HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

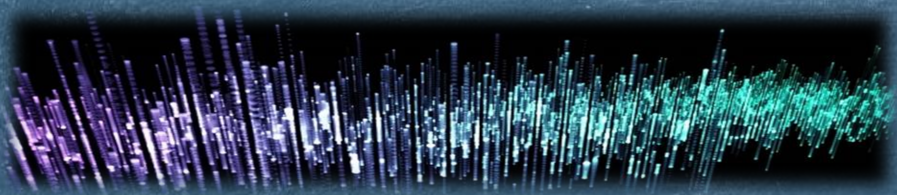
ΔΙΑΛΕΞΗ 7Η

- Μετασχηματισμός Fourier

Τι περιέχει το HY215?

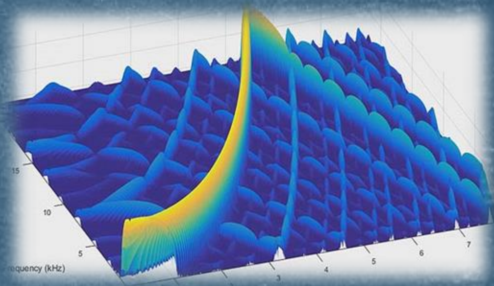
1^{o} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



- **Μετασχηματισμός Fourier**

REMINDER

- «Επέκταση» της σειράς Fourier σε **περιοδικά** σήματα

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Μετασχηματισμός Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Αντ. Μετασχηματισμός Fourier

- Για **πραγματικά** σήματα

$$X(f) = X^*(-f)$$

$$\Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}$$

$$\Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}$$

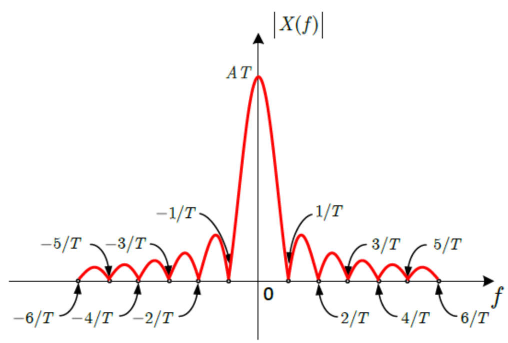
$$|X(f)| = |X(-f)|$$

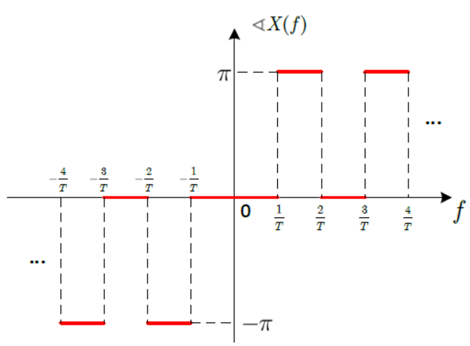
$$\angle X(f) = -\angle X(-f)$$

- Ζεύγος Μετασχηματισμού

$$A \, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT \, \mathrm{sinc}(fT)$$

