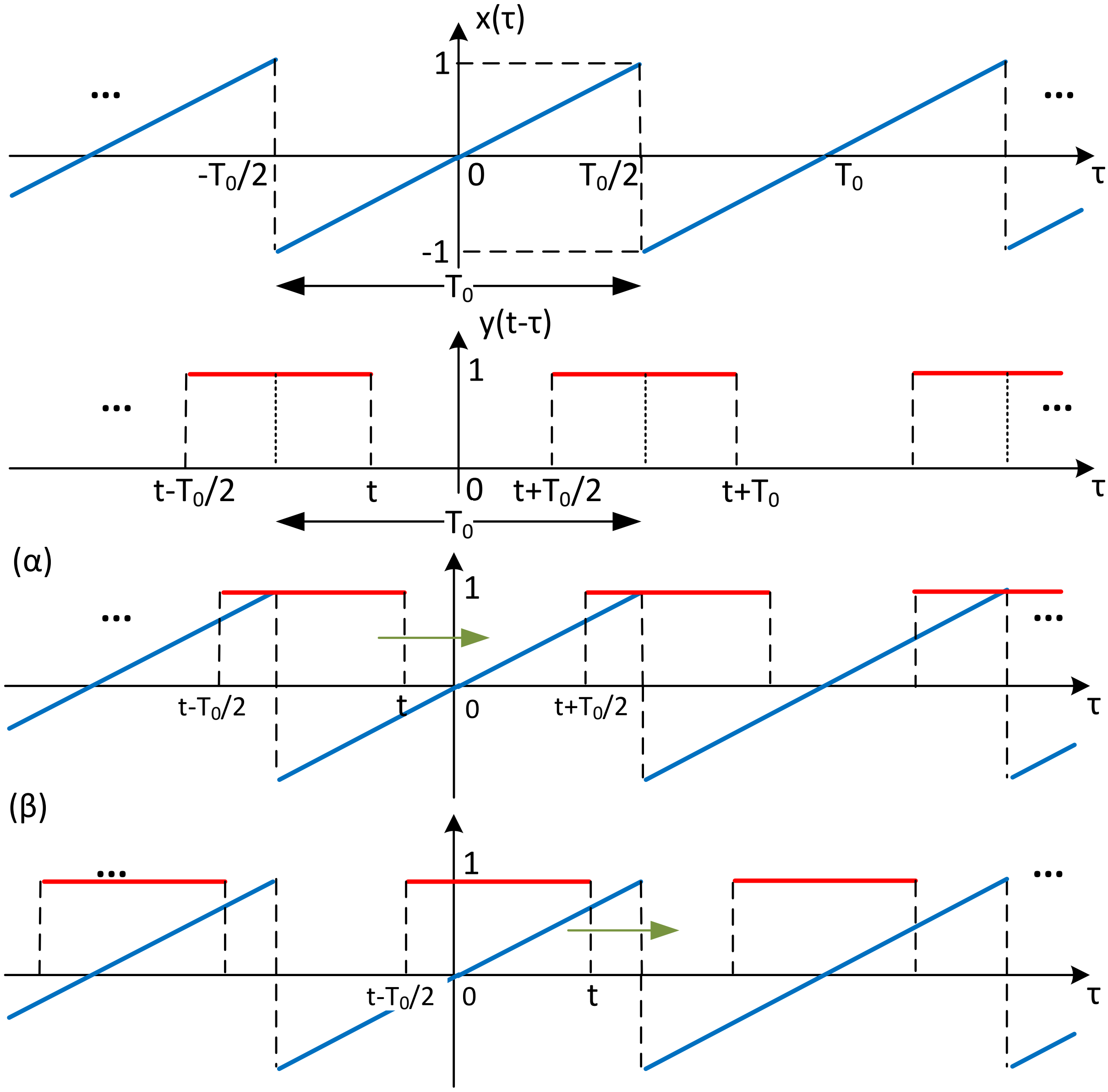
$$z(t) = \int_{-T_0/2}^{t} \frac{2}{T_0}\tau d\tau + \int_{t+T_0/2}^{T_0/2} \frac{2}{T_0}\tau d\tau = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{t}\tau d\tau + \frac{2}{T_0}\int_{t+T_0/2}^{T_0/2}\tau d\tau \tag{4.276}$$

$$= \frac{2}{T_0}\frac{\tau^2}{2}\Big]_{-T_0/2}^{t} + \frac{2}{T_0}\frac{\tau^2}{2}\Big]_{t+T_0/2}^{T_0/2} = \frac{t^2}{T_0} - \frac{T_0}{4} - t - \frac{t^2}{T_0} \tag{4.277}$$

$$= -t - \frac{T_0}{4} \tag{4.278}$$

για $-T_0/2 \le t < 0$. Στην περίπτωση (β), έχουμε

$$z(t) = \int_{t-T_0/2}^{t} \frac{2}{T_0}\tau d\tau = \frac{2}{T_0}\int_{t-T_0/2}^{t}\tau d\tau = \frac{2}{T_0}\frac{\tau^2}{2}\Big]_{t-T_0/2}^{t} = t - \frac{T_0}{4} \tag{4.279}$$



Σχήμα 4.38: *Περιπτώσεις Περιοδικής Συνέλιξης στο Χρόνο.*

για $0 \leq t < T_0/2$. Άρα το αποτέλεσμα της περιοδικής συνέλιξης γράφεται σε μια περίοδο ως

$$z(t) = \begin{cases} -t - \frac{T_0}{4}, & -T_0/2 \leq t < 0 \\ t - \frac{T_0}{4}, & 0 \leq t < T_0/2 \end{cases} \tag{4.280}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της περιοδικής συνέλιξης, το περιοδικό αυτό σήμα έχει συντελεστές Fourier ως

$$Z_k = T_0 X_k Y_k \tag{4.281}$$

με X_k, Y_k τους γνωστούς από τα Παραδείγματα 2 και 3 συντελεστές Fourier, τους οποίους επαναλαμβάνουμε εδώ:

$$X_k = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2} \tag{4.282}$$

$$Y_k = \frac{1}{2\pi k} e^{-j\pi/2}(1 - (-1)^k) \tag{4.283}$$

Οπότε οι συντελεστές Z_k θα είναι

$$Z_k = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{T_0}{\pi^2 k^2} e^{j\pi}, & k \text{ περιττός} \end{cases} \tag{4.284}$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει αναλυτικά ότι το περιοδικό σήμα $z(t)$ έχει πράγματι τους παραπάνω συντελεστές (Άσκηση XXXX).

4.6.1.8 Πολλαπλασιασμός

Για το σήμα $z(t) = x(t)y(t)$, η Σειρά Fourier του δίνεται ως

$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y_l e^{j2\pi(k+l) f_0 t} \tag{4.285}$$

Θέτοντας $m = k + l$, έχουμε

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y_l e^{j2\pi(k+l) f_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{m-l} Y_l e^{j2\pi m f_0 t} \tag{4.286}$$

Από την παραπάνω σχέση είναι εμφανές ότι οι συντελεστές Fourier του σήματος $z(t) = x(t)y(t)$ είναι $Z_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l} Y_l$.
Άρα

$$\boxed{x(t)y(t) \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l} Y_l} \tag{4.287}$$

Παράδειγμα 4.19:

Έστω το γινόμενο

$$z(t) = x(t)y(t) \tag{4.288}$$

με

$$x(t) = 2\cos\left(2\pi 100 t + \frac{\pi}{3}\right) \longleftrightarrow X_{-1} = e^{-j\pi/3}, \;\; X_1 = e^{j\pi/3} \tag{4.289}$$

$$y(t) = \cos\left(2\pi 500 t - \frac{\pi}{8}\right) \longleftrightarrow Y_{-5} = \frac{1}{2} e^{j\pi/8}, \;\; Y_5 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/8} \tag{4.290}$$

με τους συντελεστές Y_k να είναι μη μηδενικοί για $k = \pm 5$, αν θεωρήσουμε το σήμα $y(t)$ ως περιοδικό με περίοδο $T_0 = 1/100 = 0.01$ s, με τους ημιτονοειδείς όρους συχνοτήτων $f_k = 100k$ Hz, $k = 1, 2, 3, 4$ να είναι μηδενικού πλάτους. Παρ' όλο που είναι απλό να βρεθεί εύκολα - μέσω τριγωνομετρικών σχέσεων - το $z(t)$, και στη συνέχεια τα φάσματα πλάτους και φάσης, ας δούμε πως μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Z_k κατευθείαν.

Είναι

$$Z_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{k-l} Y_l = X_{k-5} Y_5 + X_{k+5} Y_{-5} \tag{4.291}$$

Προφανώς το παραπάνω άθροισμα είναι μη μηδενικό μόνον όταν τα γινόμενα $X_{k-5}Y_5$ και $X_{k+5}Y_{-5}$ είναι μη μηδενικά. Άρα

$$Z_6 = X_1 Y_5 + X_{11} Y_{-5} = X_1 Y_5 = \frac{1}{2} e^{j\frac{5\pi}{24}} \tag{4.292}$$

$$Z_{-6} = X_{-11} Y_5 + X_{-1} Y_{-5} = X_{-1} Y_{-5} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{5\pi}{24}} \tag{4.293}$$

$$Z_4 = X_{-1} Y_5 + X_9 Y_{-5} = X_{-1} Y_5 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{11\pi}{24}} \tag{4.294}$$

$$Z_{-4} = X_{-9}Y_5 + X_1Y_{-5} = X_1Y_{-5} = \frac{1}{2}e^{j\frac{11\pi}{24}} \tag{4.295}$$

με την περίοδο του $z(t)$ να είναι $T_0 = 0.01$ s. Οπότε το $z(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$z(t) = \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{24}}e^{j2\pi 600t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{24}}e^{-j2\pi 600t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{11\pi}{24}}e^{j2\pi 400t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{11\pi}{24}}e^{-j2\pi 400t} \tag{4.296}$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις του Euler, το $z(t)$ είναι

$$z(t) = \cos\left(2\pi 400t - \frac{11\pi}{24}\right) + \cos\left(2\pi 600t + \frac{5\pi}{24}\right) \tag{4.297}$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι η εφαρμογή γνωστών τριγωνομετρικών σχέσεων δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

4.6.1.9 Παραγώγιση

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\frac{d}{dt}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)\frac{d}{dt}e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.298}$$

$$= 0 - \frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)\frac{1}{-j2\pi k f_0}e^{-j2\pi k f_0 t}dt = j2\pi k f_0\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.299}$$

$$= j2\pi k f_0 X_k \tag{4.300}$$

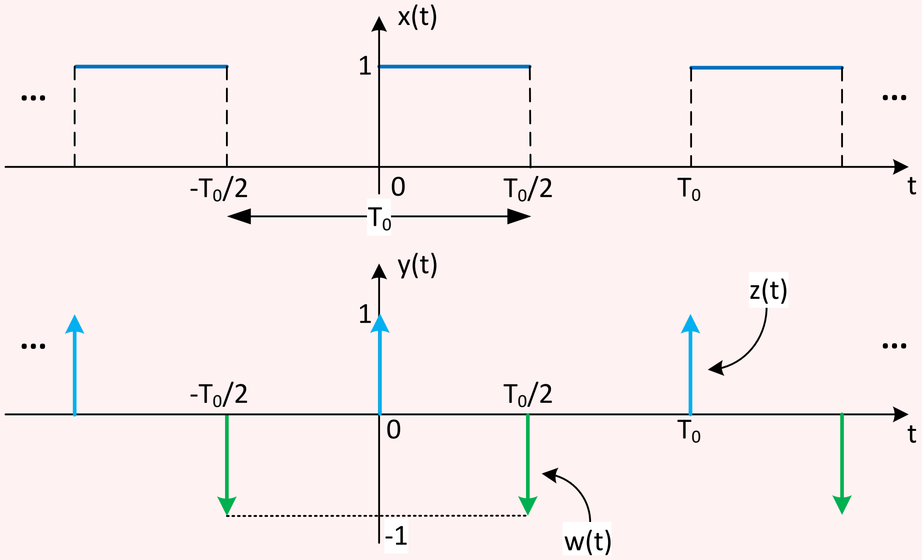
αφού η τιμή

$$\frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_{T_0} = \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_0^{T_0} = \frac{1}{T_0}(x(T_0)e^{-j2\pi k} - x(0)) = 0 \tag{4.301}$$

αφού $x(T_0) = x(0)$.

Παράδειγμα 4.20:

Θεωρώντας το περιοδικό σήμα $x(t)$ του Σχήματος 4.39(α), η παράγωγός του $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ απεικονίζεται στο Σχήμα 4.39(β).



Σχήμα 4.39: *Εφαρμογή της Παραγώγισης στο Χρόνο: (α) σήμα $x(t)$, (β) η παράγωγός του.*

Βρείτε τους συντελεστές Fourier του σήματος $y(t)$.

Γνωρίζουμε τους συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$, μια και αποτελεί το Παράδειγμα 4.8 της

Παραγράφου 4.4.3, για $A = 1$. Οι συντελεστές είναι

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k}(1 - (-1)^k) \tag{4.302}$$

Το περιοδικό σήμα $y(t)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο περιοδικών σημάτων: του περιοδικού σήματος $z(t)$, που αποτελείται από τις συναρτήσεις Δέλτα με θετικό πλάτος, και του σήματος $w(t)$ που αποτελείται από τις συναρτήσεις Δέλτα με αρνητικό πλάτος (σημειωμένες με γαλάζιο και πράσινο χρώμα, αντίστοιχα). Οι συντελεστές Z_k μας είναι γνωστοί από το Παράδειγμα 4.11 της Παραγράφου 4.4.3, και είναι

$$Z_k = \frac{1}{T_0} \tag{4.303}$$

ενώ οι συντελεστές W_k μας είναι επίσης γνωστοί, αφού το $w(t)$ πρόκειται για το ίδιο σήμα με το $z(t)$, με αντίθετο πρόσημο και μετατοπισμένο κατά $T_0/2$ δεξιά. Άρα από την ιδιότητα της μετατόπισης, οι συντελεστές W_k είναι

$$W_k = -\frac{1}{T_0}e^{-j2\pi k f_0 T_0/2} = -\frac{1}{T_0}e^{-j\pi k} = -\frac{1}{T_0}(-1)^k \tag{4.304}$$

Οπότε οι συντελεστές της παραγώγου του σήματος θα είναι

$$Y_k = Z_k + W_k = \frac{1}{T_0}(1 - (-1)^k) \tag{4.305}$$

Η ιδιότητα της παραγώγισης μας δίνει ότι

$$Y_k = j2\pi k f_0 X_k = j2\pi k f_0 \frac{1}{j2\pi k}(1 - (-1)^k) = \frac{1}{T_0}(1 - (-1)^k) \tag{4.306}$$

που συμφωνεί με το αποτέλεσμα που βρήκαμε αναλυτικά.

4.6.1.10 Ολοκλήρωση

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ δίνονται ως

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = -\frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)\Big(\frac{d}{dt}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big)dt \tag{4.307}$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k}y(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_{T_0} + \frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\Big(\frac{d}{dt}y(t)\Big)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.308}$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k}y(T_0)e^{-j2\pi k f_0 T_0} + \frac{1}{j2\pi k}y(0)e^{-j2\pi k} + \frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\Big(\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\Big)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.309}$$

$$-\frac{1}{j2\pi k}(y(T_0) - y(0)) + \frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.310}$$

$$= \frac{1}{j2\pi k f_0}\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.311}$$

$$= \frac{X_k}{j2\pi k f_0} \tag{4.312}$$

αφού για το περιοδικό σήμα $y(t)$ ισχύει $y(T_0) = y(0)$.

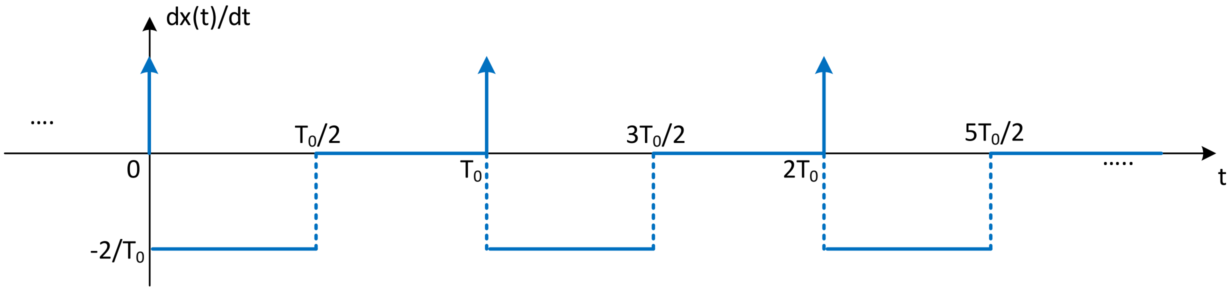
Παράδειγμα 4.21:

Έστω το περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$ που δίνεται σε μια περίοδό του ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2t}{T_0}, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} \le t < T_0 \end{cases} \tag{4.313}$$

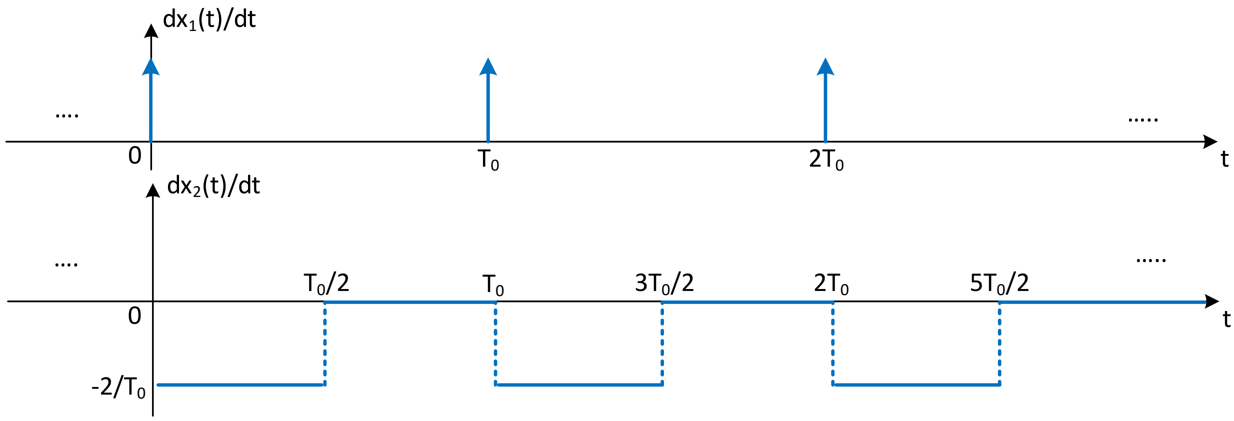
Βρείτε τους συντελεστές Fourier του σήματος αυτού.

Η παράγωγος του παραπάνω περιοδικού σήματος φαίνεται στο Σχήμα 4.40 και μπορεί να χωριστεί σε δυο



Σχήμα 4.40: Εφαρμογή της Ολοκλήρωσης στο Χρόνο: παράγωγος του σήματος $x(t)$.

περιοδικά σήματα, όπως αυτά στο Σχήμα 4.41. Τα σήματα αυτά γράφονται ως



Σχήμα 4.41: Εφαρμογή της Ολοκλήρωσης στο Χρόνο: σήματα $\frac{dx_1(t)}{dt}$ και $\frac{dx_2(t)}{dt}$.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \tag{4.314}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(-\frac{2}{T_0}\Big)\text{rect}\Big(\frac{t-(4k+1)\frac{T_0}{4}}{T_0/2}\Big) \tag{4.315}$$

Το περιοδικό σήμα $y(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$ έχει συντελεστές Fourier

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0} \tag{4.316}$$

από γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα. Όμοια, οι συντελεστές Fourier του $z(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$ είναι

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\Big(-\frac{2}{T_0}\Big)\text{rect}\Big(\frac{t-\frac{T_0}{4}}{T_0/2}\Big)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = -\frac{2}{T_0^2}\int_0^{T_0/2} e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.317}$$

$$= -\frac{2}{T_0^2}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_0^{T_0/2} = \frac{1}{j\pi k T_0}(e^{-j\pi k} - 1) \tag{4.318}$$

$$= \frac{1}{j\pi k T_0}((-1)^k - 1) \tag{4.319}$$

Οπότε οι συντελεστές Fourier του σήματος της παραγώγου είναι

$$X_k^d = Y_k + Z_k = \frac{1}{T_0} + \frac{1}{j\pi k T_0}((-1)^k - 1) \tag{4.320}$$

Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης, ξέρουμε ότι οι συντελεστές του σήματος $x(t)$ ισούνται με $X_k^d/j2\pi k f_0$. Άρα

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0}\Big(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{j\pi k T_0}((-1)^k - 1)\Big) = \frac{1}{j2\pi k} + \frac{1}{j^2 2\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) \tag{4.321}$$

που μπορεί να γραφεί ως

$$X_k = -\frac{j}{2\pi k} - \frac{1}{-2\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) = \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - (-1)^k) - \frac{j}{2\pi k} \tag{4.322}$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει αναλυτικά ότι οι συντελεστές Fourier του σήματος $x(t)$ είναι ως παραπάνω (Άσκηση XXXX).

4.6.1.11 Συζυγής Συμμετρία

Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, δηλ. ισχύει ότι $x(t) = x^*(t)$, τότε

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt && (4.323)\\ &= \frac{1}{T_0}\Big(\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt\Big)^* = \frac{1}{T_0}\Big(\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi(-k f_0)t}dt\Big)^* && (4.324)\\ &= X_{-k}^* && (4.325) \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση, εξάγουμε ότι

$$\begin{aligned} X_k &= X_{-k}^* && (4.326)\\ \Re\{X_k\} + j\Im\{X_k\} &= \Re\{X_{-k}\} - j\Im\{X_{-k}\} && (4.327)\\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\} \text{ και } & \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\} && (4.328) \end{aligned}$$

Επίσης, η πολική μορφή της Σχέσης (4.326) δίνει

$$\begin{aligned} X_k &= X_{-k}^* && (4.329)\\ |X_k|e^{j\phi_k} &= |X_{-k}|e^{-j\phi_{-k}} && (4.330)\\ |X_k| = |X_{-k}| \text{ και } & \phi_k = -\phi_{-k} && (4.331) \end{aligned}$$

Άρα, για πραγματικά σήματα, το φάσμα πλάτους είναι άρτια συνάρτηση της συχνότητας ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτησή της.

Παράδειγμα 4.22:

Ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = -\frac{\pi^2}{2jk^2} \tag{4.332}$$

Ας ελέγξουμε αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό ή μιγαδικό.

Είναι

$$X_k^* = \Big(-\frac{\pi^2}{2jk^2}\Big)^* = \frac{\pi^2}{2jk^2} \tag{4.333}$$

και

$$X_{-k} = -\frac{\pi^2}{2j(-k)^2} = -\frac{\pi^2}{2jk^2} \tag{4.334}$$

άρα το σήμα δεν είναι πραγματικό.

4.6.1.12 Άρτιο Σήμα

Ένα σήμα λέγεται *άρτιο* όταν ισχύει

$$x(t) = x(-t) \ \forall\, t \tag{4.335}$$

Οι συντελεστές Fourier του είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\Big(\int_{T_0} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)dt - j\int_{T_0} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)dt\Big) \tag{4.336}$$

Το ολοκλήρωμα

$$-j\int_{T_0} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)dt \tag{4.337}$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$-j\int_{T_0} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)dt = 0 \tag{4.338}$$

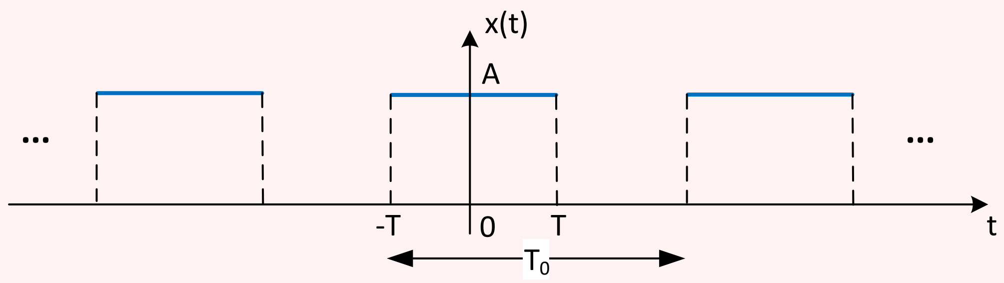
Οπότε

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)dt \tag{4.339}$$

που είναι ασφαλώς πραγματικοί αριθμοί, δηλ. $\Re\{X_k\} = X_k$.

Παράδειγμα 4.23:

Δείξτε ότι το περιοδικό σήμα του Σχήματος 4.42



Σχήμα 4.42: *Άρτιο σήμα.*

έχει πραγματικούς συντελεστές Fourier

Θα είναι

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T}^{T} Ae^{-j2\pi k f_0 t}dt && (4.340)\\
&= \frac{A}{-j2\pi k}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_{-T}^{T} = -\frac{A}{j2\pi k}(-2j\sin(2\pi k f_0 T)) && (4.341)\\
&= \frac{A}{\pi k}\sin(2\pi k f_0 T) && (4.342)
\end{aligned}$$

που προφανώς είναι πραγματικοί, δηλ. $\Re\{X_k\} = X_k$. Υπολογίζοντας τους συντελεστές με τη Σχέση (4.339), έχουμε

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T}^{T} A\cos(2\pi k f_0 t)dt && (4.343)\\
&= \frac{A}{2\pi k}\sin(2\pi k f_0 t)\Big]_{-T}^{T} = \frac{A}{2\pi k}(\sin(2\pi k f_0 T) - \sin(-2\pi k f_0 T)) && (4.344)\\
&= \frac{A}{2\pi k}2\sin(2\pi k f_0 T) = \frac{A}{\pi k}\sin(2\pi k f_0 T) && (4.345)
\end{aligned}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα.

4.6.1.13 Περιττό Σήμα

Ένα σήμα λέγεται *περιττό* όταν ισχύει
$$x(t) = -x(-t) \ \forall \, t \tag{4.346}$$
Οι συντελεστές Fourier του είναι
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\Big(\int_{T_0} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)dt - j\int_{T_0} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)dt\Big) \tag{4.347}$$
Το ολοκλήρωμα
$$\int_{T_0} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)dt \tag{4.348}$$
θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου περιττής επί άρτιας συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.
$$\int_{T_0} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)dt = 0 \tag{4.349}$$
Οπότε
$$X_k = -j\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)dt \tag{4.350}$$
που είναι ασφαλώς φανταστικοί αριθμοί, δηλ. $j\Im\{X_k\} = X_k$.

Παράδειγμα 4.24:

Στο Παράδειγμα 4.11 δείξαμε ότι το περιοδικό σήμα του Σχήματος 4.22 έχει συντελεστές Fourier
$$X_k = \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{j\pi/2} = j\frac{A}{k\pi}(-1)^k \tag{4.351}$$
που προφανώς είναι φανταστικοί.

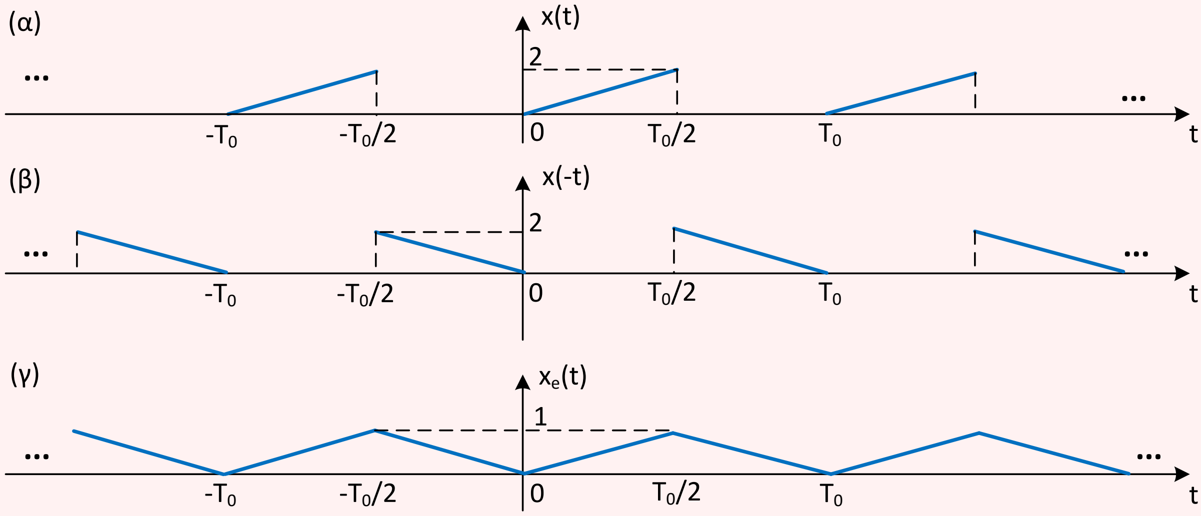
Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει το παραπάνω αποτέλεσμα με χρήση της Σχέσης (4.350).

4.6.1.14 Άρτιο μέρος

Το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως
$$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \tag{4.352}$$
και άρα οι συντελεστές Fourier του είναι
$$X_{e_k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\frac{1}{2}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\frac{1}{2}x(-t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.353}$$
$$= \frac{1}{2}X_k + \frac{1}{2}X_{-k} = \frac{1}{2}X_k + \frac{1}{2}X_k^* \tag{4.354}$$
$$= \frac{1}{2}2\Re\{X_k\} = \Re\{X_k\} \tag{4.355}$$

Παράδειγμα 4.25:

Στο Σχήμα 4.43 φαίνεται ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, το σήμα $x(-t)$, καθώς και το άρτιο μέρος $x_e(t)$ του $x(t)$.



Σχήμα 4.43: *(α) σήμα $x(t)$, (β) σήμα $x(-t)$, (γ) $x_e(t)$: άρτιο μέρος του $x(t)$.*

Δείξτε ότι το άρτιο μέρος του σήματος $x_e(t)$ έχει συντελεστές Fourier

$$X_{e_k} = \Re\{X_k\} = \frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) \tag{4.356}$$

Οι συντελεστές Fourier του σήματος $x(t)$ είναι (Άσκηση XXXX)

$$X_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) + j\frac{(-1)^k}{\pi k} \tag{4.357}$$

Άρα οι συντελεστές Fourier του άρτιου μέρους του σήματος, $x_e(t)$, (Άσκηση XXXX) είναι

$$X_{e_k} = \Re\{X_k\} = \frac{1}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) \tag{4.358}$$

4.6.1.15 Περιττό μέρος

Το περιττό μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \tag{4.359}$$

και άρα οι συντελεστές Fourier του είναι

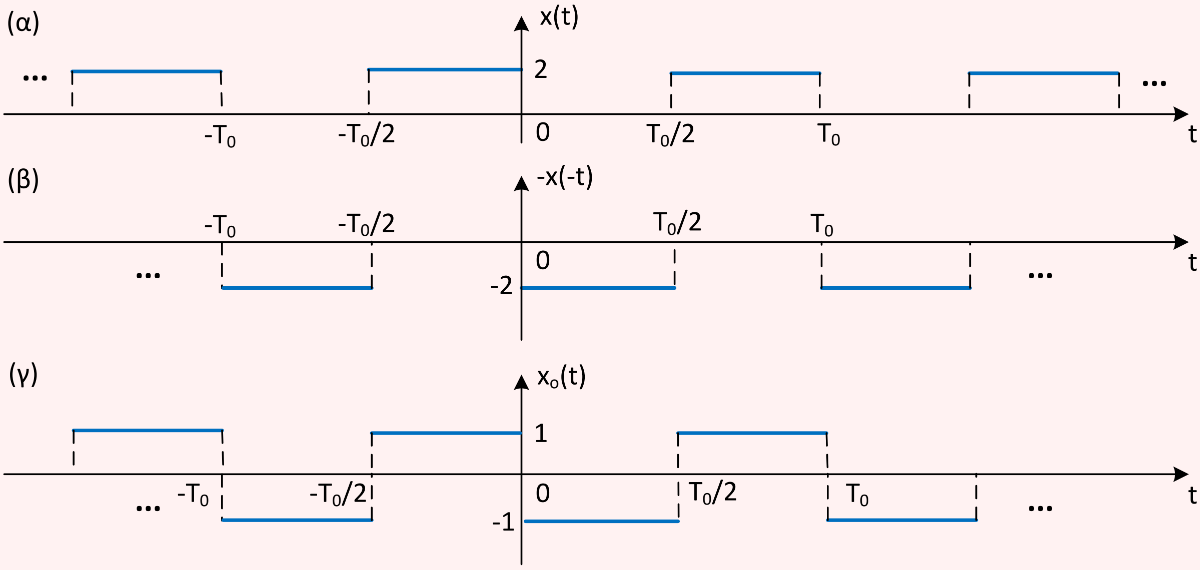
$$X_{o_k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \frac{1}{2}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \frac{1}{2}x(-t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.360}$$

$$= \frac{1}{2}X_k - \frac{1}{2}X_{-k} = \frac{1}{2}X_k - \frac{1}{2}X_k^* \tag{4.361}$$

$$= \frac{1}{2}2j\Im\{X_k\} = j\Im\{X_k\} \tag{4.362}$$

Παράδειγμα 4.26:

Στο Σχήμα 4.44 φαίνεται ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, το σήμα $-x(-t)$, καθώς και το περιττό μέρος $x_o(t)$ του $x(t)$.



