# HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

## ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

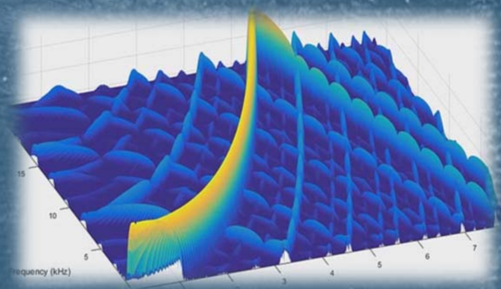
# Τι περιέχει το HY215?

1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία
- Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Έστω ότι έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$
- Αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}, \quad A > 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$ τότε η έξοδος θα είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = A\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j(2\pi f_0(t-\tau)+\varphi)}d\tau$$

$$= Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}d\tau}_{H(f_0)} = AH(f_0)e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}$$

$$= H(f_0)x(t)$$

- Προφανώς ο συντελεστής $H(f_0)$ της εξόδου δεν είναι άλλος από το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης για την τιμή $f_0$ του μετασχηματισμού
- Η είσοδος περνά αυτούσια στην έξοδο και απλά πολλαπλασιάζεται με έναν μιγαδικό αριθμό!!

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** (eigenfunction) του συστήματος
- Η τιμή $H(f_0)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνοτική απόκριση** (frequency response)
- Αν τη γράψουμε σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

τότε ονομάζουμε:

Ο **Απόκριση πλάτους** : $|H(f)|$

Ο **Απόκριση φάσης** : $\phi_h(f)$

- Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το πλάτος της εισόδου
- Η απόκριση φάσης περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα τη φάση της εισόδου

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Η απόκριση πλάτους περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα πλάτους της εισόδου*
- Η απόκριση φάσης περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα φάσης της εισόδου*

- Ας το δούμε:
- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Στο χώρο της συχνότητας: $Y(f) = X(f)H(f)$
- Πολική μορφή:

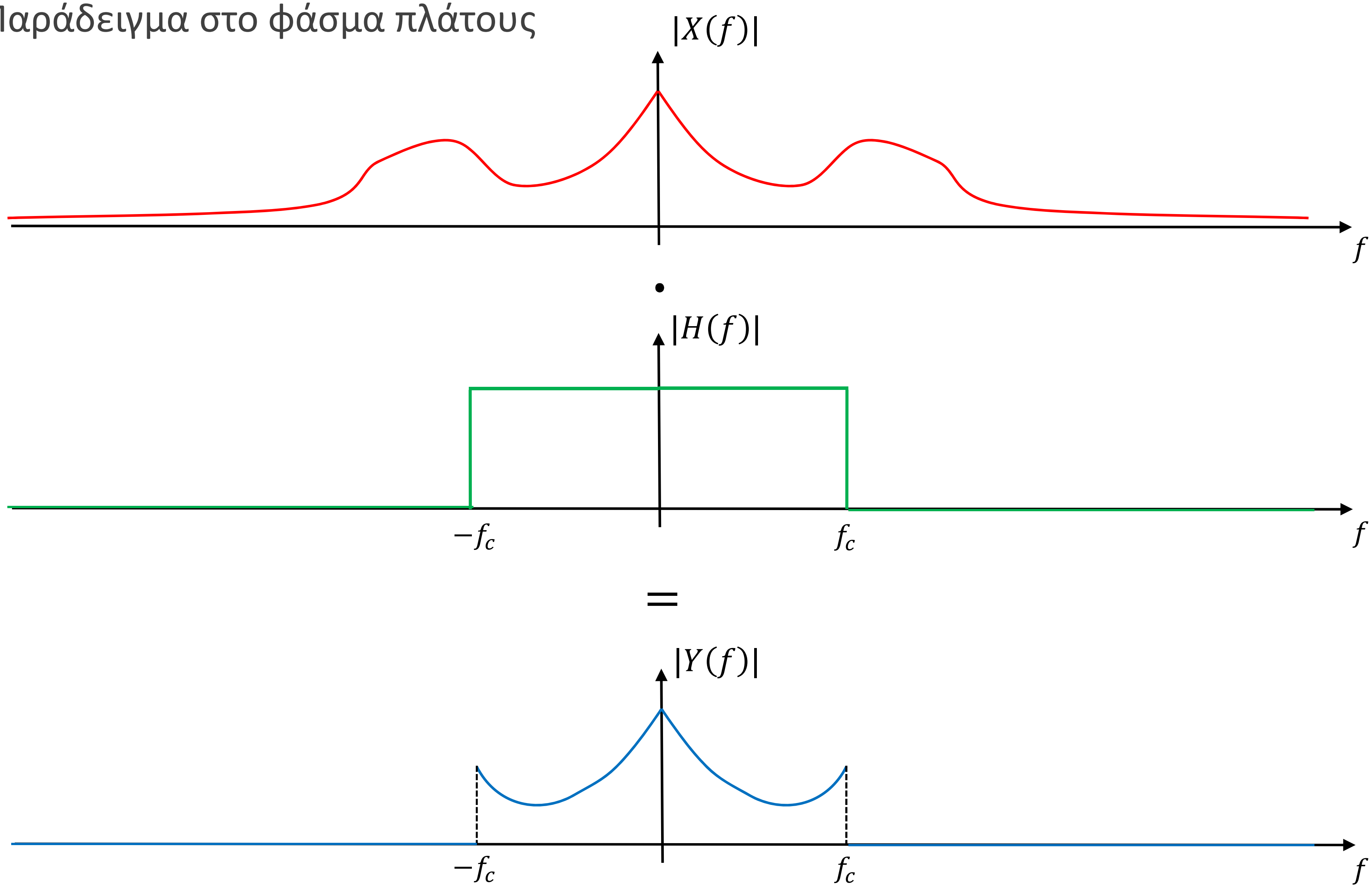
$$|Y(f)|e^{j\phi_y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

