

Κεφάλαιο 1

Μαθηματικό Υπόβαθρο

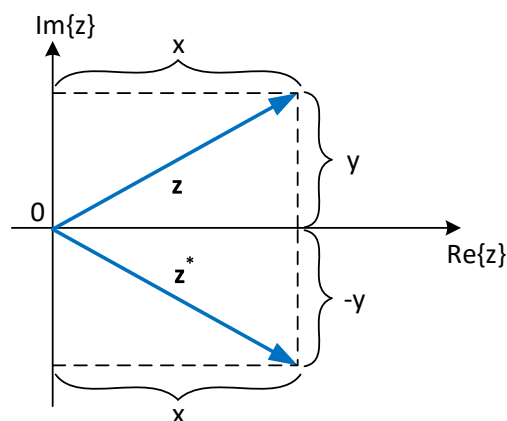
1.1 Εισαγωγή

Η μελέτη των σημάτων και των συστημάτων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια βασίζεται κατά κύριο λόγο σε βασικές γνώσεις μιγαδικής ανάλυσης. Εν γένει, η θεωρία σημάτων και συστημάτων έχει πολύ ισχυρά μαθηματικά θεμέλια τα οποία εκτείνονται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε μόνο στα απαραίτητα, τα οποία και αποτελούν το αναγκαίο υπόβαθρο για τον αναγνώστη. Ο λόγος της σύντομης αυτής ανασκόπησης έγκειται στο ότι αφ' ενός το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου δεν (πρέπει να) είναι καινούριο στον αναγνώστη που έχει ολοκληρώσει την τριτοβάθμια εκπαίδευση ή που έχει στοιχειώδες υπόβαθρο στον Απειροστικό Λογισμό, αφ' ετέρου είναι χρήσιμο να “φρεσκαριστούν” μερικές βασικές μαθηματικές έννοιες οι οποίες “διαπερνούν” ολόκληρο το βιβλίο ως το τέλος του.

1.2 Μιγαδικοί Αριθμοί

Θα ξεκινήσουμε με μια μικρή ανασκόπηση στους **μιγαδικούς αριθμούς**. Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι ένα σπουδαίο μαθηματικό εργαλείο με εφαρμογές σε πολλές επιστήμες μηχανικού. Παρ' όλο που οι μιγαδικοί αριθμοί δεν υπάρχουν πουθενά στη φύση και αποτελούν καθαρά θεωρητικό κατασκεύασμα, έχουν αποδειχθεί πολύτιμοι στην απλοποίηση πραγματικών προβλημάτων.

Ο λόγος πίσω από αυτό είναι διότι ενώ ένα πραγματικό πρόβλημα πρέπει να ξεκινά και να τελειώνει με πραγματικούς αριθμούς, η πορεία προς την επίλυση δεν είναι απαραίτητο να περνά μέσα από το “βασίλειο” των πραγματικών αριθμών. Φυσικά κάθε πραγματικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί αποκλειστικά χρησιμοποιώντας πραγματικούς αριθμούς και σχέσεις. Όμως, η χρήση μιγαδικών αριθμών και σχέσεων μπορεί να απλοποιήσει σημαντικά τη διαδικασία. Άρα, ο μοναδικός πρακτικός λόγος μελέτης των μιγαδικών αριθμών είναι ένας: *γιατί μας διευκολύνουν!*



Σχήμα 1.1: Ζεύγος συζυγών μιγαδικών z, z^* .

1.2.1 Καρτεσιανή μορφή

Ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + jy$ αναπαρίσταται στο μιγαδικό επίπεδο ως ένα σημείο με συντεταγμένες (x, y) . Η τετμημένη x ονομάζεται *πραγματικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού, ενώ η τεταγμένη y ονομάζεται *φανταστικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού. Είναι πολύ σύνηθες να συμβολίζουμε τα παραπάνω ως

$$\Re\{z\} = x \quad (1.1)$$

$$\Im\{z\} = y \quad (1.2)$$

Το σύμβολο j αποτελεί τη φανταστική μονάδα $j = \sqrt{-1}$. Ο συζυγής μιγαδικός αριθμός

$$z^* = x - jy \quad (1.3)$$

έχει το ίδιο πραγματικό μέρος και αντίθετο φανταστικό μέρος με τον z . Δυο τυχαίοι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί z, z^* αναπαρίστανται στο Σχήμα 1.1.

Οι μιγαδικοί αριθμοί διαθέτουν ένα σύνολο από πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, μερικές από τις οποίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1.

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή	
Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή
	$z_1 = x + jy$
	$z_2 = u + jv$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$
Διαίρεση	$z_1 / z_2 = z_1 z_2^* / z_2 z_2^* = \left(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2} \right) + j \left(\frac{uy - xv}{u^2 + v^2} \right)$
Συζυγία	$z_1^* = x - jy$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\}$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\}$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = x^2 + y^2$
Πηλίκο συζυγών	$z_1 / z_1^* = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j \frac{2xy}{x^2 + y^2}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$ $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ $(z_1 / z_2)^* = z_1^* / z_2^*$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2}$

Πίνακας 1.1: Πίνακας Ιδιοτήτων των Μιγαδικών Αριθμών (καρτεσιανή μορφή)

1.2.2 Πολική μορφή

Μια εναλλακτική - και πιο χρήσιμη - μορφή ενός μιγαδικού αριθμού είναι η περίφημη **πολική μορφή**. Ένας μιγαδικός αριθμός z με συντεταγμένες (x, y) μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα διαφορετικό ζεύγος τιμών, (ρ, ϕ) , που αναπαριστούν την απόσταση ρ του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων και τη γωνία ϕ μεταξύ του οριζόντιου άξονα και του διανύσματος που αντιπροσωπεύει το μιγαδικό αριθμό.

Το Σχήμα 1.2 απεικονίζει τις παραμέτρους ρ και ϕ . Σημειώστε ότι η γωνία ϕ ορίζεται κατά την ορθή μαθηματική φορά (αντίθετα της φοράς του ρολογιού). Από το Σχήμα, είναι εμφανές ότι

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.4)$$

το οποίο ονομάζεται **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού z . Η γωνία ϕ , η οποία αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία ως **φάση**, ορίζεται ως

$$\phi = \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), & x > 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \text{απροσδιόριστη}, & x = y = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Η πρωτεύουσα τιμή της φάσης ϕ ορίζεται πάντα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, όπως παραπάνω, και θα προσπαθούμε να εκφράζουμε κάθε τιμή της φάσης στο διάστημα αυτό.

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την πολική μορφή, με τη βοήθεια του Σχήματος 1.2, ως

$$z = x + jy = \rho \cos(\phi) + j\rho \sin(\phi) = \rho(\cos(\phi) + j \sin(\phi)) \quad (1.6)$$

1.2.3 Σχέσεις του Euler

Στην προσπάθειά μας να απλοποιήσουμε την παραπάνω σχέση, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$e^{j\phi} = 1 + j\phi + \frac{(j\phi)^2}{2!} + \frac{(j\phi)^3}{3!} + \frac{(j\phi)^4}{4!} + \dots \quad (1.7)$$

$$= 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \dots \quad (1.8)$$

και

$$\cos(\phi) = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \frac{\phi^8}{8!} + \dots \quad (1.9)$$

$$\sin(\phi) = \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \frac{\phi^9}{9!} + \dots \quad (1.10)$$

και άρα καταληγουμε ότι

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j \sin(\phi) \quad (1.11)$$

η οποία είναι η περίφημη **Σχέση του Euler**, προς τιμήν του μεγάλου μαθηματικού Leonard Euler που την ανακάλυψε. Από τη σχέση του Euler μπορούμε να ορίσουμε τις *αντίστροφες σχέσεις του Euler* ως

$$\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} \quad (1.12)$$

$$\sin(\phi) = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} \quad (1.13)$$

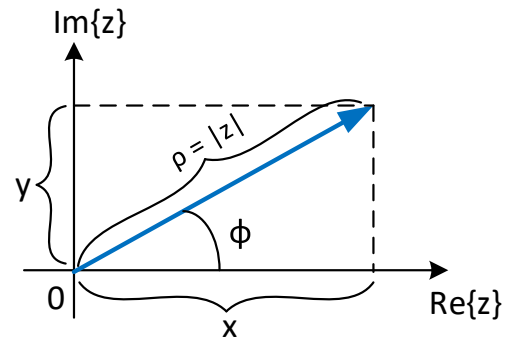
Οπότε, η πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού z μπορεί να γραφεί ως

$$z = x + jy = \rho(\cos(\phi) + j \sin(\phi)) = \rho e^{j\phi} \quad (1.14)$$

με

$$x = \rho \cos(\phi), \quad y = \rho \sin(\phi), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.15)$$

Ας εξετάσουμε ξανά τον Πίνακα 1.1 αλλά χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την πολική μορφή. Ο Πίνακας 1.2 είναι αυτός που προκύπτει με εφαρμογή της πολικής μορφής.



Σχήμα 1.2: Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού z .

