ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

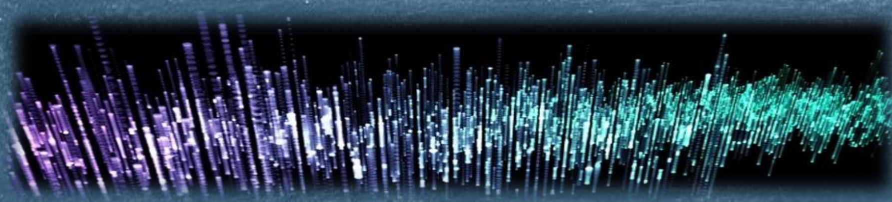
ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η

- Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες

Τι περιέχει το ΗΥ215?

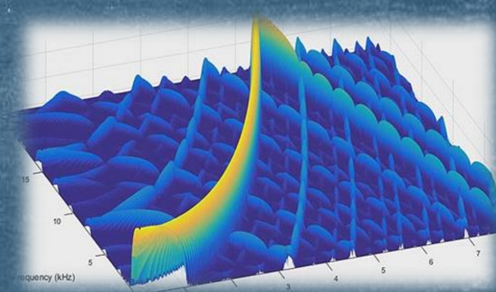
1^{ο} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2^{ο} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



• Ιδιότητες Σειρών Fourier

REMINDER

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$\mathbf{x(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X^*_{-k}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$, $a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \|X_k\| = \|X_{-k}\|, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \|x(t)\|^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|X_k\|^2$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f - f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f) = X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\ \|X(f)\| = \|X(-f)\|, \\ \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \|X(f)\|^2 df$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$

Απόδειξη:

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int z(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int \left(Ax(t) + By(t)\right) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int Ax(t) e^{-j2\pi f t} dt + \int By(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

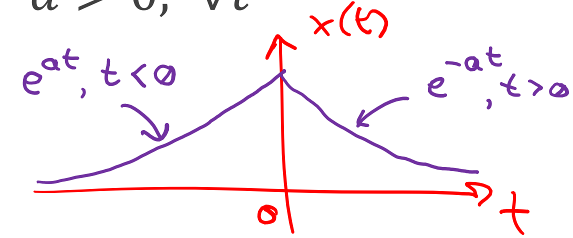
$$= A \int x(t) e^{-j2\pi f t} dt + B \int y(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= AX(f) + BY(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|},\ \ a > 0,\ \forall t$

$$x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$



$$|t| = \begin{cases} t, & t > 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases}$$

①

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi f t}\, dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi f t}\, dt}_{?} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt}_{\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\}}$$

$$\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Θα είναι

$$\int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j2\pi f)t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{a - j2\pi f} \left(e^{(a-j2\pi f)t} \right) \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a - j2\pi f} \left(1 - \lim_{t \to -\infty} e^{(a-j2\pi f)t} \right)$$

②

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

Το $\lim_{t\to-\infty} e^{at}\cdot e^{-j2\pi ft} = 0$, άρα η (2) δίνει

$$\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{a-j2\pi f}(1-0) = \frac{1}{a-j2\pi f} \quad (3)$$

Η (1) $\xRightarrow{(3)}$ $X(f) = \dfrac{1}{a+j2\pi f} + \dfrac{1}{a-j2\pi f} = \dots = \dfrac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$, $a>0$.

Άρα

$$e^{-a|t|},\ a>0 \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχηματισμός Fourier**
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(t-t_0) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$\left.\begin{array}{c} Z(f) = \int x(t-t_0)e^{-j2\pi f t}dt \\ u = t - t_0 \Rightarrow du = dt \end{array}\right\} = \int x(u)e^{-j2\pi f(u+t_0)}du$$

