ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 13Η

- Συστήματα στο χώρο του Laplace

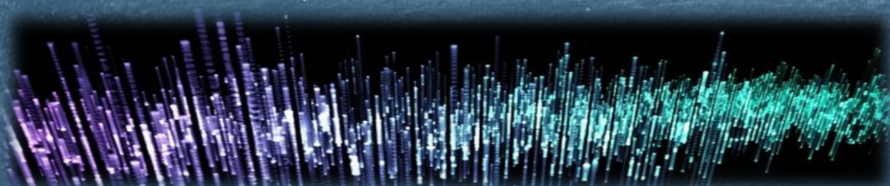
Τι περιέχει το ΗΥ215?

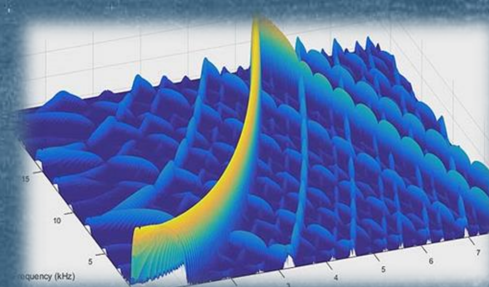
1^{o} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία





- **Κριτήριο Ευστάθειας Συστήματος στο χώρο του Laplace**
- Ευστάθεια: $|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \quad B_x, B_y \in \Re_+$
- Ισοδύναμα, οι χαρακτηριστικές ρίζες του πολυωνύμου ενός συστήματος που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση είναι όλες αρνητικές
- Ισοδύναμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < +\infty$$

  - Δηλ. η κρουστική απόκριση πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη

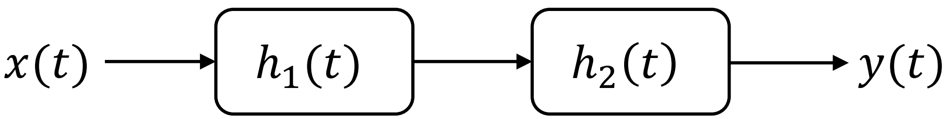
- Ισοδύναμα, πρέπει να υπάρχει ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματος

- Ισοδύναμα ☺, το πεδίο σύγκλισης του Μετασχ. Laplace πρέπει να περιέχει το φανταστικό άξονα

- Άρα: **ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισής της συνάρτησης μεταφοράς του**

- **Διατάξεις ΓΧΑ Συστημάτων**

- Διάταξη σε σειρά

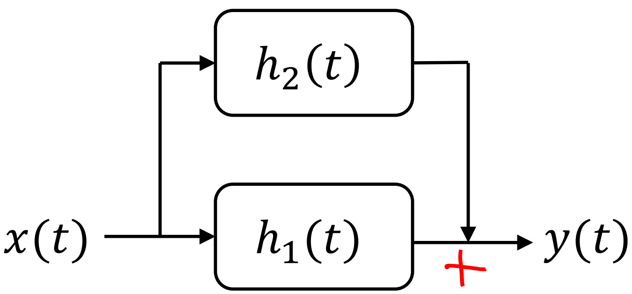


$$y(t) = \underbrace{\boxed{h_1(t) * h_2(t)}}_{h_{total}(t)} * x(t)$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{\boxed{H_1(s)H_2(s)}}_{H_{total}(s)} X(s)$$

- Διάταξη σε παραλληλία



$$\begin{aligned} y(t) &= \left(h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)\right) \\ &= \underbrace{\boxed{\left(h_1(t) + h_2(t)\right)}}_{h_{total}(t)} * x(t) \end{aligned}$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \\ &= \underbrace{\boxed{\left(H_1(s) + H_2(s)\right)}}_{H_{total}(s)} X(s) \end{aligned}$$