$$= |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))}$$

- Προφανώς

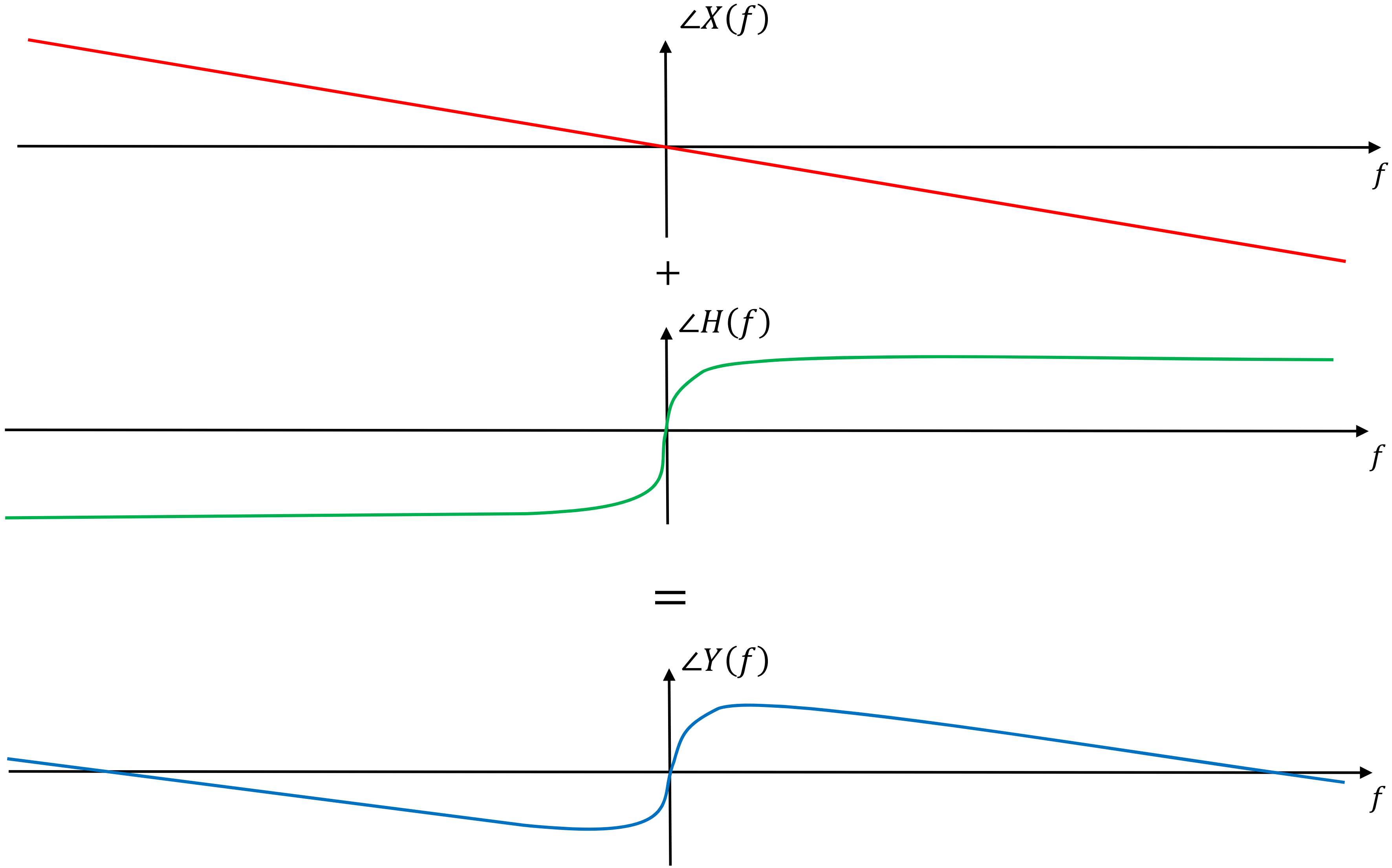
$$\boxed{\begin{gathered}|Y(f)| = |X(f)||H(f)| \\ \phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)\end{gathered}}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα στο φάσμα πλάτους