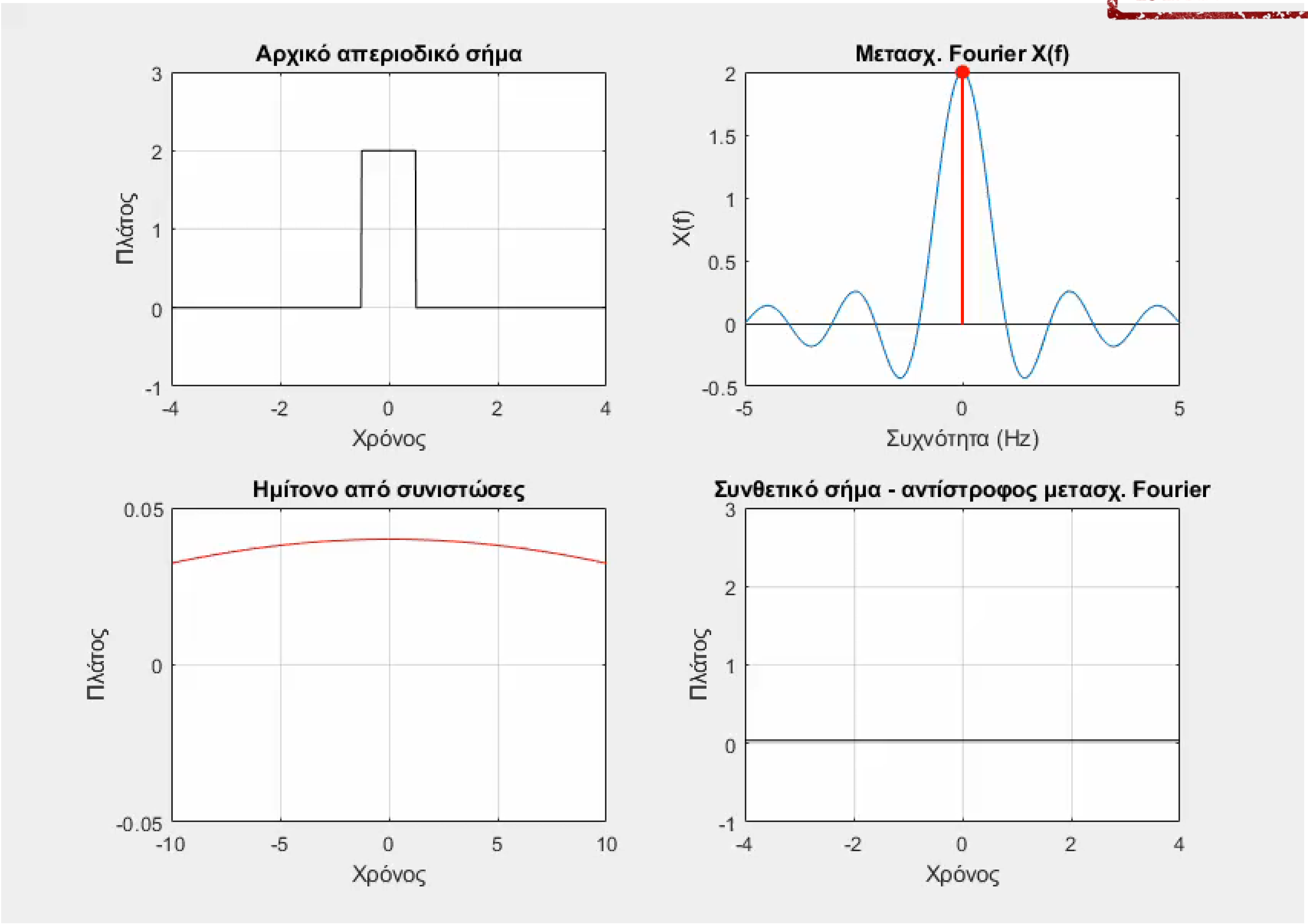
$\Rightarrow \frac{\sin(nx)}{nx}$





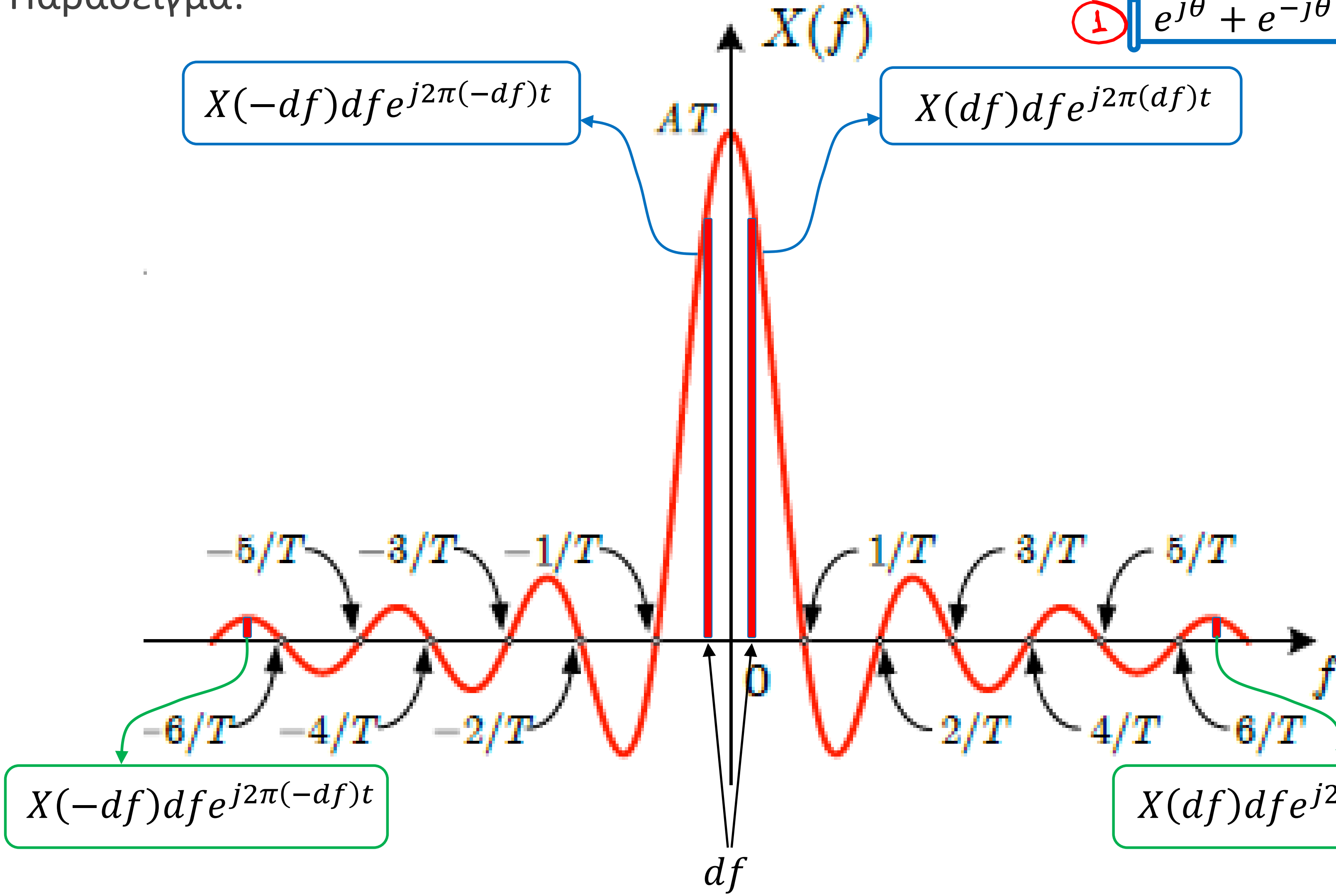
• Μετασχηματισμός Fourier

REMINDER



- Παράδειγμα:

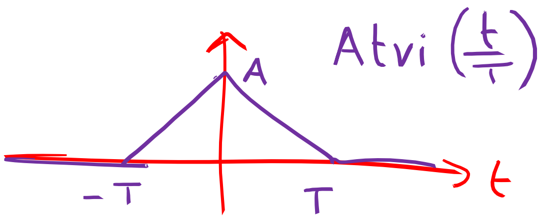
1 $\boxed{e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)}$



1

$$x(t) = 2|X(df)|df\cos\big(2\pi dft + \angle X(df)\big) + 2|X(df)|df\cos\big(2\pi dft + \angle X(df)\big) + \dots$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**



○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & -T < t < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \int_{-T}^{T} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt = \dots \quad (\text{πράξεις})$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}^2(fT), \text{ δηλ.}$$

$$A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

$\mathrm{Re}\{X(f)\} = X(f)$

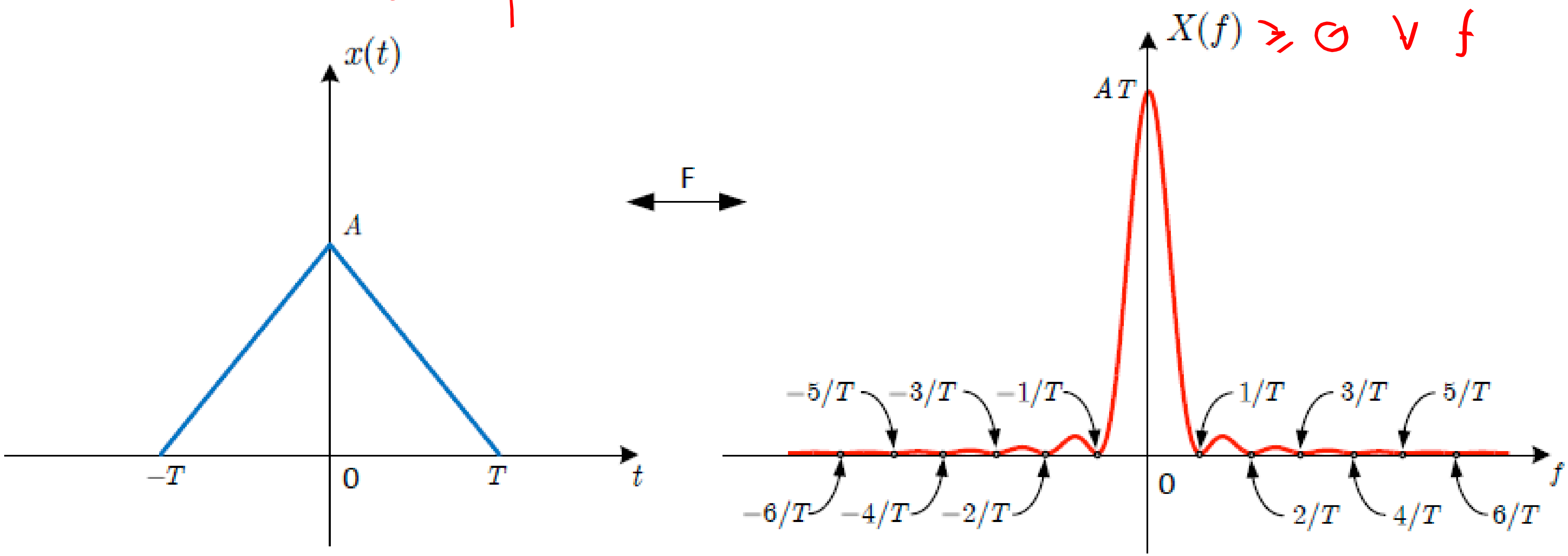
$\mathrm{Im}\{X(f)\} = 0$

- Παράδειγμα:

Σημεία μηδενισμού του $AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$:

$$AT\,\frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} = 0 \Rightarrow \sin^2(\pi f T) = 0 \Rightarrow \sin(\pi f T) = 0$$

που είναι $f_k = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$.



- **Μετασχηματισμός Fourier**

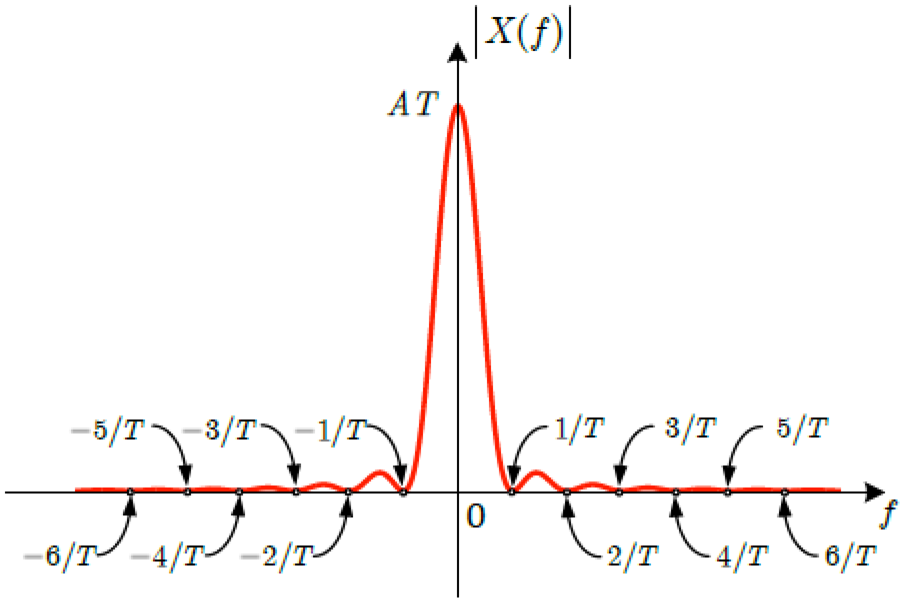
- Παράδειγμα:

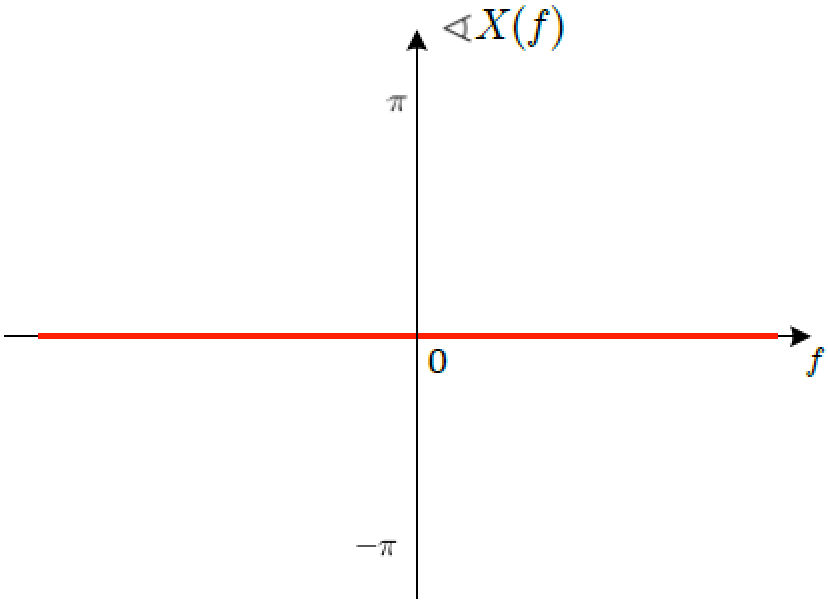
Μέτρο: $|X(f)| = |AT\,\text{sinc}^2(fT)| = AT\,\text{sinc}^2(fT) = X(f)$

$A > 0$

$T > 0$

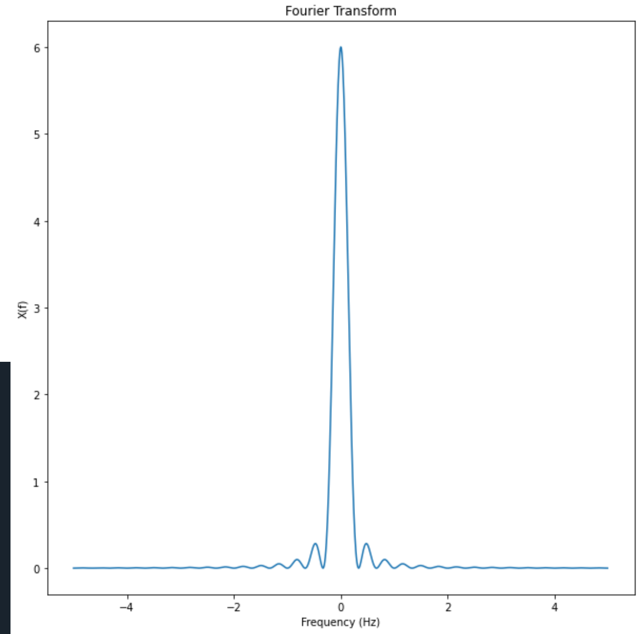
Φάση: $\measuredangle X(f) = 0$, γιατί $X(f) \geq 0 \;\; \forall f \in \mathbb{R}$.