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Πολική Μορφή	
Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή
	$z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1}$
	$z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2}$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} + \rho_2 e^{j\phi_2}$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} - \rho_2 e^{j\phi_2}$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \rho_2 e^{j\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$
Διαίρεση	$z_1 / z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} / \rho_2 e^{j\phi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$
Συζυγία	$z_1^* = \rho e^{-j\phi_1}$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} = 2\rho \cos(\phi_1)$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\} = 2j\rho \sin(\phi_1)$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \rho_1 \rho_1 e^{j\phi_1} e^{-j\phi_1} = \rho_1^2 = z_1 ^2$
Πηλίκο συζυγών	$z_1 / z_1^* = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_1 e^{-j\phi_1}} = e^{j2\phi_1}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} + \rho_2 e^{-j\phi_2}$
	$(z_1 - z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} - \rho_2 e^{-j\phi_2}$
	$(z_1 z_2)^* = \rho_1 \rho_2 e^{-j(\phi_1 + \phi_2)}$
	$(z_1 / z_2)^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-j(\phi_1 - \phi_2)}$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{j\phi_1}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-j\phi_1}$

Πίνακας 1.2: Πίνακας Ιδιοτήτων των Μιγαδικών Αριθμών (πολική μορφή)

Συγκρίνοντας τους Πίνακες 1.1 και 1.2, παρατηρούμε ότι το άθροισμα και η διαφορά μιγαδικών αριθμών απλοποιείται όταν χρησιμοποιούμε καρτεσιανές συντεταγμένες, ενώ αντίθετα ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μιγαδικών αριθμών είναι προτιμότερο να γίνεται στην πολική μορφή τους.

Συνήθεις πολικές μορφές	
Φάση ϕ	Πολική μορφή
0	$e^{j0} = 1$
$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
$\pm k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$
$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
$\pm 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm j2k\pi} = 1$
$\pm \frac{\pi}{2}$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$
$\pm k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi/2} = (\pm j)^k = \begin{cases} \pm j, & k = 1, 5, 9, 13, \dots \\ \mp j, & k = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$

Πίνακας 1.3: Πολική μορφή συχνά χρησιμοποιούμενων μιγαδικών αριθμών

Είναι χρήσιμο να βρούμε ξεχωριστά την πολική μορφή για κάποιους συγκεκριμένους μιγαδικούς αριθμούς, όπως οι $\pm 1, \pm j$, καθώς η χρήση τους απλοποιεί σημαντικά τις σχέσεις που θα συναντήσουμε στη συνέχεια. Ο Πίνακας 1.3 συνοψίζει τις πολικές μορφές μιγαδικών αριθμών που συναντώνται συχνά στην πράξη.

1.2.4 Η Σχέση του De Moivre

Όταν υπολογίζουμε δυνάμεις μιγαδικών αριθμών, των οποίων ο εκθέτης είναι ακέραιος αριθμός, είναι πολύ χρήσιμη η γνωστή σχέση του De Moivre:

$$z^n = (x + jy)^n = (\rho \cos(\phi) + j\rho \sin(\phi))^n = (\rho e^{j\phi})^n = \rho^n (\cos(n\phi) + j \sin(n\phi)) \quad (1.16)$$

Βλέπετε πόσο πιο απλή είναι η εύρεση μιας δύναμης ενός μιγαδικού αριθμού όταν χρησιμοποιούμε την πολική μορφή. Με την ίδια ευκολία μπορούμε να βρούμε οποιαδήποτε ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού:

$$z^{1/n} = (x + jy)^{1/n} = (\rho \cos(\phi) + j\rho \sin(\phi))^{1/n} = (\rho e^{j\phi})^{1/n} = \rho^{1/n} (\cos(\phi/n) + j \sin(\phi/n)) \quad (1.17)$$

1.3 Μιγαδικές Συναρτήσεις

Ως αποτέλεσμα της συνεχούς χρήσης μιγαδικών αριθμών, η βασική θεωρία σημάτων και συστημάτων περιλαμβάνει ουκ ολίγες μιγαδικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι σχετικά απλές.

Μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ ορίζεται σε ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, το οποίο λέγεται πεδίο ορισμού, και αντιστοιχίζει κάθε σημείο του συνόλου A σε ένα μιγαδικό αριθμό. Είναι λοιπόν προφανές ότι μια μιγαδική συνάρτηση ορίζεται σε τέσσερις διαστάσεις: δυο διαστάσεις για το πεδίο ορισμού της, και δυο διαστάσεις για κάθε τιμή της συνάρτησης. Αυτό δυσκολεύει τα πράγματα γιατί δεν μπορούμε, εν γένει, να σχεδιάσουμε στο χαρτί μια μιγαδική συνάρτηση. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι

- είτε να σχεδιάσουμε ξεχωριστά το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος, δηλ. να αναλύσουμε τη μιγαδική συνάρτηση στη μορφή

$$f(z) = \Re\{f(z)\} + j\Im\{f(z)\} \quad (1.18)$$

- είτε να σχεδιάσουμε ξεχωριστά το μέτρο και τη φάση της, δηλ. να τη γράψουμε στη μορφή

$$f(z) = |f(z)|e^{j\phi(z)} \quad (1.19)$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα:

Έστω το σύνολο $A = \mathbb{C} - \{\pm j\}$ στο οποίο ορίζεται η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad (1.20)$$

Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος, καθώς και την αναπαράσταση μέτρου και φάσης.

Το πραγματικό της μέρος ισούται με

$$\Re\{f(z)\} = \Re\left\{\frac{1}{(x + jy)^2 + 1}\right\} = \Re\left\{\frac{1}{x^2 - y^2 + 1 + j2xy}\right\} \quad (1.21)$$

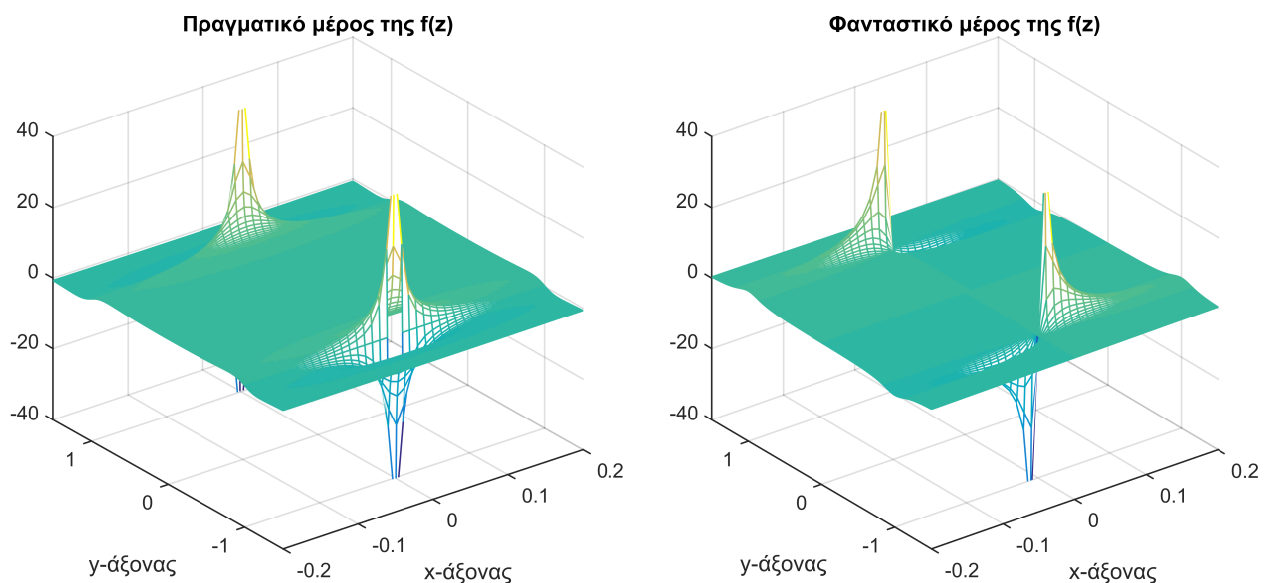
$$= \Re\left\{\frac{x^2 - y^2 + 1 - j2xy}{(x^2 - y^2 + 1 + j2xy)(x^2 - y^2 + 1 - j2xy)}\right\} = \Re\left\{\frac{x^2 - y^2 + 1 - j2xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + (2xy)^2}\right\} \quad (1.22)$$

$$= \Re\left\{\frac{x^2 - y^2 + 1}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + (2xy)^2} - j\frac{2xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + (2xy)^2}\right\} = \frac{x^2 - y^2 + 1}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} \quad (1.23)$$

ενώ το φανταστικό της μέρος - από την τελευταία σχέση παραπάνω - ισούται με

$$\Im\{f(z)\} = \Im\left\{\frac{1}{(x + jy)^2 + 1}\right\} = \Im\left\{\frac{1}{x^2 - y^2 + 1 + j2xy}\right\} = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} \quad (1.24)$$

Οι γραφικές παραστάσεις τους απεικονίζονται στο Σχήμα 1.3. Ας βρούμε τώρα τη γραφική παράσταση του μέτρου



Σχήμα 1.3: Πραγματικό και Φανταστικό μέρος της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$.