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**
- **Πόλοι**: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) \to \infty$
- **Μηδενικά**: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) = 0$
- Έχουμε ήδη δει ότι οι ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς αποτελούν πόλους και μηδενικά του συστήματος
  - Είναι μόνο αυτά??
- Για παράδειγμα, έστω $H(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+1)}, \sigma > 3$
- Έχει δυο πόλους $s = 3, s = -1$, και ένα μηδενικό $s = 2$
- Προσέξτε όμως ότι

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\cancel{s}\left(1-\frac{2}{s}\right)}{s^{\cancel{2}}\left(1-\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right)} = \lim_{s\to\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{s}\right)}{s\left(1-\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right)} = 0$$

- Άρα υπάρχει **ένα** "έξτρα" μηδενικό **<u>στο άπειρο</u>**!
- Άρα το σύστημα έχει **2 πόλους και 2 μηδενικά**!

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**

- Γενικότερα

$$H(s) = A\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} = A\frac{s^M\prod_{i=1}^{M}\left(1-\frac{c_i}{s}\right)}{s^N\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{d_k}{s}\right)} = As^{M-N}\frac{\prod_{i=1}^{M}\left(1-\frac{c_i}{s}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{d_k}{s}\right)}$$

- Αν $M > N \Leftrightarrow M-N > 0$, και τότε $\lim_{s\to\infty} H(s) = \infty$, άρα υπάρχουν $M-N$ πόλοι στο **άπειρο**

- Αν $M < N \Leftrightarrow M-N < 0$, και τότε $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχουν $N-M$ μηδενικά στο **άπειρο**

- Αν $M = N$, τότε δεν υπάρχουν επιπλέον πόλοι ή μηδενικά **στο άπειρο**

- Άρα :

- **Σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, το πλήθος των πόλων ισούται με το πλήθος των μηδενικών**

$$\#\,\textbf{πόλων} = \#\,\textbf{μηδενικών}$$

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**

- **Παράδειγμα:**

ευσταθές $\Longleftrightarrow$ $\sigma = 0 \in R_H$

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$ και έναν πόλο στη θέση $s = 3$

a) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι πεπερασμένης διάρκειας?

b) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αριστερόπλευρο σήμα?

c) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι δεξιόπλευρο σήμα?

d) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αμφίπλευρο σήμα?

Ας διαχωρίσουμε τις περιπτώσεις: i) πόλος στο $s=3$ μοναδικός
ii) —— " —— όχι μοναδικός

i) a. Όχι, γιατί η ύπαρξη πόλου σημαίνει ότι το $h(t)$ θα περιλαμβάνει μια βηματική συνάρτηση $u(t)$, που την καθιστά άπειρης διάρκειας σήμα. Εναλλακτικά, τα σήματα πεπερασμένης διάρκειας <u>δεν</u> περιλαμβάνουν πόλους στο μετασχ. Laplace τους.

b Επειδή $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \Longleftrightarrow$ ευστάθεια, τότε πρέπει το

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**

- **Παράδειγμα:**

πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace $H(s)$ να περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα. Άρα μπορεί να είναι αριστερόπλευρη η $h(t)$ αν επιλέξαμε $\sigma < 3$ για πεδίο σύγκλισης της $H(s)$.

c. Όχι, δεν μπορεί να είναι δεξιόπλευρο σήμα γιατί για να είναι τέτοιο πρέπει να επιλέξουμε $\sigma > 3$ ως πεδίο σύγκλισης, που δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα $\sigma = 0$.

d. Όχι, δεν μπορεί να είναι αμφίπλευρο, γιατί τα αμφίπλευρα σήματα έχουν πεδίο σύγκλισης μια "λωρίδα" μεταξύ δυο πόλων. Εδώ θεωρούμε ότι ο πόλος είναι μοναδικός, άρα δεν μπορεί το $h(t)$ να είναι αμφίπλευρο.

ii) a. Όχι, γιατί η ύπαρξη ενός ή περισσότερων πόλων δεν επιτρέπει το σήμα $h(t)$ να είναι πεπερασμένης διάρκειας (δείτε i)a.).

