ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 7Η

- Μετασχηματισμός Fourier

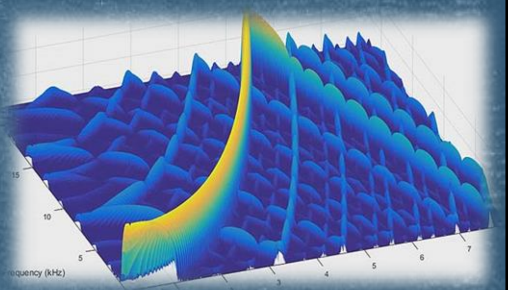
Τι περιέχει το ΗΥ215?

1ο Κομμάτι

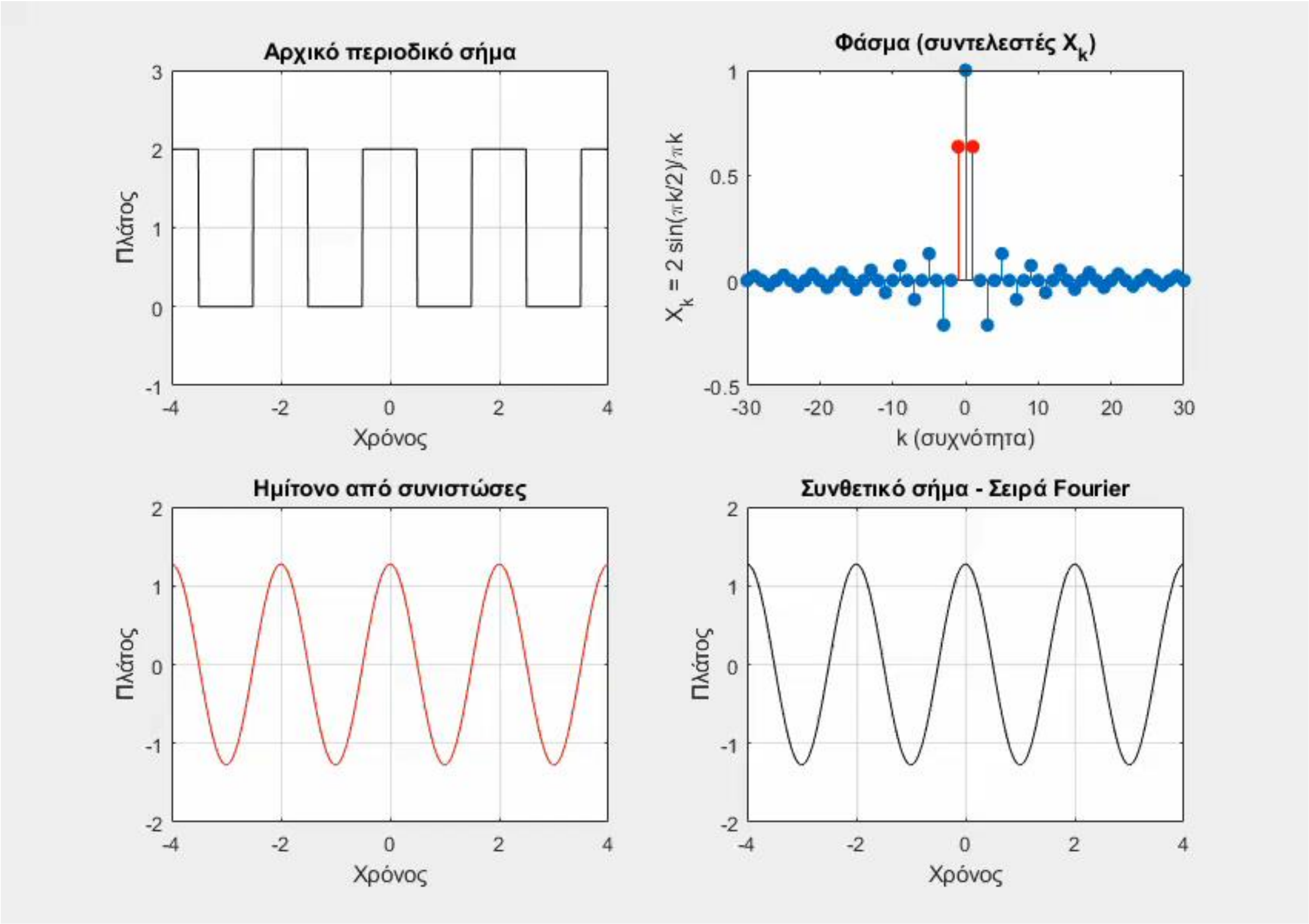
- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2ο Κομμάτι