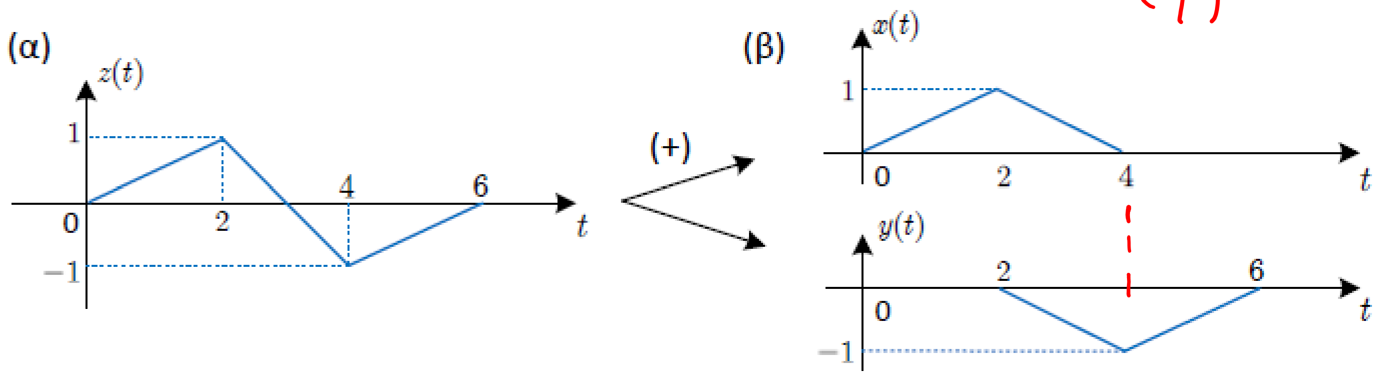
$$= \int x(u)e^{-j2\pi f u}e^{-j2\pi f t_0}du$$

$$= e^{-j2\pi f t_0}\left[\int x(u)e^{-j2\pi f u}du\right]$$

$$= e^{-j2\pi f t_0}X(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

$$A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$



- $x(t) = 1\cdot \mathrm{tri}\left(\frac{t-2}{2}\right) \xleftrightarrow{F} X(f) = 1\cdot 2\cdot \mathrm{sinc}^2(2f)\, e^{-j2\pi f\cdot \overset{t_0}{2}}$
- $y(t) = -1\cdot \mathrm{tri}\left(\frac{t-4}{2}\right) \xleftrightarrow{F} Y(f) = -1\cdot 2\cdot \mathrm{sinc}^2(2f)\, e^{-j2\pi f\cdot \overset{t_0}{4}}$

Είναι

$$z(t) = x(t) + y(t) \xleftrightarrow{F} Z(f) = X(f) + Y(f)$$

δηλ.

$$Z(f) = 2\,\mathrm{sinc}^2(2f)\, e^{-j4\pi f} - 2\,\mathrm{sinc}^2(2f)\, e^{-j8\pi f}$$

$$= 2\,\mathrm{sinc}^2(2f)\left(e^{-j4\pi f} - e^{-j8\pi f}\right).$$

Δείξτε ότι:

$$Z(f) = j4\,\mathrm{sinc}^2(2f)\cdot \sin(2\pi f)\cdot e^{-j6\pi f}.$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$

Απόδειξη:

$$z(t) = e^{j2\pi f_0 t}x(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t}x(t)e^{-j2\pi f t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t}dt$$

$$= X(f-f_0)$$

Σημείωση: η συχνότητα f_0 **<u>δεν</u>** έχει να κάνει με τη θεμελιώδη συχνότητα ενός περιοδικού σήματος. Είναι απλά μια τυχαία συχνότητα.

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_1 t)$

Είναι

$$y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_1 t) \quad \text{(Euler)}$$

$$= \cancel{2}x(t)\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}e^{j2\pi f_1 t} + \cancel{\tfrac{1}{2}}e^{-j2\pi f_1 t}\right)$$

$$= x(t)\,e^{j2\pi f_1 t} + x(t)\,e^{-j2\pi f_1 t}$$

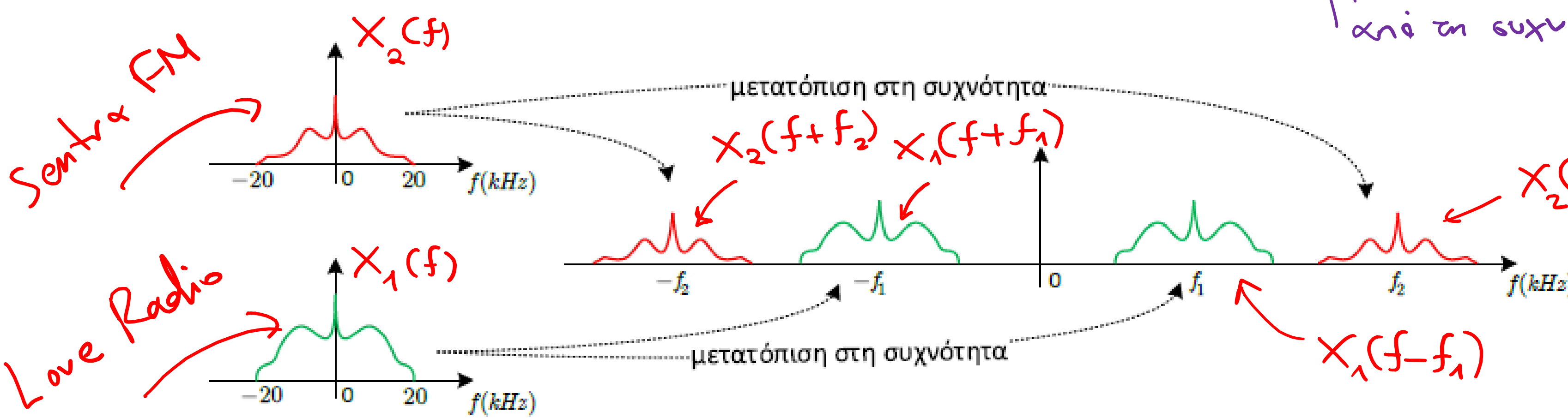
$$\updownarrow \mathcal{F} \qquad\qquad \updownarrow \mathcal{F}$$