και της φάσης της συνάρτησης $f(z)$. Θα είναι

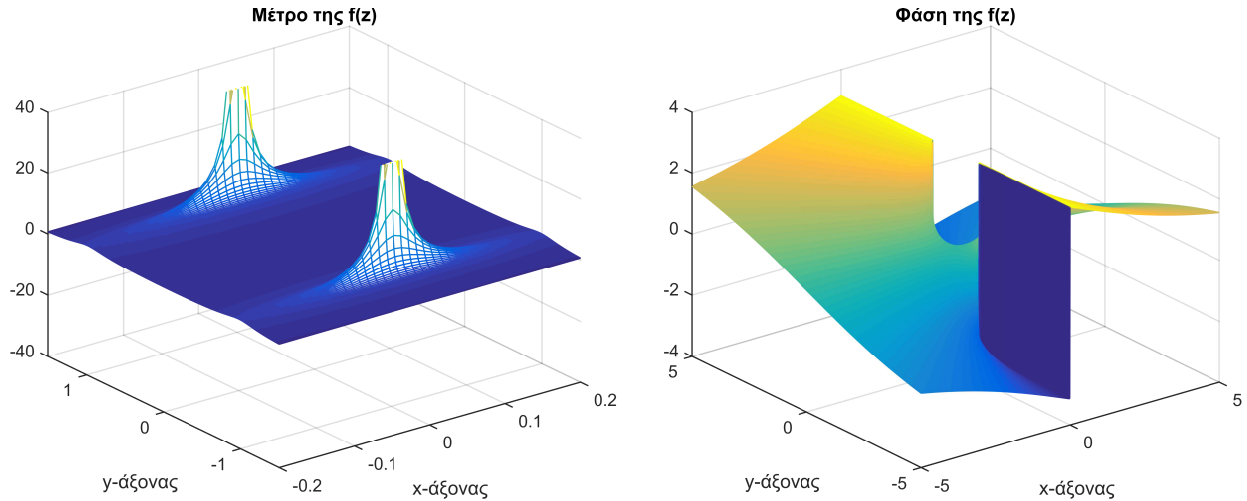
$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2 + 1|} = \frac{1}{|(x + jy)^2 + 1|} = \frac{1}{|x^2 + 2jxy - y^2 + 1|} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}} \quad (1.25)$$

για το μέτρο, ενώ για τη φάση θα είναι

$$\phi_f(z) = \tan^{-1} \frac{\Im\{f(z)\}}{\Re\{f(z)\}} = -\tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2 + 1} \quad (1.26)$$

Οι γραφικές παραστάσεις τους απεικονίζονται στο Σχήμα 1.4.

Είναι σημαντικό να συζητηθούν οι έννοιες της συνέχειας και της παραγωγίσης μιγαδικών συναρτήσεων. Μια



Σχήμα 1.4: Μέτρο και Φάση της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$.

μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ η οποία ορίζεται στο ανοικτό¹ σύνολο $A \in \mathbb{C}$ είναι *συνεχής* στο σημείο $z_0 \in A$ αν και μόνον αν ισχύει ότι

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (1.27)$$

Εάν η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $z_0 \in A$ τότε η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ ονομάζεται *συνεχής* σε κάθε σημείο του A . Αντίστοιχα, μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ είναι *παραγωγίσιμη* σε ένα σημείο $z_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1.28)$$

και το οποίο συμβολίζεται με $f'(z_0)$. Εάν η μιγαδική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του ανοικτού συνόλου A , τότε ονομάζεται *αναλυτική*. Στη συνέχεια του βιβλίου θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις που είναι αναλυτικές σε όλο το $\mathbb{C}$, οπότε θα θεωρούμε κάθε μιγαδική συνάρτηση ως αναλυτική σε όλο το πεδίο ορισμού της.

1.4 Ημίτονα

Μια πολύ σημαντική κατηγορία σημάτων είναι τα ημιτονοειδή. Γι'αυτό αξίζει τον κόπο να τα εξετάσουμε διεξοδικά. Ας δούμε τον γενικό τύπο των σημάτων αυτών:

$$x(t) = A \cos(\underbrace{\omega_0 t + \phi}_{\text{radians}}) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (1.29)$$

όπου A το πλάτος του ημιτονοειδούς, $\omega_0 = 2\pi f_0$ η λεγόμενη *κυκλική συχνότητα* σε rad/s, με f_0 να είναι η *συχνότητα* σε Hz, και ϕ η φάση μετατόπισης του ημιτονοειδούς. Για αποφυγή παρεξηγήσεων, χρησιμοποιούμε το συνημίτονο $\cos(\cdot)$ αντί για το ημίτονο $\sin(\cdot)$ ως τη γενική μορφή ενός ημιτονοειδούς σήματος, ανεξάρτητα αν τα σήματα αυτά τα ονομάζουμε *ημιτονοειδή*. Άλλωστε το ημίτονο και το συνημίτονο είναι τα ίδια σήματα ακριβώς, μόνο που διαφέρουν κατά μια μετατόπιση.

Ας μελετήσουμε ένα συγκεκριμένο ημιτονοειδές, το

$$x(t) = 20 \cos(2\pi 10t - 0.4\pi) \quad (1.30)$$

Η συχνότητά του είναι $f_0 = 10$ Hz, και η περίοδός του είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.1$ s. Η περίοδος μας δίνει τις χρονικές στιγμές όπου το σήμα επαναλαμβάνεται. Εδώ λοιπόν θα έχουμε μέγιστο τις χρονικές στιγμές $t =$

¹Ανοικτό λέγεται ένα σύνολο A όταν δεν συμπεριλαμβάνεται σε αυτό το “σύνορό” του. Για παράδειγμα, τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν τη σχέση

$$x^2 + y^2 < r^2$$

αποτελούν ένα ανοικτό σύνολο A . Το “σύνορο” B του ανοικτού συνόλου A είναι το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τη σχέση

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Η ένωση των δυο αυτών συνόλων αποτελεί ένα *κλειστό* σύνολο.

..., -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, ...

Επομένως

$$x(t + T_0) = x(t) \quad (1.31)$$

$$\cos(2\pi f_0(t + T_0) + \phi) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (1.32)$$

$$\cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 T_0 + \phi) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \cos(2\pi f_0 t + 2k\pi + \phi), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.33)$$

Παρατηρούμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$2\pi f_0 T_0 = 2k\pi \Rightarrow T_0 = k \frac{1}{f_0} \quad (1.34)$$

Ονομάζουμε *βασική περίοδο* ή απλά *περίοδο* του σήματος την τιμή του T_0 για $k = 1$. Έτσι η περίοδος ενός ημιτονοειδούς σήματος θα δίδεται από τη σχέση:

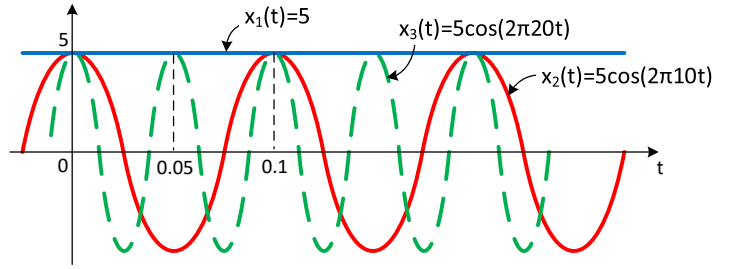
$$T_0 = \frac{1}{f_0} \quad (1.35)$$

και επίσης

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \iff T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.36)$$

$$\text{Επομένως } T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Στο Σχήμα 1.5 βλέπουμε μερικά ημιτονοειδή για διάφορες συχνότητες f_0 : για $f_0 = 0$ Hz, το $x_1(t) = 5 \cos(2\pi 0 t) = 5$, για $f_0 = 10$ Hz, το $x_2(t) = 5 \cos(2\pi 10 t)$, και για $f_0 = 20$ Hz, το $x_3(t) = 5 \cos(2\pi 20 t)$. Για $f = 0$ έχουμε το σταθερό σήμα $x(t) = 5$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Το σήμα αυτό λέγεται και *DC (Direct Current) συνιστώσα*. Αυτή η ονομασία προέρχεται - και χρησιμοποιείται ακόμα - από την ηλεκτρονική και έχει μείνει μέχρι σήμερα.



Σχήμα 1.5: Ημιτονοειδή για διάφορες συχνότητες f_0 .

1.4.1 Μετατόπιση Φάσης

Η συχνότητα f_0 καθορίζει το κάθε πότε επαναλαμβάνονται τα μέγιστα και τα ελάχιστα ενός ημιτονοειδούς, ενώ η φάση ϕ καθορίζει το πού ακριβώς αυτά βρίσκονται. Αν $\phi = 0$ τότε το πρώτο μέγιστο βρίσκεται στο $t = 0$ και έχει τιμή $A \cos(0) = A$, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση όπου $\phi \in (-\pi, \pi] - \{0\}$, το πρώτο μέγιστο έχει μετατοπιστεί στο χρόνο και έχει τιμή $A \cos(\phi) \neq A$. Όμοια ισχύουν και για τα ελάχιστα.