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα φάσης



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Η απόκριση πλάτους επηρεάζει το φάσμα πλάτους της εισόδου **πολλαπλασιαστικά**
- Η απόκριση φάσης επηρεάζει το φάσμα φάσης της εισόδου **αθροιστικά**

- Για μια **πραγματική** κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας της έχει τις γνωστές ιδιότητες συμμετρίας πραγματικού και φανταστικού μέρους καθώς και αποκρίσεων πλάτους και φάσης
  - **Άρτιο πραγματικό μέρος – Άρτια απόκριση πλάτους**
  - **Περιττό φανταστικό μέρος – Περιττή απόκριση φάσης**

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Η σχέση

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μιας εξόδου, ως

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα την απόκριση συχνότητας
  - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^{M} (j2\pi f)^l b_l X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Η σχέση

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

αποτελείται από πολυώνυμα του $(j2\pi f)$ και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\kappa_i t} u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Ο Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t)$$

Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται ως

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

$$j2\pi f\, Y(f) + 2Y(f) = 3X(f) - 6(j2\pi f)X(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(f)(2 + j2\pi f) = X(f)(3 - 6j2\pi f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f} = \frac{3}{2 + j2\pi f} - j2\pi f \cdot \frac{6}{2 + j2\pi f} \xrightarrow{F^{-1}} 6 \cdot e^{-2t}u(t)$$

$$h(t) = 3 \cdot e^{-2t}u(t) - \frac{d}{dt}\left(6 \cdot e^{-2t}u(t)\right) = 3e^{-2t}u(t) - 6\left[-2e^{-2t}u(t) + e^{-2t}\delta(t)\right]$$

$$= 3e^{-2t}u(t) + 12e^{-2t}u(t) - 6\delta(t) = 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

$$H(f) = \frac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f} =$$

$$\begin{array}{r|l} 3 - 6j2\pi f & 2 + j2\pi f \\ \hline +12 + 6j2\pi f & -6 \\ \hline 15 & \end{array}$$

$$= -6 + \frac{15}{2 + j2\pi f} \Rightarrow$$

$$h(f) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = -6\delta(t) + 15 \cdot e^{-2t} u(t)$$

- **Συστήματα και Σειρές Fourier**
- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?
- Το περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Αναπτύσσεται δηλαδή σε άθροισμα ιδιοσυναρτήσεων του ΓΧΑ συστήματος! ☺
- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) |X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)}$$

και αν το σύστημα $h(t)$ είναι πραγματικό τότε

$$y(t) = H(0) X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|H(kf_0)||X_k| \cos\big(2\pi k f_0 t + \varphi_k + \phi_h(kf_0)\big)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$\cos(2\pi f t + \ )$