b. Αν υπήρχαν άλλοι πόλοι, θα πρέπει αυτοί να βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, ώστε να μπορούμε να ορίσουμε ένα

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**

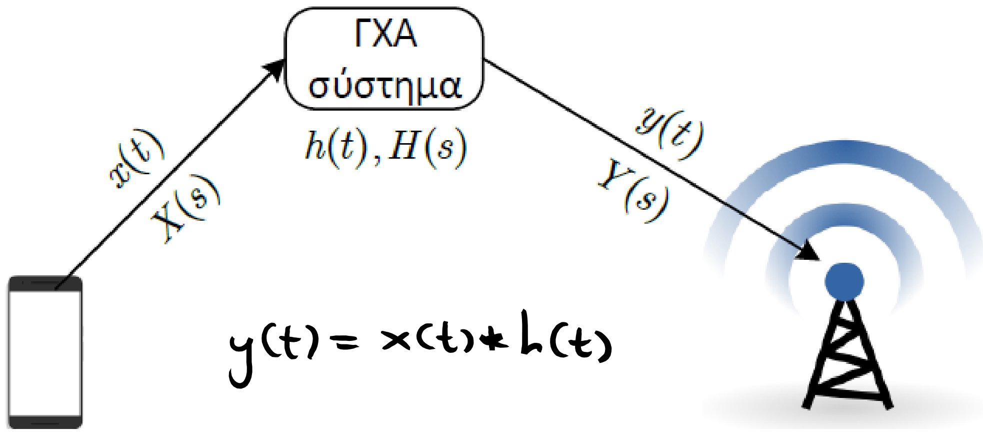
- **Παράδειγμα:**

πεδίο σύγκλισης $\sigma < \sigma_0$, με $\sigma_0 > 0$ ώστε να περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας. Αν υπάρχουν άλλοι πόλοι με $\sigma_0 > 3$, τότε με πεδίο σύγκλισης $\sigma < 3$ μπορούμε να έχουμε αριστερόπλευρο σήμα στο χρόνο. Αν υπάρχει έστω ένας πόλος s_0 με $\sigma_0 < 0$, τότε δεν μπορεί το σήμα στο χρόνο να είναι αριστερόπλευρο και ευσταθές ταυτόχρονα.

c. Δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να είναι δεξιόπλευρο και ευσταθές, αφού ο πόλος $s=3$ απαγορεύει την ύπαρξη ενός πεδίου σύγκλισης $\sigma > \sigma_0$, με $\sigma_0 < 0$, έτσι ώστε να περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας.

d. Για να είναι αμφίπλευρο και ευσταθές, πρέπει να υπάρχει ένα πεδίο σύγκλισης $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, με $\sigma_1 < 0$ και $\sigma_2 \geq 3$, έτσι ώστε το πεδίο σύγκλισης να είναι "λωρίδα" που να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Άρα θέλουμε έναν τουλάχιστον πόλο με $\sigma_0 < 0$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το σήμα στο χρόνο δεν μπορεί να είναι αμφίπλευρο.

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Με ιδανικό κανάλι επικοινωνίας, θα είχαμε

$$Y(s) = X(s)$$

$H_{inv}(s)$

- Στην πράξη

$$Y(s) = H(s)X(s) \rightarrow Y'(s) = \boxed{\frac{1}{\cancel{H(s)}}}\cancel{H(s)}X(s) = X(s)$$