Ας συμβολίσουμε με $x_0(t)$ το ημιτονοειδές σήμα με $\phi = 0$:

$$x_0(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \Big|_{\phi=0} = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (1.37)$$

Εστω λοιπόν ότι καθυστερούμε το σήμα $x_0(t)$ κατά $t = t_0 > 0$. Τότε:

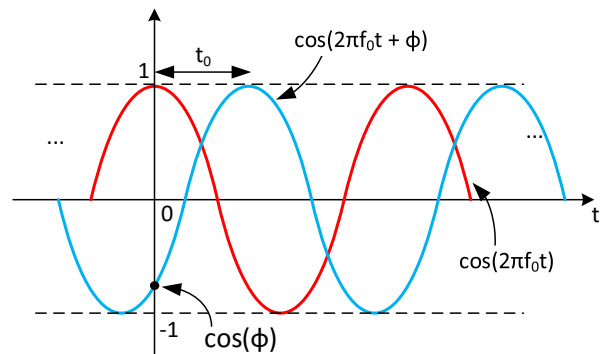
$$x_0(t - t_0) = A \cos(2\pi f_0(t - t_0)) = A \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (1.38)$$

όπου θέσαμε $\phi = -2\pi f_0 t_0$.

Ομως, $T_0 = \frac{1}{f_0}$, επομένως έχουμε

$$\phi = -2\pi f_0 t_0 = -2\pi \frac{t_0}{T_0}, \quad (1.39)$$

Αυτή η σχέση μας υποδεικνύει την τιμή που πρέπει να έχει η φάση ϕ για να έχουμε καθυστέρηση του σήματος κατά $t = t_0$. Όμοια συζήτηση μπορεί να γίνει και για προήγηση του σήματος κατά $t = t_0 < 0$. Ένα παράδειγμα όπου απεικονίζονται όλα τα παραπάνω



Σχήμα 1.6: Φάση ϕ , μετατόπιση t_0 , και η μεταξύ τους σχέση.

φαίνεται στο Σχήμα 1.6.

Εδώ θα πρέπει να διευκρινίσουμε την ορολογία. Φάση ονομάζεται η ποσότητα που υπάρχει στο όρισμα του $\cos(\cdot)$, δηλαδή η ποσότητα: $2\pi f_0 t + \phi$. Φάση μετατόπισης ονομάζεται η ποσότητα ϕ . Ενα μικρό μπερδεμα που προκύπτει πολύ συχνά στην βιβλιογραφία είναι ότι για λόγους απλότητας η φάση μετατόπισης αναφέρεται απλά ως 'φάση'. Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε συχνά στην φάση μετατόπισης απλά ως φάση ενώ θα διαχωρίζουμε τις δύο φάσεις όταν αυτό είναι αναγκαίο.

Γενικά, εάν ένα σήμα έχει περίοδο T_0 , η μετατόπιση του είναι φραγμένη:

$$|t_0| \leq \frac{T_0}{2} \quad (1.40)$$

Φυσικά και μπορούμε να μετακινήσουμε περισσότερο το σήμα, το αποτέλεσμα όμως που θα λάβουμε είναι το ίδιο, αφού το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο T_0 . Επομένως από τις Σχέσεις (1.39) και (1.40) έχουμε

$$-\pi \leq \phi < \pi \quad (1.41)$$

1.4.2 Άθροισμα δυο ημιτόνων

Αν έχουμε δυο ημίτονα ίδιας συχνότητας αλλά με διαφορετικές φάσεις, μπορούμε να τα αθροίσουμε σε ένα ημίτονο ίδιας συχνότητας. Η τριγωνομετρία μας βοηθά σε αυτό, δίνοντάς μας τη γνωστή σχέση

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = A \cos(2\pi f_0 t) \cos(\phi) - A \sin(2\pi f_0 t) \sin(\phi) \quad (1.42)$$

Αν τώρα θέσουμε

$$X = A \cos(\phi) \quad (1.43)$$

$$Y = -A \sin(\phi) \quad (1.44)$$

τότε η Σχέση (1.42) γράφεται

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = X \cos(2\pi f_0 t) + Y \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.45)$$

Οι ποσότητες X, Y αντιστοιχούν στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται από το μιγαδικό αριθμό $z = X - jY$ στο μιγαδικό επίπεδο (βλέπε Σχήμα 1.7). Πώς το καταλαβαίνουμε αυτό; Είναι

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (1.46)$$

και

$$X \cos(2\pi f_0 t) + Y \sin(2\pi f_0 t) = \Re\{X e^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Y e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (1.47)$$

αφού $\sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi/2)$. Άρα

$$\Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{X e^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Y e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (1.48)$$

$$\Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{X e^{j2\pi f_0 t} + Y e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (1.49)$$

$$\Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{(X + Y e^{-j\frac{\pi}{2}}) e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (1.50)$$

$$\Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{(X - jY) e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (1.51)$$

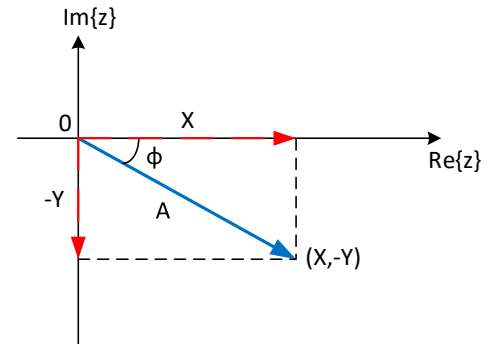
αφού $e^{-j\pi/2} = -j$. Άρα πράγματι ο μιγαδικός αυτός μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή ως

$$z = X - jY = Ae^{j\phi} = \sqrt{X^2 + Y^2} e^{j \tan^{-1} \left(\frac{-Y}{X} \right)} \quad (1.52)$$

δηλ. τελικά

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (1.53)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{-Y}{X} \right) \quad (1.54)$$



Σχήμα 1.7: Μιγαδικός αριθμός $z = X - jY$ στην πρόσθεση δυο ημιτόνων ίδιας συχνότητας.

Άρα για να βρούμε τις τιμές των A και ϕ , η πολική μορφή είναι πολύ βολική και μας δίνει κατευθείαν το αποτέλεσμα. Υπενθυμίζεται ότι η φάση ϕ πρέπει πάντα να εκφράζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Η παραπάνω απλή περίπτωση γίνεται πιο σύνθετη αν θέλουμε να γράψουμε το άθροισμα

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi_1) + B \cos(2\pi f_0 t + \phi_2) \quad (1.55)$$

ως έναν ημιτονοειδή όρο. Εδώ η πολική μορφή αποτελεί σχεδόν μονόδρομο για μια εύκολη λύση.

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_1) + B \cos(2\pi f_0 t + \phi_2) \quad (1.56)$$

$$= \Re\{Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi_1)}\} + \Re\{Be^{j(2\pi f_0 t + \phi_2)}\} \quad (1.57)$$

$$= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi_1}\} + \Re\{Be^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi_2}\} \quad (1.58)$$

$$= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi_1} + Be^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi_2}\} \quad (1.59)$$

$$= \Re\{(Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2})e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (1.60)$$

$$= \Re\{Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (1.61)$$

$$= A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (1.62)$$

με

$$A = \sqrt{\Re\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}^2 + \Im\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}^2} \quad (1.63)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\Im\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}}{\Re\{Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2}\}} \quad (1.64)$$

1.4.3 Άθροισμα N ημιτόνων

Ακόμα γενικότερα, έστω ότι έχουμε ένα πιο σύνθετο άθροισμα, το οποίο αποτελείται από πολλά ημιτονοειδή ίδιας συχνότητας, το οποίο περιγράφεται ως

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) \quad (1.65)$$

Η έκφραση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά, αλλά αυτό είναι δύσκολο να γίνει με τους γνωστούς τύπους της τριγωνομετρίας που δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Αν χρησιμοποιήσουμε όμως πολικές μορφές υπάρχει αρκετή απλοποίηση:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) = \sum_{k=1}^N \Re\{A_k e^{j(2\pi f_0 t + \phi_k)}\} \quad (1.66)$$

$$(1.67)$$

$$= \Re\left\{\sum_{k=1}^N A_k e^{j(2\pi f_0 t + \phi_k)}\right\} = \Re\left\{\left[\sum_{k=1}^N A_k e^{j\phi_k}\right] e^{j(2\pi f_0 t)}\right\} = \Re\{Ae^{j\phi} e^{j(2\pi f_0 t)}\} \quad (1.68)$$

$$(1.69)$$

$$= \Re\{A \cos(2\pi f_0 t + \phi) + jA \sin(2\pi f_0 t + \phi)\} = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (1.70)$$

όπου

$$A = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^N \Re\{A_k e^{j\phi_k}\}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^N \Im\{A_k e^{j\phi_k}\}\right)^2} \quad (1.71)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sum_{k=1}^N \Im\{A_k e^{j\phi_k}\}}{\sum_{k=1}^N \Re\{A_k e^{j\phi_k}\}} \quad (1.72)$$

Σε αυτό το παράδειγμα, πήγαμε από πολικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές, για να διευκολύνουμε την πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών, και μετά επιστρέψαμε πίσω στις πολικές συντεταγμένες.