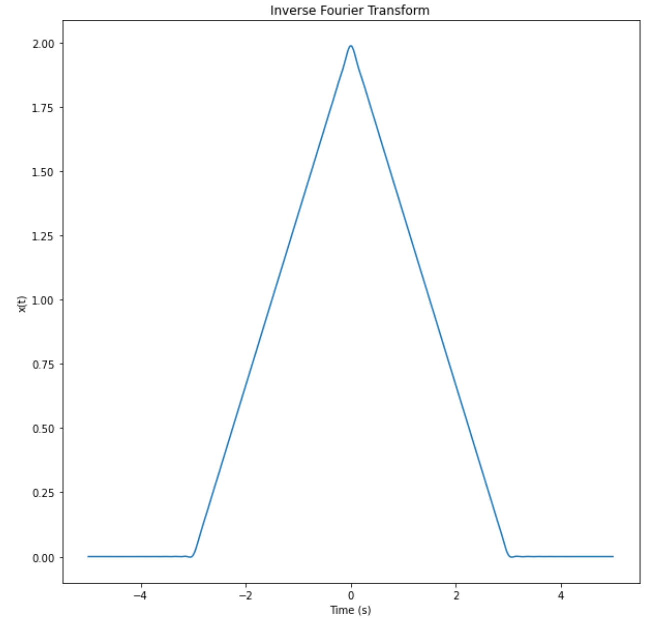




- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Κώδικας Python

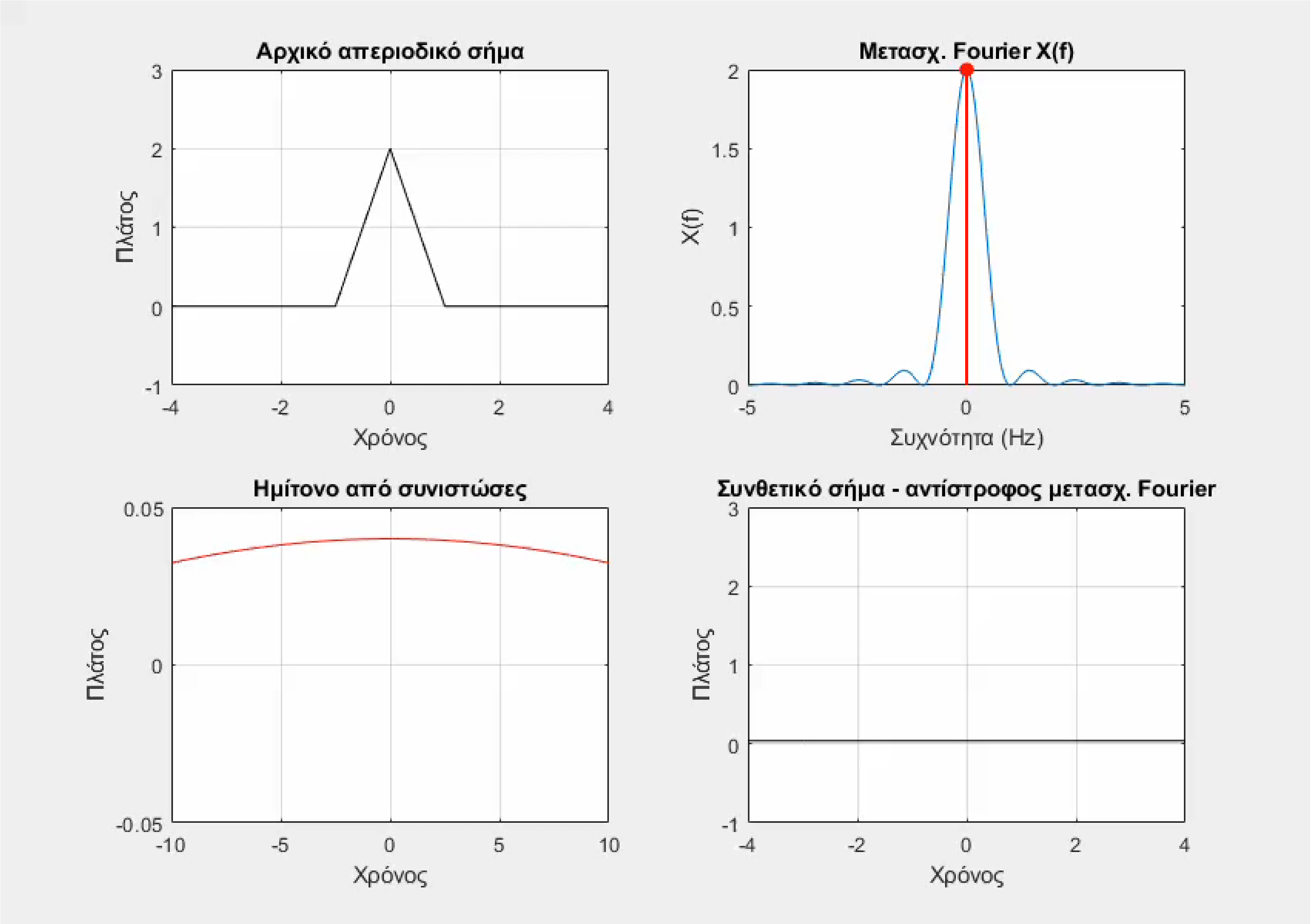




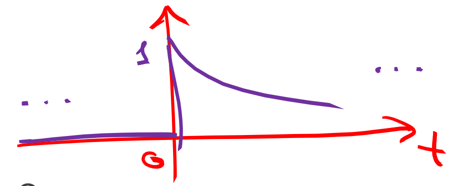

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Πλάτος παλμού
A = 2
# Μισή διάρκεια παλμού (-3 ως 3)
T = 3
# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου
t = np.arange(-5, 5, dt)
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνοτήτων
f = np.arange(-5, 5, df)
# Μετασχηματισμός Fourier
X = A*T*np.sinc(f*T)**2
# Αρχικοποίηση
x = np.zeros(t.shape)
# For loop για αντίστροφο μετασχ. Fourier
for i in range(1, len(f)):
    x = x + X[i]* np.exp(1j*2*np.pi*f[i]*t)

# Κανονικοποίηση
x = df*x
```

```python
# Γραφήματα
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(f, X)
plt.grid
plt.xlabel('Frequency (Hz)')
plt.ylabel('X(f)')
plt.title('Fourier Transform')

plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t, x.real)
plt.grid
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('x(t)')
plt.title('Inverse Fourier Transform')
```

• Μετασχηματισμός Fourier



- **Μετασχηματισμός Fourier**



- **Παράδειγμα:**

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t), \ \ a > 0$

Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \underbrace{u(t)}_{= \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}} e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-at} \cdot 1 \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{-(a+j2\pi f)} \left(\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right) \quad (1)$$

Με τι ισούται το $\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}$?

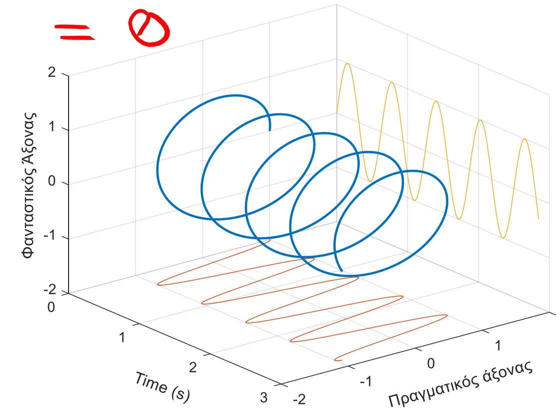
- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

ΔΕΝ μπορούμε να πούμε ότι:

" επειδή $a+j2\pi f > 0$, τότε $\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} = 0$ "

$e^{j2\pi f_0 t}$

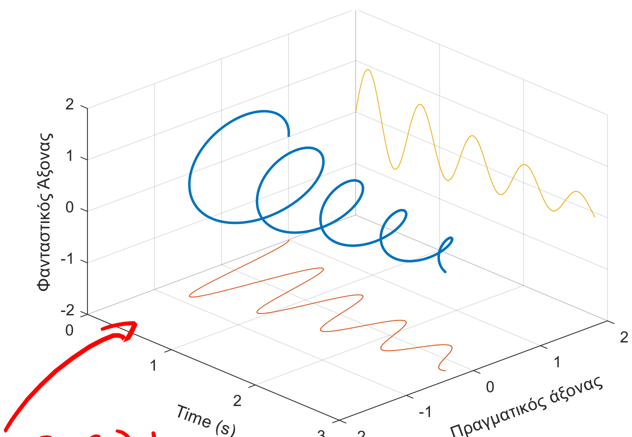


γιατί η πρόταση "$a+j2\pi f > 0$" δεν έχει νόημα γιατί οι μιγαδικοί αριθμοί δεν έχουν διάταξη!

Αν $e^{-(a+j2\pi f)t} = e^{-at}\, e^{-j2\pi f t}$?

Από τα σχήματα παρατηρώ ότι

$\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} = 0$!



Άρα (1) $\Rightarrow X(f) = \dfrac{1}{a+j2\pi f}$.

$e^{-(a+j2\pi f)t}$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

$$zz^* = |z|^2$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

Δείξαμε ότι $x(t) = e^{-at}u(t),\ a>0 \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}$