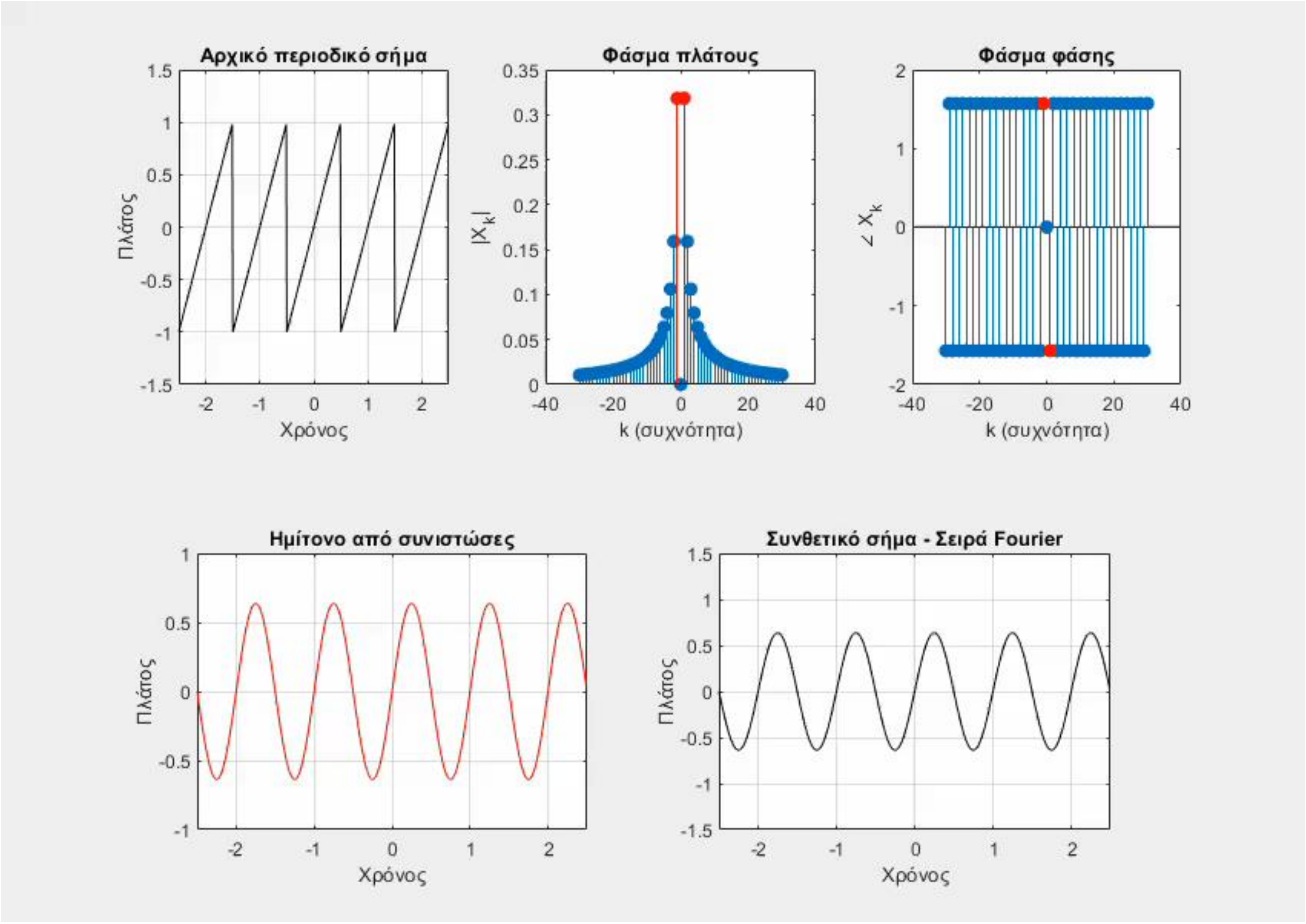
- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