1.4.4 Περιοδικότητα N ημιτόνων

Γνωρίζουμε ότι ένα ημίτονο $A \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ είναι πάντα περιοδικό με περίοδο $T_0 = 1/f_0$ s. Τι συμβαίνει όμως όταν έχουμε αθροίσματα ημιτόνων; Είναι το άθροισμα N ημιτόνων περιοδικό; Κι αν ναι, υπό ποιές συνθήκες;

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό άθροισμα δυο ημιτόνων ως

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) \quad (1.73)$$

Καθένα από τα επιμέρους ημίτονα έχει περίοδο $T_1 = 1/f_1$ και $T_2 = 1/f_2$, αντίστοιχα. Έστω ότι υπάρχει αριθμός T ο οποίος αποτελεί την περίοδο του σήματος $x(t)$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$x(t) = x(t + T) \quad (1.74)$$

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 (t + T) + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 (t + T) + \phi_2) \quad (1.75)$$

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 t + 2\pi f_1 T + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + 2\pi f_2 T + \phi_2) \quad (1.76)$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα, πρέπει

$$\begin{cases} 2\pi f_1 T = 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi f_2 T = 2\pi l, & l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 T = k, & k \in \mathbb{Z} \\ f_2 T = l, & l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1.77)$$

και άρα

$$T = \frac{k}{f_1} = \frac{l}{f_2} = kT_1 = lT_2, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (1.78)$$

Αναδιατάσσοντας, έχουμε

$$\frac{k}{l} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{T_2}{T_1}, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (1.79)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι για να είναι περιοδικό το σήμα $x(t)$ πρέπει ο λόγος των περιόδων ή των συχνοτήτων των επιμέρους ημιτόνων να είναι λόγος ακεραίων. Αν ο λόγος των περιόδων ή των συχνοτήτων δεν είναι λόγος ακεραίων, τότε το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Όμως η παραπάνω μελέτη μας πληροφορεί αν το σήμα είναι περιοδικό ή όχι. Δε μας πληροφορεί για το ποιά είναι η περίοδός του, σε περίπτωση που αυτό είναι περιοδικό. Όμως από τη σχέση

$$T = kT_1 = lT_2, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (1.80)$$

καταλαβαίνουμε ότι η περίοδος T αποτελεί το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο - Ε.Κ.Π των περιόδων T_1, T_2 . Αντίστοιχα, αν η παραπάνω σχέση γραφεί ως

$$T = \frac{k}{l} = \frac{f_1}{f_2}, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (1.81)$$

καταλαβαίνουμε ότι η θεμελιώδης συχνότητα f_0 του σήματος αποτελεί το μέγιστο κοινό διαμέτρη - Μ.Κ.Δ των συχνοτήτων f_1, f_2 .

Παράδειγμα:

Ας ελέγξουμε αν το σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi 200t + \pi/3) - \sin(2\pi 400t) + 3 \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (1.82)$$

είναι περιοδικό.

Αν υπάρχει περίοδος T , τότε για αυτή θα πρέπει να ισχύει

$$T = \frac{k}{200} = \frac{l}{400} = \frac{m}{500}, \quad k, l, m \in \mathbb{Z} \quad (1.83)$$

Προφανώς ο λόγος όλων των περιόδων ή συχνοτήτων ανά δυο είναι λόγος ακεραίων, άρα το σήμα είναι περιοδικό.

Η θεμελιώδης του συχνότητα δίνεται ως

$$f_0 = \text{M.K.}\Delta\{200, 400, 500\} = 100 \text{ Hz} \quad (1.84)$$

Άρα η περίοδος του σήματος είναι $T_0 = 1/f_0 = 0.01 \text{ s}$.

Παράδειγμα:

Ας ελέγξουμε αν το σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi 200t - \pi/5) + \frac{1}{2} \sin(400t) + 2 \sin(2\pi 500t + \pi/9) \quad (1.85)$$

είναι περιοδικό.

Αν υπάρχει περίοδος T , τότε για αυτή θα πρέπει να ισχύει

$$T = \frac{k}{200} = \frac{l}{\frac{400}{2\pi}} = \frac{m}{500}, \quad k, l, m \in \mathbb{Z} \quad (1.86)$$

Παρατηρήστε ότι ο λόγος των δυο πρώτων συχνοτήτων δεν είναι λόγος ακεραίων, αφού

$$\frac{200}{\frac{400}{2\pi}} = \frac{400\pi}{400} = \pi \neq \frac{k}{l}, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (1.87)$$

μια και ο αριθμός π είναι άρρητος αριθμός. Άρα το σήμα $x(t)$ δεν είναι περιοδικό, παρ' όλο που τα επιμέρους ημίτονα είναι περιοδικά!

1.5 Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα

Σε αυτήν την Παράγραφο, θα περιγράψουμε την μέθοδο του Αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα (Partial Fraction Expansion - PFE), που θα μας είναι χρήσιμη στη μελέτη σημάτων και συστημάτων γενικότερα. Όπως λέει και το όνομά της, η PFE διασπά μια ρητή συνάρτηση $F(x)$, με συνήθως υψηλής τάξης πολυώνυμα στον αριθμητή και στον παρονομαστή, σε απλά κλάσματα, με σταθερά ή πρωτοβάθμια πολυώνυμα στον αριθμητή και πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια πολυώνυμα στον παρονομαστή.

Η μέθοδος που ακολουθούμε για την PFE είναι πολύ απλή, και απλά χρειάζεται τριβή για να τη συνηθίσει κανείς. Υπάρχουν δυο συνήθεις περιπτώσεις PFE, οι οποίες εξαρτώνται από την τάξη των ριζών του παρονομαστή.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η PFE εφαρμόζεται *μόνον* όταν η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερη της τάξης του πολυωνύμου του παρονομαστή. Αν δεν ισχύει αυτό, τότε πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή, ώστε να καταλήξουμε σε περίπτωση που μπορούμε να εφαρμόσουμε PFE.

Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

1. Ο παρονομαστής έχει απλές ρίζες
2. Ο παρονομαστής έχει μια ή περισσότερες ρίζες πολλαπλότητας r

1.5.1 Απλές ρίζες

Θεωρούμε πρώτα την πιο απλή περίπτωση, όπου η συνάρτησή μας

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (1.88)$$

έχει απλές ρίζες στον παρονομαστή της, $Q(x)$. Θεωρήστε το ακόλουθο παράδειγμα:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}, \quad m < n \\ &= \frac{P(x)}{(x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_n)} \end{aligned} \quad (1.89)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$F(x) = \frac{k_1}{x - \rho_1} + \frac{k_2}{x - \rho_2} + \cdots + \frac{k_n}{x - \rho_n} \quad (1.90)$$

Για να βρούμε τον συντελεστή k_i , πολλαπλασιάζουμε και τις δυο πλευρές της παραπάνω σχέσης με $(x - \rho_1)$, και έπειτα θέτουμε $x = \rho_1$. Άρα

$$(x - \rho_1)F(x) \Big|_{x=\rho_1} = \left[k_1 + \frac{k_2(x - \rho_1)}{x - \rho_2} + \frac{k_3(x - \rho_1)}{x - \rho_3} + \cdots + \frac{k_n(x - \rho_1)}{x - \rho_n} \right] \Big|_{x=\rho_1} \quad (1.91)$$

Όλοι οι όροι στη δεξιά πλευρά απαλείφονται, εκτός του k_1 . Άρα καταλήγουμε στο

$$k_1 = (x - \rho_1)F(x) \Big|_{x=\rho_1} \quad (1.92)$$

Παρόμοια, καταλήγουμε ότι

$$k_i = (x - \rho_i)F(x) \Big|_{x=\rho_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.93)$$

Η παραπάνω διαδικασία δουλεύει ανεξάρτητα από το αν οι ρίζες είναι πραγματικές ή μιγαδικές.

1.5.2 Ρίζες πολλαπλότητας r

Αν η συνάρτηση $F(x)$ έχει πολλαπλή ρίζα, με πολλαπλότητα r , στον παρονομαστή, τότε θα είναι της μορφής

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x - \lambda)^r (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3) \cdots (x - \rho_j)} \quad (1.94)$$

Το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για αυτή τη συνάρτηση δίνεται ως

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{d_0}{(x - \lambda)^r} + \frac{d_1}{(x - \lambda)^{r-1}} + \cdots + \frac{d_{r-1}}{(x - \lambda)} \\ &\quad + \frac{k_1}{x - \rho_1} + \frac{k_2}{x - \rho_2} + \cdots + \frac{k_n}{x - \rho_n} \end{aligned} \quad (1.95)$$

Οι συντελεστές k_i αντιστοιχούν στις ρίζες χωρίς πολλαπλότητα και υπολογίζονται όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Για να βρούμε τους συντελεστές $d_0, \dots, d_{r-1}$, πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με $(x - \lambda)^r$:

$$\begin{aligned} (x - \lambda)^r F(x) &= d_0 + d_1(x - \lambda) + d_2(x - \lambda)^2 + \cdots + d_{r-1}(x - \lambda)^{r-1} + \\ &\quad + k_1 \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_1} + k_2 \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_2} + \cdots + k_n \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_n} \end{aligned} \quad (1.96)$$

Θέτοντας $x = \lambda$ και στα δυο μέλη, έχουμε

$$(x - \lambda)^r F(x) \Big|_{x=\lambda} = d_0 \quad (1.97)$$

Άρα το d_0 υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο $(x - \lambda)^r$ στην $F(x)$, και θέτοντας $x = \lambda$ στη σχέση που απομένει. Αν παραγωγίσουμε τη Σχέση (1.96) ως προς x , το δεξιό μέλος καταλήγει στο $d_1 +$ όροι που περιέχουν το $(x - \lambda)$ στους αριθμητές. Θέτοντας $x = \lambda$ και στα δυο μέλη, έχουμε

$$\frac{d}{dx} [(x - \lambda)^r F(x)] \Big|_{x=\lambda} = d_1 \quad (1.98)$$

Άρα, το d_1 υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο $(x - \lambda)^r$ από τον όρο $F(x)$, παραγωγίζοντας την υπόλοιπη έκφραση ως προς x και μετά θέτοντας $x = \lambda$. Συνεχίζοντας κατ’ αυτόν τον τρόπο, έχουμε ότι

$$d_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dx^i} [(x - \lambda)^r F(x)] \Big|_{x=\lambda} \quad (1.99)$$

Άρα ο συντελεστής d_i υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο $(x - \lambda)^r$ στο $F(x)$, υπολογίζοντας μετά την i -οστή παράγωγο την έκφραση που απομένει, διαιρώντας με $i!$, και τέλος θέτοντας $x = \lambda$.