Άρα

$$Y(f) = X(f-f_1) + X(f+f_1)$$

Το φάσμα X(f) μετατοπίζεται γύρω από τη συχνότητα $-f_1$

Το φάσμα X(f) μετατοπίζεται γύρω από τη συχνότητα f_1



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{f}{a})$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(at)\,,a \in \Re \rightarrow Z(f) =?$$

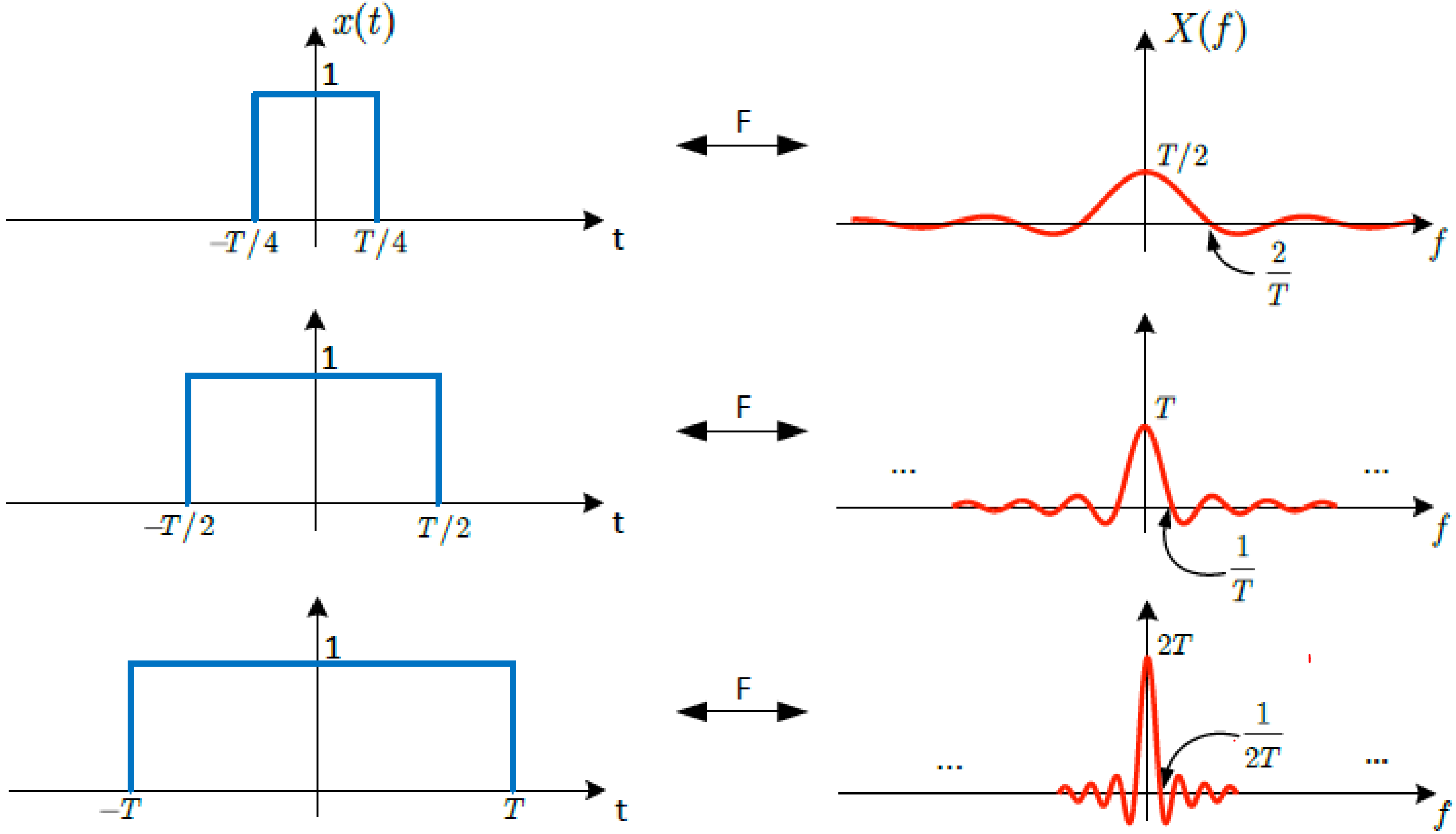
Έστω $a > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} Z(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi f t}dt \\ u = at \Rightarrow du = adt \end{array}\right\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi\left(\frac{f}{a}\right)u}du = \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Όμοια είναι η απόδειξη για $a < 0$.