- **Παράδειγμα:**

Ο Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$$

Βρείτε την έξοδό του όταν στην είσοδό του παρουσιαστεί το σήμα

$f = \frac{2}{\pi}$

$$x(t) = 3 + 2\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) = 3 + 2\cos\left(2\pi \frac{2}{\pi} t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(j2\pi f)\, Y(f) + 3\,Y(f) = X(f) \Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{3 + j2\pi f}$$

$$y(t) = H(0)\cdot 3 + 2\cdot \left|H\left(\frac{2}{\pi}\right)\right| \cos\left(4t + \frac{\pi}{3} + \measuredangle H\left(\frac{2}{\pi}\right)\right)$$

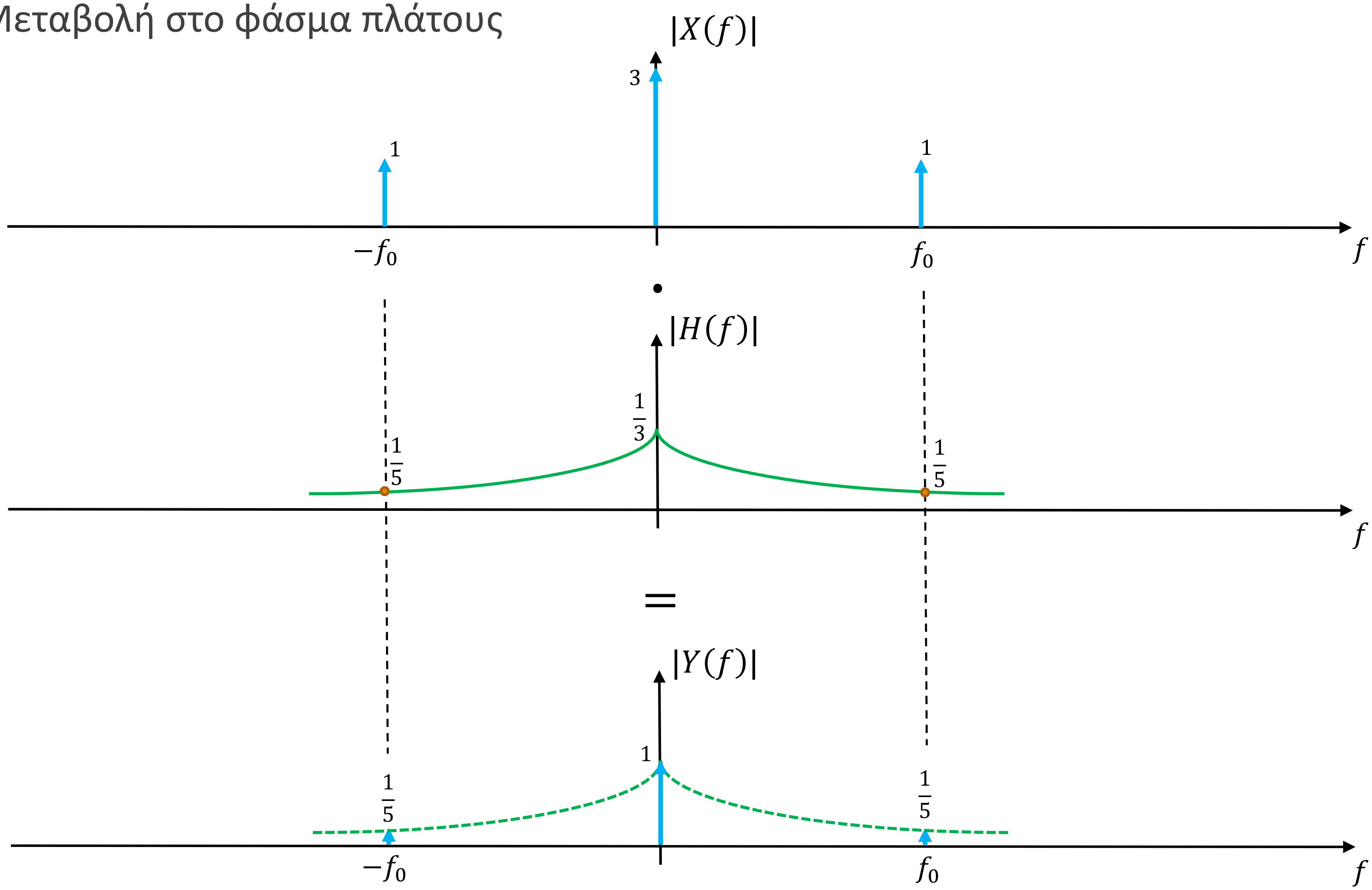
$\measuredangle H\left(\frac{2}{\pi}\right) \to -0.92$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3 + 2\cdot\frac{1}{5}\cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 0.92\right)$$