Σχήμα 4.44: *(α) σήμα $x(t)$, (β) σήμα $-x(-t)$, (γ) $x_o(t)$: περιττό μέρος του $x(t)$.*

Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier του περιττού μέρους $x_o(t)$ είναι

$$X_{o_k} = j\Im\{X_k\} = -j\frac{1}{\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \tag{4.363}$$

Το σήμα $x(t)$ δεν είναι άλλο από το σήμα του Παραδείγματος 4.9 με πλάτος $A = 2$, κι έχοντας υποστεί αντιστροφή χρόνου. Άρα οι συντελεστές Fourier του θα είναι

$$X_k = 2\frac{1}{j2\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \tag{4.364}$$

Οι συντελεστές Fourier του περιττού μέρους του σήματος, $x_o(t)$, είναι

$$X_{o_k} = j\Im\{X_k\} = -j\frac{1}{\pi k}((-1)^k - 1) = \frac{1}{j\pi k}((-1)^k - 1) \tag{4.365}$$

Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται από το Παράδειγμα 4.8, αφού το περιττό μέρος $x_o(t)$ που συζητάμε είναι το περιοδικό σήμα του Παραδείγματος 4.8, έχοντας υποστεί αντιστροφή στο χρόνο.

4.6.1.16 Θεώρημα του Parseval

Έστω ότι το περιοδικό σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.366}$$

Η ισχύς του σήματος δίνεται ως

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \Big|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Big|^2 dt \tag{4.367}$$

Το σύνολο $\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ περιέχει στοιχεία που είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Μπορούμε να δείξουμε ότι λόγω της ορθογωνιότητας, η ενέργεια του αθροίσματός τους ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ενεργειών, δηλ.

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \Big|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Big|^2 dt \tag{4.368}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Big)\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Big)^* dt \tag{4.369}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq k}}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 t} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t}\right) dt \tag{4.370}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq k}}^{+\infty} X_l X_k^* e^{j2\pi(l-k) f_0 t}\right) dt \tag{4.371}$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_0^{T_0} dt + \frac{1}{T_0}\sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq k}}^{+\infty} X_l X_k^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(l-k) f_0 t} dt \tag{4.372}$$

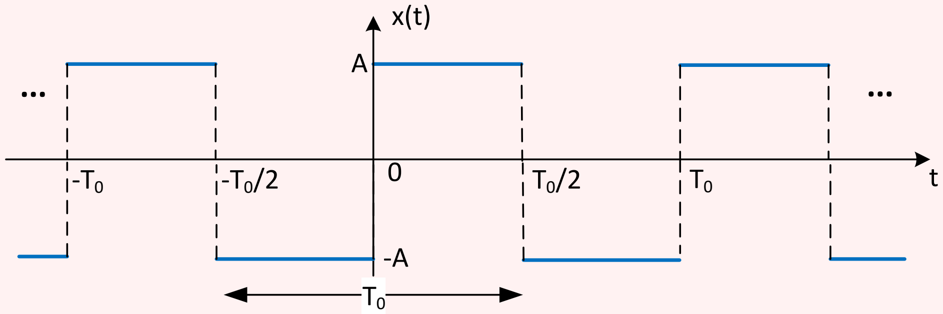
και λόγω της Σχέσης (4.141), έχουμε τελικά

$$P_x = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_0^{T_0} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \tag{4.373}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 4.27:

Υπολογίστε την ισχύ P_x του περιοδικού σήματος $x(t)$ του Σχήματος 4.16, το οποίο επαναλαμβάνουμε εδώ για ευκολία.



Σχήμα 4.45: *Θεώρημα του Parseval για το περιοδικό σήμα του παραδείγματος 4.8.*

Η ισχύς του σήματος υπολογίζεται ως

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \frac{1}{T_0}\Big(\int_0^{\frac{T_0}{2}} A^2 dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} A^2 dt\Big) = A^2 \tag{4.374}$$

Βρήκαμε νωρίτερα ότι οι συντελεστές Fourier του σήματος είναι

$$X_k = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\pi/2} \tag{4.375}$$

για περιττά k. Άρα

$$|X_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2 k^2} \tag{4.376}$$

Το Θεώρημα του Parseval δίνει

$$P_x = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k\ \text{περιττό}}}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2}\sum_{\substack{k=-\infty, \\ k\ \text{περιττό}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4A^2}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4} = A^2 \tag{4.377}$$

γιατί μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\ \text{περιττό}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} \tag{4.378}$$

4.7 Όμως...

Συνοψίζοντας, αναλύσαμε μια μέθοδο αναπαράστασης ενός περιοδικού σήματος ως ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών περιοδικών σημάτων των οποίων οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους. Αυτή η αναπαράσταση (Σειρά Fourier), καθώς και τα συμπεράσματά της, είναι πολύτιμη σε πολλές εφαρμογές. Όμως, η Σειρά Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για περιοδικά σήματα. Όλα όμως τα σήματα στην πράξη είναι μη περιοδικά (θυμηθείτε ότι ένα περιοδικό σήμα ξεκινά από το $-\infty$ και εκτείνεται ως το $+\infty$).

Αυτό μπορεί να υπερκεραστεί με την αναπαράσταση μη περιοδικών σημάτων ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Αυτό δεν είναι άλλο από τον περίφημο *μετασχηματισμό Fourier*, που θα συζητήσουμε άμεσα.

4.8 Εισαγωγή στο Μετασχ. Fourier

Ο μετασχ. Fourier ορίζεται εύκολα ως η επέκταση των σειρών Fourier, όταν η περίοδος του σήματος τείνει στο άπειρο, όταν δηλαδή το σήμα πλησιάζει στο να *μην* είναι πια περιοδικό. Άρα αφορά κυρίως ΜΗ περιοδικά σήματα. Τότε τα X_k παύουν να ορίζονται για ακέραια k και για συγκεκριμένες συχνότητες kf_0, και ορίζονται πλέον για κάθε συχνότητα f, σε ένα συνεχές φάσμα $X(f)$.

Διαισθητικά, μπορούμε να ‘‘αποδείξουμε’’ αυτή τη σχέση ως εξής. Δείτε το Σχήμα 4.46. Στο πάνω τμήμα, βλέπουμε το φάσμα πλάτους ενός περιοδικού σήματος, που έχει περίοδο $T_0 = 5$ s. Βλέπετε πως οι φασματικές γραμμές είναι σχετικά αραιές. Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0 = 1/T_0 = 0.2$ Hz και τα πολλαπλάσιά της βρίσκονται στις θέσεις $kf_0 = 0.2k,\ k \in Z$ Hz.

Δείτε τώρα το μεσαίο τμήμα του Σχήματος 4.46. Βλέπετε πως αν μεγαλώσουμε την περίοδο, και γίνει $T_0 = 10$ s, τότε η θεμελιώδης συχνότητα γίνεται $f_0 = 1/T_0 = 1/10 = 0.1$ Hz και είναι πιο μικρή, και άρα και τα πολλαπλάσιά της, $kf_0 = 0.1k,\ k \in Z$ Hz, θα είναι πιο κοντά το ένα με το άλλο. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο φάσμα πλάτους. Οι φασματικές γραμμές είναι πολύ πιο κοντά απ΄ ότι πριν. Σκεφτείτε να επαναλαμβάνουμε συνέχεια αυτή τη διαδικασία για όλο και πιο μεγάλες περιόδους T_0. Η θεμελιώδης συχνότητα f_0 γίνεται συνεχώς όλο και πιο μικρή, και οι φασματικές γραμμές έρχονται όλο και πιο κοντά, καθώς τα kf_0 είναι όλο πιο κοντά το ένα στο άλλο.

Όταν το T_0 γίνει πολύ πολύ (πολύ! :-)) μεγάλο, και τείνει προς το $+\infty$ – δηλ. το σήμα *δέν* θεωρείται πια περιοδικό – όπως στο κάτω τμήμα του Σχήματος 4.46, τότε το f_0 θα γίνει απειροστά μικρό, και τα πολλαπλάσιά του, kf_0, με $k \in \mathbb{Z}$, θα είναι τόσο κοντά το ένα με το άλλο που δε θα ορίζουν πια διακριτές τιμές, αλλά ένα συνεχή άξονα του f! Έτσι, οι φασματικές γραμμές θα είναι απειροστά κοντά μεταξύ τους, τόσο κοντά που πλέον δε θα είναι φασματικές γραμμές σε συγκεκριμένες συχνότητες, αλλά θα ορίζουν μια συνεχή συνάρτηση $X(f)$! Αυτή είναι η διαισθητική προσέγγιση της σχέσης μετασχ. Fourier και της σειράς Fourier.

Αν θεμελιώσουμε τώρα τη διαισθητική μας προσέγγιση, ξεκινώντας από τη Σειρά Fourier που μας αναπτύσσει το σήμα σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συχνοτήτων kf_0

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.379}$$

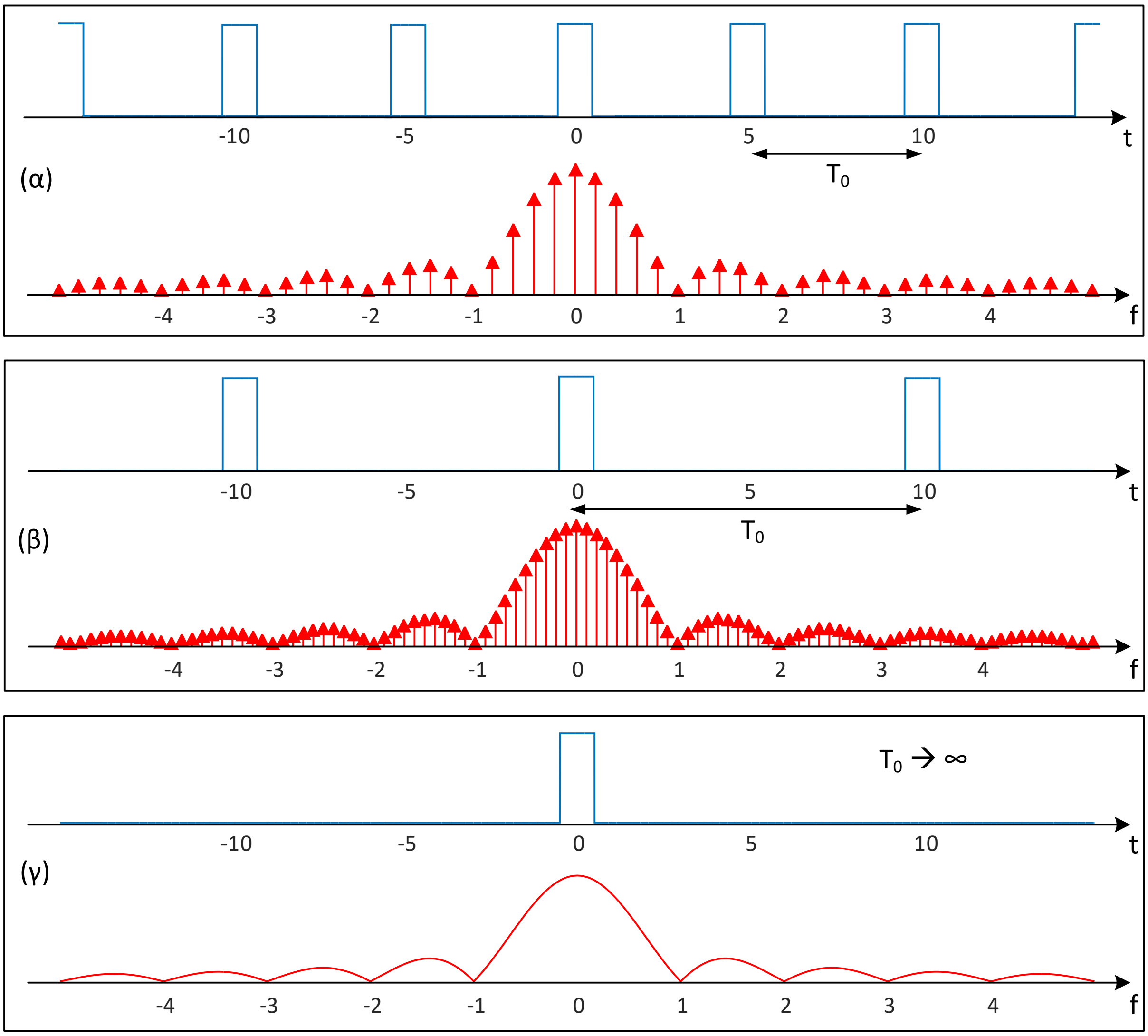
Αντικαθιστώντας το γνωστό μας ολοκλήρωμα του X_k, επιλέγοντας ως περίοδο το διάστημα $[-T_0/2, T_0/2)$,

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.380}$$

θα έχουμε

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\Big)e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.381}$$

Όταν το $T_0 \to \infty$, τότε το $f_0 = \frac{1}{T_0} \to df$, δηλ. σε μια απειροστά μικρή ποσότητα, τόσο μικρούλα που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια μικρή μετατόπιση μιας συνεχούς μεταβλητής f. Άρα, $kf_0 \to f$, σε μια συνεχή μεταβλητή f που ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό (συχνότητα).



Σχήμα 4.46: *Διαισθητική απόδειξη της σχέσης μεταξύ των σειρών Fourier και του μετασχ. Fourier.*

Επίσης, όταν $T_0 \to \infty$, το $1/T_0$ μπροστά από το ολοκλήρωμα τείνει στο df. Τέλος, αφού πλέον δεν έχουμε ακέραιες πολλαπλάσιες συχνότητες του f_0, το άθροισμα ($\sum$) της σειράς επάνω στα k μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ($\int$) πάνω στη συνεχή μεταβλητή f.

Οπότε, τελικά

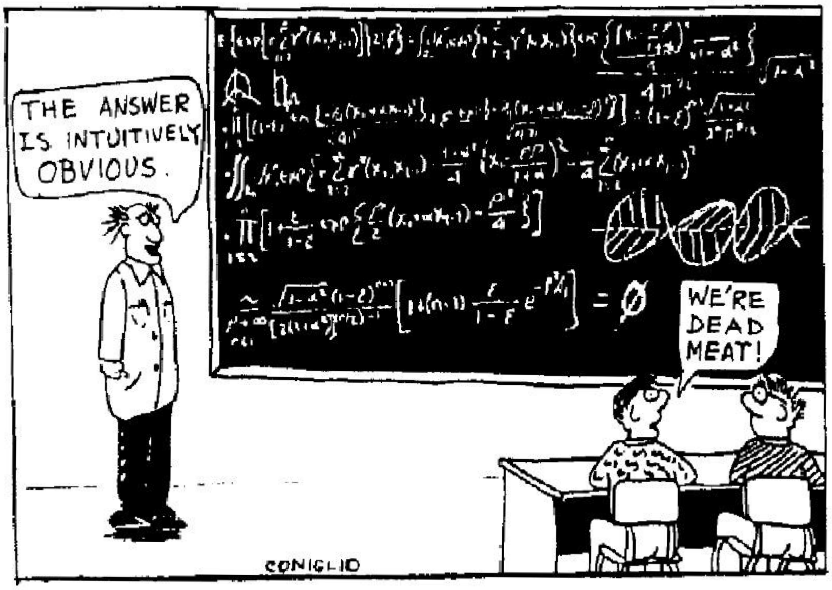
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right)e^{j2\pi k f_0 t} \xrightarrow{T_0 \to \infty} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt\right)e^{j2\pi f t} \quad (4.382)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt}_{X(f)}\right)e^{j2\pi f t}df \quad (4.383)$$

με

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt \quad (4.384)$$

να είναι ο περίφημος Μετασχηματισμός Fourier.



Σχήμα 4.47: *Βασιστείτε στη διαίσθησή σας!!* ☺

4.9 Ο μετασχηματισμός Fourier

Αποδείξαμε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier ορίζεται ως:

$$\boxed{X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt} \tag{4.385}$$

και ο αντίστροφος μετασχ. Fourier ως

$$\boxed{x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df} \tag{4.386}$$

Η Σχέση (4.385) μας αναλύει ένα μη περιοδικό σήμα σε ένα συνεχές φάσμα $X(f)$, ενώ η Σχέση (4.386) μας συνθέτει το σήμα $x(t)$ ως ένα συνεχές άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων, με συντελεστές $X(f)$.

Η ομοιότητα με τις Σειρές Fourier είναι, όπως είδαμε, αρκετά μεγάλη. Όπως για πραγματικά περιοδικά σηματα, δυο μιγαδικά εκθετικά στις συχνότητες $\pm kf_0$ δίνουν ένα συνημίτονο συχνότητας kf_0, αυτό συμβαίνει και εδώ. Έστω ένα απειροστά μικρό εύρος συχνοτήτων Δf του συνεχούς φάσματος του σήματος. Επειδή αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και το αντίστοιχο εύρος $-\Delta f$ και το πλάτος καθενός - υποθέτοντας ότι το εύρος Δf είναι τόσο μικρό που το πλάτος του είναι σταθερό - θα είναι $X(\Delta f)$ και $X^*(\Delta f)$ αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων συζυγίας συντελεστών για τα πραγματικά σήματα. Άρα προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
X(\Delta f)e^{j\Delta ft} + X^*(\Delta f)e^{-j\Delta ft} &= |X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + (|X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}})^*e^{-j2\pi\Delta ft} \\
&= |X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + |X(\Delta f)|e^{-j\phi_{\Delta f}}e^{-j2\pi\Delta ft} \\
&= |X(\Delta f)|e^{j(2\pi\Delta ft+\phi_{\Delta f})} + |X(\Delta f)|e^{-j(2\pi\Delta ft+\phi_{\Delta f})} \\
&= 2|X(\Delta f)|\cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})
\end{aligned} \tag{4.387}$$

Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους $2|X(\Delta f)|$ για ένα πολύ μικρό εύρος συχνοτήτων Δf. Μάλιστα, αν θέσουμε $\Delta f \to df$ και αθροίσουμε ως προς όλες τις απειροστά μικρές συχνοτικές μεταβολές df (δηλ. ολοκληρώσουμε ως προς df), θα λάβουμε

$$X(f) = 2\int_{0}^{+\infty} |X(f)|\cos(2\pi ft + \phi(f))df \tag{4.388}$$

με $|X(f)|$ και $\phi(f)$ το *μέτρο* και τη *φάση* αντίστοιχα, του μιγαδικού (εν γένει) μετασχ. Fourier. Έτσι, *και ο* μετασχηματισμός Fourier αναλύει ένα σήμα σε ημίτονα στην πραγματικότητα! Μια τέτοια ανάλυση όπως τη δείξαμε μόλις βοηθά πολύ στην καλύτερη κατανόηση του μετασχηματισμού, ενώ αναδεικνύει και τις ομοιότητές του με τη Σειρά Fourier.

Ο μετασχ. Fourier μπορεί εν γένει να γραφεί ως

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.389}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt \tag{4.390}$$

$$= \Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = R(f) + jI(f) \tag{4.391}$$

με $R(f), I(f)$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού, αντίστοιχα. Άρα ο μετασχ. Fourier είναι εν γένει μιγαδικό σήμα, με το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος να υπολογίζεται ως

$$R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt \tag{4.392}$$

$$I(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt \tag{4.393}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συνεπάγεται ότι

$$R(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(-2\pi ft)dt = R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt = R(f) \tag{4.394}$$

που σημαίνει ότι το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού είναι ένα άρτιο σήμα, ενώ

$$I(-f) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(-2\pi ft)dt = R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt = -I(f) \tag{4.395}$$

που σημαίνει ότι το φανταστικό του μέρους είναι περιττό σήμα.

Μια εναλλακτική και πολύ χρήσιμη αναπαράσταση του μετασχ. Fourier είναι η πολική μορφή, δηλ.

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)} \tag{4.396}$$

με

$$|X(f)| = \sqrt{R^(f) + I^2(f)} \tag{4.397}$$

να είναι το μέτρο του μετασχηματισμού (δηλ. το *φάσμα πλάτους*) και

$$\phi_x(f) = \tan^{-1}\left(\frac{I(f)}{R(f)}\right) \tag{4.398}$$

η φάση του μετασχηματισμού (δηλ. το *φάσμα φάσης*). Βλέπουμε λοιπόν πως όπως η Σειρά Fourier ανέλυε ένα περιοδικό σήμα στο φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του, το ίδιο συμβαίνει και εδώ.

4.9.1 Ύπαρξη του μετασχ. Fourier

Όπως προείπαμε, ο μετασχ. Fourier προέκυψε από την ανάγκη εύρεσης του συχνοτικού περιεχομένου *μη* περιοδικών σημάτων. Για να υπάρχει ο μετασχ. Fourier, πρέπει το ολοκλήρωμα της Σχέσης (4.385) να συγκλίνει, δηλ.

$$|X(f)| < \infty \Longleftrightarrow \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)e^{-j2\pi ft}\right|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty \tag{4.399}$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι το $x(t)$ πρέπει να είναι *απολύτως ολοκληρώσιμο*.

Επίσης, εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι τα σήματα ενέργειας έχουν πάντα μετασχ. Fourier. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \Re$, *δεν* έχει μετασχηματισμό Fourier γιατί δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Αυτό δεν είναι τυχαίο, γιατί είναι το σήμα αυτό δεν είναι σήμα ενέργειας, και για αυτά τα σήματα ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει, γιατί το ολοκλήρωμα της Σχέσης (4.385) δε συγκλίνει. Εν γένει, σήματα που δεν είναι σήματα ενέργειας δε σημαίνει απαραίτητα ότι δεν έχουν μετασχ. Fourier - *ίσως* έχουν αλλά αυτός δεν υπολογίζεται μέσω του ολοκληρώματος της Σχέσης (4.385). Περισσότερα όμως θα συζητήσουμε παρακάτω.

4.9.2 Χαρακτηριστικά παραδείγματα

Παράδειγμα 4.28:

Ας δείξουμε ότι

$$\boxed{x(t) = A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \longleftrightarrow X(f) = AT\mathrm{sinc}(fT)} \tag{4.400}$$

με

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{4.401}$$

όπως στο Σχήμα 4.48(α).

Λύση:
Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-j2\pi ft}dt \tag{4.402}$$

$$= A\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft}dt = A\frac{1}{(-j2\pi f)}e^{-j2\pi ft}\Big]_{-T/2}^{T/2} \tag{4.403}$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f}(e^{-j2\pi fT/2} - e^{j2\pi fT/2}) = \frac{A}{j2\pi f}(e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}) \tag{4.404}$$

Η παρένθεση μοιάζει πολύ με τη σχέση του Euler για το ημίτονο

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \tag{4.405}$$

άρα χρειαζόμαστε τον όρο $2j$ στον παρονομαστή για να τη χρησιμοποιήσουμε. Είναι

$$X(f) = \frac{A}{j2\pi f}(e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}) = \frac{2A}{2\pi f}\frac{e^{j2\pi fT/2} - e^{-j2\pi fT/2}}{2j} = \frac{A}{\pi f}\sin(\pi fT) \tag{4.406}$$

Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (4.401), για να γράψουμε πιο όμορφα το αποτέλεσμα. Η σχέση αυτή θέλει έναν όρο π μέσα στο ημίτονο και στον παρονομαστή. Πρέπει κάπως να το βάλουμε, και επίσης να φτιάξουμε κατάλληλα το πηλίκο για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Σχέση (4.401).

Θα είναι

$$X(f) = \frac{A}{\pi f}\sin(\pi fT) = A\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = AT\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = AT\frac{\sin(\pi(fT))}{\pi(fT)} \tag{4.407}$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (4.401) και να πάρουμε τελικά

$$X(f) = AT\mathrm{sinc}(fT) \tag{4.408}$$

Το ζεύγος

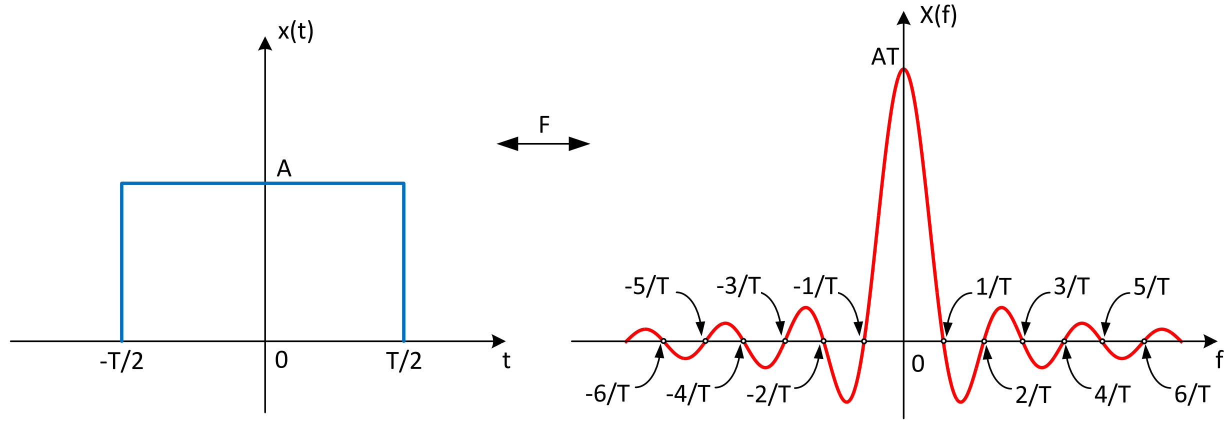
$$x(t) = A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \longleftrightarrow X(f) = AT\mathrm{sinc}(fT) \tag{4.409}$$

είναι πολύ χρήσιμο και θα το θεωρούμε δεδομένο από δω και στο εξής. Παρατηρήστε ότι το $\mathrm{sinc}(fT)$ μηδενίζεται στις θέσεις $f = \pm\frac{2\pi k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$. Το $X(f)$ είναι εν γένει μιγαδική συνάρτηση, άρα κι αυτή μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\angle X(f)} \tag{4.410}$$

όπου το $|X(f)|$ είναι πάντα θετικό, ως μέτρο, και το $\angle X(f)$ η φάση του μετασχ. Fourier, αντίστοιχα. Για το παράδειγμά μας, έστω $A = 1$, και θα είναι

$$|X(f)| = T\Big|\mathrm{sinc}(fT)\Big| \tag{4.411}$$

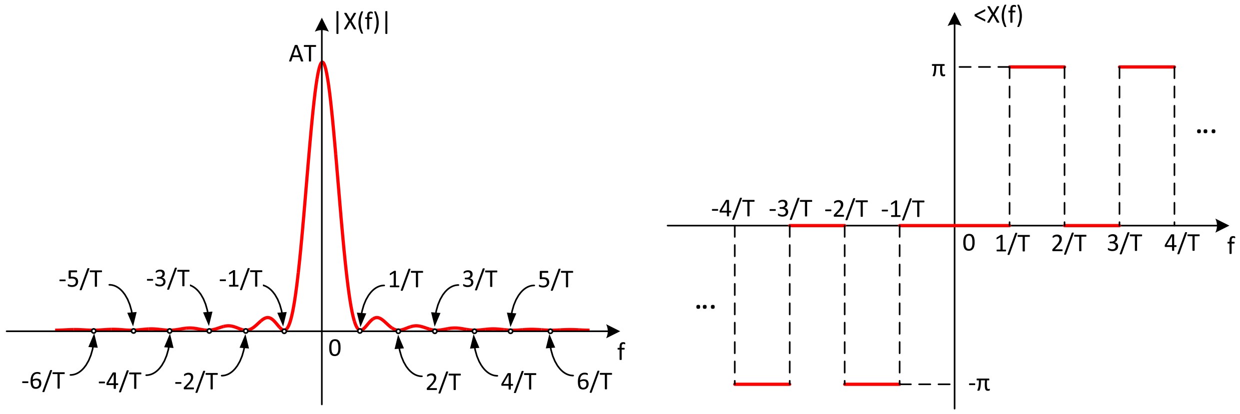


Σχήμα 4.48: *Σήμα τετραγωνικού παλμού και ο Μετασχ. Fourier του.*

και

$$\angle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{(1+l)}{T} \leq f < \frac{(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{(2+l)}{T} \leq f < -\frac{(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} \leq |f| < \frac{(l+1)}{T} \end{cases} \tag{4.412}$$

με $l = 0, 2, 4, \cdots$. Ας μείνουμε λίγο στις τιμές της φάσης. Το $X(f)$ είναι σε κάποια διαστήματα θετικό και σε



Σχήμα 4.49: *Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος* $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$.

κάποια αρνητικό. Δείτε το Σχήμα 4.48 με προσοχή. Εκεί που το $X(f)$ είναι θετικό, η φάση είναι μηδέν. Εκεί που είναι αρνητικό, έχουμε δυο περιπτώσεις:

- αν βρισκόμαστε σε θετικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(f) = -T\mathrm{sinc}(fT) = T\mathrm{sinc}(fT)e^{j\pi}, \quad \frac{1+l}{T} \leq f < \frac{2+l}{T}. \tag{4.413}$$

  Άρα η φάση είναι $\angle X(f) = \pi$ σε αυτά τα διαστήματα.

- αν βρισκόμαστε σε αρνητικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(f) = -T\mathrm{sinc}(fT) = T\mathrm{sinc}(fT)e^{-j\pi}, \quad -\frac{2+l}{T} \leq f < -\frac{1+l}{T}. \tag{4.414}$$

  Άρα η φάση είναι $\angle X(f) = -\pi$ σε αυτά τα διαστήματα.

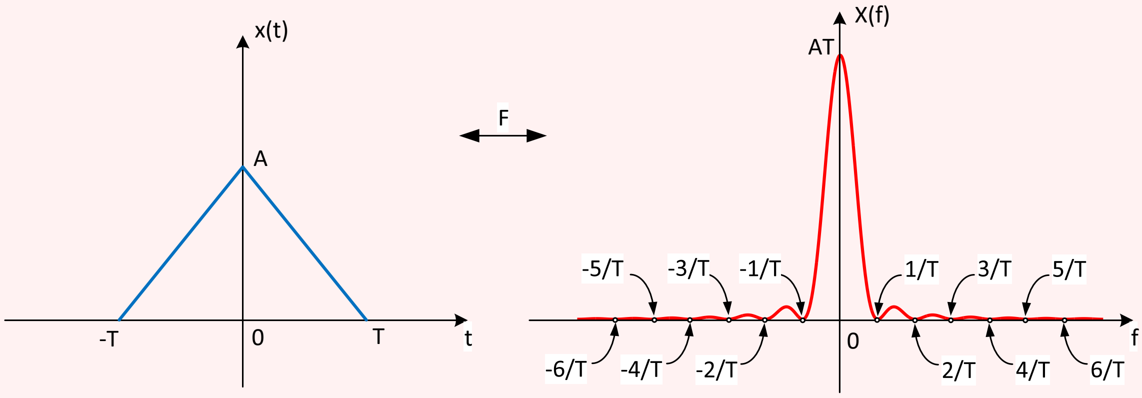
Το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού φαίνονται στο Σχήμα 4.49. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τετραγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f| \to \infty$, ενώ η φάση είναι μηδενική για κάποια ημίτονα ή $\pm\pi$ για κάποια άλλα. Επίσης παρατηρήστε τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης, αντίστοιχα! Δεν είναι τυχαία - αναλύουμε πραγματικά σήματα, και όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια, οι συμμετρίες αυτές εξακολουθούν να ισχύουν και για το μετασχηματισμό Fourier!

Παράδειγμα 4.29:

Δείξτε ότι

$$\boxed{x(t) = A\mathrm{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big) \longleftrightarrow X(f) = AT\mathrm{sinc}^2(fT)} \tag{4.415}$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα (4.50).