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ $\qquad$ $T\,\mathrm{sinc}(fT)$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(t) * y(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(t) * y(t)\big) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)\, e^{-j2\pi f t} dt \right) d\tau \;\; = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) Y(f) e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau$$

$$= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau = Y(f) X(f)$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

- Υπολογίστε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$

- 1ος τρόπος: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \ldots$

- 2ος τρόπος:

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}, \quad h(t) \xleftrightarrow{F} H(f) = \frac{1}{2+j2\pi f}$$

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{1}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)}.$$ Θέτω $u = j2\pi f$.

Άρα $$Y(u) = \frac{1}{(1+u)(2+u)} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{2+u}$$ $\leftarrow$ Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα

$$A = Y(u)(1+u)\Big|_{u=-1} = \frac{1}{\cancel{(1+u)}(2+u)}\cancel{(1+u)}\Big|_{u=-1} = \frac{1}{2+u}\Big|_{u=-1} = 1$$

$$B = Y(u)(2+u)\Big|_{u=-2} = \frac{1}{(1+u)\cancel{(2+u)}}\cancel{(2+u)}\Big|_{u=-2} = \frac{1}{1+u}\Big|_{u=-2} = -1$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Άρα τελικά $Y(f) = \dfrac{1}{1+j2\pi f} - \dfrac{1}{2+j2\pi f} \longrightarrow y(t) = ?$

Από πίνακες

$$\frac{1}{1+j2\pi f} \xrightarrow{F^{-1}} e^{-t}u(t) \qquad \frac{1}{2+j2\pi f} \xrightarrow{F^{-1}} e^{-2t}u(t)$$

Άρα συνολικά

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$= \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t).$$

Σημείωση: Το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα μπορεί να γίνει μόνο όταν το πολυώνυμο του παρονομαστή είναι > αυτού του αριθμητή!

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$

Απόδειξη:

Ξέρουμε ότι

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \\ u = -t \Rightarrow du = -dt \end{array}\right\} \Rightarrow x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi fu}df$$

Αν αλλάξουμε μεταξύ τους τις μεταβλητές $u \leftrightarrow f$, τότε

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{-j2\pi fu}du = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j2\pi ft}dt = F\{X(t)\}$$

