ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 13Η

- Συστήματα στο χώρο του Laplace

- **Η συνάρτηση μεταφοράς**

- Όμοια με το μετασχ. Fourier και τα ΓΧΑ συστήματα, το σήμα

$$x(t) = e^{s_0 t} = e^{(\sigma_0 + j2\pi f)t}$$

αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η **ιδιοτιμή** του συστήματος είναι

$$H(s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-s_0 t} dt$$

που προφανώς είναι ο μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος για

$$s = s_0$$

- Όπως και στο χώρο του Fourier, έτσι και εδώ θα δώσουμε ένα όνομα σε αυτόν:

συνάρτηση μεταφοράς

Κρουστική απόκριση $h(t) \leftrightarrow$ Συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**

- Πραγματικά ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

- Για να λύσουμε μια τέτοια διαφορική εξίσωση μοναδικά, χρειαζόμαστε **N το πλήθος βοηθητικές συνθήκες**
  - Όπως π.χ. για να λύσουμε την $f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x) = ce^x, c \in \Re$ χρειαζόμαστε μια τιμή της συνάρτησης για να βρούμε το c
  - Π.χ. $f(0) = 2$ και τότε $f(x) = 2e^x$

- Όταν οι βοηθητικές συνθήκες είναι όλες μηδενικές, δηλ.

$$y(t_0) = \frac{d}{dt} y(t_0) = \frac{d^2}{dt^2} y(t_0) = \cdots = \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t_0) = 0$$

τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**

- Αν επιπλέον οι συνθήκες αυτές αφορούν τη χρονική στιγμή t_0 πριν την εφαρμογή της εισόδου στο σύστημα, τότε ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

- Αν αυτές είναι μηδενικές, τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό, και η κατάσταση του συστήματος ονομάζεται **σε αρχική ηρεμία:**

$$x(t) = 0, t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0, t < t_0$$

- Πολλές φορές θεωρούμε ότι μελετάμε το πρόβλημά μας με αναφορά το $t_0 = 0$, οπότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες συμβαίνουν όταν $t = 0^-$
  - Δηλ. ελάχιστα πριν το $t = 0$

- Μας ενδιαφέρουν τρία προβλήματα

- [ ] Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος
- [ ] Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος
- [ ] Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος
  - Δηλ. ενός συστήματος που **δεν** τελεί σε αρχική ηρεμία
  - Αρχικές συνθήκες μη μηδενικές

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και δίνει

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα τη συνάρτηση μεταφοράς
  - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} s^i a_i Y(s) = \sum_{l=0}^{M} s^l b_l X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s)$$

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}, \qquad R_H$$

αποτελείται από πολυώνυμα του s και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M}(s+\mu_l)}{\prod_{i=1}^{N}(s+\kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (μόνο αν $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s+\kappa_i}, \qquad R_H$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων, και ελέγχοντας το πεδίο σύγκλισης

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- **Παράδειγμα:**

  ○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

Ζητείται η κρουστική απόκριση, αν το σύστημα είναι αιτιατό.

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} s^n X(s)$$

1

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Μεταφέραμε τη διαφ. εξίσωση στο χώρο του Laplace

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = x(t) \overset{L}{\underset{1}{\longleftrightarrow}} s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)(s^2 - s - 2) = X(s)$$

$$\underbrace{\frac{Y(s)}{X(s)}}_{H(s)}(s^2 - s - 2) = 1$$

Άρα $H(s) = \dfrac{1}{s^2 - s - 2}$, R_H

Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

Βρήκαμε ότι $H(s) = \dfrac{1}{s^2 - s - 2}$, $R_H = ?$

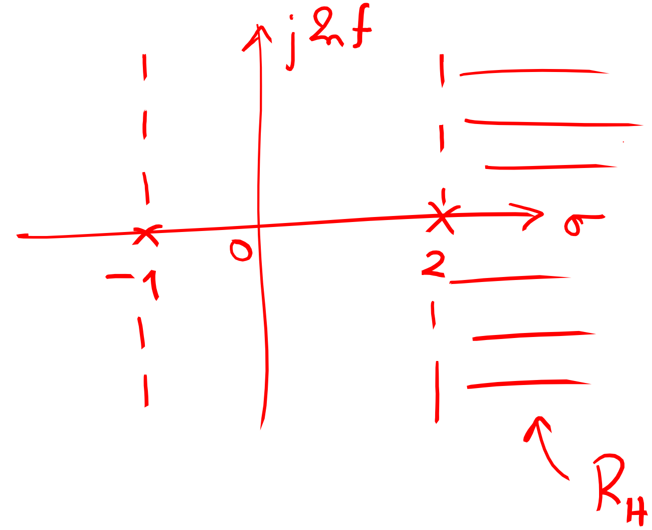
Αιτιατό σύστημα: $h(t) = 0,\ t < 0$ ~ το $h(t)$ είναι δεξιόπλευρο

$\Updownarrow$

R_H "δεξιόπλευρο"

Είναι $s^2 - s - 2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} s_1 = 2 \\ s_2 = -1 \end{matrix}$

$R_H = \{\sigma > 2\}$



Άρα $H(s) = \dfrac{1}{(s-2)(s+1)}$, $\sigma > 2$.