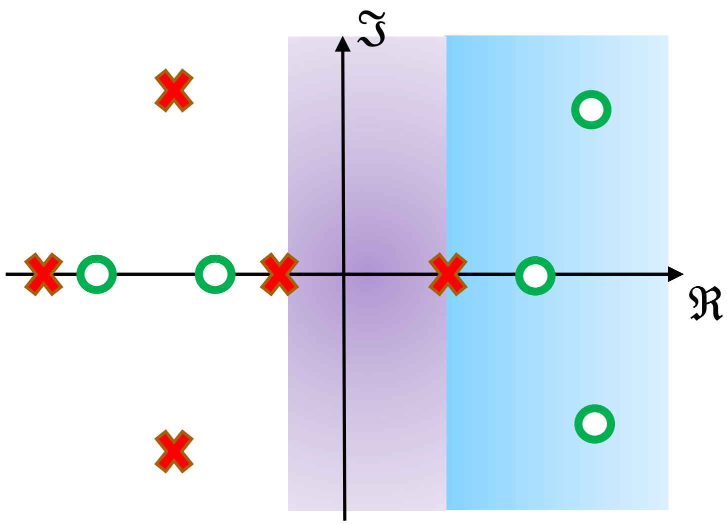
έτσι ώστε $Y(f) = X(f)$

- Πολλές φορές το $H_{inv}(s)$ δεν είναι πραγματοποιήσιμο, γιατί δεν είναι ευσταθές η/και αιτιατό
- Πως αντιμετωπίζουμε τέτοιες καταστάσεις?
- Μπορούμε έστω να έχουμε $Y(s) \approx X(s) \Rightarrow Y(f) \approx X(f)$?

- **Ευστάθεια και Αιτιατότητα**

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια ***ρητή*** συνάρτηση μεταφοράς αντιστοιχεί σε αιτιατό, αντι-αιτιατό, ή μη αιτιατό σύστημα (κρουστική απόκριση)
  - Ανάλογα με το πεδίο σύγκλισης

- Έστω το ακόλουθο διάγραμμα πόλων-μηδενικών που αντιστοιχεί σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς



- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα αιτιατό?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα ευσταθές?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι **και** αιτιατό **και** ευσταθές? ☹

- Για να είναι ένα σύστημα **ευσταθές και αιτιατό, πρέπει όλοι οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου**

- Εναλλακτικά, **όλοι οι πόλοι θα πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος**

Αντίστροφο Σύστημα

- Το αντίστροφο σύστημα ενός δοθέντος ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$h(t) * h_{inv}(t) = \delta(t)$$

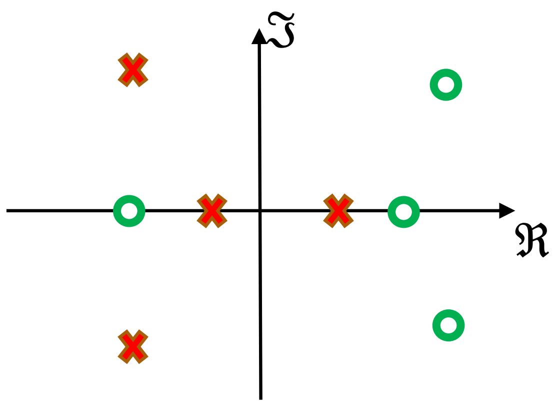
- Στο χώρο του Laplace:

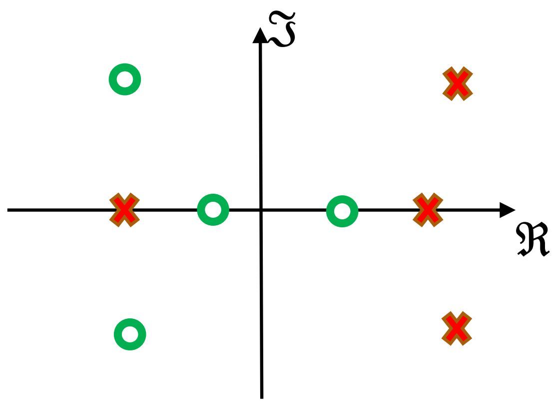
$$H(s)H_{inv}(s) = 1, \quad \boxed{R_H \cap R_{H_{inv}} \neq \emptyset}$$

$$H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)}$$

- Στο αντίστροφο σύστημα, οι πόλοι και τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται μηδενικά και πόλοι του αντιστρόφου συστήματος, αντίστοιχα

$$H(s) = A\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} \rightarrow H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)}{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}$$