Άρα

$$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

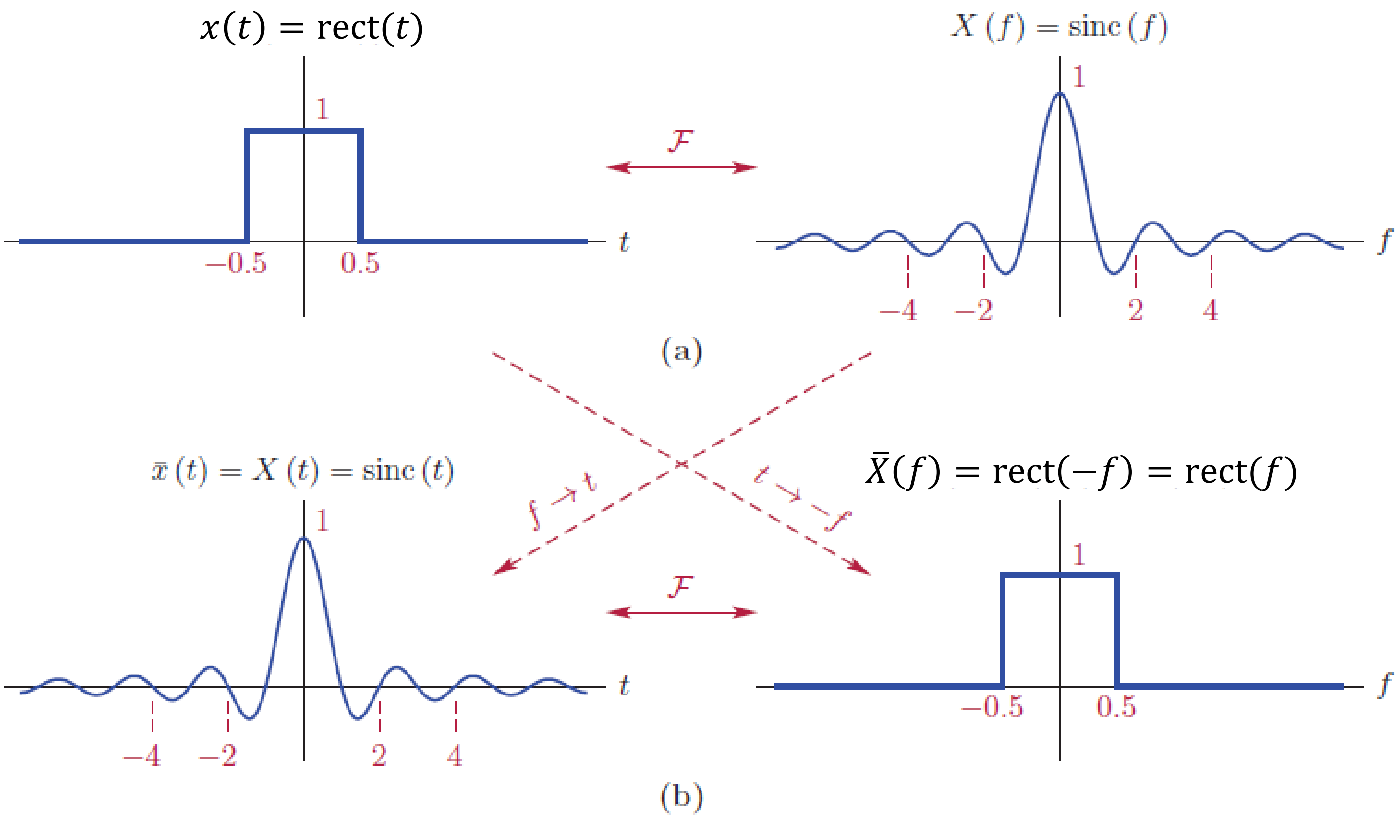
- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

Άλλο παράδειγμα:

$$A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

$$AT\,\mathrm{sinc}^2(tT) \xleftrightarrow{F} A\,\mathrm{tri}\left(\frac{-f}{T}\right) = A\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{T}\right)$$

Παράδειγμα:



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχηματισμός Fourier**
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$

Απόδειξη:

$$z(t) = x(t)y(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(t)y(t)\big)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut}du\right) y(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j2\pi(f-u)t}dt\right)du = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)\,du$$

$$= X(f) * Y(f)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$$e^{\mp j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f \pm f_0)$$
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

- Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

Είναι

$$x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot \cos(2\pi f_0 t) \longrightarrow \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$= \cancel{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}e^{j2\pi f_0 t} + \cancel{\tfrac{1}{2}}e^{-j2\pi f_0 t}\right)$$

$$= \underbrace{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{j2\pi f_0 t}}_{\text{γινόμενο}} + \underbrace{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f_0 t}}_{\text{γινόμενο}}$$

Άρα

$$X(f) = \overbrace{F\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} * F\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\}}^{\text{συνέλιξη}} + \overbrace{F\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} * F\left\{e^{-j2\pi f_0 t}\right\}}^{\text{συνέλιξη}}$$

$$= T\mathrm{sinc}(fT) * \delta(f - f_0) + T\mathrm{sinc}(fT) * \delta(f + f_0)$$

$$= T\mathrm{sinc}((f - f_0)T) + T\mathrm{sinc}((f + f_0)T).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

Είναι

$$\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot\cos(2\pi f_0 t)$$

$$= \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cdot e^{j2\pi f_0 t} + \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)e^{-j2\pi f_0 t}$$