$$|H(f)| = \left.\frac{1}{|3 + j2\pi f|}\right|_{f=\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{|3 + j4|} = \frac{1}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Μεταβολή στο φάσμα πλάτους



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό απεριοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?

- Η έξοδος δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση

Συνέλιξη στο χρόνο ⟷ Γινόμενο στη συχνότητα

- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Αν η είσοδος και η απόκριση συχνότητας μπορούν να γραφούν ως ρητές συναρτήσεις του $j2\pi f$, τότε

$$Y(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} \frac{\sum_{l=0}^{K} d_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{L} c_i (j2\pi f)^i}$$

$$= \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)} \frac{\prod_{l=1}^{K} (j2\pi f + m_l)}{\prod_{i=1}^{L} (j2\pi f + q_i)}$$

και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**

- Έστω το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-3t}u(t)$, στο οποίο παρουσιάζεται η είσοδος $x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$. Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \longrightarrow H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f}$$

$$X(f) = \frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(f) = \frac{1}{3+j2\pi f}\left(\frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f}\right) = \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}$$

$$= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f} + \frac{C}{3+j2\pi f}$$

$$A = Y(f)(1+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{5+3(-1)}{(2-1)(3-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$B = 1, \quad C = -2$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} - \frac{2}{3+j2\pi f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - 2e^{-3t}u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Για να επιτύχουμε όλα τα ωραία αποτελέσματα που βρήκαμε πριν, υποθέσαμε ότι η απόκριση συχνότητας $H(f)$ ορίζεται
- Ισχύουν όλες οι γνωστές απαιτήσεις για την ύπαρξη της, όπως τις γνωρίσαμε στη μελέτη του Μετασχ. Fourier
  - Η κρουστική απόκριση να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (μη αναγκαία συνθήκη)
  - Η κρουστική απόκριση να είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη
- Αν δε γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση τότε μπορούμε να ξέρουμε αν το σύστημα που **εκφράζεται από διαφορικές εξισώσεις** έχει μετασχ. Fourier?

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Θυμηθείτε ότι, για ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα, μια τέτοια κρουστική απόκριση αποτελείται από όρους της μορφής

$$\delta^{(n)}(t), \qquad c_i e^{\lambda_i t} u(t), \qquad c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Η κρουστική απόκριση είναι απολύτως ολοκληρώσιμη μόνον όταν δεν υπάρχουν παράγωγοι της συνάρτησης Δέλτα και όταν

$$\lambda_i < 0 \text{ , αν } \lambda_i \in \Re$$

- Άρα το ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές!

- Όμως αυτό θα σημαίνει ότι **υπάρχει** και ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης! ☺