Εμείς όμως θέλαμε το $h(t)$!

Οπότε $H(s) = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{s+1}$

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

$$A = H(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{1}{\cancel{(s-2)}(s+1)}\cancel{(s-2)}\Big|_{s=2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=2} = \frac{1}{3}$$

$$B = H(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s-2)\cancel{(s+1)}}\cancel{(s+1)}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s-2}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3}$$

Άρα

$$H(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{s+1}, \quad \boxed{\sigma > 2}.$$

- $\sigma > 2$ • $\sigma > -1$
- $\sigma < 2$ • $\sigma < -1$

- $e^{at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a}, \ \sigma > a$
- $-e^{at}u(-t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a}, \ \sigma < a$

Από πινακάκια, θα έχαμε τελικά

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) = \frac{1}{3}\left(e^{2t} - e^{-t}\right)u(t).$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και το σήμα εισόδου, θα είναι

$$\begin{aligned} Y(s) = H(s)X(s) &= \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} X(s) \\ &= \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} \frac{\sum_{m=0}^{K} d_m s^m}{\sum_{n=0}^{L} c_n s^n} \\ &= \frac{\prod_{l=1}^{M}(s+\mu_l)}{\prod_{i=1}^{N}(s+\kappa_i)} \frac{\prod_{m=1}^{K}(s+c_m)}{\prod_{n=1}^{L}(s+\lambda_n)} \end{aligned}$$

- Με γνωστές τεχνικές και μεθόδους (έτοιμα ζεύγη και ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα) μπορούμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο $y(t)$

- Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

$Y(s) = H(s)X(s)$, $R_Y = R_X \cap R_H$

- **Παράδειγμα:**
  - Στο ίδιο παράδειγμα με πριν, βρείτε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-2t}u(t)$

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}, \boxed{\sigma > 2} \quad (1)$$

$$x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s+2}, \boxed{\sigma > -2} \quad (2)$$

(Τυπολόγιο)

Άρα

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

$$= \frac{1}{(s-2)(s+1)} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s-2)(s+2)(s+1)}, \quad R_Y = ?$$

(1) ∩ (2)

$$\{\sigma > -2\} \cap \{\sigma > 2\} = \{\sigma > 2\}$$

$$= \frac{1}{(s-2)(s+2)(s+1)}, \quad \sigma > 2.$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

$R_y = R_1 \cap R_2 \cap R_3$

• Παράδειγμα:

Βρήκαμε ότι $Y(s) = \dfrac{1}{(s-2)(s+2)(s+1)}, \ \sigma > 2$

$$= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1}, \ \sigma > 2$$

Είναι $A = Y(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \dfrac{1}{(\cancel{s-2})(s+2)(s+1)}(\cancel{s-2})\Big|_{s=2}$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+1)}\Big|_{s=2} = \frac{1}{12}.$$ Όμοια, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{3}$.

Άρα $Y(s) = \dfrac{\frac{1}{12}}{s-2} + \dfrac{\frac{1}{4}}{s+2} + \dfrac{-\frac{1}{3}}{s+1}, \ \sigma > 2.$

• $\sigma > 2$ R_1 • $\sigma > -2$ R_2 • $\sigma > -1$ R_3 $\rightarrow R_1 \cap R_2 \cap R_3$

• $\sigma < 2$ • $\sigma < -2$ • $\sigma < -1$

Από πίνακες $y(t) = \frac{1}{12} e^{2t} u(t) + \frac{1}{4} e^{-2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t)$.

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Ένα σύστημα με **μη** μηδενικές αρχικές συνθήκες **δεν** είναι ΓΧΑ
- Όμως ο *μονόπλευρος* μετασχ. Laplace μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε εξόδους με σχεδόν ίδιο τρόπο λύσης με τα ΓΧΑ συστήματα
  - Θεωρούμε την έξοδο αιτιατή
- Θα έχουμε λοιπόν

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

με τουλάχιστον ένα

$$\frac{d^n}{dt^n} y(0^-) \neq 0, \qquad n = 0,1, \dots N-1$$

- Η ιδιότητα που εφαρμόζουμε τώρα είναι η

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-)$$

$$\sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-) = s^{n-1} x(0^-) + s^{n-2} x'(0^-) + s^{n-3} x''(0^-) + \cdots + x^{(n-1)}(0^-)$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \xleftrightarrow{L} s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}x(0^-)$$

- **Παράδειγμα:**

  - Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2,\ y'(0^-) = 1$ και είσοδο $x(t) = e^{-4t}u(t)$

Μεταφέρω την διαφ. εξίσωση στο χώρο του Laplace:

- $\frac{d^2}{dt^2}y(t) \xleftrightarrow{L} s^2Y(s) - \sum_{i=1}^{2} s^{2-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(0^-) = s^2Y(s) - \left(sy(0^-) + \underbrace{s^0}_{1}\frac{d}{dt}y(0^-)\right)$

  $= s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) =$

  $= s^2Y(s) - 2s - 1$ (1)

- $5\frac{d}{dt}y(t) \xleftrightarrow{L} 5\left(sY(s) - \sum_{i=1}^{1} s^{1-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(0^-)\right) =$

  $= 5\left(sY(s) - \underbrace{s^0}_{1}y(0^-)\right) = 5\left(sY(s) - 2\right) = 5sY(s) - 10$ (2)

- $6y(t) \xleftrightarrow{L} 6\cdot Y(s)$ (3)

- $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ και $\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{L} sX(s) - \overbrace{x(0^-)}^{0,\ \text{γιατί}\ x(t)=0,\ t<0}$ (4)

Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

$$x(t) = e^{-4t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+4}, \sigma > -4$$

- Παράδειγμα:

Άρα ① + ② + ③ = ④

$$s^2 Y(s) - 2s - 1 + 5s\,Y(s) - 10 + 6Y(s) = X(s) + s\,X(s)$$

$$Y(s)\left(s^2 + 5s + 6\right) - 2s - 11 = X(s)(s+1)$$

$$Y(s) = \frac{X(s)(s+1) + 2s + 11}{(s^2 + 5s + 6)}, \quad R_y = ? \text{ (αιτιατό)}$$

$$= \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{(s+2)(s+3)} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)}, \quad R_y. \quad \{\sigma > -2\}$$

Άρα $Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4} = \frac{\frac{13}{2}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{3}}{s+3} + \frac{-\frac{3}{2}}{s+4}, \sigma > -2$

και από πίνακες $y(t) = \frac{13}{2}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-3t}u(t) - \frac{3}{2}e^{-4t}u(t).$

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**

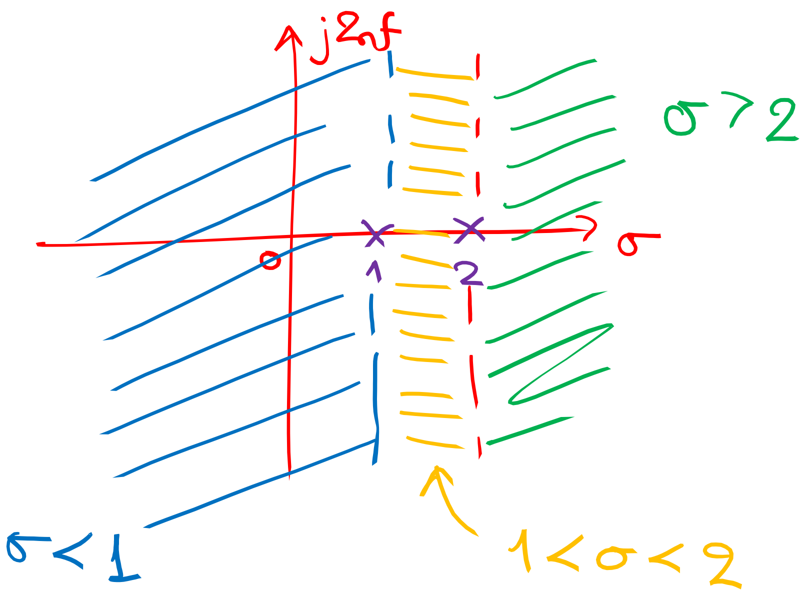
- **Παράδειγμα:**

  - Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 - 3s + 2}, \quad R_H = ?$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για **κάθε πιθανό** πεδίο σύγκλισης

Είναι $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2 - 3s + 2} = \dfrac{s+1}{(s-1)(s-2)}$



$\Rightarrow$

- $\sigma > 2$
- $\sigma < 1$
- $1 < \sigma < 2$

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**

- Παράδειγμα:

Είναι $H(s) = \dfrac{s+1}{(s-1)(s-2)} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s-2} = $ (πράξεις)

$$= \frac{-2}{s-1} + \frac{3}{s-2}$$

- $\sigma > 1$
- $\sigma < 1$
- $\sigma > 2$
- $\sigma < 2$

$\rightsquigarrow e^{at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s-a}, \ \sigma > a$

$\rightsquigarrow -e^{at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s-a}, \ \sigma < a$

$\longrightarrow \sigma > 2 : \ h(t) = -2e^{t}u(t) + 3e^{2t}u(t)$

$\longrightarrow \sigma < 1 : \ h(t) = +2e^{t}u(-t) - 3e^{2t}u(-t).$

$\longrightarrow 1 < \sigma < 2 : \ h(t) = -2e^{t}u(t) - 3e^{2t}u(-t).$

Συνεχίζεται... ☺