Σχήμα 4.50: *Σήμα τριγωνικού παλμού και ο Μετασχ. Fourier του.*

Λύση:
Προσέξτε, εδώ η μισή διάρκεια του τριγώνου είναι T, και όχι ολόκληρη, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Ο λόγος θα γίνει εμφανής τώρα. Θα είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-T}^{0}\Big(\frac{A}{T}t + A\Big)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{T}\Big(-\frac{A}{T}t + A\Big)e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.416}$$

$$= \frac{A}{T}\int_{-T}^{0} te^{-j2\pi ft}dt + A\int_{-T}^{0} e^{-j2\pi ft}dt - \frac{A}{T}\int_{0}^{T} te^{-j2\pi ft}dt + A\int_{0}^{T} e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.417}$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\int_a^b te^{at}dt = \frac{e^{at}}{a^2}(at-1)\Big]_a^b \tag{4.418}$$

και έχουμε

$$X(f) = \frac{A}{T}\int_{-T}^{0} te^{-j2\pi ft}dt + A\int_{-T}^{0} e^{-j2\pi ft}dt - \frac{A}{T}\int_{0}^{T} te^{-j2\pi ft}dt + A\int_{0}^{T} e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.419}$$

$$= \frac{A}{T}\frac{e^{-j2\pi ft}}{(-j2\pi f)^2}(-j2\pi ft - 1)\Big]_{-T}^{0} - \frac{A}{j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big]_{-T}^{0} - \frac{A}{T}\frac{e^{-j2\pi ft}}{(-j2\pi f)^2}(-j2\pi ft - 1)\Big]_{0}^{T} - \frac{A}{j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big]_{0}^{T} \tag{4.420}$$

$$= \frac{A}{2T(\pi f)^2}(1 - \cos(2\pi fT)) \tag{4.421}$$

μετά από απλή αλλά βαρετή άλγεβρα, την οποία παραλείπουμε. Με χρήση της ταυτότητας

$$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \tag{4.422}$$

έχουμε

$$X(f) = \frac{A}{2T(\pi f)^2} 2\sin^2(\pi f T) = \frac{A}{T(\pi f)^2}\sin^2(\pi f T) \tag{4.423}$$

Αν προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση sinc, θα έχουμε

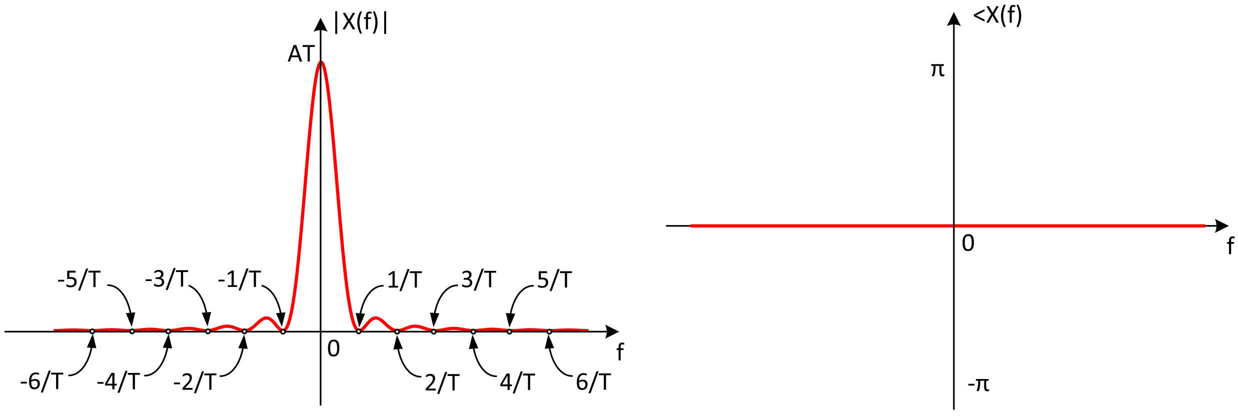
$$X(f) = \frac{A}{T(\pi f)^2}\sin^2(\pi f T) = \frac{AT}{T^2\pi^2 f^2}\sin^2(\pi f T) \tag{4.424}$$

$$= AT\Big(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\Big)^2 = AT\text{sinc}^2(fT) \tag{4.425}$$

Άρα τελικά

$$x(t) = A\text{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big) \longleftrightarrow X(f) = AT\text{sinc}^2(fT) \tag{4.426}$$

Προφανώς, επειδή το $X(f)$ είναι μόνιμα θετικό, για κάθε f, η φάση του είναι πάντα μηδέν. Το φάσμα πλάτους



Σχήμα 4.51: *Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος* $x(t) = A\text{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big)$.

φαίνεται στο Σχήμα (4.50) και είναι ο ίδιος ο μετασχ. Fourier. Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 4.51. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τριγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f| \to \infty$, ενώ η φάση είναι μηδενική όλα τα ημίτονα - άρα δε χρειάζεται καμιά μετατόπιση στα ημίτονα αυτά ώστε να συντεθεί ο τριγωνικός παλμός. Επίσης παρατηρήστε ξανά τη χαρακτηριστική άρτια και περιττή συμμετρία στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4.30:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier ενός άλλου συνήθους σήματος ενέργειας, του

$$x(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0 \tag{4.427}$$

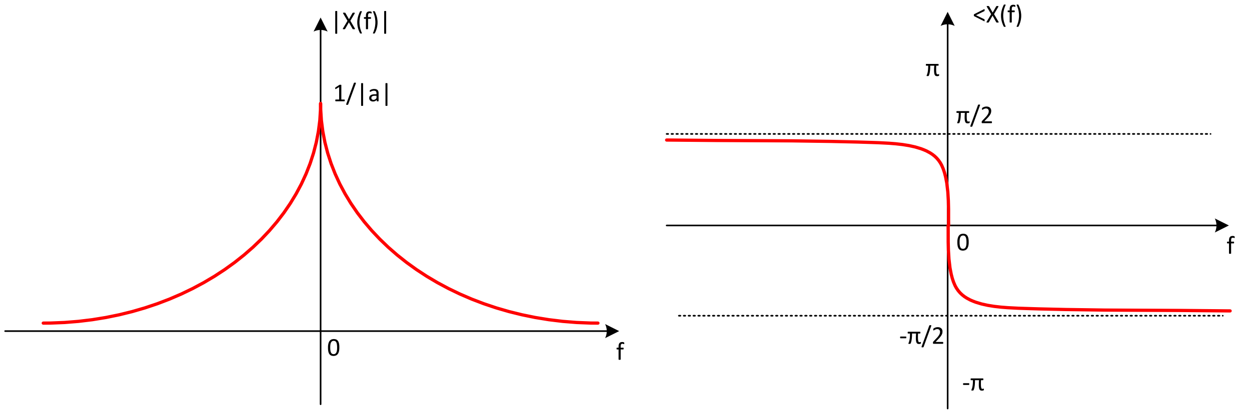
Λύση:
Είναι:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}dt$$
$$= \frac{1}{-(a+j2\pi f)}e^{-(a+j2\pi f)t}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{a+j2\pi f}\Big(\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1\Big) \tag{4.428}$$

Εδώ τώρα πρέπει να σταματήσουμε. Για να μην αποκλίνει αυτό το όριο στο ∞, θα πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι αρνητικό, ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν. Όμως το $a + j2\pi f$ είναι μιγαδικός αριθμός. Ως γνωστόν, οι μιγαδικοί αριθμοί δεν έχουν διάταξη, άρα το να πούμε ότι πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι θετικό ή αρνητικό είναι άνευ νοήματος! Όμως στην Παράγραφο 3.7.1 βρήκαμε τις τιμές αυτού του ορίου, στη Σχέση (3.366), την οποία επαναλαμβάνουμε για ευκολία εδώ.

$$\lim_{t\to\infty} e^{(a+jb)t} = \lim_{t\to\infty} e^{at}e^{jbt} = \begin{cases} 0, & a<0 \\ \infty, & a>0 \end{cases} \tag{4.429}$$

Για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα, θα πρέπει να είναι $a>0$, οπότε τελικά



Σχήμα 4.52: *Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος* $x(t)=e^{-at}u(t),\ a>0$.

$$X(f) = -\frac{1}{a+j2\pi f}\Big(\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1\Big) = -\frac{1}{a+j2\pi f}\Big(0-1\Big) = \frac{1}{a+j2\pi f},\ \ a>0 \tag{4.430}$$

Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)=e^{-at}u(t)$, $a>0$, είναι

$$\boxed{x(t)=e^{-at}u(t),\ \ a>0 \longleftrightarrow X(f)=\frac{1}{a+j2\pi f}} \tag{4.431}$$

Παρατηρήστε ότι ο μετασχ. Fourier είναι μιγαδικό σήμα, και μπορεί να διαχωριστεί στο άθροισμα του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους ως

$$X(f) = \Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = \frac{a}{a^2+4\pi^2f^2} + j\frac{-2\pi f}{a^2+4\pi^2f^2} \tag{4.432}$$

Το μέτρο και η φάση του δίνονται ως

$$|X(f)| = \frac{1}{|a+j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2f^2}} \tag{4.433}$$

$$\phi_x(f) = \tan^{-1}\frac{\Im\{X(f)\}}{\Re\{X(f)\}} = -\tan^{-1}\frac{2\pi f}{a} \tag{4.434}$$

και φαίνονται στο Σχήμα 4.52. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε τον τετραγωνικό παλμό, τα ημίτονα που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έχουν πλάτη που φθίνουν και τείνουν στο μηδέν όσο $|f|\to\infty$, ενώ η φάση παίρνει διακριτές τιμές, $\pm\pi/2$.

Παράδειγμα 4.31:

Ας υπολογίσουμε επίσης το μετασχ. Fourier ενός άλλου σήματος ενέργειας, του

$$x(t)=e^{at}u(-t),\ a>0 \tag{4.435}$$

Λύση:

Βλέπετε ότι μοιάζει αρκετά με το προηγούμενο παράδειγμα. Ας δούμε τι θα συμβεί. Έχουμε

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j2\pi f)t}dt = \frac{1}{a-j2\pi f}\Big(1 - \lim_{t\to-\infty} e^{(a-j2\pi f)t}\Big) \tag{4.436}$$

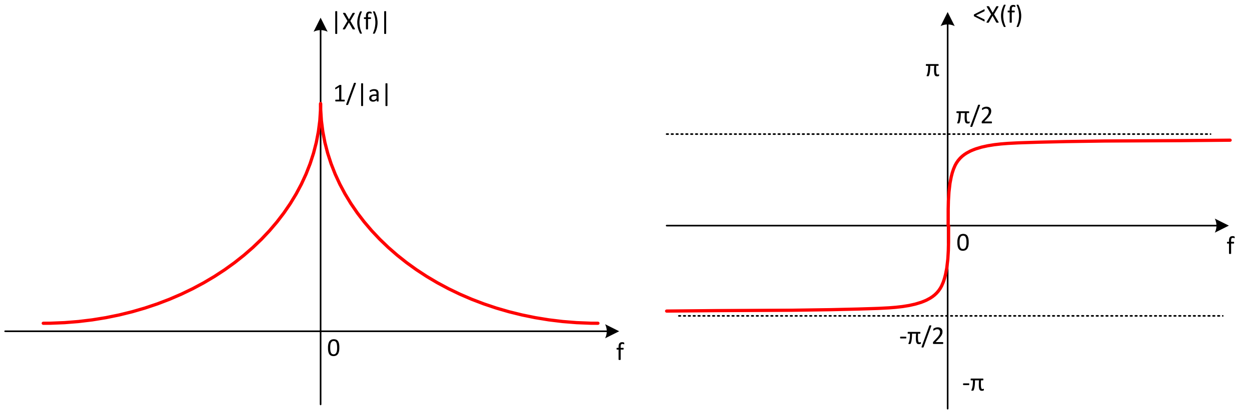
Με ακριβώς όμοιο με πριν σκεπτικό, η συνάρτηση e^{at} φθίνει στο 0 όταν $t \to -\infty$, **μόνο αν** $a > 0$, που ισχύει από υπόθεση. Άρα

$$X(f) = \frac{1}{a-j2\pi f}\Big(1 - \lim_{t\to-\infty} e^{(a-j2\pi f)t}\Big) = \frac{1}{a-j2\pi f}\Big(1-0\Big) = \frac{1}{a-j2\pi f}, \quad a>0 \tag{4.437}$$

Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$, είναι

$$\boxed{x(t) = e^{at}u(-t), \;\; a>0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a-j2\pi f}} \tag{4.438}$$

Αν εξετάσουμε την πολική μορφή του μετασχηματισμού, τότε θα δούμε ότι είναι



Σχήμα 4.53: *Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος* $x(t) = e^{at}u(t), \;\; a > 0$.

$$|X(f)| = \frac{1}{|a-j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2 f^2}} \tag{4.439}$$

$$\phi_x(f) = \tan^{-1}\frac{\Im\{X(f)\}}{\Re\{X(f)\}} = \tan^{-1}\frac{2\pi f}{a} \tag{4.440}$$

Το Σχήμα 4.53 απεικονίζει το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού. Παρατηρήστε ότι ενώ το μέτρο του μετασχ. Fourier είναι ίδιο με του Παραδείγματος 4.30, η φάση είναι αντίθετη! Αυτό σημαίνει ότι για να συνθέσουμε το σήμα $x(t) = e^{at}u(-t), \;\; a > 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ημίτονα ίδιου πλάτους με αυτά που συνθέτουν το $x(t) = e^{-at}u(t), \;\; a > 0$, μόνο που οι φάσεις του θα είναι αντίθετες!

Παράδειγμα 4.32:

Τέλος, ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα $\delta(t)$.

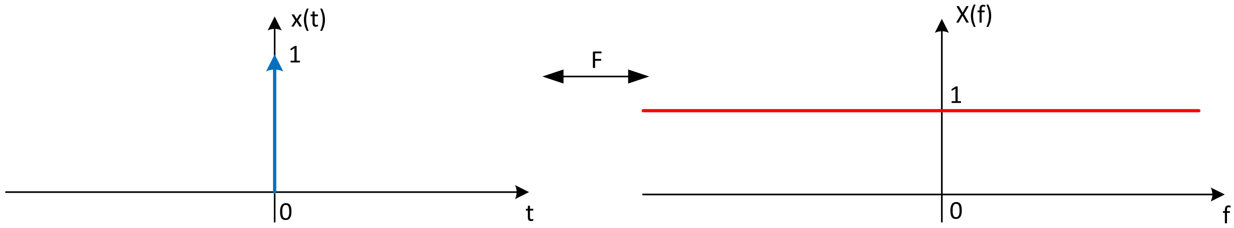
Λύση:
Είναι

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = e^{j2\pi ft}\Big]_{t=0} = 1 \tag{4.441}$$

από τις γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα. Άρα πολύ απλά

$$\boxed{x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(f) = 1} \tag{4.442}$$

Το ζεύγος αυτό αναπαρίσταται στο Σχήμα 4.54. Ερμηνεύοντας αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να πούμε ότι για να



Σχήμα 4.54: *Σήμα $x(t) = \delta(t)$ και μετασχ. Fourier του.*

συνθέσουμε ένα τόσο "ακαριαίο" σήμα στο χρόνο όπως το $x(t) = \delta(t)$ χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των δυνατών συχνοτήτων (όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα), με *σταθερό*, *μοναδιαίο* πλάτος και *μηδενική* φάση!

4.10 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Υπάρχουν πολλές ιδιότητες του μετασχ. Fourier που βοηθούν να αποφεύγουμε την επαναλαμβανόμενη χρήση του ορισμού. Στον Πίνακα 4.2 απεικονίζονται οι περισσότερες. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε καθεμιά από αυτές, παραθέτοντας και ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της.

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχηματισμός Fourier**
	$x(t)$ $y(t)$	$X(f)$ $Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f - f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f) = X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\ \|X(f)\| = \|X(-f)\|, \\ \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \|X(f)\|^2 df$

Πίνακας 4.2: *Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier*

4.10.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Fourier $X(f)$, και - όπου απαιτείται - ένα δεύτερο σήμα $y(t)$ έχει μετασχ. Fourier $Y(f)$.

4.10.1.1 Γραμμικότητα

Ο μετασχ. Fourier του αθροίσματος $z(t) = Ax(t) + By(t)$ δίνεται ως

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax(t) + By(t))e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.443}$$

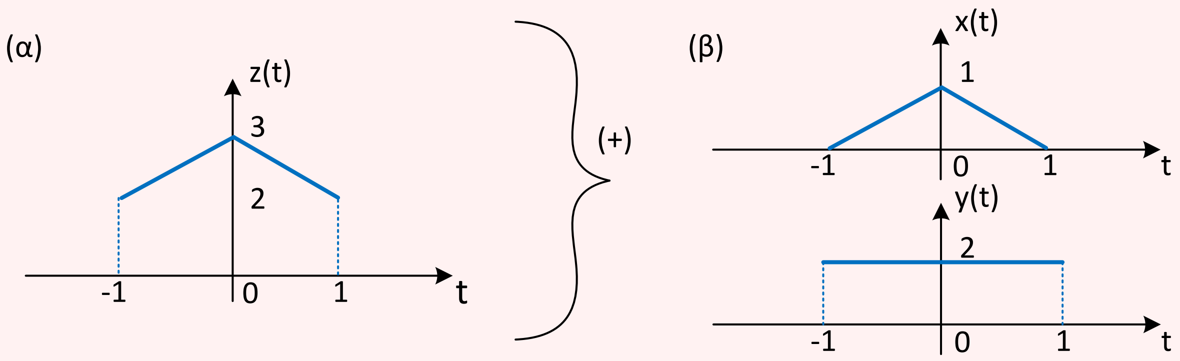
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Ax(t)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} By(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.444}$$

$$= A\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt + B\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.445}$$

$$= AX(f) + BY(f) \tag{4.446}$$

Παράδειγμα 4.33:

Έστω το σήμα $z(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 4.55(α).



Σχήμα 4.55: *Εφαρμογή της Γραμμικότητας: σήματα* $z(t), x(t), y(t)$.

Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Μπορεί κανείς να γράψει το $z(t)$ ώς άθροισμα δυο γνωστών σημάτων $x(t), y(t)$, τα οποία φαίνονται στο Σχήμα 4.55(β) ως

$$z(t) = x(t) + y(t) \tag{4.447}$$

Τα $x(t), y(t)$ είναι τα γνωστά μας σήματα

$$x(t) = \mathrm{tri}(t) \longleftrightarrow X(f) = \mathrm{sinc}^2(f) \tag{4.448}$$

$$y(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \longleftrightarrow Y(f) = 4\mathrm{sinc}(2f) \tag{4.449}$$

Οπότε το $z(t)$ είναι

$$z(t) = \mathrm{tri}(t) + 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \tag{4.450}$$

και ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Z(f) = \mathrm{sinc}^2(f) + 4\mathrm{sinc}(2f) \tag{4.451}$$

4.10.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Ο μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = x(t - t_0)$ δίνεται ως

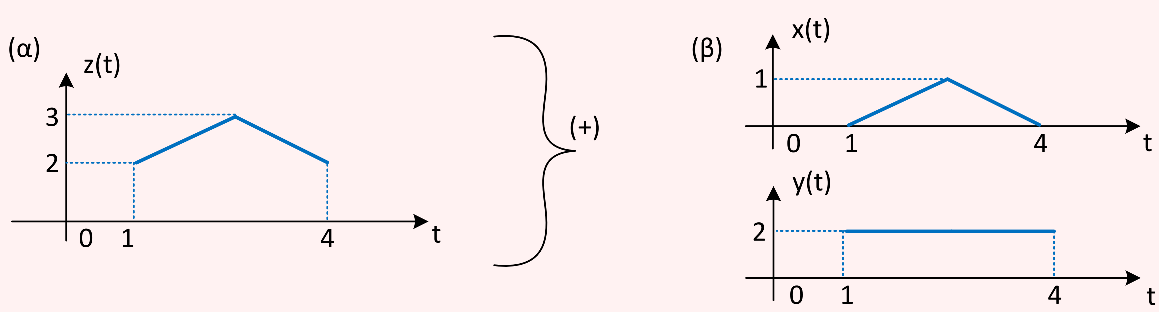
$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi f(u-t_0)}du \quad (4.452)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi ft_0}e^{-j2\pi fu}du = e^{-j2\pi ft_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi fu}du \quad (4.453)$$

$$= X(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (4.454)$$

Παράδειγμα 4.34:

Έστω το σήμα $z(t)$ που φαίνεται στο Σχήμα 4.56(α).



Σχήμα 4.56: *Εφαρμογή της Χρονικής Μετατόπισης: σήματα* $z(t), x(t), y(t)$.

Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Μπορεί κανείς να γράψει το $z(t)$ ώς άθροισμα δυο *μετατοπισμένων* γνωστών σημάτων $x(t), y(t)$, τα οποία φαίνονται στο Σχήμα 4.56(β) ως

$$z(t) = x(t) + y(t) \quad (4.455)$$

Τα $x(t), y(t)$ είναι τα γνωστά μας σήματα

$$x(t) = \text{tri}\Big(\frac{t-\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}\Big) \longleftrightarrow X(f) = \frac{3}{2}\text{sinc}^2\Big(\frac{3}{2}f\Big)e^{-j5\pi f} \quad (4.456)$$

$$y(t) = 2\text{rect}\Big(\frac{t-\frac{5}{2}}{3}\Big) \longleftrightarrow Y(f) = 6\text{sinc}(3f)e^{-j5\pi f} \quad (4.457)$$

Οπότε το $z(t)$ είναι

$$z(t) = \text{tri}\Big(\frac{t-\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}\Big) + \text{rect}\Big(\frac{t-\frac{5}{2}}{3}\Big) \quad (4.458)$$

και ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Z(f) = \frac{3}{2}\text{sinc}^2\Big(\frac{3}{2}f\Big)e^{-j5\pi f} + 6\text{sinc}(3f)e^{-j5\pi f} \quad (4.459)$$

4.10.1.3 Μετατόπιση στη συχνότητα

Ο μετασχ. Fourier ενός σήματος $x(t)$ είναι $X(f)$. Έστω ότι μετατοπίζουμε το φάσμα κατά $f = \pm f_0$, με $f_0 > 0$, δηλ. έχουμε το $X(f \pm f_0)$. Το σήμα στο χρόνο $y(t)$ που αντιστοιχεί σε αυτό το φάσμα είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f \pm f_0)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi(u\mp f_0)t}du \quad (4.460)$$

$$= e^{\mp j2\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut}du = e^{\mp j2\pi f_0 t}x(t) \quad (4.461)$$

Παράδειγμα 4.35:

Έστω ο μετασχ. Fourier ενός σήματος ως

$$X(f) = 2\text{sinc}(f-4)e^{j2\pi(f-4)} \tag{4.462}$$

Βρείτε το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό αυτό.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$X(f) = Y(f-4) = 2\text{sinc}(2(f-4))e^{j2\pi(f-4)} \tag{4.463}$$

και από την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα έχουμε

$$x(t) = e^{j2\pi 4t}y(t) \tag{4.464}$$

με

$$y(t) = F^{-1}\{Y(f)\} = F^{-1}\{2\text{sinc}(2f)e^{j2\pi f} = \text{rect}\Big(\frac{t+1}{2}\Big) \tag{4.465}$$

από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης. Άρα το σήμα $x(t)$ είναι το

$$x(t) = e^{j2\pi 4t}\text{rect}\Big(\frac{t+1}{2}\Big) \tag{4.466}$$

4.10.1.4 Συζυγές σήμα στο χρόνο

Για ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, το συζυγές σήμα $y(t) = x^*(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft}dt = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft}dt\Big)^* = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t}dt\Big)^* = X^*(-f) \tag{4.467}$$

Παράδειγμα 4.36:

Γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = 1 + j\delta(t-2) \longleftrightarrow X(f) = \delta(f) + je^{-j4\pi f} \tag{4.468}$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του $x^*(t)$.

Σύμφωνα με την ιδιότητα, θα είναι

$$F\{x^*(t)\} = X^*(-f) = (\delta(-f) + je^{-j4\pi(-f)})^* = \delta(f) - je^{j4\pi(-f)} = \delta(f) - je^{-j4\pi f} \tag{4.469}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\delta(x) = \delta(-x)$ και την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης. Πράγματι, αναλυτικά,

$$F\{x^*(t)\} = F\{1 - j\delta(t-2)\} = \delta(f) - je^{-j4\pi f} \tag{4.470}$$

4.10.1.5 Αντιστροφή στο χρόνο

Το σήμα $y(t) = x(-t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-j2\pi ft}dt = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{j2\pi fu}du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{j2\pi fu}du = X(-f) \tag{4.471}$$

Παράδειγμα 4.37:

Στο Παράδειγμα 4.30 δείξαμε ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t),\ \ a > 0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \tag{4.472}$$

και στο Παράδειγμα 4.31 δείξαμε ότι

$$y(t) = e^{at}u(-t), \;\; a > 0 \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{a - j2\pi f} \tag{4.473}$$

Τα παραπάνω ζεύγη μπορούν να αποδειχθούν από την ιδιότητα της αντιστροφής στο χρόνο.

Είναι

$$x(-t) = e^{-a(-t)}u(-t) = e^{at}u(-t) = y(t) \longleftrightarrow X(-f) = \frac{1}{a + j2\pi(-f)} = \frac{1}{a - j2\pi f} = Y(f) \tag{4.474}$$

που αποτελεί το ζεύγος της Σχέσης (4.473).

4.10.1.6 Στάθμιση στο χρόνο

Ας θεωρήσουμε το σήμα $y(t) = x(at)$, $a > 0$. Ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u}du = \frac{1}{a}X\Big(\frac{f}{a}\Big) \tag{4.475}$$

Για το σήμα $y(t) = x(at)$, $a < 0$, ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u}du = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi \frac{f}{a}u}du = -\frac{1}{a}X\Big(\frac{f}{a}\Big) \tag{4.476}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X\Big(\frac{f}{a}\Big) \tag{4.477}$$

Παράδειγμα 4.38:

Ας θεωρήσουμε το γνωστό μας σήμα

$$x(t) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \tag{4.478}$$

το οποίο έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = T\mathrm{sinc}(fT) \tag{4.479}$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(2t)$.

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, θα έχουμε

$$x(2t) = \mathrm{rect}\Big(\frac{2t}{T}\Big) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T/2}\Big) \longleftrightarrow \frac{1}{2}X\Big(\frac{f}{2}\Big) = \frac{T}{2}\mathrm{sinc}\Big(\frac{fT}{2}\Big) \tag{4.480}$$

$$x\Big(\frac{t}{2}\Big) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t/2}{T}\Big) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t}{2T}\Big) \longleftrightarrow 2X(2f) = 2T\mathrm{sinc}(2fT) \tag{4.481}$$

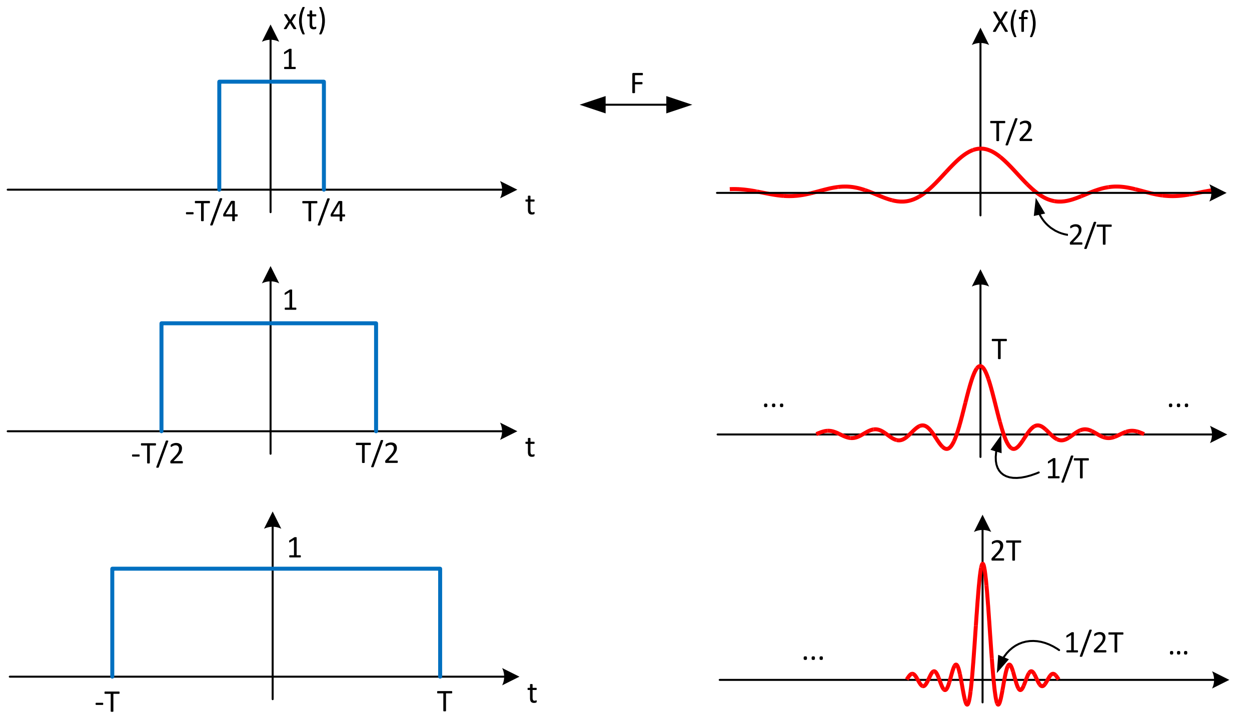
Τα παραπάνω απεικονίζονται στο Σχήμα 4.57. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική γιατί μας πληροφορεί ότι δεν μπορούμε να έχουμε μικρή διάρκεια τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας. Αυτή η εγγενής ιδιότητα του μετασχ. Fourier είναι πολύ χρήσιμη στη *φασματική ανάλυση* σημάτων.

4.10.1.7 Συνέλιξη στο χρόνο

Ο μετασχ. Fourier της συνέλιξης δυο σημάτων στο χρόνο είναι

$$F\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t))e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.482}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\Big)e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.483}$$



Σχήμα 4.57: *Εφαρμογή της Χρονικής Κλιμάκωσης: σήματα χρόνου και συχνότητας.*

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dt\Big)d\tau \tag{4.484}$$

$$= Y(f)\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \tag{4.485}$$

$$= X(f)Y(f) \tag{4.486}$$

όπου στη Σχέση (4.484) έγινε χρήση της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι *πολύ* σημαντικό. Μας πληροφορεί ότι η πράξη της συνέλιξης στο χρόνο μετατρέπεται σε γινόμενο στο χώρο της συχνότητας. Γνωρίζουμε ήδη ότι η συνέλιξη αποτελεί σημαντικότατη πράξη στο χώρο των συστημάτων. Αργότερα θα δούμε πως λειτουργεί αυτή η ιδιότητα στο χώρο της συχνότητας των συστημάτων.

■ Παράδειγμα 4.39:

4.10.1.8 Δυικότητα

Είναι

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \tag{4.487}$$

Θέτουμε $u = -t$, και τότε

$$x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi fu}du \tag{4.488}$$

και αλλάζοντας τις μεταβλητές u, f μεταξύ τους, έχουμε

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{-j2\pi fu}du = F\{X(t)\} \tag{4.489}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σπουδαίο, γιατί εκτός των άλλων, για κάθε ζεύγος μετασχηματισμού Fourier, μας δίνει άλλο ένα (το δυικό του)!

Παράδειγμα 4.40:

Ας δούμε το γνωστό μας σήμα
$$x(t) = A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \tag{4.490}$$
που έχει μετασχ. Fourier
$$X(f) = AT\mathrm{sinc}(fT) \tag{4.491}$$
Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $X(t)$.