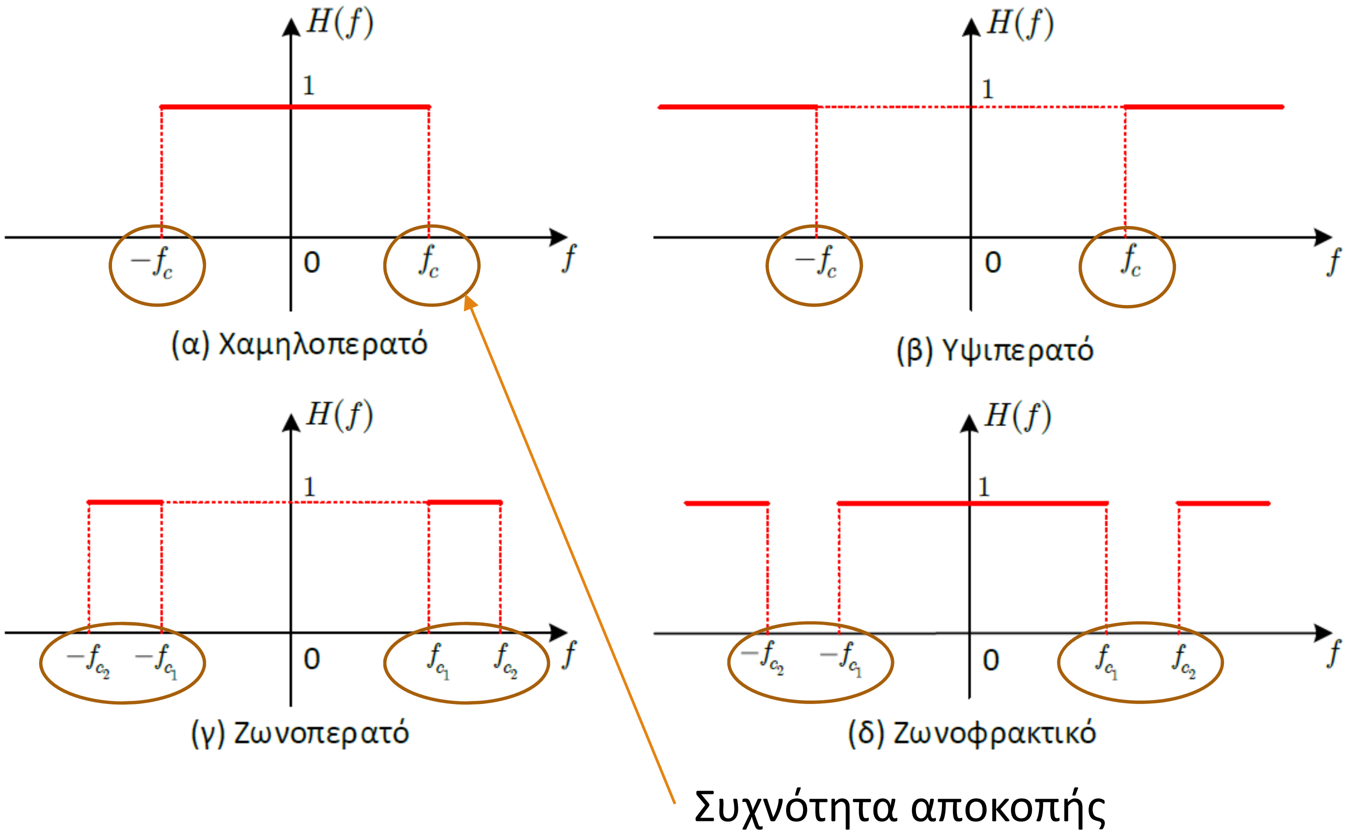
- Συνοψίζοντας: ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις μπορεί να γραφεί στο χώρο του Μετασχ. Fourier αν και μόνο αν το σύστημα είναι ευσταθές!
  - Θα εξετάσουμε μη αιτιατά συστήματα αργότερα

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

- Συστήματα που επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων στην έξοδό τους ονομάζονται **φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**

- Θα μελετήσουμε τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων (μηδενικής φάσης)
  - Ιδανικά : μη πραγματοποιήσιμα (θεωρητικά μοντέλα)

- Τέσσερις κατηγορίες
- **Χαμηλοπερατό φίλτρο**
- **Υψιπερατό φίλτρο**
- **Ζωνοπερατό φίλτρο**
- **Ζωνοφρακτικό φίλτρο**