- **Αντίστροφο Σύστημα** *

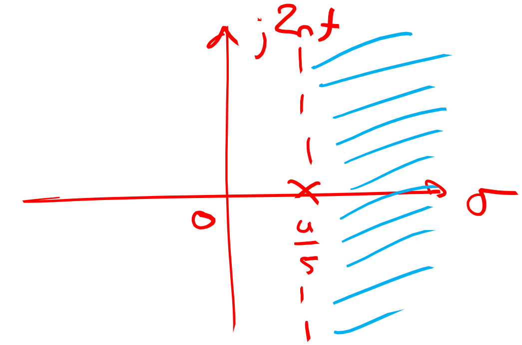
$$\begin{array}{r|l} s-\frac{4}{5} & s-\frac{1}{2} \\ \hline -\left(s-\frac{1}{2}\right) & 1 \\ \hline 0-\frac{3}{10} & \end{array}$$

$$\left(H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} \right)$$

- **Παράδειγμα:**

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s-\frac{1}{2}}{s-\frac{4}{5}}, \quad \boxed{\sigma > \frac{4}{5}} \; R_H$$



Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_{inv}(t)$.

Είναι

$$H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{\frac{s-\frac{1}{2}}{s-\frac{4}{5}}} = \frac{s-\frac{4}{5}}{s-\frac{1}{2}}, \quad R_{H_{inv}} = ?$$

- $\boxed{\sigma > \frac{1}{2}}$? $R_{H_{inv}} = ?$
- $\sigma < \frac{1}{2}$

γιατί $\{\sigma > \frac{1}{2}\} \cap \{\sigma > \frac{4}{5}\}$ δεν είναι το κενό σύνολο.

Άρα

$$H_{inv}(s) = \frac{s-\frac{4}{5}}{s-\frac{1}{2}}, \quad \sigma > \frac{1}{2}$$

Οπότε

$$h_{inv}(t) = L^{-1}\{H_{inv}(s)\} \overset{*}{=} L^{-1}\left\{1 - \frac{\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}}\right\} \overset{\sigma>\frac{1}{2}}{=} \delta(t) - \frac{3}{10} e^{\frac{t}{2}} u(t).$$

- **Αντίστροφο Σύστημα**
- Παράδειγμα:

Εναλλακτικά,

$$h_{inv}(t) = L^{-1}\left\{\frac{s-4/5}{s-1/2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s-\frac{1}{2}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{4/5}{s-1/2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{s\,\frac{1}{s-1/2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{d}{dt}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right\} - \frac{4}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right\}, \quad \sigma > \frac{1}{2}$$

$$= \frac{d}{dt}e^{\frac{t}{2}}u(t) - \frac{4}{5}e^{t/2}u(t)$$

$$= \frac{1}{2}e^{t/2}u(t) + e^{t/2}u'(t) - \frac{4}{5}e^{t/2}u(t)$$

$$= \frac{1}{2}e^{t/2}u(t) + e^{t/2}\delta(t) - \frac{4}{5}e^{t/2}u(t)$$

$$= \delta(t) - \frac{3}{10}e^{t/2}u(t).$$

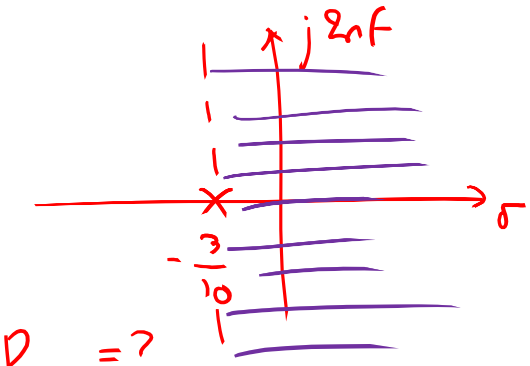
$$f(t)\delta(t) = = f(0)\delta(t)$$

- **Αντίστροφο Σύστημα**
- **Παράδειγμα:**
  - ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