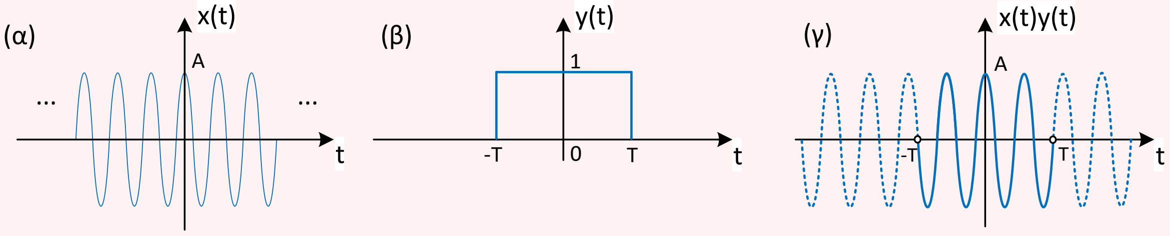
Αν μεταφέρουμε τη συνάρτηση $\mathrm{sinc}(\cdot)$ στο χρόνο, θα έχουμε το σήμα
$$X(t) = AT\mathrm{sinc}(tT) \tag{4.492}$$
και σύμφωνα με το θεώρημα της δυικότητας, ο μετασχ. Fourier του θα είναι
$$x(-f) = A\mathrm{rect}\Big(\frac{-f}{T}\Big) = A\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{T}\Big) \tag{4.493}$$
λόγω αρτιότητας της συνάρτησης $\mathrm{rect}(\cdot)$.

4.10.1.9 Πολλαπλασιασμός στο χρόνο

Ο μετασχ. Fourier του γινομένου δυο σημάτων στο χρόνο είναι
$$\begin{aligned}
F\{x(t)y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft}dt && (4.494)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut}du\Big)y(t)e^{-j2\pi ft}dt && (4.495)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-u)t}dt\Big)du && (4.496)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)du && (4.497)\\
&= X(f) * Y(f) && (4.498)
\end{aligned}$$
Άρα το γινόμενο δυο σημάτων στο χρόνο μετατρέπεται σε συνέλιξη στο χώρο της συχνότητας.

Παράδειγμα 4.41:

Ας θεωρήσουμε δυο απλά σήματα, τα
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \tag{4.499}$$
$$y(t) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \tag{4.500}$$
Τα σήματα αυτά, καθώς και το γινόμενο $x(t)y(t)$ φαίνονται στο Σχήμα 4.58.



Σχήμα 4.58: *Εφαρμογή του Γινομένου στο Χρόνο: σήματα (α) $x(t)$, (β) $y(t)$, (γ) $x(t)y(t)$.*

Βρείτε το μετασχ. Fourier του γινομένου τους.

Παρατηρήστε ότι το γινόμενο ενός σήματος με το τετραγωνικό παλμό "κόβει" ένα τμήμα του σήματος που αντιστοιχεί στη διάρκεια του παλμού. Αναζητούμε πλέον το μετασχ. Fourier του σήματος $z(t) = x(t)y(t)$. Η ιδιότητα του γινομένου στο χρόνο δηλώνει ότι ο μετασχ. Fourier ενός γινομένου σημάτων ισούται με τη συνέλιξη των μετασχ. Fourier τους. Γνωρίζουμε ότι

$$X(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0) \tag{4.501}$$

$$Y(f) = T\text{sinc}(fT) \tag{4.502}$$

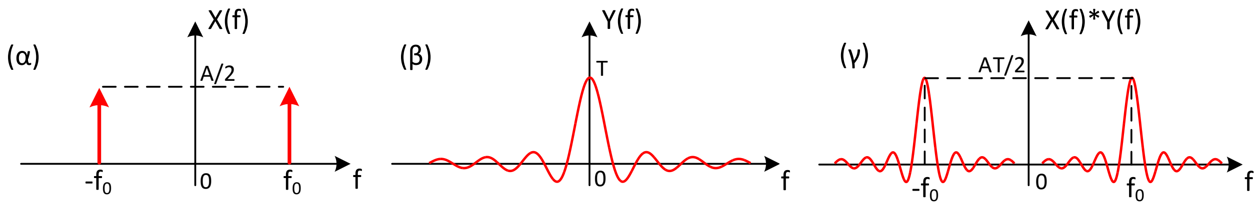
Το $X(f)$ αποτελείται από συναρτήσεις Δέλτα, και η ιδιότητα

$$X(f) * \delta(f - f_0) = X(f - f_0) \tag{4.503}$$

μας είναι πολύ χρήσιμη. Άρα τελικά

$$Z(f) = X(f) * Y(f) = \frac{AT}{2}\text{sinc}(f - f_0) + \frac{AT}{2}\text{sinc}(f + f_0) \tag{4.504}$$

Τα σήματα αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 4.59. Το παράδειγμα αυτό είναι μια καλή ευκαιρία να σκεφτεί κανείς



Σχήμα 4.59: *Εφαρμογή του Γινομένου στο Χρόνο: σήματα (α) $X(f)$, (β) $Y(f)$, (γ) $X(f) * Y(f)$.*

την επιρροή της διάρκειας του τετραγωνικού παλμού στο φάσμα πλάτους. Τι συμβαίνει στο φάσμα πλάτους του γινομένου των σημάτων όταν η διάρκεια του τετραγωνικού παλμού είναι μεγάλη; Τι συμβαίνει όταν είναι μικρή;

4.10.1.10 Παραγώγιση στη συχνότητα

Παραγωγίζοντας το μετασχ. Fourier $X(f)$ του σήματος $x(t)$ έχουμε

$$\frac{d}{df}X(f) = \frac{d}{df}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{d}{df}e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.505}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j2\pi t)e^{-j2\pi ft}dt = (-j2\pi t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-j2\pi t x(t))e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.506}$$

$$= -j2\pi F\{tx(t)\} \tag{4.507}$$

$$F\{tx(t)\} = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f) \tag{4.508}$$

Παράδειγμα 4.42:

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$y(t) = te^{-at}u(t), \ \ a > 0 \tag{4.509}$$

Θα ήταν χρονοβόρο να λύσει κανείς το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού αναλυτικά. Με χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης στη συχνότητα, έχουμε

$$y(t) = te^{-at}u(t) = tx(t) \tag{4.510}$$

με $x(t) = e^{-at}u(t)$. Άρα

$$Y(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{1}{(a+j2\pi f)^2} \tag{4.511}$$

4.10.1.11 Παραγώγιση στο χρόνο

Το σήμα $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.512}$$

$$= x(t)e^{-j2\pi ft}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.513}$$

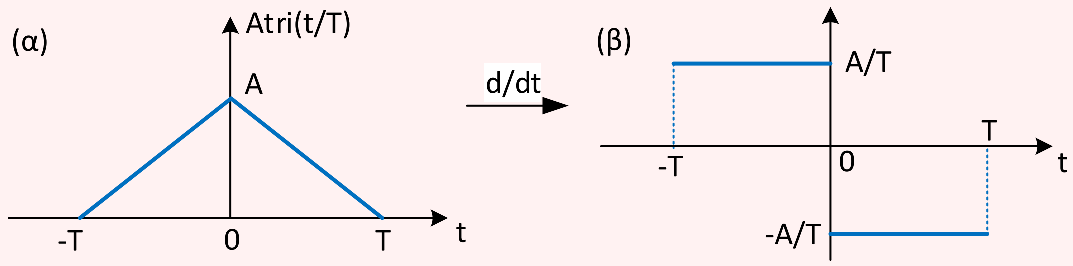
$$= \lim_{t\to+\infty}(x(t)e^{-j2\pi ft}) - \lim_{t\to-\infty}(x(t)e^{-j2\pi ft}) + j2\pi fX(f) \tag{4.514}$$

$$= j2\pi fX(f) \tag{4.515}$$

διότι το $x(t)$ φθίνει στο μηδέν όταν $t \to \pm\infty$, αφού έχει μετασχ. Fourier (και άρα είναι σήμα ενέργειας).

Παράδειγμα 4.43:

Ας αποδείξουμε ξανά τη Σχέση (4.415), αυτή τη φορά με λιγότερες πράξεις, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγώγισης. Το Σχήμα 4.60 δείχνει το σήμα τριγωνικού παλμού, καθώς και την παράγωγό του.



Σχήμα 4.60: *Εφαρμογή της Παραγώγισης στο Χρόνο: σήματα (α) σήμα τριγωνικού παλμού, (β) παράγωγος τριγωνικού παλμού.*

Η παράγωγος αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς οι οποίοι γράφονται ως

$$\frac{d}{dt}AT\text{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big) = \frac{A}{T}\text{rect}\Big(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\Big) - \frac{A}{T}\text{rect}\Big(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\Big) \tag{4.516}$$

Με την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης, ο μετασχ. Fourier της παραγώγου του σήματος είναι

$$F\{\frac{d}{dt}AT\text{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big)\} = F\{\frac{A}{T}\text{rect}\Big(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\Big) - \frac{A}{T}\text{rect}\Big(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\Big)\} \tag{4.517}$$

$$= A\text{sinc}(fT)e^{j\pi fT} - A\text{sinc}(fT)e^{-j\pi fT} \tag{4.518}$$

$$= A\text{sinc}(fT)(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) \tag{4.519}$$

$$= j2A\text{sinc}(fT)\sin(\pi fT) \tag{4.520}$$

Όμως η ιδιότητα της παραγώγου μας δίνει ότι

$$F\{\frac{d}{dt}AT\text{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big)\} = j2\pi fF\{AT\text{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big)\} \tag{4.521}$$

$$j2A\text{sinc}(fT)\sin(\pi fT) = j2\pi fF\{AT\text{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big)\} \tag{4.522}$$

$$F\{AT\text{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big)\} = \frac{A\text{sinc}(fT)\sin(\pi fT)}{\pi f} \tag{4.523}$$

$$= \frac{AT\text{sinc}(fT)\sin(\pi fT)}{\pi fT} \tag{4.524}$$

$$= AT\text{sinc}(fT)\text{sinc}(fT) \tag{4.525}$$
$$= AT\text{sinc}^2(fT) \tag{4.526}$$

4.10.1.12 Ολοκλήρωση στο χρόνο

Σε αυτήν την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα αποτέλεσμα που αποδεικνύεται στη συνέχεια του βιβλίου. Το σήμα $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)du$ μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau = x(t) * u(t) \tag{4.527}$$

όπου $u(t)$ η γνωστή μας βηματική συνάρτηση. Με χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο, έχουμε

$$Y(f) = X(f)U(f) \tag{4.528}$$

Στην Παράγραφο 4.12 αποδεικνύουμε ότι

$$U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \tag{4.529}$$

οπότε

$$Y(f) = X(f)U(f) = \frac{X(0)}{2}\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} \tag{4.530}$$

Παράδειγμα 4.44:

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \tag{4.531}$$

με $x(t) = e^{-at}u(t), \;\; a > 0$.

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} \tag{4.532}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα, θα είναι

$$Y(f) = \frac{X(0)}{2} + X(f)\frac{1}{j2\pi f} = \frac{1}{2a}\delta(f) + \frac{1}{(a+j2\pi f)j2\pi f} \tag{4.533}$$

Κάνοντας αναλυτικά την ολοκλήρωση, έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-a\tau}d\tau = -\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big]_0^t = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t) \tag{4.534}$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει αυτούς τους μετασχηματισμούς, οπότε

$$Y(f) = \frac{1}{2a}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi a f} - \frac{1}{a}\frac{1}{a + j2\pi f} \tag{4.535}$$

και μετά από πράξεις,

$$Y(f) = \frac{1}{2a}\delta(f) + \frac{1}{(a + j2\pi f)(j2\pi f)} \tag{4.536}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της ιδιότητας.

4.10.1.13 Συζυγής συμμετρία

Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, δηλ. ισχύει ότι $x(t) = x^*(t)$, τότε

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{4.537}$$

$$= \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft}dt\Big)^* = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t}dt\Big)^* \tag{4.538}$$

$$= X^*(-f) \tag{4.539}$$

Από την παραπάνω σχέση, εξάγουμε ότι

$$X(f) = X^*(-f) \tag{4.540}$$

$$\Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\} - j\Im\{X(-f)\} \tag{4.541}$$

$$\Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\} \text{ και } \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\} \tag{4.542}$$

Επίσης, η πολική μορφή της Σχέσης (4.540) δίνει

$$X(f) = X^*(-f) \tag{4.543}$$

$$|X(f)|e^{j\phi_x(f)} = |X(-f)|e^{-j\phi_x(-f)} \tag{4.544}$$

$$|X(f)| = |X(-f)| \text{ και } \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \tag{4.545}$$

Άρα, για πραγματικά σήματα, το φάσμα πλάτους είναι άρτια συνάρτηση του f ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτηση του f.

Παράδειγμα 4.45:

Ελέγξτε αν το σήμα με μετασχ. Fourier

$$X(f) = j\frac{\pi^2}{2f} \tag{4.546}$$

είναι πραγματικό ή όχι.

Ισχύει ότι

$$X^*(-f) = \Big(j\frac{\pi^2}{2(-f)}\Big)^* = -j\frac{\pi^2}{(-2f)} = j\frac{\pi^2}{2f} = X(f) \tag{4.547}$$

άρα το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό. Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι το μέτρο και η φάση του σήματος έχουν τις συμμετρίες που αναφέρονται παραπάνω.

4.10.1.14 Άρτιο σήμα

Αν το σήμα είναι άρτιο, ισχύει $x(t) = x(-t)$, και τότε το φανταστικό μέρος του μετασχ. Fourier είναι

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt \tag{4.548}$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$I(f) = 0 \tag{4.549}$$

Οπότε

$$X(f) = R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt = 2\int_{0}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt \tag{4.550}$$

με την αλλαγή των άκρων του ολοκληρώματος να οφείλεται στο ότι το γινόμενο δυο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, και το ολοκλήρωμα αυτής σε συμμετρικό διάστημα $[-a, a]$ μπορεί να γραφεί ως το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο διάστημα $[0, a]$.

Παράδειγμα 4.46:

Ο γνωστός μας τετραγωνικός παλμός είναι ένα άρτιο σήμα. Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Μπορούμε να υπολογισουμε το μετασχ. Fourier του ως

$$X(f) = F\{A\mathrm{rect}(t/T)\Big\} = 2\int_0^{T/2} A\cos(2\pi f t)dt \tag{4.551}$$
$$= 2A\frac{1}{2\pi f}\sin(2\pi f t)\Big]_0^{T/2} = \frac{A}{\pi f}\sin(\pi f T) \tag{4.552}$$
$$= AT\mathrm{sinc}(fT) \tag{4.553}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τον κλασικό ορισμό του μετασχηματισμού.

4.10.1.15 Περιττό σήμα

Αν το σήμα είναι περιττό, ισχύει $x(t) = -x(-t)$, και τότε το πραγματικό μέρος του μετασχ. Fourier είναι

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt \tag{4.554}$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος, ως ολοκλήρωμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$R(f) = 0 \tag{4.555}$$

Οπότε

$$X(f) = jI(f) = -j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)dt = -j2\int_0^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)dt \tag{4.556}$$

με την αλλαγή των άκρων του ολοκληρώματος να οφείλεται στο ότι το γινόμενο δυο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, και το ολοκλήρωμα αυτής σε συμμετρικό διάστημα $[-a, a]$ μπορεί να γραφεί ως το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο διάστημα $[0, a]$.

Παράδειγμα 4.47:

Έστω το σήμα $x(t) = {}^1\!/_t$, του οποίου ζητούμε το μετασχ. Fourier.

Το σήμα $x(t)$ είναι περιττό, και άρα ο μετασχ. Fourier θα έχει μόνο φανταστικό μέρος, δηλ.

$$X(f) = jI(f) = -j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)dt = -j2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi f t)}{t}dt \tag{4.557}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}dt = \begin{cases} {}^\pi\!/_2, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -{}^\pi\!/_2, & a < 0 \end{cases} \tag{4.558}$$

οπότε ο μετασχ. Fourier $X(f)$ είναι

$$X(f) = \begin{cases} -j\pi, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ j\pi, & f < 0 \end{cases} \tag{4.559}$$

4.10.1.16 Άρτιο μέρος

Το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \tag{4.560}$$

και άρα

$$F\{x_e(t)\} = \frac{1}{2}F\{x(t)\} + \frac{1}{2}F\{x(-t)\} = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}X(-f) \tag{4.561}$$

$$= \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}X^*(f) = \frac{1}{2}2\Re\{X(f)\} \tag{4.562}$$

$$= \Re\{X(f)\} \tag{4.563}$$

Παράδειγμα 4.48

Το άρτιο μέρος του σήματος

$$x(t) = 2e^{-at}u(t), \ \ a > 0 \tag{4.564}$$

είναι το σήμα

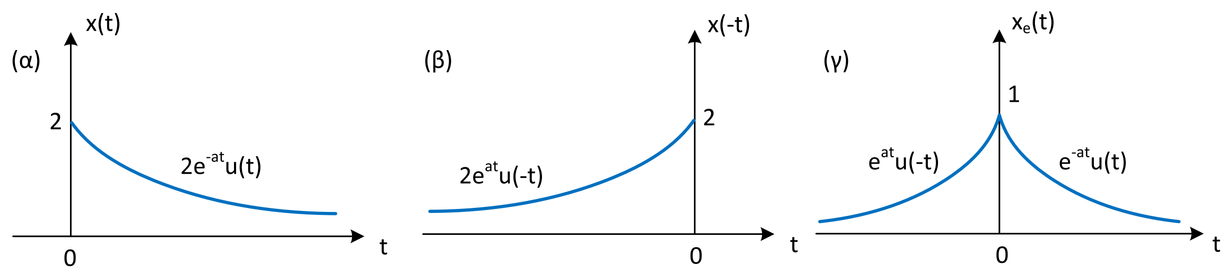
$$x_e(t) = e^{-a|t|}, \ \ a > 0 \tag{4.565}$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του, $X_e(f)$.

Το σήμα $x_e(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$e^{-a|t|} = e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t) = x_e(t) \tag{4.566}$$

Η παραπάνω διάσπαση φαίνεται στο Σχήμα 4.61. Γνωρίζουμε ότι



Σχήμα 4.61: *(α): σήμα $x(t)$, (β) σήμα $x(-t)$, (γ) $x_e(t)$: άρτιο μέρος του $x(t)$.*

$$x(t) = 2e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{2}{a + j2\pi f}, \ \ a > 0 \tag{4.567}$$

και άρα ο μετασχ. Fourier του $x_e(t)$ θα είναι

$$X_e(f) = \Re\{X(f)\} = \Re\Big\{\frac{2}{a + j2\pi f}\Big\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{4.568}$$

4.10.1.17 Περιττό μέρος

Το περιττό μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \tag{4.569}$$

και άρα

$$F\{x_o(t)\} = \frac{1}{2}F\{x(t)\} - \frac{1}{2}F\{x(-t)\} = \frac{1}{2}X(f) - \frac{1}{2}X(-f) \tag{4.570}$$

$$= \frac{1}{2}X(f) - \frac{1}{2}X^*(f) = j\frac{1}{2}2\Im\{X(f)\} \tag{4.571}$$
$$= j\Im\{X(f)\} \tag{4.572}$$

Παράδειγμα 4.49:

Το περιττό μέρος του σήματος

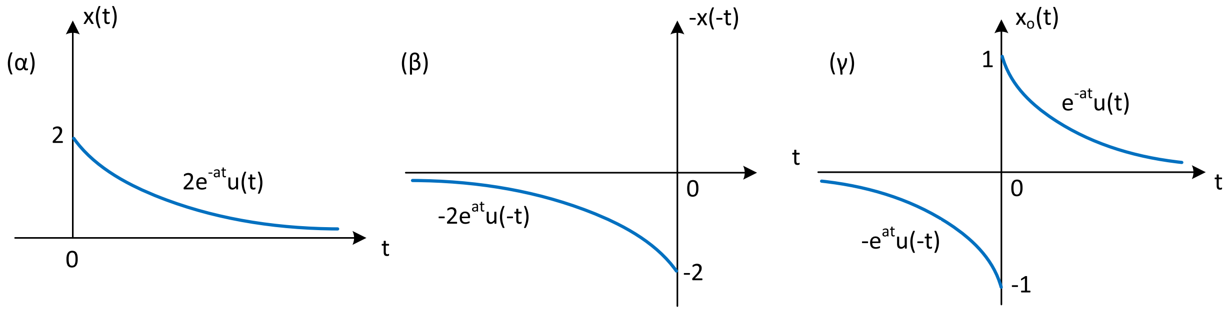
$$x(t) = 2e^{-at}u(t), \;\; a > 0 \tag{4.573}$$

είναι το σήμα

$$x_o(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t), \;\; a > 0 \tag{4.574}$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του, $X_o(f)$.

Δείτε το Σχήμα 4.62. Γνωρίζουμε ότι



Σχήμα 4.62: *(α): σήμα $x(t)$, (β) σήμα $-x(-t)$, (γ) $x_o(t)$: περιττό μέρος του $x(t)$.*

$$x(t) = 2e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{2}{a + j2\pi f}, \;\; a > 0 \tag{4.575}$$

και άρα ο μετασχ. Fourier του $x_o(t)$ θα είναι

$$X_o(f) = j\Im\{X(f)\} = j\Im\Big\{\frac{2}{a + j2\pi f}\Big\} = -j\frac{4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \tag{4.576}$$

4.10.1.18 Θεώρημα του Parseval

Ξεκινώντας από το αριστερό μέλος και για ένα εν γένει μιγαδικό σήμα $x(t)$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df\Big)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut}du\Big)^* dt \tag{4.577}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)e^{-j2\pi ut}dudt \tag{4.578}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(u)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t}dtdudf \tag{4.579}$$

Όμως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t}dt = \delta(f-u) \tag{4.580}$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)\delta(f-u)du\Big)df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \tag{4.581}$$

Ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει με όμοιο τρόπο τη γενικοτερη σχέση του Parseval, η οποία είναι η

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df \tag{4.582}$$

Παράδειγμα 4.50:

Δείξαμε νωρίτερα ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}, \quad a > 0 \tag{4.583}$$

Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος.

Η ενέργεια του σήματος είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{1}{2a} \tag{4.584}$$

Ας δείξουμε ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα μέσω του χώρου της συχνότητας.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{a + j2\pi f}\right|^2 df \tag{4.585}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df \tag{4.586}$$

λόγω άρτιας συμμετρίας της συνάρτησης εντός του ολοκληρώματος. Γνωρίζουμε ότι

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\Big]_{c_1}^{c_2} \tag{4.587}$$

Άρα η Σχέση (4.586) μας δίνει

$$E_x = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df = \frac{2}{4\pi^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 + f^2} df \tag{4.588}$$

$$= \frac{1}{a\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{a}\right)\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{a\pi}\Big(\lim_{f\to+\infty} \tan^{-1}\frac{2\pi f}{a} - \tan^{-1}(0)\Big) \tag{4.589}$$

$$= \frac{1}{a\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2a} \tag{4.590}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε στο πεδίο του χρόνου.

4.10.2 Μερικές Παρατηρήσεις

Ας ξεκινήσουμε κάποιες παρατηρήσεις...

1. Έχουμε μιλήσει για τα σήματα ισχύος, που είναι άπειρα σε διάρκεια, κι έχουν πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια. Στον αντίποδα, υπάρχουν τα σήματα ενέργειας, που έχουν πεπερασμένη ενέργεια και μηδενική ισχύ. Θυμίζουμε οτι σήματα ενέργειας είναι τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \tag{4.591}$$

μια σχέση που μοιάζει με τη Σχέση (4.399) αλλά όχι ακριβώς. Τα σήματα ενέργειας έχουν ΠΑΝΤΑ μετασχηματισμό Fourier.

2. Αξίζει να αναφέρουμε ότι κι εδώ ισχύει η ιδέα της προβολής που είδαμε στις σειρές Fourier. Μόνο που εδώ δεν προβάλλουμε το σήμα σε εκθετικά συγκεκριμένων συχνοτήτων kf_0, αλλά σε εκθετικά *όλων* των συχνοτήτων!

3. Τέλος, ένα σημαντικό, όσο και αξιοθαύμαστο, στοιχείο που αξίζει να αναφερθεί είναι το εξής: τόσο στις Σειρές Fourier, όσο και στο μετασχ. Fourier, ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ αναπαρίσταται (ή αλλιώς, μπορεί να συντεθεί) από μιγαδικά εκθετικά, που στην περίπτωση των πραγματικών σημάτων είναι συνημίτονα (είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier σχετίζεται στενά με τις σειρές Fourier). Ώς γνωστόν, τα συνημίτονα έχουν άπειρη διάρκεια. Σκεφτείτε το λίγο: ένα μη περιοδικό σήμα που είναι, για παράδειγμα, μη μηδενικό σε ενα διάστημα $[a, b]$ και μηδέν παντού αλλού, μπορεί να αναπαρασταθεί ΑΚΡΙΒΩΣ ως ένα άθροισμα άπειρων σε διάρκεια συνημιτόνων!

Το φάσμα $X(f)$ περιέχει άπειρα μιγαδικά εκθετικά (ή συνημίτονα) που ξεκινούν από το $-\infty$ και διαρκούν για πάντα. Τα πλάτη και οι φάσεις αυτών των συνιστωσών είναι τέτοια ώστε οταν τα προσθέσουμε, παίρνουμε ΑΚΡΙΒΩΣ το σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[a, b]$, ενώ έξω από αυτο, οι συνιστώσες αυτές αθροίζονται στο μηδέν!!!! Αν ''παίζαμε'' μόνοι μας με πλάτη και φάσεις άπειρου αριθμού συνημιτόνων για να πετύχουμε μια τόσο τέλεια, ακριβής, και λεπτή ισορροπία μεταξύ τους ώστε να ανακατασκευάζουμε ακριβώς το σήμα μας, θα ήταν αφάνταστα δύσκολο – πιθανώς αδύνατο – να τα καταφέρουμε! Κι ομως, ο μετασχ. Fourier (όπως και οι Σειρές Fourier) το πετυχαίνει με μεγάλη ευκολία, χωρίς πολλή σκέψη από μέρους μας. Μερικές φορές, μας απορροφούν τόσο τα μαθηματικά που ξεχνάμε να προσέξουμε μερικές τέτοιες, όμορφες, και θαυμαστές λεπτομέρειες...

4.11 Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

Ιδανικά, θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε τον μετασχ. Fourier και για σήματα ισχύος, όχι μόνο ενέργειας, ενοποιώντας τη θεωρία του μετασχ. Fourier για κάθε σήμα, ενέργειας ή ισχύος. Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό του μετασχ. Fourier σε ένα γνωστό *περιοδικό* σήμα ισχύος όπως το $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi f t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}e^{-j2\pi f t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(2\pi f - 2\pi f_0)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(2\pi f + 2\pi f_0)t}dt = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(-j(2\pi f - 2\pi f_0))}e^{-j(2\pi f - 2\pi f_0)t}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\frac{1}{(-j(2\pi f + 2\pi f_0))}e^{-j(2\pi f + 2\pi f_0)t}\Big]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned} \tag{4.592}$$

Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε από δω και πέρα, και να υπολογίσουμε τις τιμές των ολοκληρωμάτων, πρέπει να θέσουμε περιορισμούς στα $f - f_0$, $f + f_0$, ώστε τα ολοκληρώματα να μην αποκλίνουν στο $\pm\infty$. Συγκεκριμένα, πρέπει να θεωρήσουμε ότι $f - f_0 > 0 \Leftrightarrow f > f_0$ για το πρώτο ολοκλήρωμα και $f + f_0 > 0 \Leftrightarrow f > -f_0$ για το δεύτερο ολοκλήρωμα, όταν $t \to +\infty$. Αντίστροφα, για όταν $t \to -\infty$. Αυτό όμως δεν επιτρέπεται! Ο μετασχ. Fourier πρέπει να ορίζεται για κάθε τιμή του f! Άρα ο ορισμός αποτυγχάνει.

Τι κάνουμε τότε; Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας *συνάρτηση Δέλτα*, $\delta(t)$, που έχουμε ήδη δει. Όπως θυμάστε, η συνάρτηση Δέλτα ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες[8]:

$$\delta(t) = 0, \ \ t \neq 0 \tag{4.593}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{4.594}$$

Επίσης, και η γνωστή μας συνάρτηση sinc, που φαίνεται στο Σχήμα (4.48)(β)′, μπορεί να προσεγγίζει πολύ καλά τη συνάρτηση Δέλτα. Γενικά, όποια συνάρτηση ικανοποιεί τις Σχέσεις (4.594) και (4.593), τότε είναι και αυτή μια συνάρτηση Δέλτα! Επίσης, έχουμε δει ότι η συνάρτηση Δέλτα χρησιμοποιείται όποτε θέλουμε να ορίσουμε σήματα που έχουν τιμή ΜΟΝΟ σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, και παντού αλλού είναι μηδέν.

Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 2, & t = 0, \\ -1, & t = 2, \\ 3, & t = 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.595}$$

μπορεί να γραφεί ώς

$$x(t) = 2\delta(t) - \delta(t-2) + 3\delta(t-5) \tag{4.596}$$

Με χρήση του μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα, ο οποίος είδαμε ότι είναι

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \tag{4.597}$$

$$\delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} \tag{4.598}$$

[8] Επανάληψη μήτηρ μαθήσεως!

λόγω της ιδιότητας

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = f(0) \tag{4.599}$$

μπορούμε να βρούμε το μετασχηματισμό Fourier της παραπάνω συνάρτησης $x(t)$, και ο οποίος είναι

$$X(f) = 2 - e^{-j4\pi f} + 3e^{-j10\pi f} \tag{4.600}$$

Επανερχόμενοι στο παράδειγμά μας με το $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, ο μετασχ. Fourier του θα είναι

$$X(f) = F\{\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t}\} + F\{\frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\} = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \tag{4.601}$$

και άρα

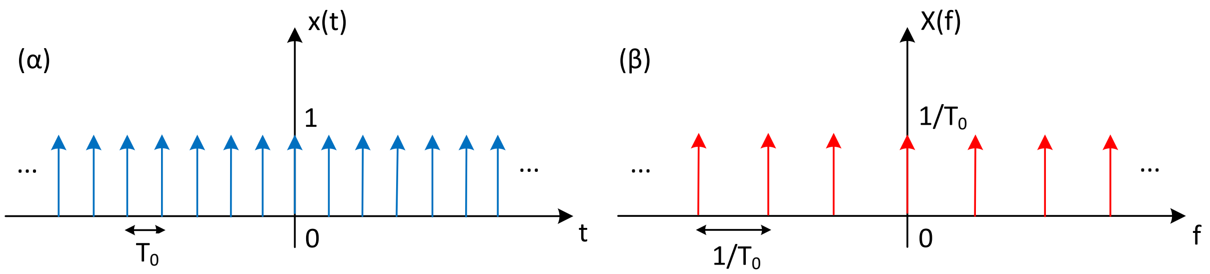
$$\boxed{x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f - f_0)} \tag{4.602}$$

Αφού λοιπόν κάθε περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί ώς άθροισμα ημιτόνων ή, γενικότερα, άθροισμα μιγαδικών εκθετικών $e^{j2\pi f_k t}$ μέσω της Σειράς Fourier, μπορούμε να βρούμε το μετασχ. Fourier ενός περιοδικού σήματος! Ας δούμε πως.

Ενα βασικό περιοδικό σήμα είναι η σειρά συναρτήσεων Δέλτα που φαίνεται στο Σχήμα 4.63(α) και που περιγράφεται μαθηματικά με την εξίσωση

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \tag{4.603}$$

Οπως ήδη γνωρίζουμε μπορούμε να αναπτύξουμε ένα περιοδικό σήμα σε εκθετική Σειρά Fourier ως



Σχήμα 4.63: *(a): σειρά συναρτήσεων Δέλτα στο πεδίο του χρόνου με περίοδο T_0 και (β) σειρά συναρτήσεων Δέλτα στο πεδίο της συχνότητας με περίοδο $1/T_0$, και (β) ο Μετασχηματισμός Fourier του (a).*

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.604}$$

όπου οι συντελεστές Δ_k υπολογίζονται από τη σχέση

$$\Delta_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta_{T_0}(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0} \tag{4.605}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του συντελεστή Fourier, Δ_k στην Εξίσωση (4.604) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - kf_0) \tag{4.606}$$

ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος της σειράς συναρτήσεων Δέλτα είναι

$$F\{\delta_{T_0}(t)\} = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_0) = \frac{1}{T_0}\delta_{1/T_0}(f) \tag{4.607}$$

Ο μετασχ. Fourier της σειράς συναρτήσεων Δέλτα φαίνεται στο Σχήμα 4.63(β). Οπως φαίνεται και από το σχήμα, ο μετασχ. Fourier είναι *πάλι* μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα, με περίοδο $1/T_0$ και πλάτος $1/T_0$.