Ξέραμε ότι

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\mathrm{sinc}(fT)$$

Άρα

$$X(f) = T\mathrm{sinc}((f-f_0)T) + T\mathrm{sinc}((f+f_0)T)$$

Μετατόπιση στη συχνότητα:

$$e^{j2\pi f_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(f-f_0)$$

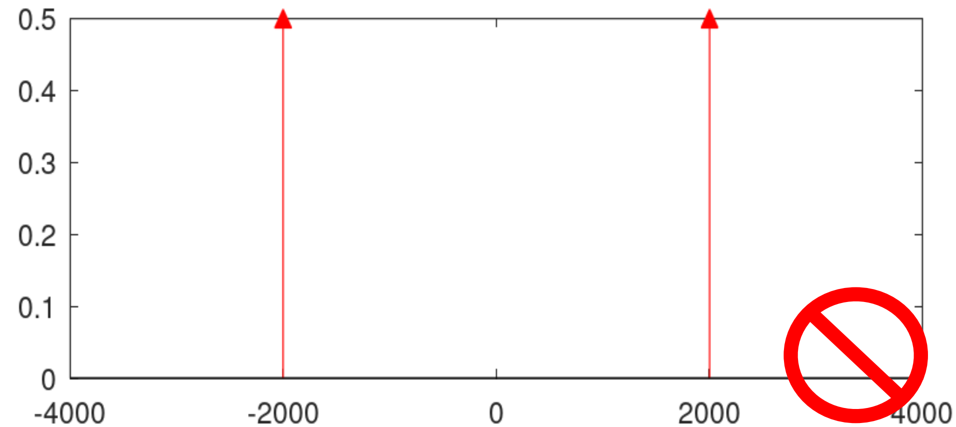
• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Θα δούμε αργότερα ότι

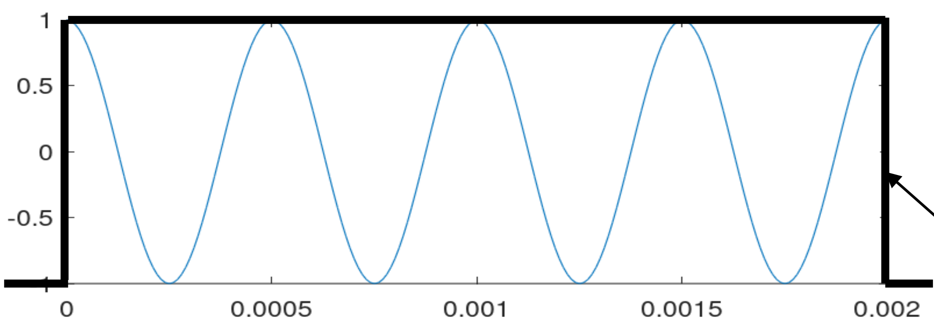
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,, \quad \boxed{-\infty < t < +\infty}$$

$$\updownarrow$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

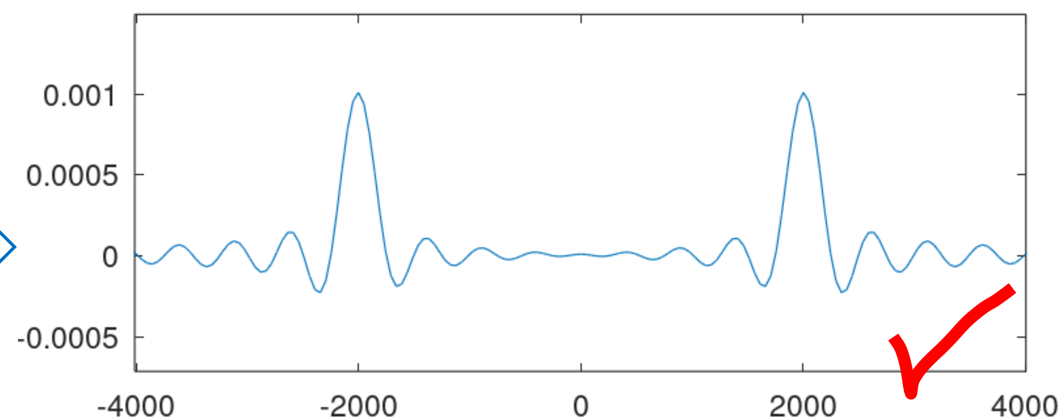


Φάσμα ημιτόνου ***άπειρης*** διάρκειας



$$\mathrm{rect}\left(\frac{t - 0.001}{0.002}\right)$$

Φάσμα ***παραθυροποιημένου*** ημίτονου



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$

Απόδειξη:

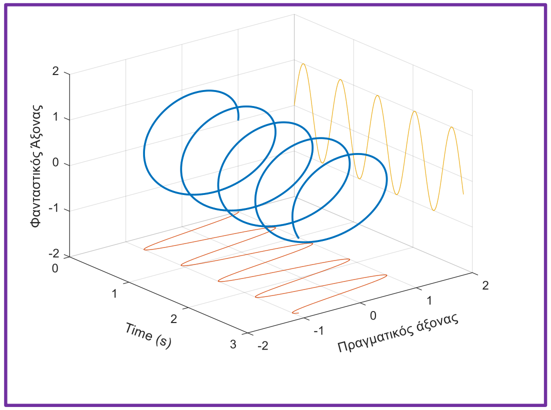
$$z(t) = \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi f t} dt = x(t)e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{d}{dt}e^{-j2\pi f t}dt$$

$$= x(t)e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j2\pi f)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$= x(t)e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt\right]$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{x(t)}}_{x(\pm\infty)=0}\boldsymbol{e^{-j2\pi f t}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f X(f)$$



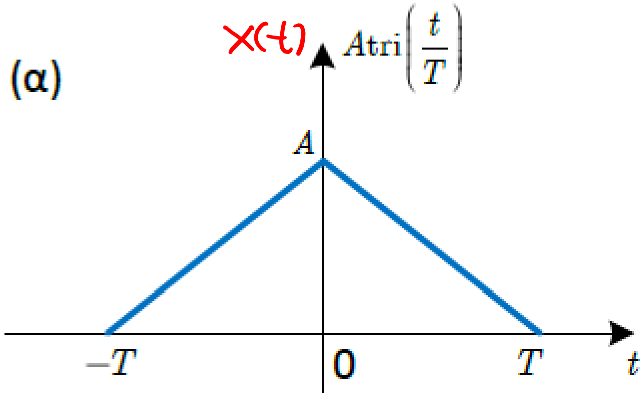
$$= \mathbf{0} + j2\pi f X(f) = j2\pi f X(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

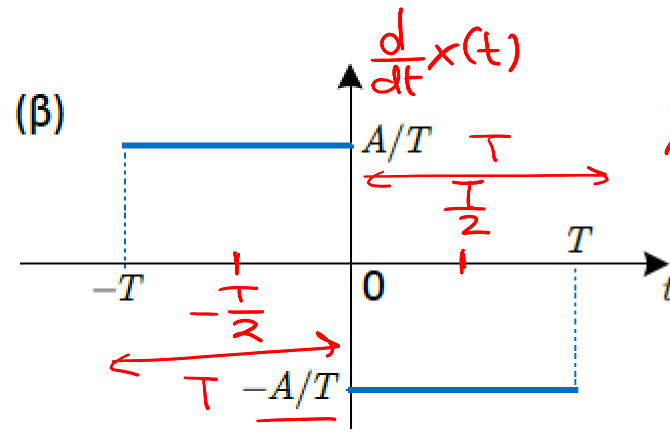
$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του τριγωνικού παλμού $x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$

$x(t-t_0) \overset{F}{\updownarrow} X(f)e^{-j2\pi f t_0}$



d/dt



Είναι

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

Άρα

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} \overset{\text{πίνακας}}{\underset{\text{δείγμα}}{=}} \frac{A}{\cancel{T}}\cdot\cancel{T}\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}}$$

$$- \frac{A}{\cancel{T}}\cdot\cancel{T}\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{-j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}}$$

$$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) = A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot 2j\sin(\pi fT).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

· Άρα βρήκαμε ότι

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j2A\sin(\pi f T)\cdot \mathrm{sinc}(fT)$$

Από ιδιότητα παραγώγισης,

$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j2\pi f X(f)$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{j2}\pi f X(f) = \cancel{j2}A\sin(\pi f T)\cdot \mathrm{sinc}(fT)$$

$$\pi f X(f) = A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot \sin(\pi f T)$$

$$X(f) = A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot \frac{T\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