$$
\begin{array}{r|l} * \quad s+\frac{3}{10} & s-\frac{1}{2} \\ \hline -\left(s-\frac{1}{2}\right) & 1 \\ \hline \frac{8}{10} & \end{array}
$$

$$
H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} \qquad R_H \cap R_{H_{inv}} \neq \emptyset
$$

$$
H(s) = \frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{3}{10}}, \qquad \underbrace{\boxed{\sigma > -\frac{3}{10}}}_{R_H}
$$



Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_{inv}(t)$.

Είναι

$$
H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{3}{10}}} = \frac{s+\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}}, \quad R_{H_{inv}} = ?
$$

1. $\sigma > \frac{1}{2}$
2. $\sigma < \frac{1}{2}$

→ ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ είναι έγκυρα πεδία σύγκλισης για το $H_{inv}(s)$!

Είναι

$$
h_{inv}(t) = L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}}\right\} \overset{*}{=} 1 + \frac{\frac{8}{10}}{s-\frac{1}{2}}, \quad R_{H_{inv}}
$$

και

- $h_{inv}(t) \overset{1}{=} \delta(t) + \frac{8}{10} e^{t/2} u(t), \quad h_{inv}(t) \overset{2}{=} \delta(t) - \frac{8}{10} e^{\frac{t}{2}} u(-t).$

- **Αντίστροφο Σύστημα**
- Παράδειγμα:

Εναλλακτικά,

$$h_{inv}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s+\frac{3}{10}}{s-\frac{1}{2}} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{s-\frac{1}{2}} \right\} + \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ s\frac{1}{s-\frac{1}{2}} \right\} + \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s-\frac{1}{2}} \right\}, \ \sigma > \frac{1}{2}$$

$$= \frac{d}{dt} e^{t/2}u(t) + \frac{3}{10} e^{t/2}u(t)$$

$$= \frac{1}{2} e^{t/2}u(t) + e^{t/2}u'(t) + \frac{3}{10} e^{t/2}u(t)$$

$$= \frac{1}{2} e^{t/2}u(t) + e^{t/2}\delta(t) + \frac{3}{10} e^{t/2}u(t)$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$= \delta(t) + \frac{8}{10} e^{t/2}u(t).$$

Αντίστοιχη λύση παίρνουμε για $\sigma < \frac{1}{2}$, με $h_{inv}(t) = \delta(t) - \frac{8}{10} e^{t/2}u(-t)$

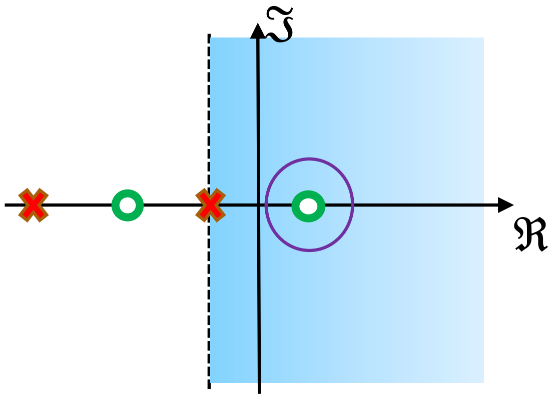
Επιβεβαιώστε το! :)