- **Προς το μετασχ. Fourier…**



- **Προς το μετασχ. Fourier…**



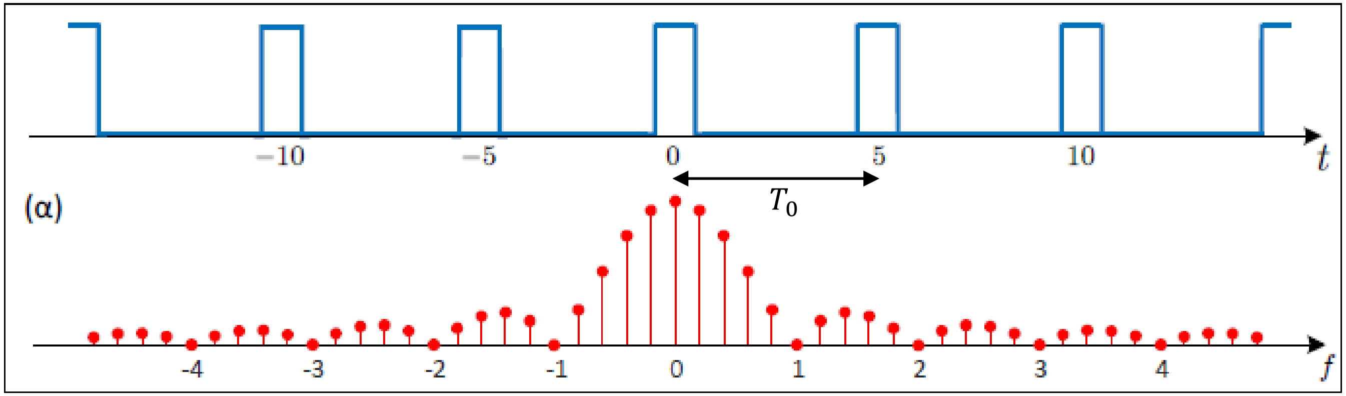
- **Προς το μετασχ. Fourier…**
- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Τι θα συμβεί αν $T_0 \rightarrow +\infty$?
- Σίγουρα το σήμα θα πάψει να είναι περιοδικό
- Πώς αναπαρίσταται συχνοτικά?