Είναι

$$X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{(a-j2\pi f)}{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)} = \frac{a-j2\pi f}{|a+j2\pi f|^2}$$

συζυγής του $a+j2\pi f$

$$= \frac{a-j2\pi f}{a^2+(2\pi f)^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+4\pi^2 f^2} + j\frac{-2\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$= Re\{X(f)\} + j\,Im\{X(f)\} = X_R(f) + jX_I(f)$$

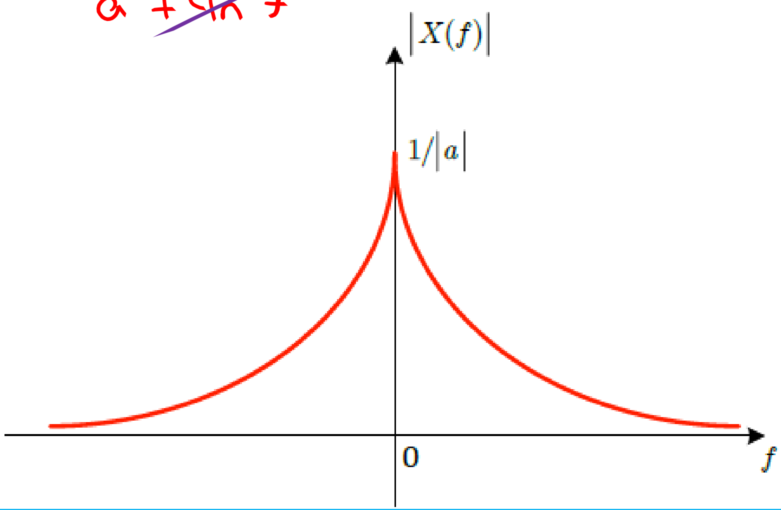
- **Μετασχηματισμός Fourier**

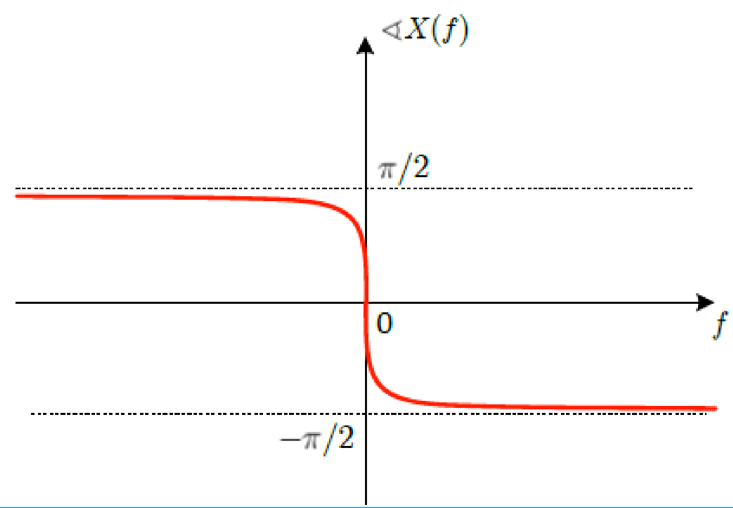
- Παράδειγμα:

Μέτρο: $|X(f)| = \left|\frac{1}{a+j2\pi f}\right| = \frac{1}{|a+j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2 f^2}}$

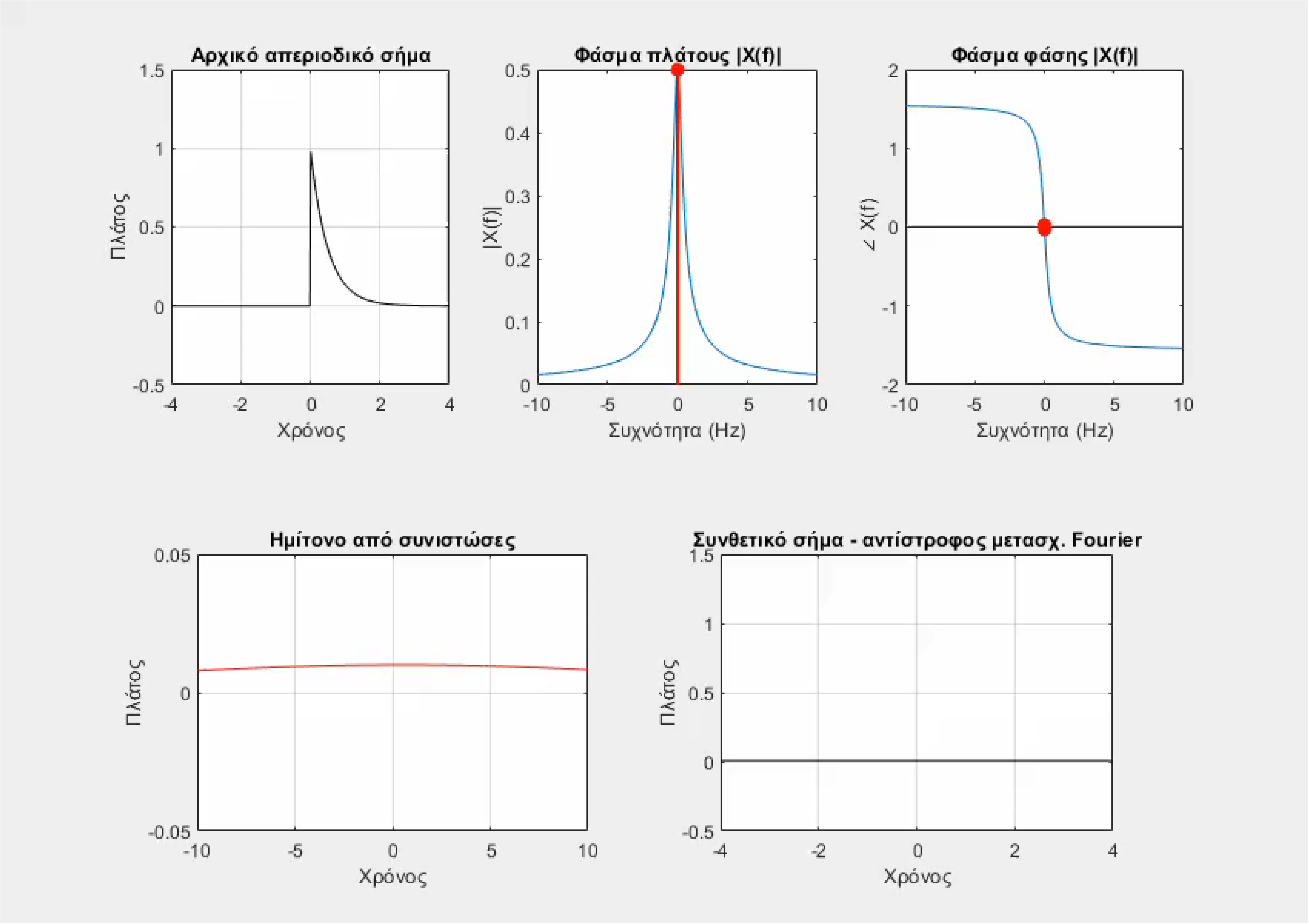
Φάση: $\varphi_x(f)$ ή $\sphericalangle X(f) = \tan^{-1}\frac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{-2\pi f}{\cancel{a^2+4\pi^2 f^2}}}{\frac{a}{\cancel{a^2+4\pi^2 f^2}}} = \tan^{-1}\frac{-2\pi f}{a} = -\tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$



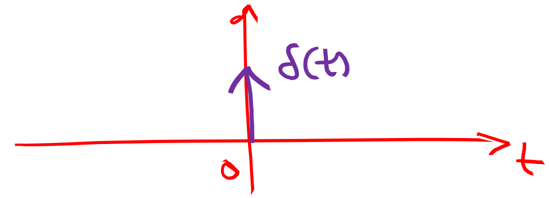


• Μετασχηματισμός Fourier



- **Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**



○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t)$

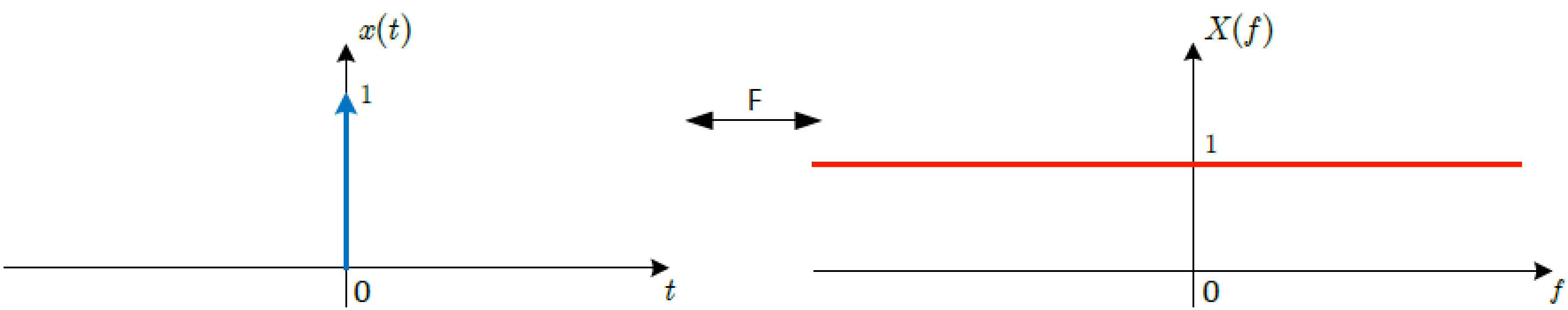
Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \underbrace{e^{-j2\pi f t}}_{f(t)} dt$$

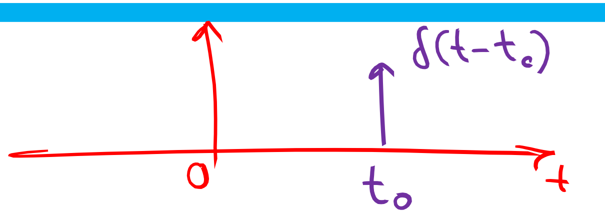
Επειδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

$$\Longrightarrow X(f) = f(0) = e^{-j0} = 1, \quad \forall f \in \mathbb{R}.$$