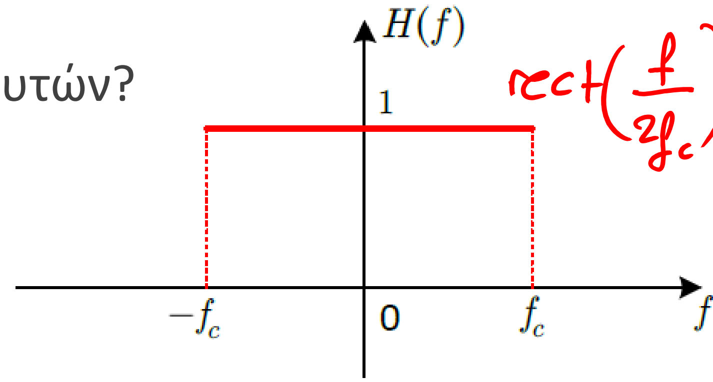

(α) Χαμηλοπερατό

(β) Υψιπερατό

(γ) Ζωνοπερατό

(δ) Ζωνοφρακτικό

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο




(α) Χαμηλοπερατό

$\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$

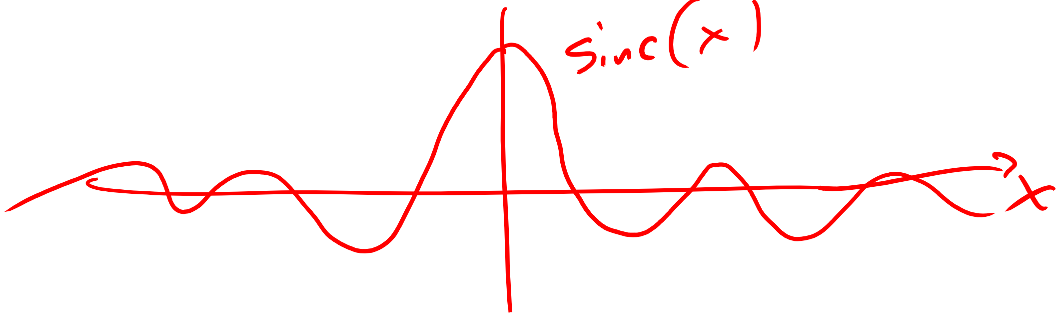
Από τις ιδιότητες του Μ.Φ.

$$A \cdot T \cdot \mathrm{sinc}(f \cdot T) \longleftrightarrow A\, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$A \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \longleftrightarrow A \cdot T \cdot \mathrm{sinc}(t \cdot T)$$

✓

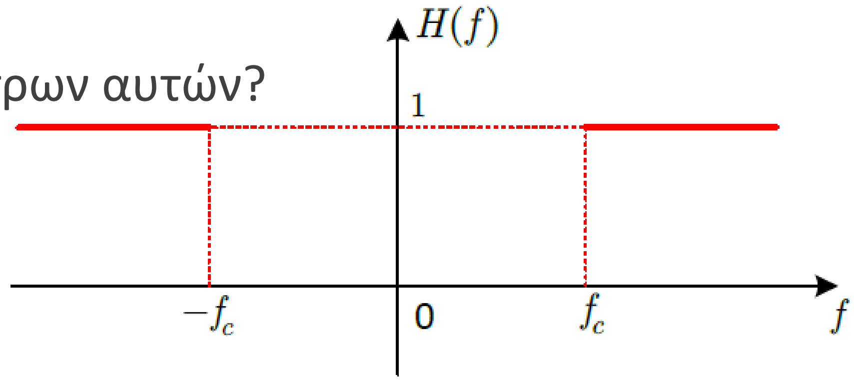
$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \xrightarrow{F^{-1}} \boxed{h(t) = 2f_c \cdot \mathrm{sinc}(2f_c \cdot t)}$$