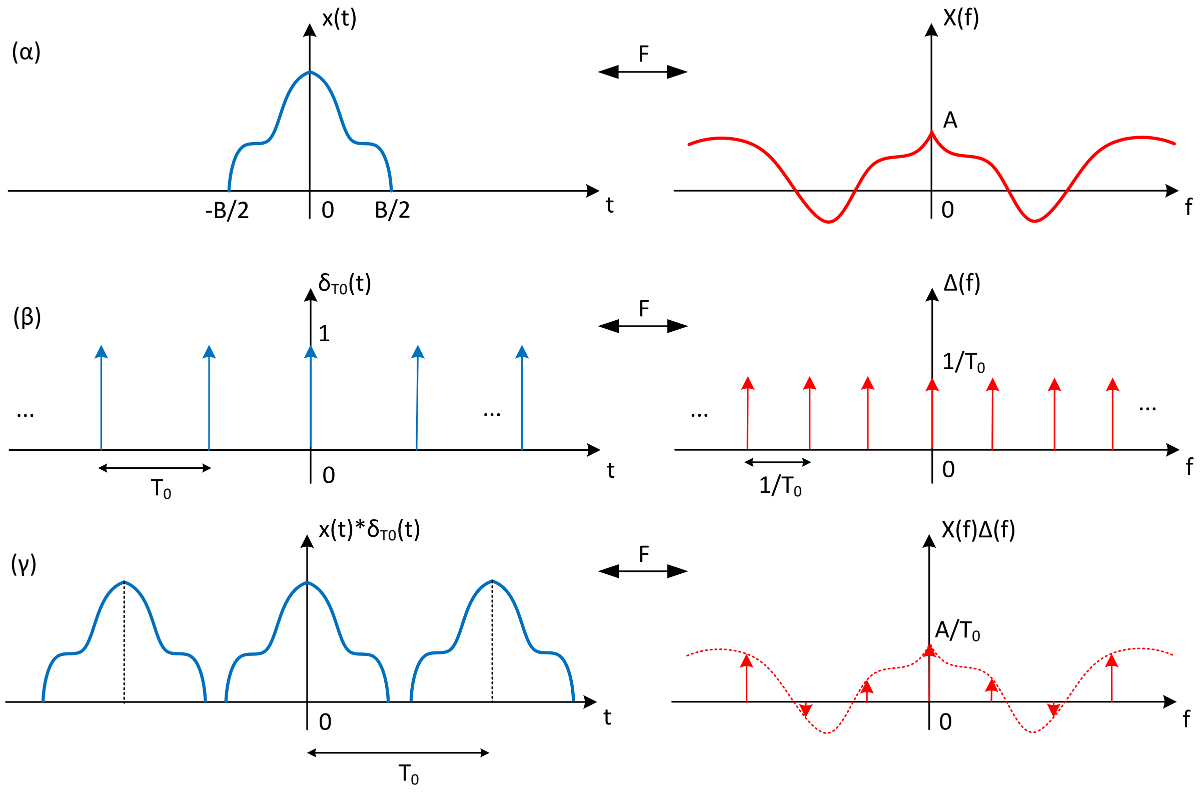
Είναι *πολύ σημαντικό* να δούμε ποιό είναι το αποτέλεσμα της συνέλιξης ενός σήματος περιορισμένης ενέργειας (περιορισμένης διάρκειας στο χρόνο) με τη σειρά συναρτήσεων Δέλτα, $\delta_{T_0}(t)$. Από τον ορισμό της συνέλιξης είναι φανερό ότι για την συνέλιξη ισχύει η ιδιότητα της αντιμετάθεσης, η προσεταιριστική ιδιότητα καθώς και η επιμεριστική ιδιότητα. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ιδιότητα και θεωρώντας ένα σήμα ενέργειας $x(t)$ διάρκειας $B < T_0$, η συνέλιξη των δύο σημάτων θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) * \delta_{T_0}(t) &= x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t - kT_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_0) \end{aligned} \tag{4.608}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \tag{4.609}$$

Το αποτέλεσμα της συνέλιξης φαίνεται στο Σχήμα 4.64. Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του σήματος με τη σειρά συναρτήσεων Δέλτα με περίοδο T_0 έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T_0.



Σχήμα 4.64: *Αριστερή στήλη: (α) σήμα ενέργειας διάρκειας B, (β) σειρά συναρτήσεων Δέλτα με περίοδο T_0 και (γ) το αποτέλεσμα της συνέλιξης των δύο παραπάνω σημάτων. Δεξιά στήλη: οι μετ. Fourier των αντίστοιχων σημάτων.*

Επομένως έχουμε έτσι έναν δεύτερο τρόπο να αναπαριστούμε ένα περιοδικό σήμα:

$$x(t + mT_0) = x(t, T_0) * \delta_{T_0}(t) \tag{4.610}$$

όπου $x(t, T_0)$ είναι η βασική περίοδος του σήματος και m ακέραιος αριθμός. Από την παραπάνω εξίσωση και γνωρίζοντας ότι η συνέλιξη στο χρόνο μετατρέπεται σε γινόμενο στη συχνότητα, μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier περιοδικών σημάτων. Πράγματι, ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος,

$x(t+mT)$, είναι

$$F\{x(t+mT_0)\} = F\{x(t,T_0)\}\ F\{\delta_{T_0}(t)\} = X(f,T_0)\frac{1}{T_0}\delta_{1/T_0}(f) \tag{4.611}$$

όπου $X(f,T_0)$ είναι ο μετασχ. Fourier του σήματος *ενέργειας* $x(t,T_0)$. Προσέξτε: το σήμα $x(t,T_0)$ έχει μόνο διάρκεια T_0, έξω από αυτό το διάστημα είναι παντού μηδέν, άρα είναι σήμα ενέργειας (ασχέτως αν το περιοδικό σήμα $x(t)$ είναι σήμα ισχύος).

Το μέγεθος

$$\left\{\frac{1}{T_0}X(f,T_0)\right\} \tag{4.612}$$

είναι *συνεχές* ως προς τη συχνότητα και ονομάζεται **φασματική περιβάλλουσα**. Ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος $x(t+mT_0)$ φαίνεται ενδεικτικά στο Σχήμα 4.64. Παρατηρούμε ότι το φάσμα είναι συνεχές ως προς τη συχνότητα. Οταν το συνεχές αυτό φάσμα πολλαπλασιαστεί με τη σειρά των συναρτήσεων Δέλτα, $\delta_{1/T_0}(f)$ (δεξιά στήλη, δεύτερο σχήμα) θα έχει ως αποτέλεσμα ένα διακριτό φάσμα (δεξιά στήλη, τρίτο σχήμα). Με εξισώσεις, το παραπάνω περιγράφεται ως εξής:

$$F\{x(t+mT_0)\} = X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}X\Big(\frac{k}{T_0},T_0\Big)\delta(f-\frac{k}{T_0}) \tag{4.613}$$

το οποίο επαναλαμβάνουμε ότι είναι διακριτό φάσμα σε αντίθεση με το συνεχές φάσμα του σήματος ενέργειας (δηλ. του σήματος της βασικής περιόδου).

4.11.1 Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

Παραπάνω αναφερθήκαμε στο δεύτερο τρόπο να αναπαραστούμε περιοδικά σήματα. Ποιος είναι ο πρώτος που έχουμε μάθει; Φυσικά η Σειρά Fourier. Γράφοντας το περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier μπορούμε να βρούμε ένα σύνδεσμο μεταξύ του διακριτού φάσματος που μόλις είδαμε και των συντελεστών του αναπτύγματος του περιοδικού σήματος σε Σειρά Fourier. Εχουμε δει ότι το εκθετικό ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος είναι

$$x(t) = x(t+mT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.614}$$

όπου

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \tag{4.615}$$

Ο μετασχ. Fourier του σήματος δίνεται από τη σχέση

$$F\{x(t+mT_0)\} = X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k F\{e^{j2\pi k f_0 t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\delta(f-kf_0) \tag{4.616}$$

όπου $f_0 = 1/T_0$. Συγκρίνοντας τις Σχέσεις (4.613) και (4.616) είναι εύκολο να δούμε ότι

$$X_k = \frac{1}{T_0}X(\frac{k}{T_0},T_0) \tag{4.617}$$

Δηλαδή το διακριτό φάσμα δεν είναι τίποτα άλλο από τους συντελεστές Fourier X_k!

Εν κατακλείδει, για να υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier ενός περιοδικού σήματος, εκτελούμε τα παρακάτω δυο βήματα:

Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

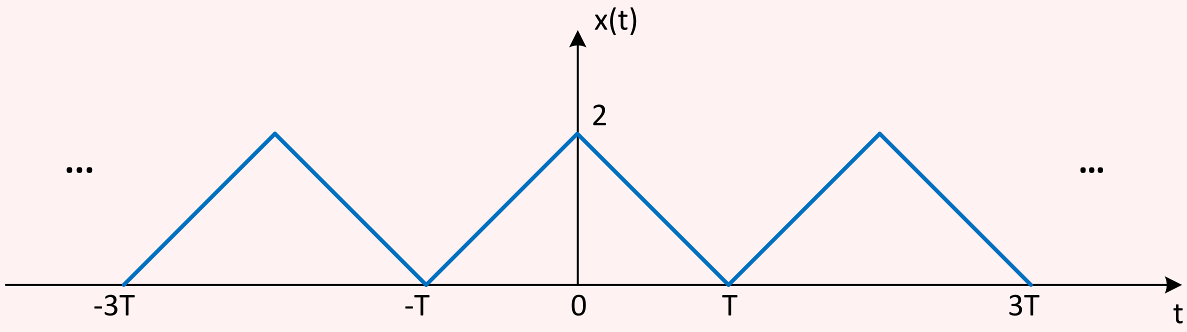
- Υπολογίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier σε *μια* περίοδο του σήματος (σαν να ήταν - που είναι - σήμα ενέργειας)
- Δειγματοληπτούμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής (θεμελειώδους) συχνότητας: kf_0 όπου $f_0 = 1/T_0$. Αυτή η δειγματοληψία μας δίνει επίσης τους συντελεστές του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος.

Ένα πολύ ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι, όπως βλέπετε, το T_0 μπορεί να είναι *οποιαδήποτε* περίοδος! Με άλλα λόγια, μπορούμε από το φάσμα του μετασχ. Fourier, να βρούμε τους συντελεστές Fourier για οποιαδήποτε περίοδο του αντίστοιχου περιοδικού σήματος! Αυτό που συμβαίνει είναι ότι απλά δειγματοληπτούμε σε διαφορετικές αποστάσεις το φάσμα του μετασχηματισμού Fourier!

Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε και τον κουραστικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της Σειράς Fourier... δείτε πόσο απλά στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.51:

Βρείτε τους συντελεστές του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος του Σχήματος 4.65.



Σχήμα 4.65: *Περιοδικό Τριγωνικό Σήμα Παραδείγματος*

Λύση:
Θα βρούμε πρώτα το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος $x(t)$ και μετά θα δειγματοληπτήσουμε το φάσμα $X(f)$ για να βρούμε τους συντελεστές Fourier. Προφανώς το σήμα είναι περιοδικό μια περίοδο $T_0 = 2T$. Αν απομονώσουμε μια περίοδό του, δηλ. τον κεντρικό τριγωνικό παλμό, αυτός γράφεται ως

$$x_{T_0}(t) = 2\text{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big) \tag{4.618}$$

και έχει μετασχ.Fourier

$$X_{T_0}(f) = 2T\text{sinc}^2\Big(\frac{2\pi fT}{2\pi}\Big) \tag{4.619}$$

Η περίοδος του περιοδικού σήματος είναι $T_0 = 2T$, άρα οι συντελεστές Fourier θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0}X_{T_0}(f)\Big]_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{2T}2T\text{sinc}^2\Big(\frac{k}{2T}T\Big) = \text{sinc}^2\Big(\frac{k}{2}\Big) \tag{4.620}$$

που είναι και το ζητούμενο.

4.12 Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος - Μη Περιοδικά Σήματα

Επίσης, όταν το υπό εξέταση σήμα ισχύος δεν είναι περιοδικό, υπάρχουν άλλες τεχνικές για τον υπολογισμό του μετασχ. Fourier τέτοιων σημάτων. Για παράδειγμα, ένα σήμα ισχύος $\hat{x}(t)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα της μέσης τιμής του και ενός σήματος που έχει μηδενική μέση τιμή, δηλ.

$$\hat{x}(t) = x_0 + x_z(t) \tag{4.621}$$

όπου x_0 είναι η μέση τιμή του σήματος και $x_z(t)$ το τμήμα του σήματος με τη μηδενική μέση τιμή. Προφανώς, ο μετασχ. Fourier του θα είναι:

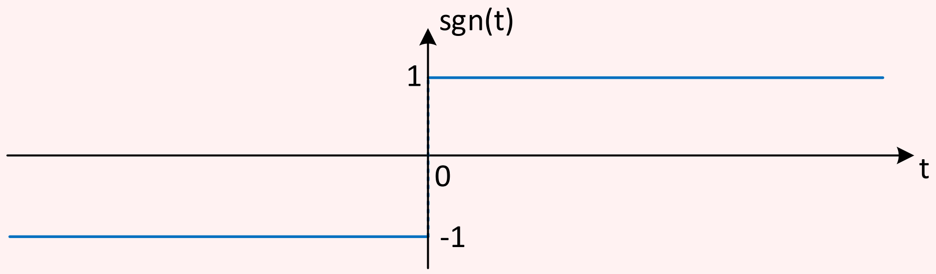
$$\hat{X}(f) = x_0\delta(f) + F\{x_z(t)\} \tag{4.622}$$

Αρκεί να βρούμε το μετασχ.Fourier του $x_z(t)$. Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.52:

Έστω $x(t) = \mathrm{sgn}(t)$ η συνάρτηση προσήμου

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \tag{4.623}$$



Σχήμα 4.66: *Σήμα προσήμου* $\mathrm{sgn}(t)$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του $x(t)$.

Η συνάρτηση προσήμου φαίνεται στο Σχήμα 4.66 και προφανώς έχει μηδενική μέση τιμή. Άρα $x_z(t) = \mathrm{sgn}(t)$ και $x_0 = 0$, οπότε $x(t) = x_z(t)$. Παραγωγίζοντας το $x_z(t)$ έχουμε

$$\frac{d}{dt}x_z(t) = 2\delta(t) \tag{4.624}$$

και από την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχ. Fourier, έχουμε

$$j2\pi f X_z(f) = 2F\{\delta(t)\} \Longleftrightarrow j2\pi f X_z(f) = 2 \Longleftrightarrow X_z(f) = \frac{1}{j\pi f} \tag{4.625}$$

Άρα τελικά

$$\boxed{x(t) = \mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{j\pi f}} \tag{4.626}$$

Αναλύοντας το μετασχ. Fourier σε πολική μορφή, έχουμε

$$F\{\mathrm{sgn}(t)\} = S(f) = \frac{1}{j\pi f} \Longrightarrow |S(f)| = \frac{1}{\pi|f|}, \quad \phi_s(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0 \end{cases} \tag{4.627}$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 4.67.

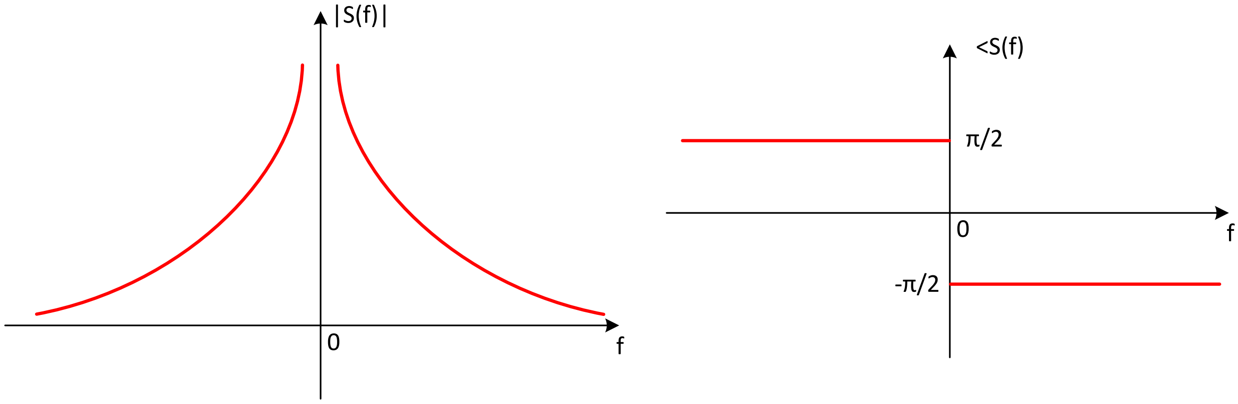
Παράδειγμα 4.53:

Η γνωστή βηματική συνάρτηση $x(t) = u(t)$ δεν έχει μηδενική μέση τιμή. Μπορεί όμως να γραφεί ως:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \tag{4.628}$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier της.

Προφανώς $x_z(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$ και $x_0 = \frac{1}{2}$. Γνωρίζουμε όμως το μετασχ. Fourier της συνάρτησης προσήμου,



Σχήμα 4.67: *Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος* $x(t) = \mathrm{sgn}(t)$.

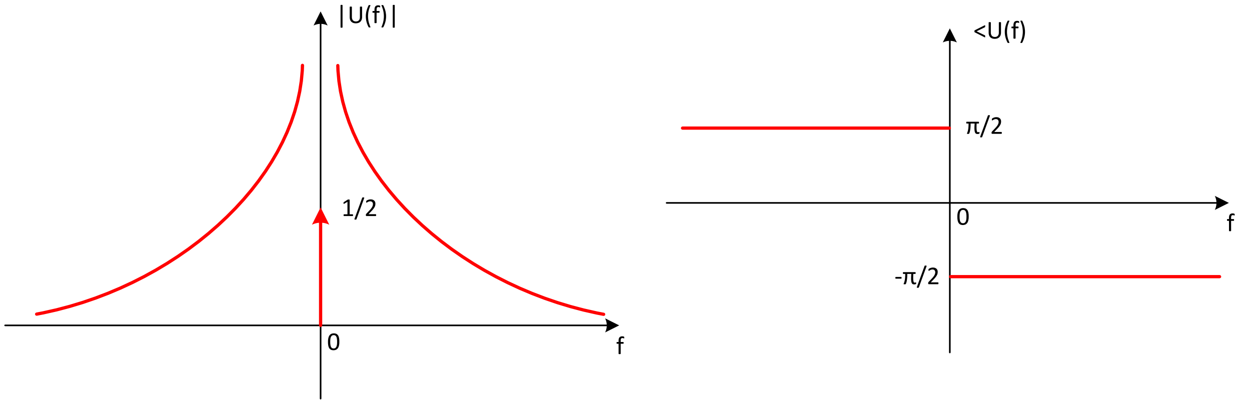
οπότε τελικά η βηματική συνάρτηση έχει μετασχ. Fourier

$$\boxed{x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}} \tag{4.629}$$

Αναλύοντας ξανά σε πολική μορφή, ϑα είναι

$$F\{u(t)\} = U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \Longrightarrow |U(f)| = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2\pi|f|}, \quad \phi_u(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0 \end{cases} \tag{4.630}$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 4.68.



Σχήμα 4.68: *Μέτρο και φάση του μετασχ. Fourier του σήματος* $x(t) = u(t)$.

Φυσικά η παραπάνω ανάλυση για τα σήματα ισχύος έχει νόημα όταν η μέση τιμή του σήματος είναι *μη* μηδενική. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = e^{2t}u(t) \tag{4.631}$$

δεν έχει μέση τιμή, καθώς αυξάνει στο ∞ όσο $t \to \infty$. Ένα καλό κριτήριο – αλλά όχι και αναγκαίο – για την ύπαρξη του μετασχ. Fourier ενός σήματος ισχύος είναι το να είναι απολύτως φραγμένου πλάτους, δηλ.

$$|x(t)| < M, \; M < \infty \tag{4.632}$$

όπως για παράδειγμα τα

$$x(t) = \cos(t), \; y(t) = \sin(t), \; z(t) = u(t), \; w(t) = \mathrm{sgn}(t) \tag{4.633}$$

και άλλα που ικανοποιούν τη Σχέση (4.632).

Είναι αξιοσημείωτο ότι παρ' όλες τις τεχνικές που μπορούμε να εφαρμόσουμε για να βρούμε το μετασχ. Fourier σημάτων ισχύος, αυτός μπορεί να *μην* υπάρχει! Δεν είναι σίγουρο δηλαδή ότι ένα σήμα ισχύος έχει μετασχ. Fourier, όσες τεχνικές κι αν χρησιμοποιήσουμε. Οπότε τίθεται το πρόβλημα του τι μπορούμε να κάνουμε για να μελετήσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο τέτοιων σημάτων. Η απάντηση είναι ότι μελετούμε το μετασχ. Fourier της *αυτοσυσχέτισης* του σήματος, όπως θα δούμε αργότερα σε σχετικό κεφάλαιο.

4.13 Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Ο Πίνακας 4.3 δείχνει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που είναι πολύ χρήσιμα στην πράξη.

Συνήθη ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Σήμα	**Μετασχηματισμός Fourier**
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f-kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{j\phi}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\phi}\delta(f+f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{-j\phi}e^{-j\pi/2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}e^{j\phi}e^{j\pi/2}\delta(f+f_0)$
1	$\delta(f)$
$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\mathrm{sinc}(fT)$
$A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\mathrm{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t),\ a>0$	$\frac{2\pi f_0}{(a+j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t),\ a>0$	$\frac{a+j2\pi f}{(a+j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-a\|t\|},\ \Re\{a\}>0$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$e^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{a-j2\pi f}$
$te^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a-j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t),\ \Re\{a\}>0$	$\frac{1}{(a-j2\pi f)^n}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2 f^2}{2}}$

Πίνακας 4.3: *Πίνακας ζευγών μετασχ. Fourier*

4.14 Συστήματα στο χώρο της συχνότητας

Ας επιστρέψουμε τώρα πίσω στα συστήματα. Ως τώρα περιγράψαμε τα συστήματα είτε ως μια σχέση εισόδου-εξόδου $y(t) = T\{x(t)\}$, είτε μέσω διαφορικών εξισώσεων και αρχικών συνθηκών, όπου και η κρουστική τους απόκριση $h(t)$ είχε θεμελιώδη ρόλο. Πλέον έχουμε ένα ισχυρό εργαλείο ανάλυσης σημάτων στο χώρο της συχνότητας, τον μετασχ. Fourier, ο οποίος είδαμε ότι αναλύει ένα σήμα σε ένα άπειρο άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων της μορφής $e^{j2\pi ft}$. Ας δούμε τι συμβαίνει στα συστήματα, όταν αυτά εξετάζονται από την οπτική της συχνότητας. Θα εξετάσουμε γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα (ΓΧΑ), όπου η απόκριση μηδενικής εισόδου δεν υφίσταται, δηλ. περιγράφονται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης.

Αν υποθέσουμε ότι στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$, εφαρμόζουμε ένα εκθετικό μιγαδικό σήμα $e^{j2\pi ft}$, τότε η έξοδος του συστήματος δίδεται από την πράξη της συνέλιξης, και είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j2\pi f(t-\tau)}d\tau = e^{j2\pi ft}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = H(f)e^{j2\pi ft} \tag{4.634}$$

με το $H(f)$ να είναι ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(t)$. Πώς ερμηνεύεται αυτή η σχέση; Παρατηρήστε ότι όταν φέρουμε ως είσοδο ένα *οποιοδήποτε* μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας f σε ένα ΓΧΑ σύστημα, το αποτέλεσμα που θα πάρουμε στην έξοδό μας θα είναι το *ίδιο* σήμα της εισόδου, πολλαπλασιασμένο με το μετασχ. Fourier του συστήματος, στη συχνότητα f.

Σε μαθηματική ορολογία, η μιγαδική εκθετική συνάρτηση συχνότητας f αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** του ΓΧΑ συστήματος. Υπενθυμίζεται ότι η μαθηματική περιγραφή $h(t)$ του συστήματος λέγεται **κρουστική απόκριση**, και αποτελεί την έξοδο του συστήματος, όταν στην είσοδό του εμφανίζεται μια συνάρτηση Δέλτα. Ο μετασχ. Fourier της, $H(f)$, όντας τόσο σημαντικός στην ανάλυση των συστημάτων, δε θα μπορούσε να μην έχει δικό του όνομα: λέγεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνοτική απόκριση**, ενώ η ανάλυσή της σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H(f)} \tag{4.635}$$

μας ονομάζει το φάσμα πλάτους της, $|H(f)|$, ως **απόκριση πλάτους** και το φάσμα φάσης της, $\phi_H(f)$, ως **απόκριση φάσης**.

Όμως ένα από τα σημαντικότερα πορίσματα της Ανάλυσης Fourier είναι ότι *η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα*, και το αντίστροφο (Πίνακας 4.2). Άρα η σχέση της συνέλιξης που περιγράφει την έξοδο ενός συστήματος στο πεδίο του χρόνου

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{4.636}$$

μπορεί να γραφεί στο πεδίο της συχνότητας ως:

$$Y(f) = X(f)H(f) \tag{4.637}$$

Τι σημαίνει η σχέση αυτή για το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης της εισόδου $X(f)$; Αν χρησιμοποιήσουμε την πολική μορφή, θα έχουμε

$$|Y(f)|e^{j\phi_Y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_X(f)}|H(f)|e^{j\phi_H(f)} \tag{4.638}$$

που οδηγεί στις σχέσεις

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)| \tag{4.639}$$

$$\phi_Y(f) = \phi_X(f) + \phi_H(f) \tag{4.640}$$

Οι σχέσεις αυτές είναι *πολύ σημαντικές* διότι μας πληροφορούν ότι

- Το φάσμα πλάτους της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεν είναι άλλο από το *γινόμενο* των επιμέρους φασμάτων πλάτους, της εισόδου και του συστήματος. Άρα, η απόκριση πλάτους του συστήματος δρα *πολλαπλασιαστικά* στο φάσμα πλάτους της εισόδου.

- Το φάσμα φάσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεν είναι άλλο από το *άθροισμα* των επιμέρους φασμάτων φάσης, της εισόδου και του συστήματος. Άρα, η απόκριση φάσης του συστήματος δρα *αθροιστικά* στο φάσμα φάσης της εισόδου.

Τα παραπάνω δυο σημεία ισχύουν ανεξαρτήτως της φύσης του σήματος εισόδου (περιοδικό ή μη, ενέργειας ή ισχύος).

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα της απόκρισης σε συχνότητα των ΓΧΑ συστημάτων είναι ότι αν το $h(t)$ είναι πραγματικό, η απόκριση σε συχνότητα ειναι *συζυγής συμμετρική* συνάρτηση της συχνότητας:

$$H(f) = H^*(-f) \tag{4.641}$$

που συνεπάγεται ότι το πραγματικό της μέρος είναι άρτια συνάρτηση του f, και το φανταστικό ειναι περιττή συνάρτηση του f, δηλ.

$$H_R(f) = H_R(-f) \tag{4.642}$$
$$H_I(f) = -H_I(-f) \tag{4.643}$$

Όμοια, το πλάτος της απόκρισης σε συχνότητα είναι άρτια συνάρτηση του f και η φάση είναι περιττη συνάρτηση του f, δηλ.

$$|H(f)| = |H(-f)| \tag{4.644}$$
$$\phi(f) = -\phi(-f) \tag{4.645}$$

Τα παραπάνω δεν πρέπει να σας εκπλήσσουν καθώς είναι γνωστές ιδιότητες πραγματικών σημάτων στο χώρο της συχνότητας.

Όμως η κρουστική απόκριση δεν είναι ο μόνος τρόπος περιγραφής ενός ΓΧΑ συστήματος. Μάλιστα, ο πρώτος τρόπος περιγραφής - γενικών - συστημάτων που συναντήσαμε ήταν μέσω διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Ας θυμηθούμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=1}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \tag{4.646}$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Η ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχ. Fourier μπορεί να μετατρέψει την παραπάνω σχέση ως

$$\sum_{i=1}^{N} (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=1}^{M} (j2\pi f)^l b_l X(f) \tag{4.647}$$

$$Y(f) \sum_{i=1}^{N} (j2\pi f)^i a_i = X(f) \sum_{l=1}^{M} (j2\pi f)^l b_l \tag{4.648}$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=1}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=1}^{N} a_i (j2\pi f)^i} \tag{4.649}$$

Ο αριθμητής και ο παρονομαστής της παραπάνω ρητής συνάρτησης αποτελούν πολυώνυμα του $j2\pi f$. Αν υποθέσουμε ότι έχουν M και N διακριτές ρίζες $-\mu_l$ και $-\kappa_i$ αντίστοιχα, με $M < N$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$H(f) = \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)} \tag{4.650}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$H(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f} \tag{4.651}$$

μέσω της τεχνικής του αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα.

4.14.1 Συστήματα με Είσοδο Περιοδικά Σήματα

Ας αρχίσουμε τη μελέτη συστημάτων με περιοδική είσοδο. Το αποτέλεσμα της Σχέσης (4.634) είναι σημαντικό, γιατί αν φέρουμε ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$, με ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t} \tag{4.652}$$

η έξοδος $y(t)$ του συστήματος είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0)X_k e^{jk2\pi f_0 t} \tag{4.653}$$

Βλέπετε ότι το μόνο που αλλάζει είναι οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier: από X_k γίνονται $H(kf_0)X_k$, όπου, επαναλαμβάνουμε, το $H(kf_0)$ είναι η τιμή της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$ του συστήματος για $f = kf_0$. Αυτομάτως, η παραπάνω σχέση μας λέει ότι ένα άθροισμα ημιτόνων που θα εμφανιστεί στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος, θα παραμείνει άθροισμα ημιτόνων στην έξοδο, ίδιων συχνοτήτων αλλά με διαφορετικά πλάτη και φάσεις!

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.54:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = 2e^{-t}u(t)$ και στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα $x(t) = 4\cos(t + \pi/2)$. Βρείτε την έξοδο $y(t)$. Τι παρατηρείτε;

Λύση:
Θα είναι, από τον Πίνακα (4.3)

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) \longleftrightarrow H(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} \tag{4.654}$$

Το σύστημα γράφεται ως

$$H(f) = |H(f)|e^{j\tan^{-1}\frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}}} \tag{4.655}$$

Άρα το πλάτος θα είναι

$$|H(f)| = \frac{2}{|1 + j2\pi f|} = \frac{2}{\sqrt{1 + 2\pi f^2}} \tag{4.656}$$

ενώ για τη φάση θα έχουμε

$$H(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} = \frac{2(1 - j2\pi f)}{(1 + j2\pi f)(1 - j2\pi f)} = \frac{2(1 - j2\pi f)}{|1 + j2\pi f|^2} = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2} - j\frac{4\pi f}{1 + (2\pi f)^2} = \Re\{H(f)\} + j\Im\{H(f)\} \tag{4.657}$$

δηλαδή

$$\phi(f) = \tan^{-1}\frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}} = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{4\pi f}{1+(2\pi f)^2}}{\frac{2}{1+(2\pi f)^2}}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{2\pi f}{1}\right) = -\tan^{-1}(2\pi f) \tag{4.658}$$

λόγω του ότι η αντίστροφη εφαπτομένη είναι περιττή συνάρτηση. Όμως η είσοδος είναι της μορφής

$$x(t) = 4\cos(t + \pi/2) = 2e^{jt}e^{j\pi/2} + 2e^{-jt}e^{-j\pi/2} \tag{4.659}$$

δηλ. έχει συχνότητες $\pm 1/2\pi$. Γνωρίζουμε ότι οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του ΓΧΑ συστήματος, και έτσι, δεδομένου ότι το σύστημα είναι πραγματικό σήμα, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = 2H\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H\Big(-\frac{1}{2\pi}\Big)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \tag{4.660}$$

$$= 2H\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)e^{jt}e^{j\pi/2} + 2H^*\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)e^{-jt}e^{-j\pi/2} \tag{4.661}$$

$$= \Big|H\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)\Big|e^{j\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}e^{jt}e^{j\pi/2} + \Big|H\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)\Big|e^{-j\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}e^{-jt}e^{-j\pi/2} \tag{4.662}$$

$$= 2\Big|H\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)\Big|e^{j(t+\pi/2+\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right))} + 2\Big|H\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)\Big|e^{-j(t+\pi/2+\phi\left(\frac{1}{2\pi}\right))} \tag{4.663}$$

$$= 4\Big|H\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)\Big|\cos(t + \pi/2 - \pi/4) \tag{4.664}$$

$$= 4\sqrt{2}\cos(t + \pi/4) \tag{4.665}$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος ειναι πάλι ημιτονοειδής μορφή, οπως η είσοδος, και έχει επηρεαστεί από το σύστημα τόσο στο πλάτος της (πλάτος εισόδου 4, πλάτος εξόδου $4\left|H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right|$), όσο και στη φάση της (φάση εισόδου $\pi/2$, φάση εξόδου $\pi/2 + \phi\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$).