Υπάρχουν αρκετές συντομεύσεις και παραλλαγές που μπορούν να γίνουν για να διευκολυνθεί η επίτευξη της PFE, αλλά οι παραπάνω δυο περιπτώσεις είναι οι πιο γενικές.

Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα : Απλές Ρίζες

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x + 11}{x^2 - x - 6} \quad (1.100)$$

Λύση:

Η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερη του παρονομαστή, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας το ανάπτυγμα. Θα είναι

$$f(x) = \frac{3x + 11}{x^2 - x - 6} = \frac{3x + 11}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} \quad (1.101)$$

με

$$A = \frac{3x + 11}{(x - 3)(x + 2)}(x + 2) \Big|_{x=-2} = \frac{3x + 11}{x - 3} \Big|_{x=-2} = \frac{-6 + 11}{-5} = -1 \quad (1.102)$$

$$B = \frac{3x + 11}{(x + 2)(x - 3)}(x - 3) \Big|_{x=3} = \frac{3x + 11}{x + 2} \Big|_{x=3} = \frac{9 + 11}{5} = 4 \quad (1.103)$$

Οπότε

$$f(x) = \frac{4}{x - 3} - \frac{1}{x + 2} \quad (1.104)$$

Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα : Πολλαπλή Ρίζα

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} \quad (1.105)$$

Λύση:

Εδώ η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μεγαλύτερη του παρονομαστή, οπότε πριν το ανάπτυγμα θα χρειαστεί διαίρεση των πολυωνύμων. Η διαίρεση θα σταματήσει όταν το πολυώνυμο του υπολοίπου έχει μικρότερη τάξη από αυτή του διαιρέτη. Η διαίρεση φαίνεται στο Σχήμα 1.8.

Άρα θα είναι

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} = x - 2 - \frac{18}{x^3 - 3x^2} \quad (1.106)$$

$$= x - 2 + \frac{-18}{x^2(x - 3)} = x - 2 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 3} \quad (1.107)$$

Οι συντελεστές A, B, C δίνονται ως (δείτε τις Σχέσεις (1.93, 1.99))

$$A = \frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{-18}{x^2(x - 3)} \right] \Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} \frac{-18}{x - 3} \Big|_{x=0} = \frac{18}{(x - 3)^2} \Big|_{x=0} = 2 \quad (1.108)$$

$$B = \frac{-18}{x^2(x - 3)} x^2 \Big|_{x=0} = \frac{-18}{x - 3} \Big|_{x=0} = 6 \quad (1.109)$$

$$C = \frac{-18}{(x - 3)x^2} (x - 3) \Big|_{x=3} = \frac{-18}{x^2} \Big|_{x=3} = -2 \quad (1.110)$$

Άρα τελικά

$$f(x) = x - 2 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{2}{x - 3} \quad (1.111)$$

$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18$	$x^3 - 3x^2$
$x^4 - 3x^3$	$x - 2$
$-2x^3 + 6x^2 - 18$	
$-2x^3 + 6x^2$	
18	

Σχήμα 1.8: Διαίρεση πολυωνύμων.

Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα : Μιγαδική Συνάρτηση

Αναπτύξτε σε Μερικά Κλάσματα τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4 + jx}{2 + 3jx - x^2} \quad (1.112)$$

Λύση:

Η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερη του παρονομαστή οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν το ανάπτυγμα. Θα είναι

$$f(x) = \frac{4 + jx}{2 + 3jx - x^2} = \frac{4 + jx}{(1 + jx)(2 + jx)} = \frac{A}{1 + jx} + \frac{B}{2 + jx} \quad (1.113)$$

με

$$A = \frac{4 + jx}{(2 + jx)(1 + jx)}(1 + jx) \Big|_{jx=-1} = \frac{4 + jx}{2 + jx} \Big|_{jx=-1} = 3 \quad (1.114)$$

$$B = \frac{4 + jx}{(1 + jx)(2 + jx)}(2 + jx) \Big|_{jx=-2} = \frac{4 + jx}{1 + jx} \Big|_{jx=-2} = -2 \quad (1.115)$$

Άρα

$$f(x) = \frac{3}{1 + jx} - \frac{2}{2 + jx} \quad (1.116)$$

1.6 Βασικά Στοιχεία Πιθανοτήτων και Κατανομών

Παρ'όλο που η πλειονότητα των περιεχομένων αυτού του βιβλίου αφορά ντετερμινιστικές συναρτήσεις του χρόνου ή της συχνότητας, ένα σημαντικό κεφάλαιο αφορά τη μελέτη τυχαίων σημάτων στο χώρο του χρόνου. Η κατανόηση των εννοιών που εμπίπτουν σε αυτό το κεφάλαιο περνά υποχρεωτικά μέσω μερικών βασικών στοιχείων πιθανοτήτων και συνεχών κατανομών. Οι βασικότερες έννοιες περιγράφονται σε αυτήν την Παράγραφο, η οποία προϋποθέτει στοιχειώδεις γνώσεις συνολοθεωρίας. Για αναλυτικότερη μελέτη πιθανοτήτων και κατανομών, ο αναγνώστης μπορεί να διαβάσει τα [1,2,3,4,5,6], ενώ για εφαρμογές τους σε τηλεπικοινωνίες και επεξεργασία σήματος, τα συγγράμματα [7,8,9,10] είναι εξαιρετικά.

1.6.1 Η έννοια της πιθανότητας

Σύμφωνα με τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα P ενός γεγονότος A είναι ένας πραγματικός αριθμός σχετιζόμενος με το γεγονός A , ο οποίος ικανοποιεί τα ακόλουθα τρία αξιώματα:

$$(\alpha') \quad P(A) \geq 0$$

$$(\beta') \quad P(S) = 1, \text{ όπου } S \text{ ο δειγματοχώρος του τυχαίου πειράματος, δηλ. το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}$$

$$(\gamma') \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ αν τα γεγονότα } A \text{ και } B \text{ είναι ξένα: } A \cap B = \emptyset$$

1.6.2 Πιθανότητες Γεγονότων

Από τα παραπάνω αξιώματα, μπορούν να προκύψουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

$$(\alpha'') \quad P(A^c) = 1 - P(A), \text{ όπου } A^c \text{ είναι το συμπλήρωμα του γεγονότος } A, \text{ δηλ. όλα τα γεγονότα που δεν ανήκουν στο } A$$

$$(\beta'') \quad P(\emptyset) = 0$$

$$(\gamma'') \quad P(A) \leq P(B), \text{ αν } A \subset B$$

$$(\delta'') \quad P(A) \leq P(S) = 1$$

$$(\epsilon'') \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$$

1.6.3 Δεσμευμένη Πιθανότητα και Ανεξαρτησία

Η δεσμευμένη πιθανότητα ενός γεγονότος A δεδομένου ενός γεγονότος B συμβολίζεται με $P(A|B)$ και ορίζεται ως

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \quad (1.117)$$

με $P(A \cap B)$ η πιθανότητα της τομής των γεγονότων A, B . Λύνοντας ως προς $P(A \cap B)$, έχουμε

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \quad (1.118)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει την πιθανότητα να συμβαίνουν τα γεγονότα A και B συναρτήσει των πιθανοτήτων $P(B)$ και $P(A|B)$.

Αν εκφράσουμε τη Σχέση (1.118) ως

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \quad (1.119)$$

έχουμε

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (1.120)$$

η οποία σχέση είναι γνωστή ως ο *κανόνας του Bayes*.

Δυο γεγονότα A, B λέγονται *ανεξάρτητα* αν ισχύουν οι σχέσεις

$$P(A|B) = P(A) \text{ και } P(B|A) = P(B) \quad (1.121)$$

Για δυο ανεξάρτητα γεγονότα, η πιθανότητα της τομής τους ισούται με το γινόμενο των επιμέρους πιθανοτήτων:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (1.122)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να επεκταθεί για N το πλήθος γεγονότα.