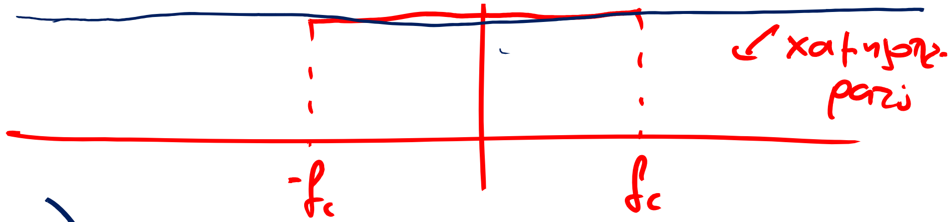

Κρουστική απόκριση

- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το υψιπερατό φίλτρο




(β) Υψιπερατό




$$H_{up}(f) = 1 - H_{ep}(f)$$

$$= 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

$$h_{up}(t) = \delta(t) - 2f_c \cdot \mathrm{sinc}(2f_c \cdot t)$$

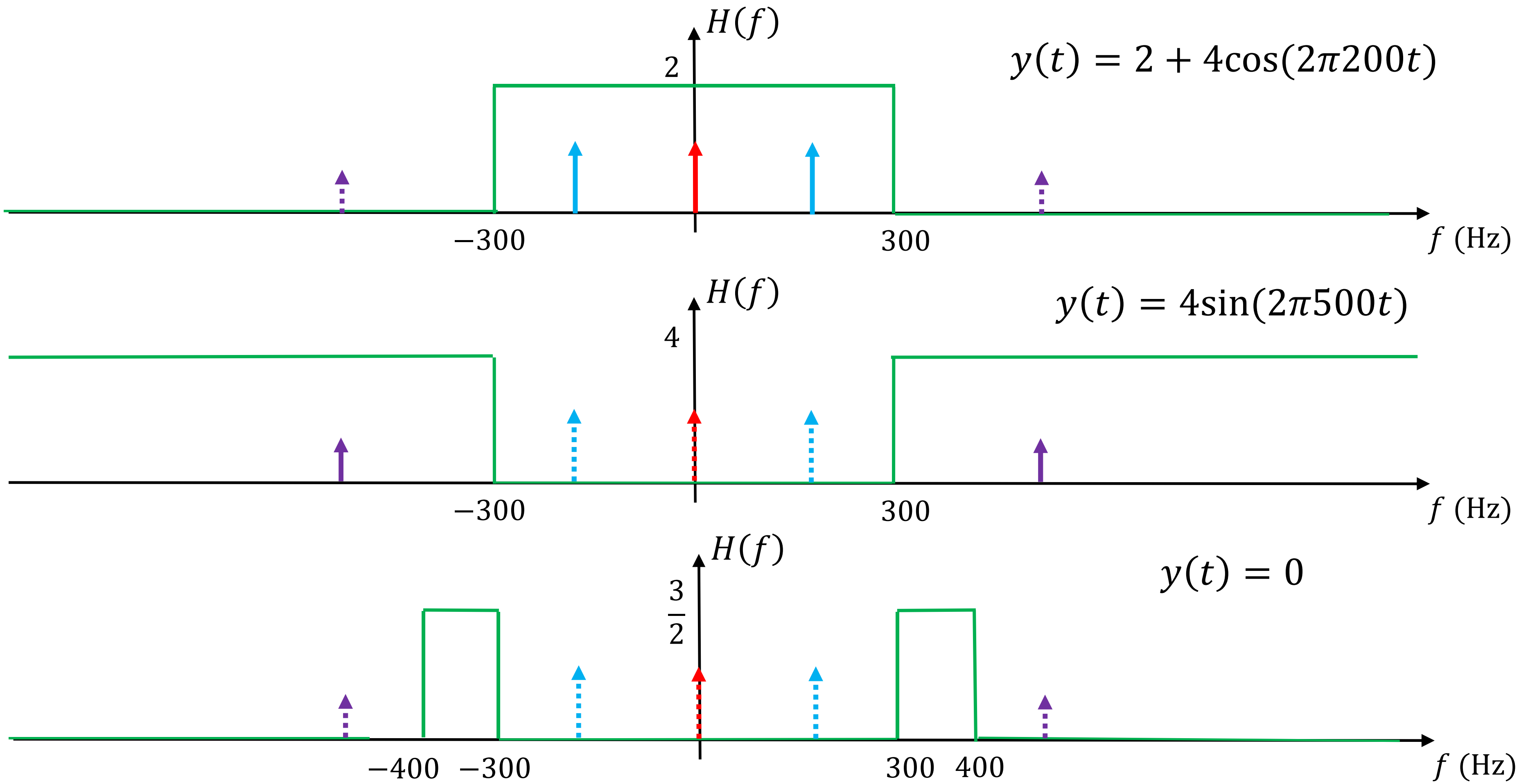
Κρουστική απόκριση

- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

- **Παράδειγμα**: $X(f) = \delta(f) + \delta(f-200) + \delta(f+200) + \frac{1}{2j}\delta(f-500) - \frac{1}{2j}\delta(f+500)$

Ο Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200 t) + \sin(2\pi 500 t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?



# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