Γενικότερα, μπορούμε να παρατηρήσουμε οτι:

Εύρεση εξόδου σε ΓΧΑ σύστημα με περιοδική είσοδο

1. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος ειναι της μορφής $\mathbf{x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\theta)}}$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y(t) = AH(f_0)e^{j(2\pi f_0 t+\theta)}}$, όπου $\mathbf{H(f) = |H(f)|e^{j\phi(f)}}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

2. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος ειναι της μορφής $\mathbf{x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)}$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y(t) = A|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \theta + \phi(f_0))}$, όπου $\mathbf{H(f) = |H(f)|e^{j\phi(f)}}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

   Προφανώς το παραπάνω μπορει να γενικευτεί για αθροισμα ημιτόνων ή μιγαδικών εκθετικών ως:

3. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος ειναι της μορφής $\mathbf{x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{j(2\pi f_k t+\theta_k)}}$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k H(f_k) e^{j(2\pi f_k t+\theta_k)}}$, όπου $\mathbf{H(f) = |H(f)|e^{j\phi(f)}}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

4. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος ειναι της μορφής $\mathbf{x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \theta_k)}$, τότε η έξοδος θα είναι της μορφής $\mathbf{y(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k |H(f_k)| \cos(2\pi f_k t + \theta_k + \phi(f_k))}$, όπου $\mathbf{H(f) = |H(f)|e^{j\phi(f)}}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

4.14.2 Συστήματα με Είσοδο Μη Περιοδικά Σήματα

Πιο γενικά όμως, και για οποιαδήποτε σήματα (όχι απαραίτητα περιοδικά), η σχέση που συνδέει την είσοδο $x(t)$ με την έξοδο $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος $h(t)$ εκφράζεται μέσω της πράξης της συνέλιξης:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{4.666}$$

η οποία μετατρέπεται στο χώρο της συχνότητας ως

$$Y(f) = X(f)H(f) \tag{4.667}$$

Μπορούμε λοιπόν πολύ εύκολα να βρούμε την έξοδο ενός συστήματος στο χώρο της συχνότητας, και να επιστρέψουμε στο χώρο του χρόνου με χρήση του αντίστροφου μετασχ. Fourier.

Επιπλέον, η παραπάνω σχέση επιτρέπει σε ένα σύστημα $h(t)$ με απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ να υπολογιστεί στο χώρο των συχνοτήτων, και μάλιστα πολύ πιο εύκολα απ΄ ότι στο χώρο του χρόνου! Πώς; Προφανώς από τη σχέση

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \tag{4.668}$$

που έχουμε ήδη δει. Βλέπετε ότι, εν γένει, η απόκριση σε συχνότητα είναι μια ρητή συνάρτηση της συχνότητας f. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{N(f)}{D(f)} \tag{4.669}$$

όπου $N(f), D(f)$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$, με όποιες απλοποιήσεις μπορεί να γίνουν στο κλάσμα. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μικρότερα κλάσματα μέσα από μια απλή διαδικασία που λέγεται ‘‘Αναπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα’’[9]. Εν

[9] Η οποία περιγράφεται στην Παράγραφο 1.5

συντομία, το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μια τέτοια ρητή συνάρτηση, εν γένει, μπορεί να γραφεί ως

$$H(f) = \frac{N(f)}{D(f)} = \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} \tag{4.670}$$

στην απλή περίπτωση που οι ρίζες του παρονομαστή $D(f)$ είναι απλές. Έχοντας την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα και σύμφωνα με τον Πίνακα 4.3, μπορούμε να βρούμε την κρουστική απόκριση $h(t)$, ως

$$H(f) = \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^{M} A_k e^{-\alpha_k t} u(t) \tag{4.671}$$

Φυσικά η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί και η είσοδος $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, αφού και το $X(f)$ εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση:

$$X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} \tag{4.672}$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα πάνω σε αυτά, που είναι πολύ σημαντικά.

Παράδειγμα 4.55:

Έστω το σύστημα

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \tag{4.673}$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \tag{4.674}$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος $y(t)$.

Λύση:
Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον γνωστό τρόπο του ολοκληρώματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, συμβουλευόμενοι τον Πίνακα 4.3, έχουμε ότι

$$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(f) = X(f)H(f) = \left(\frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f}\right)\frac{1}{3+j2\pi f} \tag{4.675}$$

$$= \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)} + \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)} \tag{4.676}$$

$$= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{3+j2\pi f} + \frac{C}{2+j2\pi f} + \frac{D}{3+j2\pi f} \tag{4.677}$$

$$y(t) = Ae^{-t}u(t) + (B+D)e^{-3t}u(t) + Ce^{-2t}u(t) \tag{4.678}$$

με

$$A = \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(1+j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-1} = \frac{2}{(3+j2\pi f)}\Big]_{j2\pi f=-1} = 1 \tag{4.679}$$

$$B = \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(3+j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-3} = \frac{2}{(1+j2\pi f)}\Big]_{j2\pi f=-3} = -1 \tag{4.680}$$

$$C = \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(2+j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-2} = \frac{1}{(3+j2\pi f)}\Big]_{j2\pi f=-2} = 1 \tag{4.681}$$

$$D = \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(3+j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-3} = \frac{1}{(2+j2\pi f)}\Big]_{j2\pi f=-3} = -1 \tag{4.682}$$

και άρα

$$y(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \tag{4.683}$$

Ας υπολογίσουμε το ίδιο με εφαρμογή του ορισμού της συνέλιξης. Έτσι, θα έχουμε:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{4.684}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (2e^{-\tau}u(\tau) + e^{-2\tau}u(\tau))e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \tag{4.685}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \tag{4.686}$$

Ισχύει ότι

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Bigg) \tag{4.687}$$

Άρα

$$y(t) = \int_0^t 2e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau = \int_0^t 2e^{-\tau-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau-3(t-\tau)}d\tau \tag{4.688}$$

$$= \int_0^t 2e^{2\tau-3t}d\tau + \int_0^t e^{\tau-3t}d\tau = 2e^{-3t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau + e^{-3t}\int_0^t e^{\tau}d\tau \tag{4.689}$$

$$= e^{-3t}e^{2\tau}\Big]_0^t + e^{-3t}e^{\tau}\Big]_0^t = e^{-3t}(e^{2t}-1) + e^{-3t}(e^t - 1) \tag{4.690}$$

$$= e^{-t} - e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-3t} = e^{-t} - 2e^{-3t} + e^{-2t}, \;\; 0 < t \tag{4.691}$$

$$= e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \tag{4.692}$$

που είναι η ίδια ακριβώς σχέση με τη Σχέση (4.683)! Διαλέξτε τι προτιμάτε. ☺

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την είσοδο $x(t)$, αν μας δίνεται το σύστημα και η έξοδος του. Δείτε:

Παράδειγμα 4.56:

Έστω ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f} \tag{4.693}$$

Στην είσοδό του, βρίσκεται ένα σήμα $x(t)$, το οποίο δίνει έξοδο

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \tag{4.694}$$

Βρείτε την είσοδο, $x(t)$.

Λύση:
Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$y(t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} - \frac{1}{2 + j2\pi f} \tag{4.695}$$

Προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned} Y(f) = H(f)X(f) \Longleftrightarrow X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} &= \frac{\frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}}{\frac{1}{3+j2\pi f}} \\ &= \frac{\frac{1}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}}{\frac{1}{3+j2\pi f}} \\ &= \frac{3 + j2\pi f}{(2 + j2\pi f)(1 + j2\pi f)} \\ &= \frac{A}{2 + j2\pi f} + \frac{B}{1 + j2\pi f} \longleftrightarrow \\ x(t) &= Ae^{-2t}u(t) + Be^{-t}u(t) \end{aligned} \tag{4.696}$$

με

$$A = \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}(2+j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-2} = \frac{3+j2\pi f}{(1+j2\pi f)}\Big]_{j2\pi f=-2} = -1 \tag{4.697}$$

$$B = \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}(1+j2\pi f)\Big]_{j2\pi f=-1} = \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)}\Big]_{j2\pi f=-1} = 2 \tag{4.698}$$

και άρα τελικά η είσοδος θα είναι

$$x(t) = -e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) \tag{4.699}$$

Παράδειγμα 4.57:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t) \tag{4.700}$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$.

Λύση:
Αν δοκιμάσουμε το πεδίο του χρόνου, έχουμε

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t) \Longrightarrow \frac{d}{dt}h(t) - 2h(t) = 3\delta(t) - 6\frac{d}{dt}\delta(t) \tag{4.701}$$

και βλέπουμε ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους που είδαμε στην Παράγραφο 3.2.1. Ας το επαναλάβουμε, για να φανεί η σύγκριση με τη μέθοδο της συχνότητας. Στην περίπτωση αυτή η μέγιστη τάξη παραγώγων της εισόδου είναι ίση με τη μέγιστη τάξη παραγώγων της εξόδου ($M = N$), οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους και από μια συνάρτηση Δέλτα. Θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα με είσοδο μόνο το $x(t)$, και το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h_o(t)$, έχουμε

$$\frac{d}{dt}h_o(t) + 2h_o(t) = 0 \tag{4.702}$$

με αρχικές συνθήκες για $t = 0^+$. Η ομογενής εξίσωση είναι

$$\frac{d}{dt}h_o(t) + 2h_o(t) = 0 \tag{4.703}$$

και οι αρχικές συνθήκες είναι

$$h_o(0^+) = \frac{1}{a_1} = 1 \tag{4.704}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\lambda + 2 = 0 \tag{4.705}$$

οπότε η χαρακτηριστική ρίζα είναι η $\lambda = -2$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h_o(t) = c_1 e^{\lambda_t} = c_1 e^{-2t}, \ \ t > 0 \tag{4.706}$$

Για να βρούμε τη σταθερά c_1 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$h_o(0^+) = c_1 = 1 \tag{4.707}$$

οπότε είναι $c_1 = 1$ και άρα η ομογενής λύση είναι

$$h_o(t) = e^{-2t}u(t) \tag{4.708}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$h(t) = 3h_o(t) - 6\frac{d}{dt}h_o(t) \tag{4.709}$$
$$= 3e^{2t}u(t) - 6(-2e^{-2t}u(t) + e^{-2t}\delta(t)) \tag{4.710}$$
$$= 3e^{2t}u(t) + 12e^{-2t}u(t) - 6\delta(t) \tag{4.711}$$
$$= 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t) \tag{4.712}$$

Στο πεδίο της συχνότητας θα μας είναι χρήσιμη η ιδιότητα της παραγώγισης, μια και έχουμε διαφορικές εξισώσεις. Θα έχουμε

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow j2\pi fY(f) + 2Y(f) = 3X(f) - 6j2\pi fX(f) \tag{4.713}$$
$$Y(f)(j2\pi f + 2) = X(f)(3 - 6j2\pi f) \tag{4.714}$$
$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{3 - 6j2\pi f}{j2\pi f + 2} \tag{4.715}$$
$$H(f) = \frac{3}{j2\pi f + 2} - \frac{6j2\pi f}{j2\pi f + 2} \tag{4.716}$$
$$= 3\frac{1}{j2\pi f + 2} - 6j2\pi f\frac{1}{j2\pi f + 2} \tag{4.717}$$

και από τα γνωστά ζεύγη και ιδιότητες μετασχηματισμών (παραγώγιση, παράγωγος Δέλτα), θα είναι

$$H(f) = 3\frac{1}{2 + j2\pi f} - 6j2\pi f\frac{1}{2 + j2\pi f} \longleftrightarrow h(t) = 3e^{-2t}u(t) - \frac{d}{dt}6e^{-2t}u(t) \tag{4.718}$$
$$= 3e^{-2t}u(t) - 6\frac{d}{dt}\big(e^{-2t}\big)u(t) - 6e^{-2t}\frac{d}{dt}\big(u(t)\big) \tag{4.719}$$
$$= 3e^{-2t}u(t) + 12e^{-2t}u(t) - 6e^{-2t}\delta(t) \tag{4.720}$$
$$= 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t) \tag{4.721}$$

Είναι εμφανές πόσο πιο εύκολος είναι ο υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης στο πεδίο της συχνότητας.

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος για μη περιοδική είσοδο

1. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $\mathbf{h(t)} \longleftrightarrow \mathbf{H(f)}$ ειναι της μορφής

$$\mathbf{x(t) = Ae^{-at}u(t),\ \ a > 0 \longleftrightarrow X(f) = A\frac{1}{a + j2\pi f}}$$

τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως $\mathbf{Y(f) = H(f)X(f)}$ και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $\mathbf{y(t)}$. Προφανώς το παραπάνω μπορεί να γενικευτει για άθροισμα τέτοιων σημάτων ως:

2. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $\mathbf{h(t)} \longleftrightarrow \mathbf{H(f)}$ ειναι της μορφής

$$\mathbf{x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-a_k t}u(t) \longleftrightarrow X(f) = \sum_{k=1}^{N} A_k\frac{1}{a_k + j2\pi f}}$$

τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως $\mathbf{Y(f) = H(f)X(f)}$, και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $\mathbf{y(t)}$.

4.14.3 Συστήματα με Συναρτήσεις Δέλτα

Πολλά συστήματα (ή και σήματα) εκφράζονται ως ένα απλό άθροισμα Συναρτήσεων Δέλτα, όπως για παράδειγμα το ΓΧΑ σύστημα

$$y(t) = 2x(t) - x(t-1) \tag{4.722}$$

που έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1) \tag{4.723}$$

Αυτή η περίπτωση είναι η πιο εύκολη, καθώς μπορούμε να δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, αντί αυτού της συχνότητας, εκμεταλλευόμενοι την παρακάτω ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα:

$$x(t) * \delta(t \pm t_0) = x(t \pm t_0) \tag{4.724}$$

Επαναλαμβάνουμε, ερμηνεύοντας την παραπάνω σχέση, ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = \pm t_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x(t)$ μετατοπισμένο στη θέση $t = \pm t_0$!

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.58:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1)$. Στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα $x(t) = 2e^{2t}u(-t)$. Βρείτε την έξοδο.

Λύση:
Ας δούμε και τις δυο λύσεις (χρόνος και συχνότητα).

- Θα έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = x(t) = 2e^{2t}u(-t) * (2\delta(t) - \delta(t-1)) && (4.725)\\ &= 2e^{2t}u(-t) * 2\delta(t) - 2e^{2t}u(-t) * \delta(t-1) && (4.726)\\ &= 4e^{2t}u(-t) - 2e^{2(t-1)}u(-(t-1)) && (4.727)\\ &= 4e^{2t}u(-t) - 2e^{2(t-1)}u(-t+1) && (4.728) \end{aligned}$$

- Στο χώρο της συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο, και μέσω μετασχ. Fourier και ιδιοτήτων, θα είναι

$$\begin{aligned} Y(f) = X(f)H(f) &= \frac{2}{2 - j2\pi f}(2 - e^{-j2\pi f}) && (4.729)\\ &= \frac{4}{2 - j2\pi f} - \frac{2}{2 - j2\pi f}e^{-j2\pi f} && (4.730) \end{aligned}$$

  και από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier, η έξοδος στο χρόνο θα είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= 4e^{2t}u(-t) - 2e^{-2(t-1)}u(-(t-1)) && (4.731)\\ &= 4e^{2t}u(-t) - 2e^{2(t-1)}u(-t+1) && (4.732) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.59:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$. Στην είσοδο του εμφανίζεται το σήμα $x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right)$. Βρείτε την έξοδο.

Λύση:

- Από τους Πίνακες, έχουμε

$$H(f) = e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f} \tag{4.733}$$

  και

$$x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = 2T\mathrm{sinc}(fT)e^{-j4\pi f} \tag{4.734}$$

  Είναι

$$\begin{aligned} Y(f) &= H(f)X(f) = 2T\mathrm{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}(e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}) && (4.735)\\ &= 2T\mathrm{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}e^{j2\pi f} - 2T\mathrm{sinc}(fT)e^{-j4\pi f}e^{-j2\pi f} && (4.736)\\ &= 2T\mathrm{sinc}(fT)e^{-j2\pi f} - 2T\mathrm{sinc}(fT)e^{-j6\pi f} && (4.737) \end{aligned}$$

και

$$y(t) = 2\text{rect}\Big(\frac{t-1}{T}\Big) - 2\text{rect}\Big(\frac{t-3}{T}\Big) \tag{4.738}$$

- Είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = 2\text{rect}\Big(\frac{t-2}{T}\Big) * (\delta(t+1) - \delta(t-1)) \tag{4.739}$$
$$= 2\text{rect}\Big(\frac{t-2}{T}\Big) * \delta(t+1) - 2\text{rect}\Big(\frac{t-2}{T}\Big) * \delta(t-1) \tag{4.740}$$
$$= 2\text{rect}\Big(\frac{t-2+1}{T}\Big) - 2\text{rect}\Big(\frac{t-2-1}{T}\Big) \tag{4.741}$$
$$= 2\text{rect}\Big(\frac{t-1}{T}\Big) - 2\text{rect}\Big(\frac{t-3}{T}\Big) \tag{4.742}$$

από την ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \tag{4.743}$$

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα δε θα άλλαζε τίποτα αν οι συναρτήσεις Δέλτα αποτελούσαν την είσοδο του συστήματος (αντί το ίδιο το σύστημα), και οι είσοδοι $x(t)$ αποτελούσαν τις κρουστικές αποκρίσεις των συστημάτων.

Παράδειγμα 4.60:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$y(t) = 3x(t) - 6x(t-2) \tag{4.744}$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$.

Λύση:
Μπορούμε να βρούμε την κρουστική απόκριση με δυο τρόπους. Είτε στο χώρο του χρόνου, είτε σε αυτόν της συχνότητας. Στο χώρο του χρόνου, θα έχουμε εύκολα

$$y(t) = 3x(t) - 6x(t-2) \Longrightarrow h(t) = 3\delta(t) - 6\delta(t-2) \tag{4.745}$$

Στο χώρο της συχνότητας, θα έχουμε

$$y(t) = 3x(t) - 6x(t-2) \longleftrightarrow Y(f) = 3X(f) - 6X(f)e^{-j4\pi f} \tag{4.746}$$
$$\frac{Y(f)}{X(f)} = 3 - 6e^{-j4\pi f} = 3 - 6e^{-j4\pi f} \tag{4.747}$$

οπότε

$$h(t) = 3\delta(t) - 6\delta(t-2) \tag{4.748}$$

4.14.4 Παρατηρήσεις

1. Για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, αν σας βολεύει. Το πώς θα καταλαβαίνετε ποιός τρόπος είναι πιο εύκολος ή σύντομος, απαιτεί εμπειρία. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι αρχικά εμφανές κάτι τέτοιο, και αναγκαστικά δουλεύετε όπως νομίζετε εσείς, μέχρι να επιβεβαιωθείτε ή να διαψευστείτε.

2. Υπενθυμίζεται ότι το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα εφαρμόζεται *μόνον* όταν η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερη από αυτή του παρονομαστή. Στα παραπάνω παραδείγματα, αυτό ήταν αληθές. Σε περίπτωση που δεν είναι, πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων.

3. Στην ανάλυση των παραπάνω συστημάτων, υποθέσαμε ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει, αφού χρησιμοποιήσαμε τα σύμβολα και τις ιδιότητές του. Αυτό είναι αρκετά περιοριστικό, διότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να μην υπάρχει για κάποια σήματα ή συστήματα που εμφανίζονται στην πράξη. Θέλουμε λοιπόν έναν ακόμα πιο γενικό μετασχηματισμό που θα μπορεί να περιγράψει συχνοτικά και μη ευσταθή σήματα! Θα δούμε σύντομα έναν τέτοιο μετασχηματισμό που άρει αυτές τις δυσκολίες.

4.15 Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

Κάποια συστήματα εκτελούν συγκεκριμένες λειτουργίες, οι οποίες είναι πολύ συνήθεις και πολύ χρήσιμες στην πράξη. Αυτές οι λειτουργίες περιλαμβάνουν την αποκοπή συγκεκριμένων συχνοτήτων του σήματος εισόδου και τη διέλευση κάποιων άλλων, και/ή την ενίσχυση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που διέρχονται ελεύθερα του συστήματος. Λόγω αυτής της λειτουργίας τους, αυτά τα συστήματα ονομάζονται "φίλτρα". Ο λόγος, προφανής: όπως το φίλτρο του καφέ π.χ. δεσμεύει τον καφέ σε στέρεα μορφή και επιτρέπει τη διέλευση του υγρού καφέ, έτσι και αυτά τα φίλτρα, επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων ενώ δεσμεύουν (καταστέλλουν, μηδενίζουν το πλάτος) κάποιες άλλες.

Εδώ θα δούμε κάποια συγκεκριμένα φίλτρα, τα οποία ονομάζονται *ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων*, και είναι ΓΧΑ συστήματα με τις εξής δυο ιδιότητες:

- Είναι ιδανικά, δηλ. *μη πραγματοποιήσιμα*, διότι όπως θα δούμε:
  - είναι μη-αιτιατά
  - η κρουστική τους απόκριση $h(t)$ είναι άπειρης διάρκειας
- Επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων χωρίς διαταραχή στο πλάτος ή στη φάση, ενώ αποκόπτουν *εντελώς* κάποιες άλλες.

Παρ΄ όλα αυτά, όλα τα πραγματικά φίλτρα που κατασκευάζουν οι μηχανικοί προσπαθούν να προσεγγίσουν όσο γίνεται καλύτερα αυτά τα θεωρητικά φίλτρα, δεδομένων παραγόντων όπως η πολυπλοκότητα και το κόστος κατασκευής.

Υπάρχουν τέσσερα βασικά είδη φίλτρων επιλογής συχνοτήτων:

1. Το **βαθυπερατό (lowpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από τη μηδενική συχνότητα ως μια συγκεκριμένη συχνότητα f_c.
2. Το **υψιπερατό (highpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη συχνότητα f_c, ως το $+\infty$.
3. Το **ζωνοπερατό (bandpass)** φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c_1}, ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c_2}. Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.
4. Το **ζωνοφρακτικό (bandstop)** φίλτρο: απαγορεύει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c_1}, ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c_2}. Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.

Η συχνότητα f_c σε όλα τα παραπάνω φίλτρα ονομάζεται *συχνότητα αποκοπής - cutoff frequency*. Τα φίλτρα αυτά φαίνονται σχηματικά στο Σχήμα 4.69, και όπως παρατηρείτε, είναι πραγματικά και έχουν άρτια συμμετρία, αφού αντιστοιχούν σε πραγματικά σήματα. Ας σημειωθεί ότι τα ιδανικά φίλτρα έχουν σταθερό, μοναδιαίο μέτρο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.69, αλλά η φάση τους μπορεί να είναι μηδενική ή γραμμική (στο Σχήμα 4.69 φαίνονται τα ιδανικά φίλτρα μηδενικής φάσης). Ας ασχοληθούμε πρώτα με ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων μηδενικής φάσης.

4.15.1 Ιδανικά Φίλτρα Μηδενικής Φάσης

4.15.1.1 Χαμηλοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

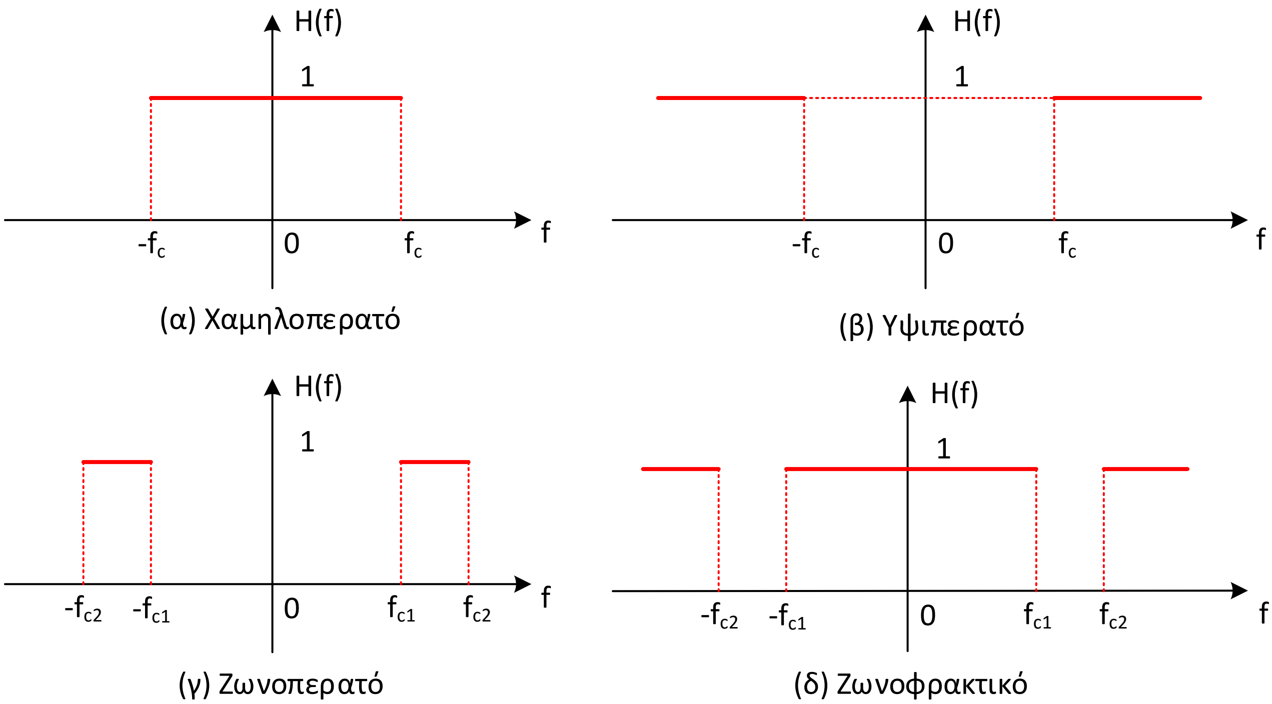
$$H_{LP}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \tag{4.749}$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί με χρήση της γνωστής συνάρτησης rect ως

$$H_{LP}(f) = \mathrm{rect}\Big(\frac{f}{2f_c}\Big) \tag{4.750}$$

Προσέξτε ότι

$$|H_{LP}(f)| = H_{LP}(f) \tag{4.751}$$



Σχήμα 4.69: *Ιδανικά Φίλτρα Μηδενικής Φάσης.*

και

$$\angle H_{LP}(f) = 0 \tag{4.752}$$

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{LP}(t) = F^{-1}\{H_{LP}(f)\} = 2f_c\text{sinc}(2f_ct) \tag{4.753}$$

4.15.1.2 Υψιπερατό φίλτρο

Το ιδανικό υψιπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{HP}(f) = \begin{cases} 0, & |f| \leq f_c \\ 1, & |f| > f_c \end{cases} \tag{4.754}$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί ως συνάρτηση του χαμηλοπερατού φίλτρου που είδαμε μόλις, ως

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f) = 1 - \text{rect}\Big(\frac{f}{2f_c}\Big) \tag{4.755}$$

Προσέξτε ότι κι εδώ το μέτρο του φίλτρου είναι ίσο με την απόκριση σε συχνότητα, όπως για το χαμηλοπερατό, και η φάση του είναι επίσης μηδέν.

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{HP}(t) = F^{-1}\{H_{HP}(f)\} = \delta(t) - 2f_c\text{sinc}(2f_ct) \tag{4.756}$$

4.15.1.3 Ζωνοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BP}(f) = \begin{cases} 1, & f_{c_1} \leq |f| \leq f_{c_2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.757}$$

κι όπως βλέπετε στο Σχήμα 4.69, αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς γύρω από τη συχνότητα $\pm f_c = \pm\frac{f_{c_1}+f_{c_2}}{2}$, με διάρκεια $f_{c_2} - f_{c_1}$ ο καθένας. Άρα το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{BP}(f) = \text{rect}\Big(\frac{f - f_c}{f_{c_2} - f_{c_1}}\Big) + \text{rect}\Big(\frac{f + f_c}{f_{c_2} - f_{c_1}}\Big) \tag{4.758}$$

Με αυτή τη γραφή, η κρουστική απόκριση υπολογίζεται από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier ως

$$h_{BP}(t) = (f_{c_2} - f_{c_1})\text{sinc}((f_{c_2} - f_{c_1})t)e^{-j2\pi f_c t} + (f_{c_2} - f_{c_1})\text{sinc}((f_{c_2} - f_{c_1})t)e^{j2\pi f_c t} \tag{4.759}$$

η οποία μπορεί να γραφεί μέσω των σχέσεων του Euler ως

$$h_{BP}(t) = 2(f_{c_2} - f_{c_1})\text{sinc}((f_{c_2} - f_{c_1})t)\cos(2\pi f_c t) \tag{4.760}$$

με $f_c = \frac{f_{c_1}+f_{c_2}}{2}$.

4.15.1.4 Ζωνοφρακτικό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο ορίζεται ως

$$H_{BS}(f) = \begin{cases} 0, & f_{c_1} \leq |f| \leq f_{c_2} \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.761}$$

και μπορεί να γραφεί συναρτήσει του ζωνοπερατού φίλτρου ως

$$H_{BS}(f) = 1 - H_{BP}(f) \tag{4.762}$$

Έτσι, η κρουστική του απόκριση μπορεί να βρεθεί εύκολα ως

$$h_{BS}(t) = \delta(t) - h_{BP}(t) = \delta(t) - 2(f_{c_2} - f_{c_1})\text{sinc}((f_{c_2} - f_{c_1})t)\cos(2\pi f_c t) \tag{4.763}$$

Παρατηρήστε ότι πράγματί όλα τα ιδανικά φίλτρα έχουν κρουστική απόκριση η οποία είναι μη-αιτιατή και άπειρης διάρκειας.

4.15.2 Ιδανικά Φίλτρα Γραμμικής Φάσης

Όπως φάνηκε από το μετασχ.Fourier των ιδανικών φίλτρων μηδενικής φάσης, το μέτρο των μετασχηματισμών τους είναι μοναδιαίο ενώ η φάση τους είναι μηδενική. Όμως μπορούμε να ορίσουμε ιδανικά φίλτρα μη μηδενικής φάσης, και συγκεκριμένα, *γραμμικής* φάσης. Η γραμμικότητα της φάσης είναι μια πολύ επιθυμητή ιδιότητα, καθώς - όπως έχουμε ήδη δει - η φάση σχετίζεται με τη *θέση* του σήματος στο χρόνο. Ας δούμε τι αποτέλεσμα έχει ένα ιδανικό σύστημα γραμμικής φάσης της μορφής

$$H_{lp}(f) = e^{-j2\pi\alpha f}, \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.764}$$

σε μια οποιαδήποτε είσοδο $x(t)$. Θα είναι:

$$Y(f) = X(f)H_{lp}(f) = X(f)e^{-j2\pi\alpha f} \longleftrightarrow y(t) = x(t-\alpha) \tag{4.765}$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι ένα ιδανικό σύστημα γραμμικής φάσης απλώς μετατοπίζει το σήμα εισόδου κατά α. Γενικότερα, ένα σύστημα γραμμικής φάσης (ιδανικό ή μη) μετατοπίζει την είσοδο του συστήματος κατά μια χρονική σταθερά α. Αντίθετα, συστήματα μη γραμμικής φάσης μετατοπίζουν διαφορετικές συχνότητες του σήματος κατά διαφορετικές χρονικές σταθερές, πράγμα που εν γένει είναι ανεπιθύμητο, αφού αλλοιώνει τη *χρονική δομή* του σήματος εισόδου.