1.6.4 Ολική Πιθανότητα

Αν θεωρήσουμε μια διαμέριση του δειγματοχώρου S , δηλ.

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S \quad (1.123)$$

με

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j \quad (1.124)$$

Έστω B ένα οποιοδήποτε γεγονός στο δειγματοχώρο S . Τότε

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i) \quad (1.125)$$

η οποία ονομάζεται *ολική πιθανότητα* του γεγονότος B . Από την παραπάνω σχέση προκύπτει το *θεώρημα του Bayes* ως

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)} \quad (1.126)$$

1.6.5 Τυχαιές Μεταβλητές

Μια μεταβλητή ονομάζεται *τυχαία* αν οι τιμές της εξαρτώνται από κάποιο πιθανοκρατικό νόμο. Πιο τυπικά, μια τυχαία μεταβλητή X είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχεί μια πραγματική τιμή σε κάθε γεγονός του δειγματοχώρου S .

Οι τυχαίες μεταβλητές χωρίζονται σε *συνεχείς* και *διακριτές*. Οι διακριτές παίρνουν πραγματικές τιμές οι οποίες είναι μετρήσιμες (στο πλήθος), ενώ οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Ο αριθμός των πτώσεων σύνδεσης στο διαδίκτυο ανά ημέρα είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, ενώ η ακριβής ώρα που θα συμβεί κάθε πτώση είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Θα μας απασχολήσουν κυρίως συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, οπότε θα επικεντρωθούμε μόνο σε αυτές.

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (1.127)$$

και η οποία ουσιαστικά αθροίζει τις πιθανότητες ως ότου $X \leq x$. Ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες παρουσιάζονται παρακάτω:

$$(\alpha') \quad 0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$(\beta') \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \text{ αν } x_1 < x_2$$

$$(\gamma') \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

$$(\delta') \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$(\epsilon') \quad P(a < X \leq b) = P(X < b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Η παράγωγος της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $F_X(x)$ η οποία συμβολίζεται ως

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (1.128)$$

και ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* της τυχαίας μεταβλητής X . Ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες παρουσιάζονται παρακάτω:

$$(\alpha') \quad f_X(x) \geq 0$$

$$(\beta') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$(\gamma') \quad P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

$$(\delta') \quad P(X = x) = 0$$

$$(\epsilon') \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

1.6.5.1 Μέση Τιμή

Η μέση τιμή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής συμβολίζεται με $E[X]$ και ορίζεται ως

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (1.129)$$

Πολλές φορές αναφέρεται ως *στατιστική μέση τιμή*, για να υπάρξει διαφοροποίηση από τη *χρονική μέση τιμή*. Η μέση τιμή είναι γραμμική, άρα

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (1.130)$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να εξάγει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$(\alpha') \quad E[aX] = aE[X]$$

$$(\beta') \quad E[a] = a$$

$$(\gamma') \quad E[X + a] = E[X] + a$$

Γενικότερα μπορεί κανείς να ορίσει τη *ν -οστή ροπή* της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X ως

$$E[X^\nu] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu f_X(x) dx \quad (1.131)$$

1.6.5.2 Διασπορά

Η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με σ_X^2 ή $\text{var}(X)$, και ορίζεται ως

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx \quad (1.132)$$

Η ποσότητα σ_X ονομάζεται *τυπική απόκλιση* της τυχαίας μεταβλητής X . Οι δυο αυτές ποσότητες εκφράζουν την απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής X από τη μέση τιμή της $E[X]$. Μάλιστα μπορεί κανείς να γράψει τη διασπορά συναρτήσει της μέσης τιμής ως

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2 \quad (1.133)$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να εξάγει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$(\alpha') \text{ var}(aX) = a^2 \text{ var}(X)$$

$$(\beta') \text{ var}(a) = 0$$

$$(\gamma') \text{ var}(X + a) = \text{var}(X)$$

1.6.6 Πολυδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

Αν X, Y είναι δυο τυχαίες μεταβλητές του ίδιου δειγματοχώρου S , τότε το ζεύγος (X, Y) αποτελεί μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή αν για κάθε μια από τις X, Y αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός για κάθε γεγονός του δειγματοχώρου.

Όμοια με τις μονοδιάστατες τυχαίες μεταβλητές, ορίζουμε την *από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής* των τυχαίων μεταβλητών X, Y , η οποία συμβολίζεται ως $F_{XY}(x, y)$, ως

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (1.134)$$

1.6.6.1 Περιθωριακές Αθροιστικές Συναρτήσεις Κατανομής

Μπορεί κανείς να ορίσει τις λεγόμενες *περιθωριακές συναρτήσεις κατανομής* ως

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{XY}(x, y) dy \quad (1.135)$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{XY}(x, y) dx \quad (1.136)$$

που, όπως είναι φανερό, πρόκειται για το ολοκλήρωμα της από κοινού αθροιστικής συνάρτησης κατανομής επάνω σε μια από τις δυο τυχαίες μεταβλητές.

1.6.6.2 Από Κοινού Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας

Έστω (X, Y) μια διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_{XY}(xy)$. Η παράγωγός της

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (1.137)$$

ονομάζεται *από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* της τυχαίας μεταβλητής (X, Y) . Ως εκ τούτου, είναι προφανές ότι ισχύει

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(u, v) du dv \quad (1.138)$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$(\alpha') f_{XY}(x, y) \geq 0$$

$$(\beta') \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

1.6.6.3 Περιθωριακές Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας

Όμοια με τη μονοδιάστατη περίπτωση, οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας ορίζονται ως

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad (1.139)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx \quad (1.140)$$

1.6.6.4 Δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται ως

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \quad (1.141)$$

ή

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \quad (1.142)$$

1.6.7 Συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών

Η συνάρτηση

$$Y = g(X) \quad (1.143)$$

αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή, αν η X είναι μια τυχαία μεταβλητή. Αν X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$, τότε

$$F_Y(y) = \int_{D_y} f_X(x) dx = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx \quad (1.144)$$

με D_y το υποσύνολο του πεδίου ορισμού της X τέτοιο ώστε $g(x) \leq y$.

Αν η $g(x)$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η συνάρτηση $y = g(x)$ είναι *ένα προς ένα*. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y δίνεται ως

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = f_X(h(y)) \left| \frac{dh(y)}{dy} \right| \quad (1.145)$$

με $h(y) = g^{-1}(y) = x$.

1.6.7.1 Μέση τιμή

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$ δίνεται ως

$$\mu_Y = E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (1.146)$$

1.6.7.2 Διασπορά

Η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$ δίνεται ως

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - \mu_Y)^2 f_X(x) dx \quad (1.147)$$

1.6.8 Ανεξαρτησία Τυχαίων Μεταβλητών

Αν ισχύει ότι

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad (1.148)$$

για κάθε x, y τότε οι τυχαίες μεταβλητές X, Y ονομάζονται *ανεξάρτητες*. Η σχέση αυτή περνά και στις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, ως

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (1.149)$$

1.6.9 Συσχέτιση Τυχαίων Μεταβλητών

Δυο τυχαίες μεταβλητές λέγονται *ασυσχέτιστες* αν

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad (1.150)$$

Η ανεξαρτησία συνεπάγεται τη μη συσχέτιση δυο τυχαίων μεταβλητών. Άρα αν δυο τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες είναι και ασυσχέτιστες.

1.6.10 Χρήσιμες Τυχαίες Μεταβλητές

Παρ' όλη την πληθώρα τυχαίων μεταβλητών που υπάρχουν, θα αναφέρουμε τις πιο χρήσιμες στην πράξη.

1.6.10.1 Ομοιόμορφη Τυχαία Μεταβλητή

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τιμές μεταξύ a και b με ίση πιθανότητα, ονομάζεται *ομοιόμορφα κατανομημένη τυχαία μεταβλητή*, και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται ως

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.151)$$

Για παράδειγμα, όταν η φάση ενός ημιτόνου είναι μια τυχαία μεταβλητή, τότε μπορεί να περιγραφεί ως μια ομοιόμορφα κατανομημένη τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $[0, 2\pi)$.

Η μέση τιμή και η διασπορά της δίνονται ως

$$\mu_X = \frac{1}{2}(a+b) \quad (1.152)$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2 \quad (1.153)$$

1.6.10.2 Γκαουσιανή Τυχαία Μεταβλητή

Η γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή περιγράφεται από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (1.154)$$

με μ_X, σ_X^2 τη μέση τιμή και τη διασπορά της γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής. Η γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή οφείλει τη χρησιμότητα - και τη διασημότητά - της στην συχνή εφαρμογή της σε τηλεπικοινωνιακά συστήματα, κι αυτό γιατί ο θερμικός θόρυβος που υπάρχει έμφυτος σε κάθε τηλεπικοινωνιακό σύστημα (ο θόρυβος που οφείλεται στην τυχαία κίνηση των ηλεκτρονίων) μπορεί να μοντελοποιηθεί καλά ως μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή.