- **Μετασχηματισμός Fourier**



- **Παράδειγμα:**

  - Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t - t_0)$

Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) \underbrace{e^{-j2\pi f t}}_{f(t)} dt = f(t_0)$$

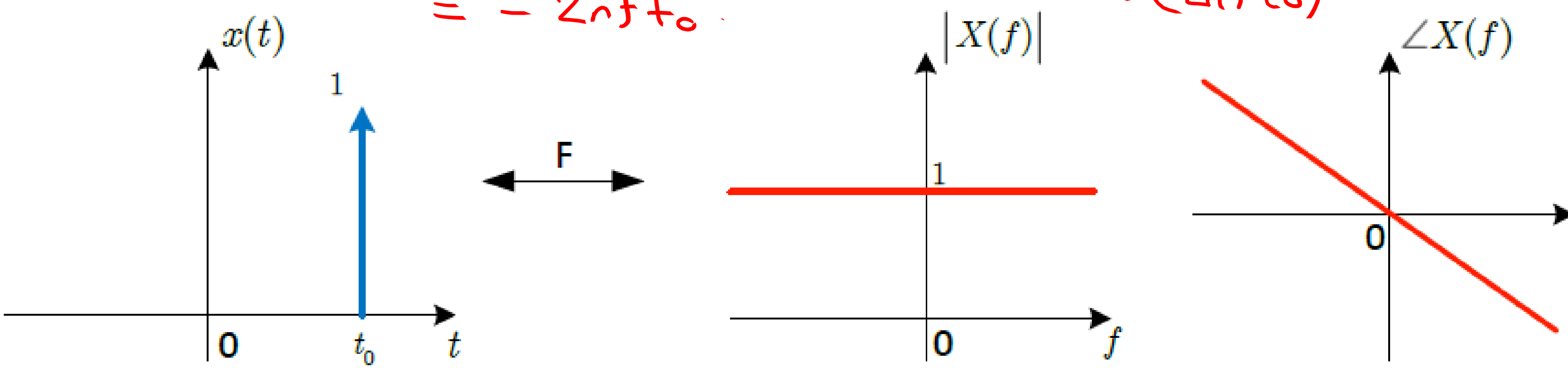
$$= e^{-j2\pi f t_0} \xrightarrow[\text{Euler}]{} \cos(2\pi f t_0) - j\sin(2\pi f t_0)$$

$Re\{X(f)\}$ $Im\{X(f)\}$

Μέτρο: $|X(f)| = |e^{-j2\pi f t_0}| = 1$

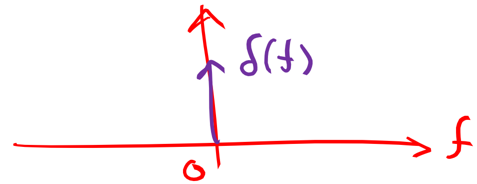
Φάση: $\measuredangle X(f) = \measuredangle e^{-j2\pi f t_0} = \tan^{-1} \dfrac{-\sin(2\pi f t_0)}{\cos(2\pi f t_0)} = \tan^{-1}\tan(-2\pi f t_0)$

$= -2\pi f t_0$.



- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:



○ Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $X(f) = \delta(f)$, καθώς και του σήματος $X(f) = \delta(f - f_0)$

- $$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+j2\pi f t}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f)\, \underbrace{e^{+j2\pi f t}}_{g(f)}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f)\, g(f)\, df$$

$$= g(0) = e^{+j0} = 1, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

$$x(t) = 1 \xleftrightarrow{F} X(f) = \delta(f)$$

- $$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0)\, \underbrace{e^{+j2\pi f t}}_{g(f)}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0)\, g(f)\, df = g(f_0)$$

$$= e^{+j2\pi f_0 t}$$

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{F} X(f) = \delta(f - f_0)$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