4.15.2.1 Χαμηλοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο γραμμικής φάσης ορίζεται ως

$$H_{LP}(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi\alpha f}, & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \tag{4.766}$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί με χρήση της γνωστής συνάρτησης rect ως

$$H_{LP}(f) = \mathrm{rect}\Big(\frac{f}{2f_c}\Big)e^{-j2\pi\alpha f} \tag{4.767}$$

Προσέξτε ότι

$$|H_{LP}(f)| = 1 \tag{4.768}$$

και

$$\angle H_{LP}(f) = -2\pi\alpha f \tag{4.769}$$

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{LP}(t) = F^{-1}\{H_{LP}(f)\} = 2f_c\mathrm{sinc}(2f_c(t-\alpha)) \tag{4.770}$$

4.15.2.2 Υψιπερατό φίλτρο

Το ιδανικό υψιπερατό φίλτρο γραμμικής φάσης ορίζεται ως

$$H_{HP}(f) = \begin{cases} 0, & |f| \leq f_c \\ e^{-j2\pi\alpha f}, & |f| > f_c \end{cases} \tag{4.771}$$

και μπορεί εύκολα να γραφεί ως συνάρτηση του χαμηλοπερατού φίλτρου γραμμικής φάσης που είδαμε μόλις, ως

$$H_{HP}(f) = e^{-j2\pi\alpha f} - H_{LP}(f) = e^{-j2\pi\alpha f} - \mathrm{rect}\Big(\frac{f}{2f_c}\Big)e^{-j2\pi\alpha f} \tag{4.772}$$

Προσέξτε ότι κι εδώ το μέτρο του φίλτρου είναι ίσο με τη μονάδα, όπως για το χαμηλοπερατό, και η φάση του είναι $-2\pi f\alpha$.

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου αυτού βρίσκεται εύκολα ως

$$h_{HP}(t) = F^{-1}\{H_{HP}(f)\} = \delta(t-\alpha) - 2f_c\mathrm{sinc}(2f_c(t-\alpha)) \tag{4.773}$$

4.15.2.3 Ζωνοπερατό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο γραμμικής φάσης ορίζεται ως

$$H_{BP}(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi\alpha f}, & f_{c_1} \leq |f| \leq f_{c_2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.774}$$

Το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{BP}(f) = \mathrm{rect}\Big(\frac{f-f_c}{f_{c_2}-f_{c_1}}\Big)e^{-j2\pi\alpha f} + \mathrm{rect}\Big(\frac{f+f_c}{f_{c_2}-f_{c_1}}\Big)e^{-j2\pi\alpha f} \tag{4.775}$$

Η κρουστική απόκριση υπολογίζεται από τα γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier ως

$$h_{BP}(t) = (f_{c_2}-f_{c_1})\mathrm{sinc}((f_{c_2}-f_{c_1})(t-\alpha))e^{-j2\pi f_c(t-\alpha)} + (f_{c_2}-f_{c_1})\mathrm{sinc}((f_{c_2}-f_{c_1})(t-\alpha))e^{j2\pi f_c(t-\alpha)} \tag{4.776}$$

η οποία μπορεί να γραφεί μέσω των σχέσεων του Euler ως

$$h_{BP}(t) = 2(f_{c_2} - f_{c_1})\text{sinc}((f_{c_2} - f_{c_1})(t-\alpha))\cos(2\pi f_c(t-\alpha)) \tag{4.777}$$

με $f_c = \frac{f_{c_1}+f_{c_2}}{2}$.

4.15.2.4 Ζωνοφρακτικό φίλτρο

Το ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο γραμμικής φάσης ορίζεται ως

$$H_{BS}(f) = \begin{cases} 0, & f_{c_1} \leq |f| \leq f_{c_2} \\ e^{-j2\pi\alpha f}, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.778}$$

και μπορεί να γραφεί συναρτήσει του ζωνοπερατού φίλτρου ως

$$H_{BS}(f) = e^{-j2\pi\alpha f} - H_{BP}(f) \tag{4.779}$$

Έτσι, η κρουστική του απόκριση μπορεί να βρεθεί εύκολα ως

$$h_{BS}(t) = \delta(t-\alpha) - h_{BP}(t-\alpha) = \delta(t-a) - 2(f_{c_2} - f_{c_1})\text{sinc}((f_{c_2} - f_{c_1})(t-\alpha))\cos(2\pi f_c(t-\alpha)) \tag{4.780}$$

Μπορείτε να δείτε το μέτρο και τη φάση των παραπάνω φίλτρων στο Σχήμα 4.70.

Παρ΄ όλο που τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων δε διαφέρουν ως προς το χειρισμό τους σε σχέση με οποιαδήποτε άλλα συστήματα, η μαθηματική μορφή τους μας διευκολύνει στην εύρεση της εξόδου τους, όταν αυτά συνιστούν ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο δέχεται εισόδους.

Η Σχεδίαση κι Ανάλυση Φίλτρων είναι ένας ολόκληρος τομέας της Επεξεργασίας Σήματος από μόνος του, οπότε δε θα επεκταθούμε περισσότερο εδώ.

4.15.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε ομως μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.62:

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2\cos(2\pi 10t + \pi/8) + \sin(2\pi 20t - \pi/3) \tag{4.781}$$

το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα ιδανικό

(α΄) χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

(β΄) υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 15$ Hz

Βρείτε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:
Μπορούμε απ΄ ευθείας να απαντήσουμε ότι αφού τα φίλτρα μας αποκόπτουν τις συχνότητες μεγαλύτερες από 15 Hz (χαμηλοπερατό) και μικρότερες από 15 Hz (υψιπερατό), και η είσοδός μας αποτελείται μόνο από τις συχνότητες $10, 20$ Hz, τότε πολύ απλά οι έξοδοι θα είναι

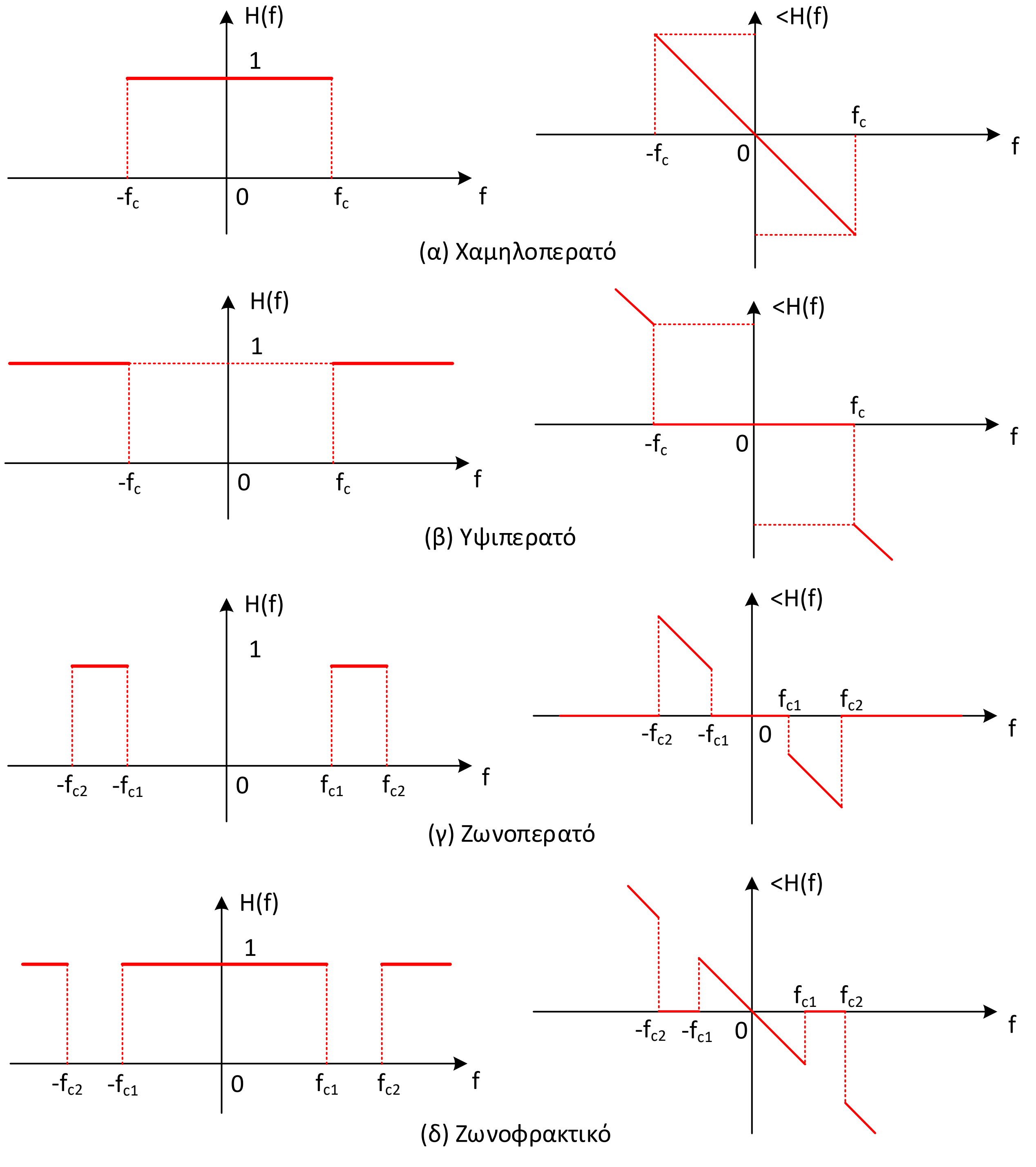
(α΄) $y(t) = 2\cos(2\pi 10t + \pi/8)$

(β΄) $y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3)$

αντίστοιχα, αφού τα φίλτρα είναι ιδανικά (μοναδιαίου πλάτους) και η φάση τους είναι μηδέν, οπότε δεν υπάρχει καμιά μεταβολή στα πλάτη και τις φάσεις των σημάτων που περνούν στην έξοδο.

Ας επικυρώσουμε αυτο το αποτέλεσμα αναλυτικά. Ο μετασχ. Fourier του σήματος εισόδου είναι

$$X(f) = e^{j\pi/8}\delta(f-10) + e^{-j\pi/8}\delta(f+10) + e^{-j5\pi/6}\delta(f-20) + e^{j5\pi/6}\delta(f+20) \tag{4.782}$$



Σχήμα 4.70: Ιδανικά Φίλτρα Γραμμικής Φάσης.

λόγω της γνωστής ιδιότητας

$$X(f)\delta(f \pm f_0) = X(\mp f_0)\delta(f \pm f_0) \tag{4.787}$$

Όμως

$$\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{3}\Big) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.788}$$

και άρα

$$\mathrm{rect}\Big(\frac{\pm 2}{3}\Big) = 0 \quad \text{και} \quad \mathrm{rect}\Big(\frac{\pm 1}{3}\Big) = 1 \tag{4.789}$$

Οπότε τελικά

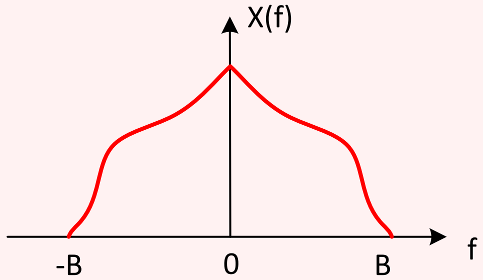
$$Y(f) = e^{j\pi/8}\delta(f-10) + e^{-j\pi/8}\delta(f+10) \longleftrightarrow y(t) = 2\cos(2\pi 10t + \pi/8) \tag{4.790}$$

(β΄) Εντελώς ανάλογα με παραπάνω, δείξτε ότι

$$Y(f) = e^{-j5\pi/6}\delta(f-20) + e^{j5\pi/6}\delta(f+20) \longleftrightarrow y(t) = \sin(2\pi 20t - \pi/3) \tag{4.791}$$

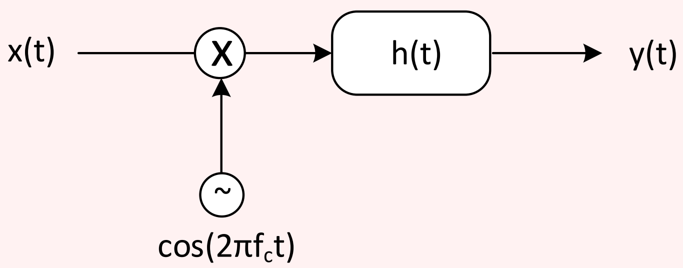
Παράδειγμα 4.63:

Έστω το σήμα $x(t)$ του οποίου ο μετασχ. Fourier $X(f)$ φαίνεται στο Σχήμα 4.71,



Σχήμα 4.71: *Σήμα εισόδου συστήματος Παραδείγματος 4.63.*

το οποίο βρίσκεται ως είσοδος σε ένα σύστημα του Σχήματος 4.72,



Σχήμα 4.72: *Σύστημα Παραδείγματος 4.63.*

με $f_c = 100$ Hz, και με το σύστημα $h(t)$ να είναι της μορφής

$$h(t) = 400\mathrm{sinc}(200t) \tag{4.792}$$

Σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος.

Λύση:
Το σήμα $x(t)$ πολλαπλασιάζεται με ένα συνημίτονο συχνότητας f_c, οπότε αν συμβολίσουμε με $w(t)$ το αποτέλεσμα

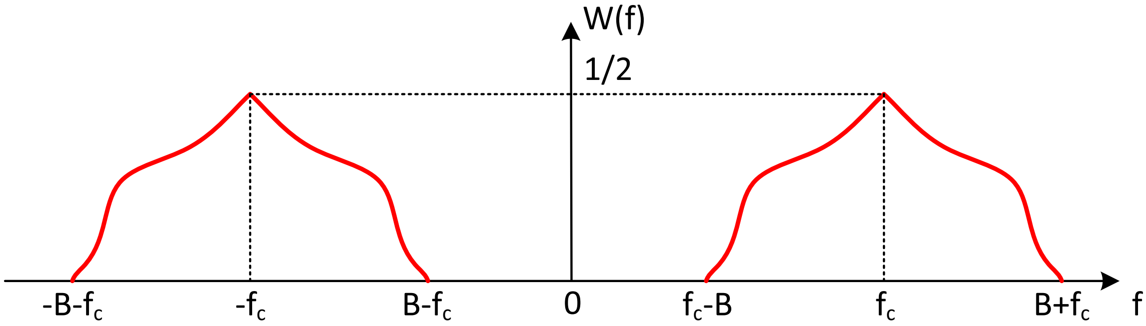
της πράξης αυτής, θα είναι

$$w(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f-f_c) + \frac{1}{2}\delta(f+f_c)\right) \tag{4.793}$$

και λόγω γνωστής ιδιότητας της συνέλιξης με συνάρτηση Δέλτα, είναι

$$W(f) = \frac{1}{2}X(f-f_c) + \frac{1}{2}X(f+f_c) \tag{4.794}$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.73.



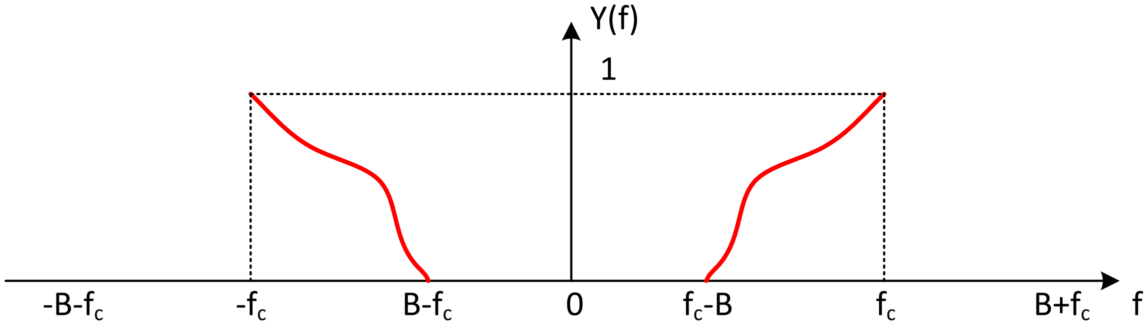
Σχήμα 4.73: *Είσοδος συστήματος Παραδείγματος 4.63.*

Το σύστημα $h(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$h(t) = 400\text{sinc}(200t) = 2 \times 200\text{sinc}(200t) \longleftrightarrow H(f) = 2\text{rect}\left(\frac{f}{200}\right) \tag{4.795}$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = 100$ Hz με πλάτος 2. Άρα το φίλτρο αυτό θα κρατήσει τις συχνότητες της εισόδου που βρίσκονται στο διάστημα $[-100, 100]$ Hz, θα διπλασιάσει το πλάτος τους, ενώ θα αποκόψει τελείως τις συχνότητες εκτός του παραπάνω διαστήματος.

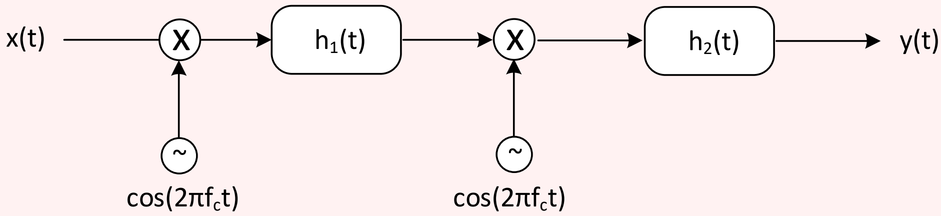
Η έξοδος του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 4.74.



Σχήμα 4.74: *Έξοδος συστήματος Παραδείγματος 4.63.*

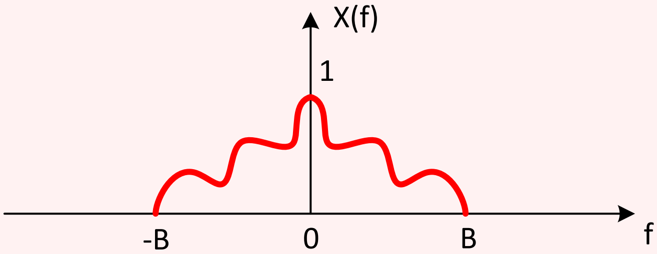
Παράδειγμα 4.64:

Έστω η διάταξη του Σχήματος 4.75,



Σχήμα 4.75: Διάταξη Παραδείγματος 4.64.

με το σήμα εισόδου $x(t)$ να έχει μετασχ. Fourier όπως στο Σχήμα 4.76.



Σχήμα 4.76: Σήμα $X(f)$ Παραδείγματος 4.64.

Τα συστήματα $h_i(t)$ δίνονται ως:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= 4f_c \mathrm{sinc}(2f_c t) \\ h_2(t) &= 8B \mathrm{sinc}(2Bt) \end{aligned}$$

και η συχνότητα f_c είναι $f_c \gg B$.

(α΄) Σχεδιάστε το σήμα $W(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_1(t)$ συναρτήσει του $X(f)$.

(β΄) Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier του συστήματος $h_1(t)$.

(γ΄) Σχεδιάστε το σήμα $Z(f)$ που προκύπτει ως έξοδος από το σύστημα $h_1(t)$.

(δ΄) Σχεδιάστε το σήμα $V(f)$ που θα μπει ως είσοδος στο σύστημα $h_2(t)$.

(ε΄) Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχ. Fourier, $H_2(f)$,του δεύτερου συστήματος, $h_2(t)$.

(ϛ΄) Σχεδιάστε την τελική έξοδο της όλης διάταξης στο χώρο της συχνότητας, $Y(f)$, και γράψτε τη μαθηματική μορφή του $y(t)$ συναρτήσει του $x(t)$.

Λύση:

(α΄) Είναι

$$w(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow W(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f-f_c) + \frac{1}{2}\delta(f+f_c)\right) \tag{4.796}$$

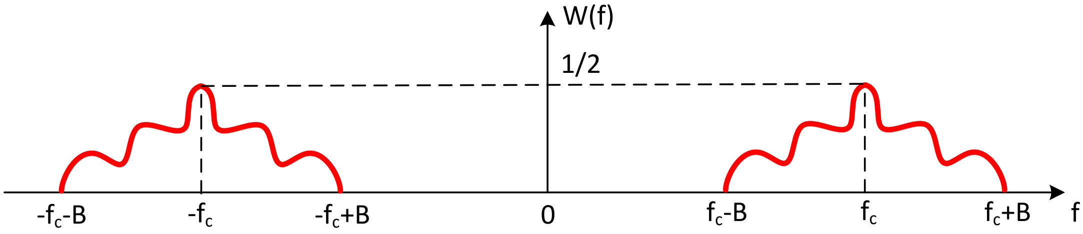
$$= \frac{1}{2}X(f-f_c) + \frac{1}{2}X(f+f_c) \tag{4.797}$$

Το φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.77.

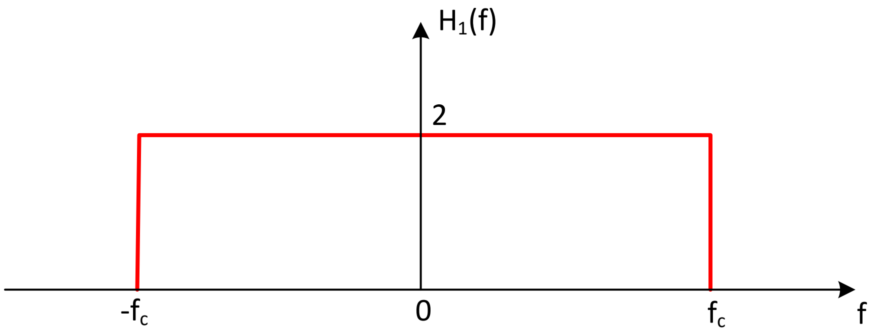
(β΄) Είναι

$$h_1(t) = 4f_c \mathrm{sinc}(2f_c t) \longleftrightarrow H_1(f) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \tag{4.798}$$

το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 4.78.



Σχήμα 4.77: Φάσμα $W(f)$ Παραδείγματος 4.64.

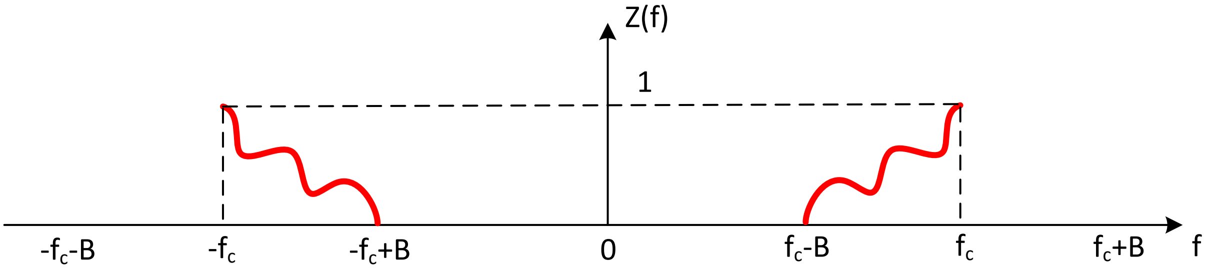


Σχήμα 4.78: Φάσμα $H_1(f)$ Παραδείγματος 4.64.

(γ΄) Είναι

$$Z(f) = W(f)H_1(f) = \frac{1}{2}X(f-f_c)H_1(f) + \frac{1}{2}X(f+f_c)H_1(f) \tag{4.799}$$

που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα κομμάτι του αρχικού φάσματος $W(f)$ όπως στο Σχήμα 4.79, αφού το $H_1(f)$ είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο.



Σχήμα 4.79: Φάσμα $Z(f)$ Παραδείγματος 4.64.

(δ΄) Το $V(f)$ θα είναι το φάσμα του $Z(f)$ μετατοπισμένο στις συχνότητες $\pm f_c$, δηλ.

$$v(t) = z(f)\cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow V(f) = \frac{1}{2}Z(f-f_c) + \frac{1}{2}Z(f+f_c) \tag{4.800}$$

όπως στο Σχήμα 4.80.

(ε΄) Είναι

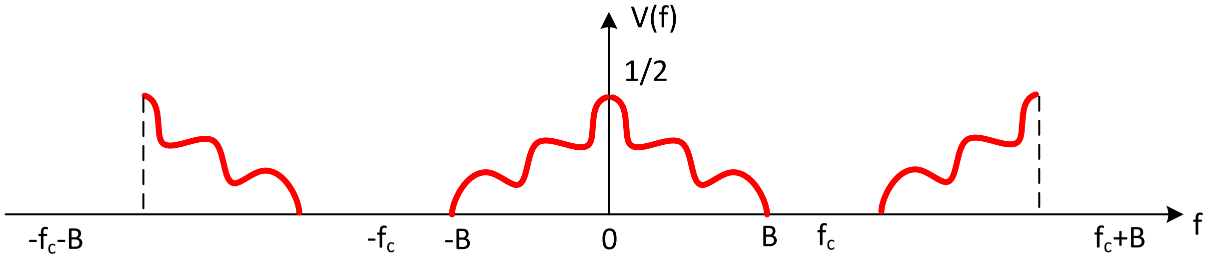
$$h_2(t) = 8B\mathrm{sinc}(2Bt) \longleftrightarrow H_2(f) = 4\mathrm{rect}\Big(\frac{f}{2B}\Big) \tag{4.801}$$

το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 4.81.

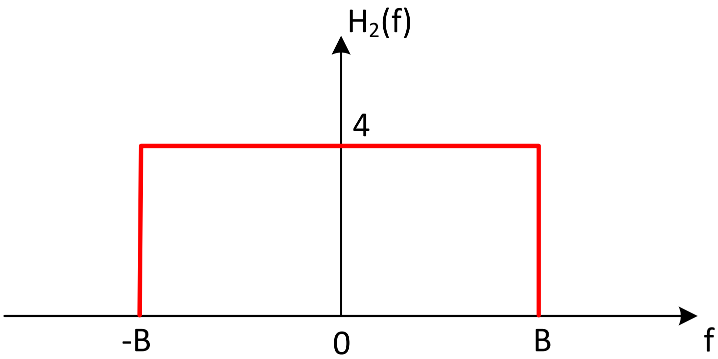
(ϛ΄) Η έξοδος $Y(f)$ θα είναι της μορφής

$$Y(f) = V(f)H_2(f) = \frac{1}{2}Z(f-f_c)H_2(f) + \frac{1}{2}Z(f+f_c)H_2(f) \tag{4.802}$$

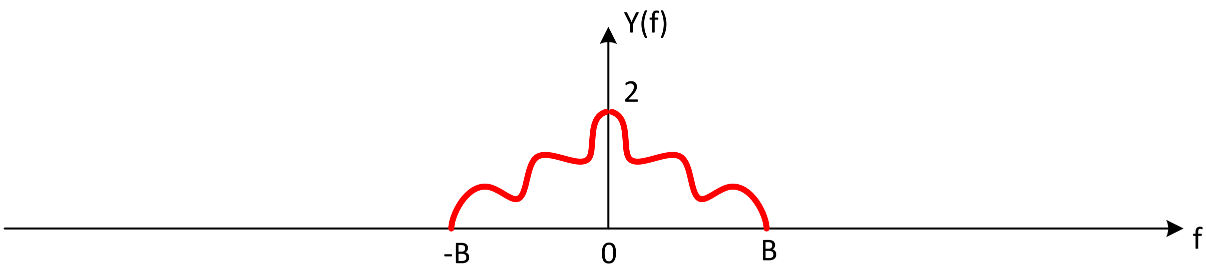
όπως στο Σχήμα 4.82, αφού το $H_2(f)$ είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο. δηλ. είναι ίδιο με το αρχικό



Σχήμα 4.80: Φάσμα $V(f)$ Παραδείγματος 4.64.



Σχήμα 4.81: Φάσμα $H_2(f)$ Παραδείγματος 4.64.



Σχήμα 4.82: Φάσμα $Y(f)$ Παραδείγματος 4.64.

σήμα εισόδου $x(t)$, πολλαπλασιασμένο επί 2, δηλ.

$$y(t) = 2x(t) \tag{4.803}$$

4.16 Χρησιμότητα του Μετασχ. Fourier

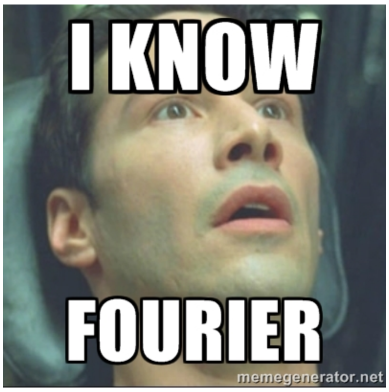
Κλείνοντας, ας αναφέρουμε ότι ο μετασχ. Fourier έχει πραγματικά πληθώρα εφαρμογών! Χρησιμοποιείται στην ανάλυση της απόκρισης γραμμικών φυσικών συστημάτων σε μια εξωτερική είσοδο, όπως π.χ. ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που δέχεται ένα σήμα που λαμβάνει μια κεραία, ή ένα σώμα δεμένο σε ένα ελατήριο που αποκρίνεται σε μια δύναμη που του ασκείται.

Επίσης είναι χρήσιμος στην Οπτική: το σχέδιο παρεμβολής του φωτός όταν σκεδάζεται από ένα πλέγμα διάθλασης είναι ο μετασχηματισμός Fourier του πλέγματος, και η εικόνα μιας πηγής στην εστία ενός φακού είναι ο μετασχηματισμός Fourier της πηγής.

Είναι χρήσιμος στη Φασματοσκοπία και στην ανάλυση κάθε είδους κυματικών φαινομένων. Μετατρέπει αναπαραστάσεις θέσης σε αντίστοιχες αναπαραστάσεις ορμής μιας κυματοσυνάρτησης στην Κβαντομηχανική.

Τέλος, σε επιστήμες μηχανικού Η/Υ, είναι πολύ χρήσιμος στην ανάλυση σήματος, στην επεξεργασία εικόνας, στην επεξεργασία ήχου και φωνής, σε τηλεπικοινωνίες, και σε άλλες ψηφιακές εφαρμογές.

4.17 Όμως...



Σχήμα 4.83: *Εσείς ξέρετε;* ☺

Έχουμε λύσει ως τώρα το πρόβλημα της μη περιοδικότητας, αφού οπως είχαμε πει όταν μελετούσαμε τις Σειρές Fourier, ένα από τα προβλήματά μας ήταν ότι τα σήματα που υπάρχουν στη φύση ή που μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο είναι μη περιοδικά, και άρα οι Σειρές Fourier δεν επαρκούσαν. Με την εισαγωγή του μετασχ. Fourier, λύσαμε αυτό το πρόβλημα, αλλά και παρουσιάσαμε μια ενιαία θεωρία συχνοτικής ανάλυσης που περιλαμβάνει τόσο περιοδικά όσο και απεριοδικά σήματα κάτω από το ίδιο πρίσμα.

Όμως εμφανίστηκε ένα νέο πρόβλημα, αυτό της μη ύπαρξης του μετασχ. Fourier για ορισμένα σήματα ισχύος. Τέτοια σήματα μπορεί να αντιπροσωπεύουν συστήματα ή και εισόδους σε συστήματα, και καλό θα ήταν να βρούμε έναν τρόπο να τα χειριζόμαστε. Αυτό θα μας το προσφέρει ο μετασχ. Laplace, που θα δούμε πολύ σύντομα.

4.18 Ασκήσεις

1. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος

$$x(t) = A\Big[1-\cos(2\pi f_0 t)+\frac{1}{2}\sin(4\pi f_0 t)\Big] \quad (4.804)$$

2. Γράψτε το σήμα

$$x(t) = 3\cos(2\pi 10t + \pi/3) + 4\cos(2\pi 10t - \pi/4) - 2\sin(2\pi 10t) \quad (4.805)$$

στη μορφή

$$x(t) = A\cos(2\pi 10t + \phi) \quad (4.806)$$

και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του.

3. Έστω το σήμα

$$x(t) = x_1(t)\cos(13\pi t) \quad (4.807)$$

με $x_1(t) = 14 + 8\sin(\pi t - \pi/3)$.

(α΄) Γράψτε το $x(t)$ ως

$$x(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2\cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + A_3\cos(2\pi f_3 t + \phi_3) \quad (4.808)$$

με $f_1 < f_2 < f_3$.

(β΄) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του $x_1(t)$ καθώς και του σήματος $\cos(13\pi t)$.

(γ΄) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του $x(t)$.

4. Δείξαμε ότι οι συντελεστές c_n που ελαχιστοποιούν την ενέργεια σφάλματος E_e για μια προσέγγιση

$$f(t) \approx c_1 x_1(t)+c_2 x_2(t)+\cdots+c_N x_N(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n(t) \quad (4.809)$$

δίνονται από τη σχέση

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)x_n(t)dt}{\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} x_n^2(t)dt} = \frac{1}{E_x}\int_{t_1}^{t_2} f(t)x_n(t)dt, \quad n = 1, 2, \cdots, N \quad (4.810)$$

Αποδείξτε την παραπάνω σχέση λύνοντας την εξίσωση

$$\frac{\partial E_e}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{4.811}$$

όπου

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt \tag{4.812}$$

με

$$e(t) = f(t) - \sum_{n=1}^{N} c_n x_n(t) \tag{4.813}$$

5. Έστω το σήμα

$$f(t) = \begin{cases} t, & -\pi \le t \le \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.814}$$

Θέλουμε να το γράψουμε ως συνάρτηση του σήματος $x(t) = \sin(t)$ στο $-\pi \le t \le \pi$.