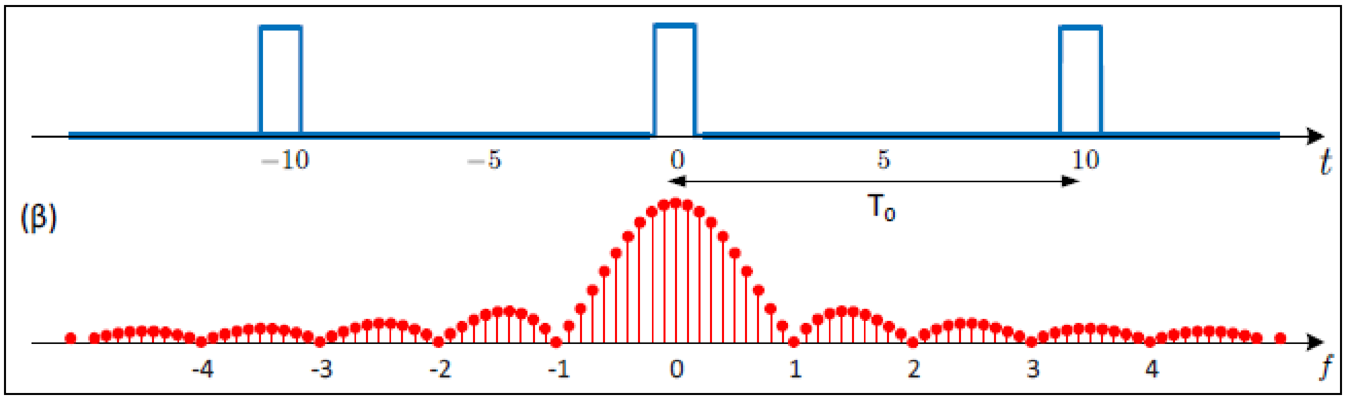
• Προς το μετασχ. Fourier…



Περίοδος $T_0 = 5$ s

Θεμελ. συχν. $f_0 = \frac{1}{5}$ Hz

$x(t) \rightarrow X_k$

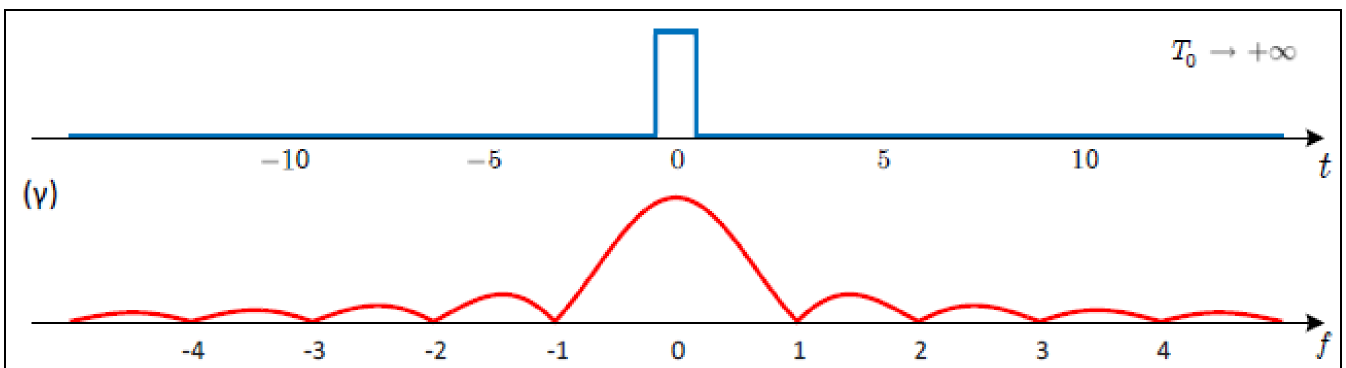


Γιατί αυξήθηκαν οι φασματικές γραμμές? Ιδιότητα Χρονικής στάθμισης!

$x\left(\frac{t}{2}\right) \rightarrow X_k$,

αλλά $T_0 \rightarrow 2T_0 = 10$ s

θεμελ. συχν. $f_0 = \frac{1}{10}$ Hz



Αν περίοδος $T_0 \rightarrow +\infty$ τότε η θεμελ. συχν.

$f_0 = \frac{1}{T_0} \rightarrow df$ Hz

και άρα $kf_0 \rightarrow kdf \rightarrow f$

- **Προς το μετασχ. Fourier…**

- Τυπικά:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Bigg(\overbrace{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt}^{X_k}\Bigg) e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Όταν $T_0 \rightarrow +\infty$, τότε $f_0 = \frac{1}{T_0} \rightarrow df$ και $k f_0 \rightarrow f$

- Οπότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt\right) e^{j2\pi f t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt\right)}_{X(f)} e^{j2\pi f t} df$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Συντελεστές Fourier:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt$$

ονομάζεται **Μετασχηματισμός Fourier** και συμβολίζεται με $X(f)$

- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Σειρά Fourier:

$$x(t) = \sum X_k e^{j2\pi kf_0t}$$

ονομάζεται **αντίστροφος Μετασχ. Fourier** και προφανώς συμβολίζεται με $x(t)$

- Ο Μετασχ. Fourier είναι μια μιγαδική συνάρτηση (εν γένει)
  - Έχει μέτρο και φάση
  - Έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος

- **Μετασχηματισμός Fourier**

$$e^{j\theta(t)} = \cos\big(\theta(t)\big) + j\sin\big(\theta(t)\big)$$

- Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\,dt$$

$$= \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\mathrm{Im}\{X(f)\} = X_R(f) + jX_I(f)$$