Για δυο τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ονομάζονται *από κοινού γκαουσιανές*, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται ως

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)} \quad (1.155)$$

με

$$\rho = \frac{E[XY] - \mu_X\mu_Y}{\sigma_X\sigma_Y} \quad (1.156)$$

ο λεγόμενος *συντελεστής συσχέτισης*. Όταν δυο τυχαίες μεταβλητές είναι από κοινού γκαουσιανές, τότε και οι δεσμευμένες πυκνότητες πιθανότητας $f(x|y), f(y|x)$ είναι γκαουσιανές. Επίσης, δυο ασυσχέτιστες γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές είναι και ανεξάρτητες.

1.6.11 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Το περίφημο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem) αφορά το άθροισμα n τυχαίων μεταβλητών, $X_1, X_2, \dots, X_n$. Αν οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και οι μέσες τιμές

και διασπορές τους είναι μ_i και σ_i^2 , με $i = 1, 2, \dots, n$ αντίστοιχα, τότε η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad (1.157)$$

συγκλίνει στην αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή μηδέν και μοναδιαία διασπορά. Αν οι τυχαίες μεταβλητές, εκτός από ανεξάρτητες, είναι και όμοια κατανεμημένες, τότε η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1.158)$$

συγκλίνει στην αθροιστική συνάρτηση κατανομής της γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή m και διασπορά $\frac{\sigma^2}{n}$.

1.7 Χρήσιμες Σχέσεις

Ας αναφέρουμε μερικές χρήσιμες σχέσεις από την Τριγωνομετρία και τον Απειροστικό Λογισμό οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνά, ώστε ο αναγνώστης να τις έχει διαθέσιμες χωρίς να χρειάζεται να ανατρέχει σε άλλες πηγές.

Ο Πίνακας 1.4 αναφέρει μερικές χρήσιμες τριγωνομετρικές ταυτότητες, ενώ οι Πίνακες 1.5 και 1.6 περιλαμβάνουν σχέσεις παραγώγων και ολοκληρωμάτων μιας μεταβλητής, αντίστοιχα.

Τριγωνομετρικές Σχέσεις			
A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$\cos(x \pm \pi/2) = \mp \sin(x)$	2	$\sin(x \pm \pi/2) = \pm \cos(x)$
3	$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$	4	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
5	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$	6	$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
7	$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$	8	$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$
9	$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$	10	$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}$
11	$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$	12	$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$
13	$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$		

Πίνακας 1.4: Πίνακας Χρήσιμων Τριγωνομετρικών Σχέσεων

Παράγωγοι			
A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y)\frac{dy}{dx}$	2	$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$
3	$\frac{d}{dx}\cos(ax) = \frac{1}{a}\sin(ax)$	4	$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g^2(x)}$
5	$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	6	$\frac{d}{dx}\ln(ax) = \frac{1}{x}$
7	$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$	8	$\frac{d}{dx}\sin(ax) = a\cos(ax)$
9	$\frac{d}{dx}\cos(ax) = -a\sin(ax)$	10	$\frac{d}{dx}\tan(ax) = \frac{a}{\cos^2(ax)}$
11	$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(ax) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$	12	$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(ax) = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$
13	$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(ax) = \frac{a}{1+a^2x^2}$		

Πίνακας 1.5: Πίνακας Χρήσιμων Παραγώγων

Ολοκληρώματα	
A/A	Σχέση
1	$\int f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)dx = f(x)g(x) - \int \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x)dx$
2	$\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$
3	$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$
4	$\int \sin^2(ax)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
5	$\int \cos^2(ax)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
6	$\int x \sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}(\sin(ax) - ax \cos(ax))$
7	$\int x \cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}(\cos(ax) + ax \sin(ax))$
8	$\int x^2 \sin(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax \sin(ax) - 2 \cos(ax) - a^2x^2 \cos(ax))$
9	$\int x^2 \cos(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cos(ax) - 2 \sin(ax) + a^2x^2 \sin(ax))$
10	$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$
11	$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$
12	$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$
13	$\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$
14	$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx))$
15	$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx))$
16	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$
17	$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$

Πίνακας 1.6: Πίνακας Χρήσιμων Ολοκληρωμάτων

Σειρές		
A/A	Σχέση	Σχέση
1	$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad a < 1$
2	$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}, \quad a < 1$
3	$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$	$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$
4	$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$	$\sum_{n=N_1}^{N_2} c = c(N_2 - N_1 + 1)$

Πίνακας 1.7: Πίνακας Χρήσιμων Αθροισμάτων.

1.8 Ασκήσεις

1. Για τους μιγαδικούς

$$z_1 = 2 - j5 \quad (1.159)$$

$$z_2 = 8 + j3 \quad (1.160)$$

βρείτε γεωμετρικά και αλγεβρικά τα αποτελέσματα των πράξεων

$$z_1 z_2, \quad z_1 + z_2, \quad z_1/z_2, \quad z_1 z_1^* \quad (1.161)$$

2. Για τους μιγαδικούς

$$z_1 = 1 + j2 \quad (1.162)$$

$$z_2 = -2 + j \quad (1.163)$$

βρείτε γεωμετρικά και αλγεβρικά τα αποτελέσματα των πράξεων

$$z_1 z_2, \quad z_1 + z_2, \quad z_1/z_2, \quad z_1 z_1^*, \quad 1/z_1, \quad 1/z_2^* \quad (1.164)$$

3. Αν $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ και $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$, αποδείξτε τις σχέσεις

$$(\alpha') \quad \Re\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*} \right]$$

$$(\beta') \quad (|z_1| - |z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

4. Λύστε τις εξισώσεις

$$z^5 = 1 \quad (1.165)$$

$$z^2 = -j \quad (1.166)$$

$$z^4 = -16 \quad (1.167)$$

με z μιγαδικό αριθμό.

5. Έστω $\{z_i\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο μιγαδικών αριθμών. Δείξτε ότι

$$\prod_i z_i = \prod_i |z_i| \left(\cos\left(\sum_i \theta_i\right) + j \sin\left(\sum_i \theta_i\right) \right) \quad (1.168)$$

όπου $z_i = |z_i| e^{j\theta_i}$.

6. Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler, γράψτε το $\cos(3\theta)$ ως συνάρτηση του $\sin(\theta)$ και του $\cos(\theta)$.

7. Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler, δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) d\theta = \frac{3}{4}\pi \quad (1.169)$$

8. Δείξτε ότι

$$\int_0^\pi \sin^3(5t) dt = \frac{4}{15} \quad (1.170)$$

με χρήση των σχέσεων του Euler και της ταυτότητας $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

9. Γράψτε στη μορφή $x + jy$ το μιγαδικό αριθμό $z = e^{e^j}$.

10. Υπολογίστε το αποτέλεσμα της πράξης

$$\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} - e^{j4\pi/3} \quad (1.171)$$

11. Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του θ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\Re\{(2+j)e^{j\theta}\} = -1 \quad (1.172)$$

12. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία στην εξίσωση

$$|z+2| = |z-1| \quad (1.173)$$

και λύστε την αλγεβρικά.

13. Να λυθεί η εξίσωση

$$|z-1| = \Re\{z\} + 1 \quad (1.174)$$

14. Γνωρίζουμε ότι για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (1.175)$$

Ισχύει όμως

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z} \quad (1.176)$$

για $z \in \mathbb{C}$;

15. Βρείτε ποιά από τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά και υπολογίστε την περίοδό τους, όπου αυτή υπάρχει.

(α') $x_1(t) = 2je^{j5t}$

(β') $x_2(t) = e^{-3+2j}t$

(γ') $x_3(t) = 3 \sin(t) + 2 \sin(3t)$

(δ') $x_4(t) = 6 + 2 \sin(2t) + 4 \cos(7t)$

(ε') $x_5(t) = 2 \sin(2t) + 4 \cos(7\pi t)$

16. Βρείτε ποιά από τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά και υπολογίστε την περίοδό τους, όπου αυτή υπάρχει.

(α') $x(t) = 2 \cos(3t + \pi/4)$

(β') $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$

(γ') $x(t) = (\sin(t - \pi/6))^2$

(δ') $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-3n)^2}$

17. Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ με περίοδο $T_0 = 1/f_0$.

(α') Δείξτε ότι η μετατόπιση του σήματος κατά $0 \leq \tau < T_0$ ισοδυναμεί με αρχική μετατόπιση φάσης $0 \leq \phi < 2\pi$.

(β') Ποιά θα πρέπει να είναι τα όρια του τ για να έχουμε $-\pi \leq \phi < \pi$;

18. Γράψτε το άθροισμα

$$x(t) = 2 \cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2} \cos\left(20\pi t - \frac{3\pi}{4}\right) \quad (1.177)$$

στη μορφή

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (1.178)$$

19. Γράψτε το σήμα

$$x(t) = 7 \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \cos(2\pi f_0 t) \quad (1.179)$$

στη μορφή

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (1.180)$$

20. Έστω το σήμα

$$x(t) = 7 \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.181)$$

Βρείτε το σήμα $z(t)$ τέτοιο ώστε $x(t) = \Re\{z(t)\}$.

21. Λύστε την εξίσωση

$$y(t) = y(t-1) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \quad (1.182)$$

θέτοντας όπου $y(t) = A \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$.