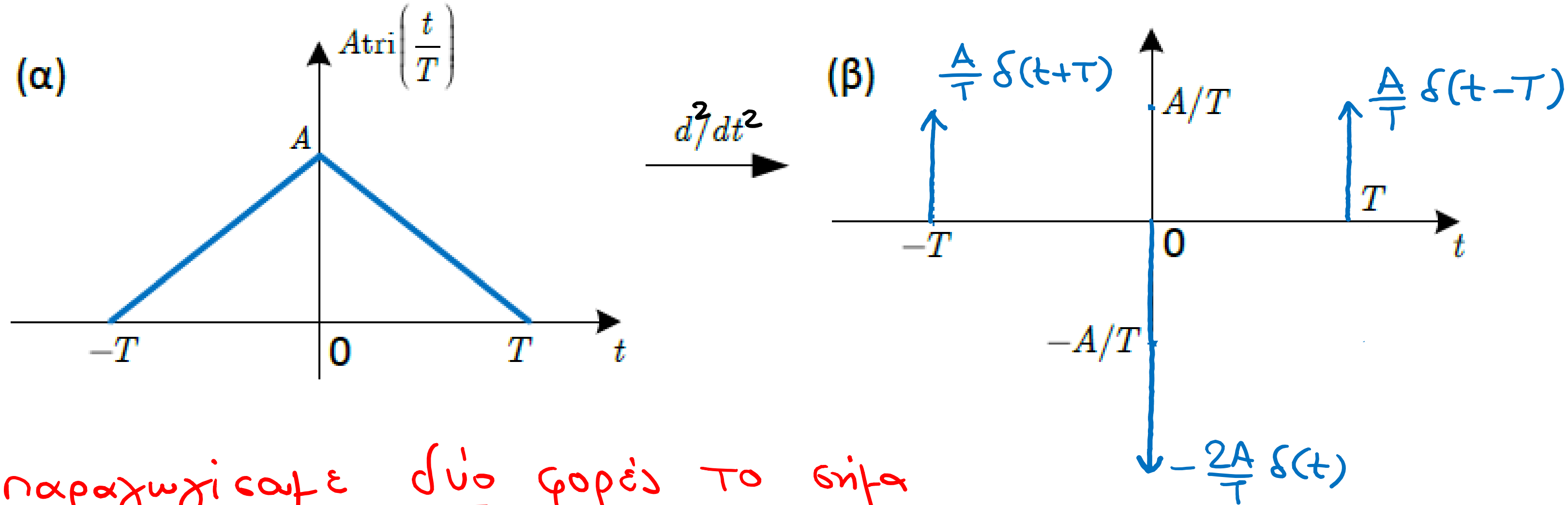
$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot T\cdot \mathrm{sinc}(fT)$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του τριγωνικού παλμού $x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$



Αν παραγωγίσουμε δύο φορές το σήμα $x(t)$, θα πάρουμε μόνο συναρτήσεις Δέλτα στα σημεία ασυνέχειας της πρώτης παραγώγου (2 slides πριν). Τότε θα έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{A}{T}\delta(t+T) - \frac{2A}{T}\delta(t) + \frac{A}{T}\delta(t-T)$$

Από ιδιότητα παραγώγισης: $\mathcal{F}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = (j2\pi f)^2 X(f)$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση**

$$\delta(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j2\pi f t_0}$$

δηλ.

$$F\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = -4\pi^2 f^2 X(f)$$

Όμως

$$F\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = F\left\{\frac{A}{T}\delta(t+T)\right\} - F\left\{\frac{2A}{T}\delta(t)\right\} + F\left\{\frac{A}{T}\delta(t-T)\right\}$$

$$= \frac{A}{T}e^{j2\pi fT} - \frac{2A}{T} + \frac{A}{T}e^{-j2\pi fT}$$

$$= \frac{A}{T}\left(\underbrace{e^{j2\pi fT} + e^{-j2\pi fT}}_{\text{Euler}} - 2\right)$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\left(2\cos(2\pi fT) - 2\right)$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\cos(2\pi fT) - 1\right)$$

$$= \frac{2A}{T}\left(-2\sin^2(\pi fT)\right)$$

→ τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$-4\pi^2 f^2 X(f) = \frac{2A}{T}\left(-2\sin^2(\pi fT)\right)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier – Εναλλακτική λύση**

$$\cancel{-4}\pi^2 f^2 X(f) = \frac{\cancel{-4}A}{T}\sin^2(\pi f T)$$

$$X(f) = \frac{A}{T}\frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f)^2}$$

$$= \frac{AT}{T^2}\frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f)^2}$$

$$= AT\frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}^2(fT).$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Απόδειξη:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(t)x^*(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u) e^{-j2\pi u t} du \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi (f-u) t} dt \right) du df$$

$$\boldsymbol{\delta(t-t_0) = \int 1 e^{-j2\pi f (t-t_0)} df}$$

Δυικότητα:

$$\boldsymbol{\delta(f-f_0) = \int 1 e^{j2\pi (f-f_0) t} dt}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \right) \delta(f-u) \, du df$$

$$\boldsymbol{\int x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = x(t) * \delta(t) = x(t)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u) \, \delta(f-u) du \right) df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \Big|_{u=f} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(f)df$$

$$\int x^2(t)dt = \int |X(f)|^2 df$$

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

Παρατηρώ ότι $1 \cdot \mathrm{rect}(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{sinc}(f)$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{sinc}(f))^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{rect}(t))^2 dt$$

Αφού

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