(α′) Σχεδιάστε τα σήματα στο χρόνο.

(β′) Δείξτε ότι η βέλτιστη, με την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος, προσέγγιση του $f(t)$ από το $x(t)$ είναι η

$$f(t) \approx cx(t) = 2\sin(t), \quad -\pi \le t \le \pi \tag{4.815}$$

(γ′) Σχεδιάστε το σήμα $2\sin(t)$ στον ίδιο άξονα με το $f(t)$.

(δ′) Το σφάλμα της παραπάνω προσέγγισης δίνεται από τη σχέση

$$e(t) = f(t) - cx(t) = t - 2\sin(t), \; -\pi \le t \le \pi \tag{4.816}$$

Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια σφάλματος $E_e = \int_{-\pi}^{\pi} e^2(t)dt$.

(ε′) Δείξτε ότι $< e, x >= \int_{-\pi}^{\pi} e(t)x(t)dt = 0$, δηλ. ότι τα σήματα $e(t)$, $x(t)$ είναι ορθογώνια.

6. Έστω δυο συναρτήσεις ως

$$g(t) = \begin{cases} 6t, & 0 \le t < 1/3 \\ -3t + 3, & 1/3 \le t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4.817}$$

και

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \tag{4.818}$$

(α′) Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο των δυο συναρτήσεων.

(β′) Γράψτε το σήμα $g(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό του σήματος $u(t)$: $g(t) \approx \alpha u(t)$

(γ′) Βρείτε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της παραπάνω προσέγγισης.

7. Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό σήμα $x(t)$ που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x(t) = \frac{A}{T_0}t, \; 0 \le t \le T_0 \tag{4.819}$$

8. Ένα περιοδικό σήμα $x(t) = x(t+T_0)$ περιγράφεται σε μια περίοδό του από την εξίσωση

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < t_c \\ 0, & t_c \le |t| \le \frac{T_0}{2} \end{cases} \tag{4.820}$$

όπου $t_c < T_0/2$.

(α′) Κάντε το γράφημα του $x(t)$ για $-2T_0 < t < 2T_0$ για την περίπτωση $t_c = T_0/4$ και $t_c = T_0/10$.

(β′) Αναπτύξτε το $x(t)$ σε Σειρά Fourier στις παραπάνω περιπτώσεις.

(γ′) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης και στις δυο περιπτώσεις του t_c, για συχνότητες $-10f_0$ ως $10f_0$.

(δ′) Τα φάσματα πλάτους που σχεδιάσατε μηδενίζονται εκατέρωθεν της μηδενικής συχνότητας, π.χ. στις συχνότητας $f_2 = -f_1$ και f_1. Ονομάζουμε *εύρος ζώνης συχνοτήτων* Δf την απόσταση των δυο αυτών συχνοτήτων, δηλ.

$$\Delta f = 2f_1 \tag{4.821}$$

Εκφράστε το εύρος ζώνης Δf ως συνάρτηση του λόγου $\frac{T_0}{t_c}$. Τι συμβαίνει στο πεδίο του χρόνου όταν ο λόγος αυτός μεγαλώνει, και τι συνέπειες έχει στο πεδίο της συχνότητας;

9. Έστω ένα σήμα πληροφορίας

$$m(t) = 2\cos(2\pi 500t + \pi/5) \tag{4.822}$$

που θέλουμε να σταλεί μέσω ραδιοκυμάτων. Κατασκευάζουμε το *διαμορφωμένο κατά AM* σήμα

$$x(t) = \Big(2 + m(t)\Big)c(t) \tag{4.823}$$

όπου το σήμα

$$c(t) = \cos(2\pi 5000t) \tag{4.824}$$

λέγεται *φέρον σήμα*.

(α′) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του $m(t)$.

(β′) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του $c(t)$.

(γ′) Γράψτε το $x(t)$ ως

$$x(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2\cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + A_3\cos(2\pi f_3 t + \phi_3) \quad (4.825)$$

με $f_1 < f_2 < f_3$.

(δ′) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του διαμορφωμένου κατά AM σήματος, $x(t)$. Τι παρατηρείτε, σε σχέση με τα φάσματα των επιμέρους σημάτων, $m(t)$ και $c(t)$;

(ε′) Το σήμα $x(t)$ μεταδίδεται και φτάνει στο δέκτη. Ο δέκτης πρέπει να ανακτήσει το σήμα πληροφορίας $m(t)$ από το σήμα $x(t)$ που έλαβε, πολλαπλασιάζοντας το $x(t)$ με το *σήμα αποδιαμόρφωσης*

$$d(t) = 2\cos(2\pi 5000 t) \quad (4.826)$$

δηλ. δημιουργεί το σήμα

$$r(t) = x(t)d(t) = \Big(2 + m(t)\Big)c(t)d(t) \quad (4.827)$$

. Απλοποιήστε τη σχέση $r(t)$, αν γνωρίζετε ότι $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$.

. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους της παραπάνω σχέσης που βρήκατε. Τι παρατηρήτε ότι συνέβη;

. Το αρχικό σήμα $m(t)$ έχει φασματική πληροφορία μόνο στις συχνότητες ± 500 Hz. Συγκρίνοντας το φάσμα πλάτους του $m(t)$ που σχεδιάσατε αρχικά με το φάσμα πλάτους που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, τι επιπλέον φασματική πληροφορία υπάρχει στη ζώνη συχνοτήτων $[-500, 500]$ Hz;

10. Έστω το σήμα

$$x(t) = \sin^3(27\pi t) \quad (4.828)$$

Αναπτύξτε το σήμα σε Σειρά Fourier και βρείτε την περίοδο του σήματος.

11. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \sin^{10}(t)dt \quad (4.829)$$

με χρήση του θεωρήματος του Parseval.

12. Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το σήμα με περίοδο T_0

$$x(t) = \sin(\pi f_0 t) \quad (4.830)$$

Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος του σήματος περιέχεται στους όρους $A_k = 2|X_k|$, $k = 1, 2, 3$ και A_0;

13. Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_0 t), & 0 \le t \le T_0/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.831)$$

Αναπτύξτε το σε Σειρά Fourier. Αν θέλαμε να προσεγγίσουμε το σήμα αυτό μόνο με τους όρους $A_k = 2|X_k|$, $k = 1, 2$ και A_0, το ποσοστό της ισχύος του αρχικού σήματος θα έχουμε διατηρήσει;

14. Έστω το σήμα

$$x(t) = -\frac{t}{T_0} + 1, \;\; 0 \le t < T_0 \quad (4.832)$$

(α′) Σχεδιάστε το σήμα για $|t| \le 3T_0$

(β′) Αναπτύξτε το σήμα σε Σειρά Fourier

15. Από το θεώρημα Parseval γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* \quad (4.833)$$

με X_k, Y_k του συντελεστές Fourier των σημάτων $x(t), y(t)$. Δείξτε ότι στην περίπτωση που τα σήματα $x(t), y(t)$ είναι πραγματικά και έχουν μέση τιμή μηδέν, τότε

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)y^*(t)dt = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \Re\{X_k Y_k^*\} \quad (4.834)$$

16. Έστω το σήμα

$$x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \cos(2(k+1)\pi t + \phi_k) \quad (4.835)$$

Βρείτε την περίοδό του.

17. Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό με περίοδο 2π σήμα

$$x(t) = \frac{1}{4}t^2, \;\; 0 \le t < 2\pi \quad (4.836)$$

18. Θεωρούμε τα σήματα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \quad (4.837)$$

$$y(t) = A\cos(2\pi f_0 (t - \tau)) \quad (4.838)$$

Υπολογίστε την Ευκλείδια Απόσταση

$$d^2(x, y) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t) - y(t)|^2 dt \quad (4.839)$$

με T_0 την περίοδο των δυο σημάτων.

19. Έστω το σήμα

$$x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{2\sin(t)} \tag{4.840}$$

(α΄) Ποιά είναι η περίοδος του σήματος;

(β΄) Αναπτύξτε το σήμα σε Σειρά Fourier.

(γ΄) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης τους.

20. Θεωρούμε το περιοδικό σήμα με περίοδο T_0 ως

$$x(t) = \begin{cases} A, & -T_0/4 \leq t \leq -T_0/8 \\ 2A, & |t| < T_0/8 \\ A, & T_0/8 \leq t < T_0/4 \end{cases} \tag{4.841}$$

Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier.

21. Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 \leq t < T_1 \\ 0, & T_1 \leq t < T_0 \end{cases} \tag{4.842}$$

όπου $T_1 = T_0/2$.

22. Έστω ένα πραγματικό σήμα με περίοδο $T_0 = 8$ του οποίου οι μόνοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματός σε Σειρά Fourier είναι οι $X_1 = j$ και $X_5 = 2$, για $k > 0$. Βρείτε το σήμα $x(t)$.

23. Δείξτε ότι για ένα πραγματικό περιοδικό και περιττό σήμα, οι συντελεστές Fourier του ικανοποιούν τη σχέση

$$X_k = -X_{-k} \tag{4.843}$$

24. Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier με συντελεστές $X_k = -k2^{-|k|}$ και $T_0 = 2$. Χωρίς να υπολογίσετε το $x(t)$, βρείτε τους συντελεστές Fourier και την περίοδο των παρακάτω σημάτων:

(α΄) $y(t) = x(3t)$

(β΄) $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

(γ΄) $y(t) = x(t-1)$

(δ΄) $y(t) = \cos(4\pi t)x(t)$

(ε΄) $y(t) = x(t) * x(t-1)$

25. Έστω ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με περίοδο T_0 αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = X_{-1}e^{-j2\pi f_0 t} + X_0 + X_1 e^{k2\pi f_0 t} \tag{4.844}$$

Γνωρίζουμε ότι το σήμα $y(t)$ με συντελεστές Fourier

$$Y_k = e^{-j\pi k/2}X_{-k} \tag{4.845}$$

είναι ένα περιττό σήμα, και ότι

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{8} \tag{4.846}$$

Βρείτε τις πιθανές μορφές του $x(t)$.

26. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \sin^{10}(t)dt \tag{4.847}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval.

27. Δίνεται το παρακάτω περιοδικό σήμα $x(t)$:

$$x(t) = 2\cos\left(2\pi 200t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\pi 500t - \frac{\pi}{8}\right) - \\ - \sin\left(2\pi 600t + \frac{2\pi}{5}\right) \tag{4.848}$$

(α΄) Βρείτε την περίοδο, T_0, του σήματος και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης.

(β΄) Υπολογίστε το $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

(γ΄) Υπολογίστε την ισχύ του σήματος $y(t)$

28. Έστω τα περιοδικά σήματα

$$x(t) = \cos(4\pi t) \tag{4.849}$$
$$y(t) = \sin(4\pi t) \tag{4.850}$$

Αναπτύξτε το γινόμενό τους σε Σειρά Fourier με χρήση ιδιοτήτων των Σειρών Fourier.

29. Ένα περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$ το οποίο έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = -\frac{\pi^2}{2jk^2} \tag{4.851}$$

Χωρίς να υπολογίσετε το $x(t)$, απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα.

(α΄) Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό ή μιγαδικό;

(β΄) Βρείτε τους συντελεστές Fourier Y_k του σήματος $y(t) = \dfrac{d}{dt}x(t)$.

(γ΄) Βρείτε τους συντελεστές Fourier Z_k του σήματος $z(t) = x(t - T_0/2)$.

(δ΄) Βρείτε τους συντελεστές Fourier W_k του σήματος $w(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$.

30. Σχεδιάστε το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \delta_{T_0}(t) - 2\delta_{T_0}(t-1) \tag{4.852}$$

όπου

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \tag{4.853}$$

για $T_0 = 2$. Αναπτύξτε το σήμα σε Σειρά Fourier.

31. Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t < 2 \end{cases} \tag{4.854}$$

που είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2$ και αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier με συντελεστές X_k.

(α΄) Υπολογίστε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier του σήματος

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{4.855}$$

(β΄) Υπολογίστε τους συντελεστές X_k.

32. Η εκθετική σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος δίδεται ως:

$$x(t) = (2+j2)e^{-j3t}+j2e^{-jt}+3-j2e^{jt}+(2-j2)e^{j3t} \tag{4.856}$$

Να βρεθεί:

(α΄) Αν το σήμα είναι πραγματικό, φανταστικό, ή μιγαδικό.

(β΄) Το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος.

(γ΄) Το μονόπλευρο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier.

(δ΄) Το ολοκλήρωμα $\int_0^{T_0} x^2(t)dt$.

(ε΄) Βρείτε τους συντελεστές Fourier για τα παρακάτω σήματα:

() $x(t+3)$

() $\frac{dx(t)}{dt}$

33. Ελέγξτε αν οι συντελεστές Fourier

$$X_k = \frac{1+e^{-j\pi/3k}-2e^{-j\pi k}}{jk} \tag{4.857}$$

αντιστοιχούν σε πραγματικό ή μιγαδικό σήμα.

34. Έστω η Σειρά Fourier ενός περιοδικού με περίοδο T_0 σήματος $x(t)$ ως

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{2}{j\pi k}e^{j2\pi k f_0 t} \tag{4.858}$$

(α΄) Βρείτε την ισχύ του περιοδικού σήματος, P_x.

(β΄) Τι ποσοστό (%) της συνολικής ισχύος του σήματος περιέχεται στους πρώτους 4 όρους ($k = 0,1,2,3$) της τριγωνομετρικής σειράς Fourier του παραπάνω σήματος; Δε χρειάζεται να βρείτε την τριγωνομετρική σειρά, σκεφτείτε ποιοί από τους όρους της εκθετικής σειράς Fourier που σας δίνεται αντιστοιχούν στους όρους $k = 0,1,2,3$ της τριγωνομετρικής σειράς.

Δίνεται ότι: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

35. Βρείτε το περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2$ σήμα στο χρόνο $x(t)$ στο οποίο αντιστοιχούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier που δίνονται από τη σχέση

$$X_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{j\frac{2k\pi}{40}} \tag{4.859}$$

36. Το περιοδικό σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x(t) = \begin{cases} 3, & 0 \le t < 2 \\ -1, & 2 \le t < 6 \end{cases} \tag{4.860}$$

Το σήμα περνάει από ένα πραγματικό, ιδανικό φίλτρο με πλάτους 10 για τις συχνότητες από 0.5 ως 1.5 Hz, και μηδενικόι πλάτους σε όλες τις άλλες συχνότητες. Υπολογίστε την ισχύ του σήματος πριν και αφού περάσει από το φίλτρο.

37. Δίδονται τρια πραγματικά, περιοδικά σήματα με μικρό αριθμό αρμονικών. Οι μη μηδενικοί συντελεστές για $k > 0$ δίδονται ακολούθως:

(α΄) $x_1(t) : T_0 = 1, X_1 = 5, X_3 = 2$

(β΄) $x_2(t) : T_0 = 2, X_1 = j, X_2 = -j\frac{1}{2}, X_3 = j\frac{1}{4}, X_4 = -j\frac{1}{8}$

Βρείτε τα $x_i(t)$.

38. Έστω ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t) \tag{4.861}$$

Βρείτε την έξοδο $y(t)$ για τις παρακάτω εισόδους:

(α΄) $x(t) = \cos(2\pi t)$

(β΄) $x(t) = \sin(4\pi t) + \cos(6\pi t + \pi/4)$

39. (α΄) Δείξτε ότι αν το πραγμτικό περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα είναι *άρτιο* ως προς t, δηλ. ισχύει $x(t) = x(-t)$, τότε η τριγωνομετρική σειρά Fourier μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\Re\{X_k\}\cos(2\pi k f_0 t) \tag{4.862}$$

(β΄) Δείξτε ότι αν το πραγματικό περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα είναι *περιττό* ως προς t, δηλ. ισχύει $x(t) = -x(-t)$, τότε η τριγωνομετρική σειρά Fourier μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} 2\Im\{X_k\}\sin(2\pi k f_0 t) \tag{4.863}$$

40. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του μετασχ. Fourier για να βρείτε την αναπαράσταση των παρακάτω σημάτων στο πεδίο της συχνότητας.

(α′) $x(t) = e^{-3t}u(t-4)$

(β′) $x(t) = e^{-5|t|}$

(γ′) $x(t) = te^{-2t}u(t)$

41. Έστω ότι το σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Fourier $X(f)$. Υπολογίστε το μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων συναρτήσει του $X(f)$.

(α′) $y(t) = x(a-t)$

(β′) $y(t) = x(at-b)$

(γ′) $y(t) = \frac{d}{dt}x(t-a)$

42. Αν

$$X(f) = \frac{3}{2+j2\pi f} \tag{4.864}$$

τότε βρείτε τους μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων:

(α′) $x(-2t)$

(β′) $x(t-5)$

(γ′) $x(4t-2)$

(δ′) $tx(t)$

(ε′) $e^{j5t}x(t)$

(ϛ′) $e^{-2|t|}\sin(4t)$

43. Να σχεδιάσετε το σήμα

$$x(t) = e^{-\alpha|t|},\ t \in \mathbb{R},\ \alpha > 0 \tag{4.865}$$

με $a > 0$ και να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του σήματος. Επίσης, να υπολογίσετε το μέτρο και τη φάση του. Υπολογίστε τη μέση τιμή του σήματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \tag{4.866}$$

Σε ποιές συχνότητες το φάσμα πλάτους ισούται με το μισό της μέσης τιμής του σήματος;

44. Έστω το σήμα ενέργειας

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t+1}{2}, & |t| \leq 1 \\ 0, \text{ αλλού} & \end{cases} \tag{4.867}$$

Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του.

45. Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 5, & t = -2 \\ 2, & t = -1 \\ 1, & t = 2 \end{cases} \tag{4.868}$$

(α′) Γράψτε το σήμα $x(t)$ ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα.

(β′) Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος.

(γ′) Προσθέστε ένα σήμα στο $x(t)$ ώστε το τελικό σήμα να έχει πραγματικό μετασχ. Fourier, τον οποίο και να υπολογίσετε.

46. Έστω το φάσμα

$$X(f) = \begin{cases} 6e^{-j\pi/3}, & f = -5 \text{ Hz} \\ 2, & f = -3 \text{ Hz} \\ 6e^{j\pi/3}, & f = 5 \text{ Hz} \end{cases} \tag{4.869}$$

(α′) Γράψτε το σήμα $X(f)$ ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα.

(β′) Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος.

(γ′) Προσθέστε ένα σήμα στο $X(f)$ ώστε το τελικό σήμα να έχει πραγματικό αντίστροφο μετασχ. Fourier, τον οποίο και να υπολογίσετε.

47. Αποδείξτε ότι το πραγματικό, $R(f)$, και φανταστικό, $I(f)$, μέρος του μετασχ. Fourier ενός μιγαδικού σήματος $x(t)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re\{x(t)\}\cos(2\pi f t) + \Im\{x(t)\}\sin(2\pi f t)dt \tag{4.870}$$

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Im\{x(t)\}\cos(2\pi f t) - \Re\{x(t)\}\sin(2\pi f t)dt \tag{4.871}$$

48. Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = 2A\frac{\sin(\pi t)\sin(\pi t/2)}{\pi^2 t^2} \tag{4.872}$$

49. Ορίζοντας τη συνάρτηση Δέλτα ως

$$\delta(t) = \lim_{A\to 0}\frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t} \tag{4.873}$$

αποδείξτε ότι ο μετασχ. Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$ είναι η μονάδα.

50. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Parseval, δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(at)}{t^2}dt = a\pi \tag{4.874}$$

51. Το τετραγωνικό παράθυρο

$$x(t) = \text{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \tag{4.875}$$

αποτελεί μέλος της οικογένειας παραθύρων που δίνονται από την εξίσωση

$$u_a(t) = \Big[a + (1-a)\cos\Big(2\pi\frac{t}{T}\Big)\Big]\text{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \quad (4.876)$$

με a μια σταθερά. Αν

- $a = 1$, τότε έχουμε το γνωστό τετραγωνικό παράθυρο
- $a = 0.54$, τότε έχουμε το παράθυρο Hamming
- $a = 0.5$, τότε έχουμε το παράθυρο Hann

(α′) Σχεδιάστε κάθε παράθυρο στο χρόνο.

(β′) Δείξτε ότι η ενέργεια κάθε παραθύρου δίνεται από τη σχέση

$$\Big[a^2 + \frac{1}{2}(1-a)^2\Big]T \quad (4.877)$$

52. Έστω ο μετασχ. Fourier ενός σήματος ως

$$X(f) = \text{sinc}(fT)\delta_a(f) \quad (4.878)$$

όπου

$$\delta_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - ka) \quad (4.879)$$

Υπολογίστε την παράμετρο a ώστε ο αντίστροφος μετασχ. Fourier να είναι $x(t) = 1, \ \forall t$.

53. Να βρεθεί ο μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2} \quad (4.880)$$

54. Ο μετασχ. Hilbert ενός σήματος ορίζεται ως

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau \quad (4.881)$$

Βρείτε το μετασχ. Hilbert του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} A, & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.882)$$

55. Ένα σήμα $x(t)$ έχει μη μηδενικές συχνότητες στο διάστημα $[-B, B]$. Δείξτε ότι το σήμα $x^n(t)$ έχει μη μηδενικές συχνότητες στο διάστημα $[-nB, nB]$.

56. Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} |t|, & |t| \leq T/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.883)$$

57. Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος

$$X(f) = \frac{b-a}{(a+j2\pi f)(b+j2\pi f)} \quad (4.884)$$

58. Αν $y(t) = x(t) * h(t)$ και $g(t) = x(at) * y(at)$, $a > 0$, δείξτε ότι

$$g(t) = \frac{1}{a}y(at) \quad (4.885)$$

μέσω ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier.

59. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\Big(\frac{\sin(t)}{\pi t}\Big)^4 dt \quad (4.886)$$

60. Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα

$$x(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (4.887)$$

εμφανίζεται ως είσοδος στο γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα με απόκριση σε συχνότητα

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_0/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.888)$$

Θεωρούμε το σήμα

$$y(t) = \cos(2\pi f_1 t)x(t) \quad (4.889)$$

Ποιά πρέπει να είναι η συχνότητα f_1 έτσι ώστε η έξοδος από το σύστημα $H(f)$ να ισούται με $\Re\{X_6\}$;

61. Βρείτε την απόκριση σε συχνότητα, $H(f)$, και την κρουστική απόκριση, $h(t)$, των παρακάτω συστημάτων, τα οποία συνιστούν διαφορικές εξισώσεις. Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα της παραγώγισης.

(α′) $\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$

(β′) $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = -\frac{d}{dt}x(t)$

62. Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος, αν για είσοδο

$$x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})\epsilon(t) \quad (4.890)$$

η έξοδος έχει τη μορφή

$$y(t) = 2(e^{-t} - e^{-4t})u(t) \quad (4.891)$$

63. Δίνεται το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} \quad (4.892)$$

Βάζουμε ως είσοδο στο παραπάνω φίλτρο το σήμα

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \tag{4.893}$$

Ζητείται η συχνότητα αποκοπής f_c του φίλτρου τέτοια ώστε το φίλτρο να αφήνει να περάσει στην έξοδο $y(t)$ ακριβώς η μισή της συνολικής ενέργειας του σήματος $x(t)$.

64. Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$h(t) = 2e^{-5t}u(t) \tag{4.894}$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t) \tag{4.895}$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος, $y(t)$.

65. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος $h(t) = e^{-4t}u(t)$ και θεωρηστε το ως σύστημα, στην είσοδο του οποίου εμφανίζεται το σήμα $x(t) = A\cos(4t+\theta)$. Βρείτε και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης της εισόδου, του συστήματος, και της εξόδου. Τι παρατηρείτε; Τέλος, υπολογίστε την ενέργεια της εισόδου $x(t)$, του συστήματος $h(t)$, και της εξόδου $y(t)$.

66. Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση σε συχνότητα

$$H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f} \tag{4.896}$$

Για είσοδο $x(t)$, το σύστημα δίνει έξοδο

$$y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t) \tag{4.897}$$

Βρείτε το $x(t)$.

67. Ένα αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα έχει απόκριση σε συχνότητα

$$H(f) = \frac{j2\pi f + 4}{6 - (2\pi f)^2 + 5j2\pi f} \tag{4.898}$$

(α΄) Βρείτε μια διαφορική εξίσωση που να συνδέει την είσοδο $x(t)$ με την έξοδο $y(t)$ του συστήματος.

(β΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

(γ΄) Βρείτε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδός του είναι το σήμα $x(t) = e^{-4t}u(t) - te^{4t}u(t)$.

68. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη σχέση εισόδου-εξόδου ενός αιτιατού ΓΧΑ συστήματος δίνεται ως

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 8y(t) = 2x(t) \tag{4.899}$$

(α΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

(β΄) Βρείτε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος για είσοδο $x(t) = te^{-2t}u(t)$.

69. Βρείτε την αναπαράσταση στο χρόνο των παρακάτω φασμάτων.

(α΄) $X(f) = \begin{cases} \cos(4\pi f), & |f| \leq \frac{1}{8} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(β΄) $X(f) = e^{-4\pi f}u(f)$

(γ΄) $X(f) = e^{-6\pi|f|}$

70. Σε αυτήν την άσκηση θα δούμε πως η γνώση της θεωρίας Fourier εφαρμόζεται στην πράξη.

(α΄) Έστω ένα περιοδικό σήμα

$$x(t) = \sum_{k=1}^{3} \frac{A}{\pi k^2}\cos(2\pi 400kt) \tag{4.900}$$

Βρείτε το Μετασχ. Fourier του, $X(f)$, και σχεδιάστε τον.

(β΄) Το παραπάνω σήμα είναι περιοδικό, και ως εκ τούτου δεν υπάρχει στην πράξη. Μπορούμε όμως στην πράξη να φτιάξουμε ένα τμήμα του παραπάνω σήματος, που ξεκινά μια χρονική στιγμή και τελειώνει μετά από ένα διάστημα. Για να μελετήσουμε ένα τέτοιο σήμα, θεωρούμε ότι πολλαπλασιάζουμε το παραπάνω σήμα $x(t)$ με ένα τετραγωνικό παλμό διάρκειας T, δηλ. έχουμε το σήμα

$$x_r(t) = x(t)r(t) = x(t)\text{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \tag{4.901}$$

Σχεδιάστε το σήμα $r(t)$ στο χρόνο. Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του, $R(f)$, και σχεδιάστε τον.

(γ΄) Έχουμε λοιπόν το $x_r(t)$ ως

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x(t)r(t) \\ &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{A}{\pi k^2}\cos(2\pi 400kt), & t \in \Big[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\Big] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.902}$$

Σχεδιάστε το $x(t)$ (φυσικά όχι με ακρίβεια, απλά σχεδιάστε μια τυχαία περιοδική καμπύλη), και μετά σχεδιάστε το $x_r(t)$.

(δ΄) Γνωρίζουμε λοιπόν όλη την απαραίτητη πληροφορία στη συχνότητα για το $x(t)$ και το $r(t)$ αλλά δε γνωρίζουμε τίποτα - ακόμα - για το συχνοτικό περιεχόμενο του $x_r(t)$. Ας ξεκινήσουμε από το γεγονός ότι το γινόμενο

$x_r(t) = x(t)r(t)$ γίνεται συνελιξη στο χώρο της συχνότητας, $X_R(f) = X(f) * R(f)$. Βρείτε το $X_R(f)$ χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες της συνέλιξης.

(ε΄) Σχεδιάστε ποιοτικά το $X_R(f)$, υποθέτωντας ότι το T είναι μεγάλο. Προσέξτε ότι το T ελέγχει τα σημεία μηδενισμού του μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παλμού. Τι παρατηρείτε; Τι συνέβη σε σχέση με το ''ιδανικό'' φάσμα του $X(f)$; Συγκρίνετε και σχολιάστε. Το φαινόμενο που παρατηρείτε ονομάζεται *φασματική διαρροή - spectral leakage.*

(ϛ΄) Σχεδιάστε ξανά ποιοτικά το $X_R(f)$, υποθέτωντας τώρα ότι το T είναι αρκετά μικρό. Τι πρόβλημα παρατηρείτε;

71. Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα της δυικότητας για να δείξετε ότι

(α΄) $\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \longleftrightarrow u(f)$

(β΄) $\delta(t+T) + \delta(t-T) \longleftrightarrow 2\cos(2\pi f T)$

(γ΄) $\delta(t+T) - \delta(t-T) \longleftrightarrow 2j\sin(2\pi f T)$

72. Στην ιδιότητα της κλιμάκωσης

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X\Big(\frac{f}{a}\Big) \qquad (4.903)$$

δείξαμε μέσω παραδείγματος τη σχέση μεταξύ της διάρκειας ενός σήματος στο χώρο του χρόνου και στο χώρο της συχνότητας: *η συμπίεση ενός σήματος στο χρόνο οδηγεί σε επέκταση του σήματος στη συχνότητα (και αντιστρόφως).* Εδώ θα ορίσουμε πιο λεπτομερώς τη σχέση αυτή.

Το *εύρος ζώνης - bandwidth* ενός σήματος είναι το διάστημα όπου το σήμα έχει *σημαντικό* συχνοτικό περιεχόμενο. Στο γνωστό μας παράδειγμα

$$A\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \longleftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT) \qquad (4.904)$$

ορίσαμε το εύρος ζώνης ως το διάστημα συχνοτήτων ανάμεσα στους δυο πρώτους μηδενισμούς του φάσματος εκατέρωθεν του μηδενός ($\pm 1/T$).

Γενικά, είναι δύσκολο να ορίσει κανείς το εύρος ζώνης, ειδικά σε σήματα που ο μετασχ. Fourier τους έχει άπειρη διάρκεια, όπως στο παραπάνω παράδειγμα, κι αυτό γιατί ο όρος *σημαντικό συχνοτικό περιεχόμενο* δεν είναι μαθηματικά ακριβής. Το ίδιο δύσκολο είναι να ορίσει κανείς πρακτικά τη διάρκεια ενός σήματος στο χρόνο. Όμως υπάρχουν διάφοροι ορισμοί για τη διάρκεια και το εύρος ζώνης, οι οποίοι χρησιμοποιούνται αρκετά. Σε αυτην την άσκηση, θα δούμε έναν πιο τυποποιημένο ορισμό της σχέσης της διάρκειας ενός σήματος στους δυο χώρους.

Μπορούμε να ορίσουμε τη *χαρακτηριστική διάρκεια* ενός σήματος ως

$$T_d = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}} \qquad (4.905)$$

και το εύρος ζώνης του ως

$$B_w = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2|X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}} \qquad (4.906)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι για κάθε σήμα $x(t)$ και το μετασχ. Fourier του $X(f)$, ισχύει

$$T_d B_w \geq \frac{1}{4\pi} \qquad (4.907)$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι δεν μπορούμε να μειώσουμε ταυτόχρονα τη διάρκεια του σήματος στο χρόνο ΚΑΙ το εύρος ζώνης του[10], δηλ. το γινόμενό τους έχει πάντα ένα κάτω φράγμα. Η παραπάνω σχέση ονομάζεται επίσης και *αρχή της απροσδιοριστίας*, αφού μοιάζει πολύ με τη γνωστή αρχή της Κβαντομηχανικής[11].

Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big) \qquad (4.908)$$

Χρησιμοποιήστε την αρχή της απροσδιοριστίας για να βρείτε ένα κάτω φράγμα για το εύρος ζώνης B_w του $x(t)$.

73. Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι το εύρος ζώνης B_w και η χρονική διάρκεια T_d ενός σήματος δημιουργούν τη σχέση

$$T_d B_w \geq \frac{1}{4\pi} \qquad (4.909)$$

Η ισότητα στην παραπάνω σχέση ικανοποιείται μόνο από ένα σήμα, τον Γκαουσιανό παλμό

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \qquad (4.910)$$

Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του Γκαουσιανού παλμού είναι ο ίδιος ο Γκαουσιανός παλμός (!!), δηλ. δείξτε ότι

$$e^{-\pi t^2} \longleftrightarrow e^{-\pi f^2} \qquad (4.911)$$

[10] Γι΄ αυτό και για ένα γρήγορο δίκτυο, που τα σήματα στο χρόνο στέλνονται γρήγορα - δηλ. έχουν μικρή διάρκεια - πληρώνουμε μεγάλο εύρος ζώνης.

[11] Η ακριβής θέση και ορμή ενός ηλεκτρονίου δεν μπορεί να προσδιοριστεί ταυτόχρονα με ακρίβεια.