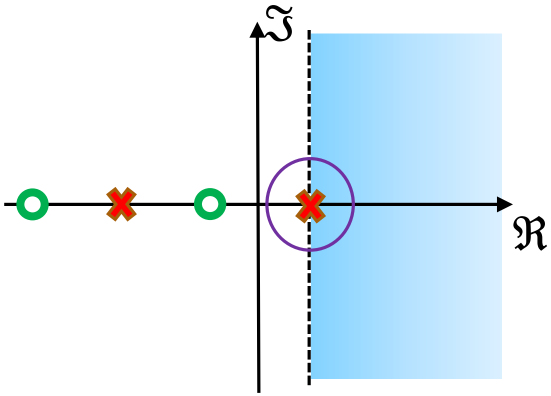
- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Από το προηγούμενο παράδειγμα, είδαμε ότι μπορεί να μην μπορούμε να έχουμε ευσταθές **και** αιτιατό *αντίστροφο* σύστημα (ταυτόχρονα), ακόμα κι αν το σύστημά μας είναι ευσταθές **και** αιτιατό!

- **Ερώτηση**: *τι πρέπει να ισχύει για ένα ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς έτσι ώστε αν αυτό είναι ευσταθές και αιτιατό, να έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα?*

- Ας το δούμε με ένα παράδειγμα





- **Ένα ευσταθές και αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα μόνον όταν όλοι πόλοι και όλα τα μηδενικά του συστήματος βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο!**

- Αυτά τα συστήματα ονομάζονται **ελάχιστης φάσης (minimum phase)**
  - ...για λόγους που **δεν** είναι εμφανείς – και δε θα μας απασχολήσουν ☺

- **Συστήματα All-pass**

- Μια επίσης σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα συστήματα all-pass
  - Ολοπερατά (in Greek ☺), δηλ. αφήνουν να περάσουν **όλες** οι συχνότητες στην έξοδο

- Η απόκριση πλάτους τους δίνεται ως

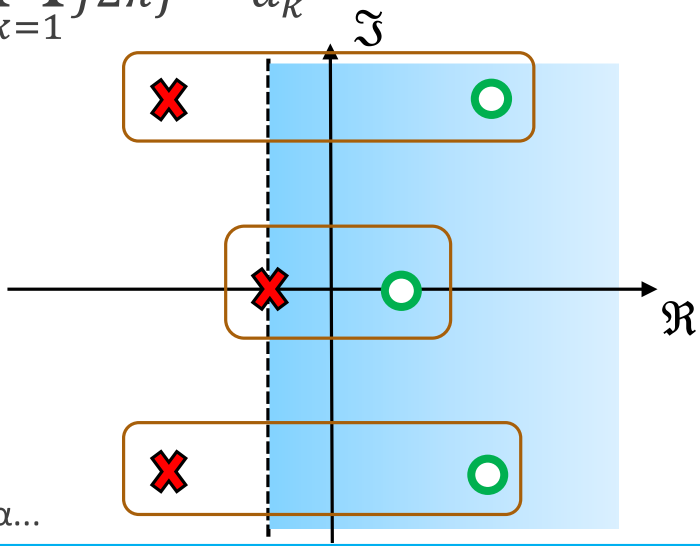
$$\left|H_{ap}(f)\right| = 1, \qquad \forall\ f$$

- Προφανώς η απόκριση φάσης τους είναι μη σταθερή

- Στο χώρο του Laplace:

$$H_{ap}(s) = \prod_{k=1}^{M} \frac{s + a_k^*}{s - a_k} \Rightarrow H_{ap}(f) = \prod_{k=1}^{M} \frac{j2\pi f + a_k^*}{j2\pi f - a_k}$$

- Οι πόλοι και τα μηδενικά ενός all-pass συστήματος βρίσκονται σε ζεύγη $(a_k, -a_k^*)$, δηλ. εκατέρωθεν του φανταστικού άξονα
  - Με ίδιο φανταστικό αλλά αντίθετο πραγματικό μέρος
  - Το διπλανό σύστημα είναι ένα ευσταθές και αιτιατό all-pass σύστημα
    - Προφανώς υπάρχουν και μη ευσταθή ή μη αιτιατά all-pass συστήματα...



Συνεχίζεται... ☺