δηλ.

$$X_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt$$

$$X_I(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\,dt$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι για **πραγματικά σήματα**

$$\Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}$$
$$\Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}$$

$$X_R(f) = X_R(-f)$$

$$X_I(f) = -X_I(-f)$$

Άρτιο πραγματικό μέρος ως προς f

Περιττό φανταστικό μέρος ως προς f

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Μέτρο (φάσμα πλάτους):

$$|X(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)}$$

$$|X_k| = \sqrt{\Re\{X_k\}^2 + \Im\{X_k\}^2}$$

$$\phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{\Im\{X_k\}}{\Re\{X_k\}}\right)$$

- Φάση (φάσμα φάσης):

$$\phi_x(f) = \tan^{-1}\frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

$$X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$$

οπότε και ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}$$

$$X_{-k} = X_k^*$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι **για πραγματικά σήματα**

$$X(f) = X^*(-f)$$

Συζυγής συμμετρία

- Η συζυγής συμμετρία δηλώνει ότι το μέτρο του μετασχηματισμού (**φάσμα πλάτους**) είναι άρτια συνάρτηση του f, ενώ η φάση (**φάσμα φάσης**) είναι περιττή συνάρτηση του f

- Αναμενόμενο, αφού ο μετασχ. Fourier ορίστηκε ως μια γενίκευση των συντελεστών Fourier

- **Μετασχηματισμός Fourier**

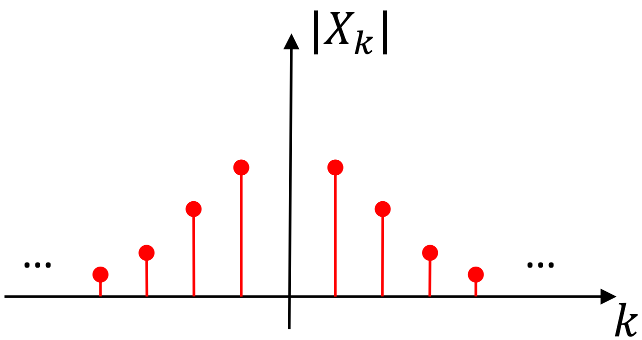
- Ο μετασχ. Fourier κάνει την ίδια δουλειά με τους συντελεστές Fourier αλλά για *απεριοδικά* σήματα

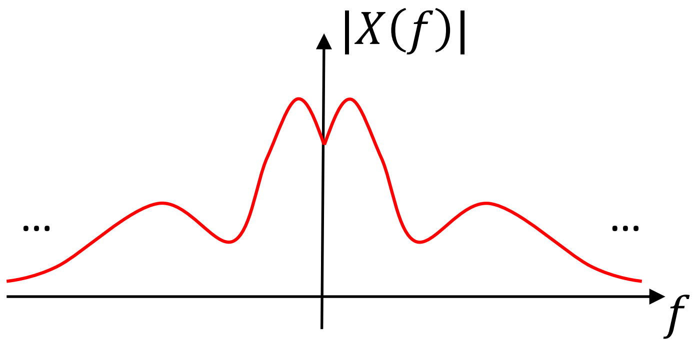
- Η σειρά Fourier αναπτύσσει ένα **περιοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) άθροισμα *μετρήσιμων* διακριτών συχνοτήτων kf_0, με πλάτη $2|X_k|$ και φάσεις φ_k:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Ο μετασχ. Fourier αναπτύσσει ένα **απεριοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) *μη μετρήσιμο* άθροισμα ***κάθε*** συχνότητας f, με πλάτη $2|X(f)|df$ και φάσεις $\angle X(f)$:

$$x(t) = \int_0^{+\infty} 2|X(f)| \cos\big(2\pi f t + \angle X(f)\big)\, df$$





- **Μετασχηματισμός Fourier – Ύπαρξη**
- Αρκεί

$$|X(f)| < +\infty \Leftrightarrow \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < +\infty$$

δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < +\infty$$

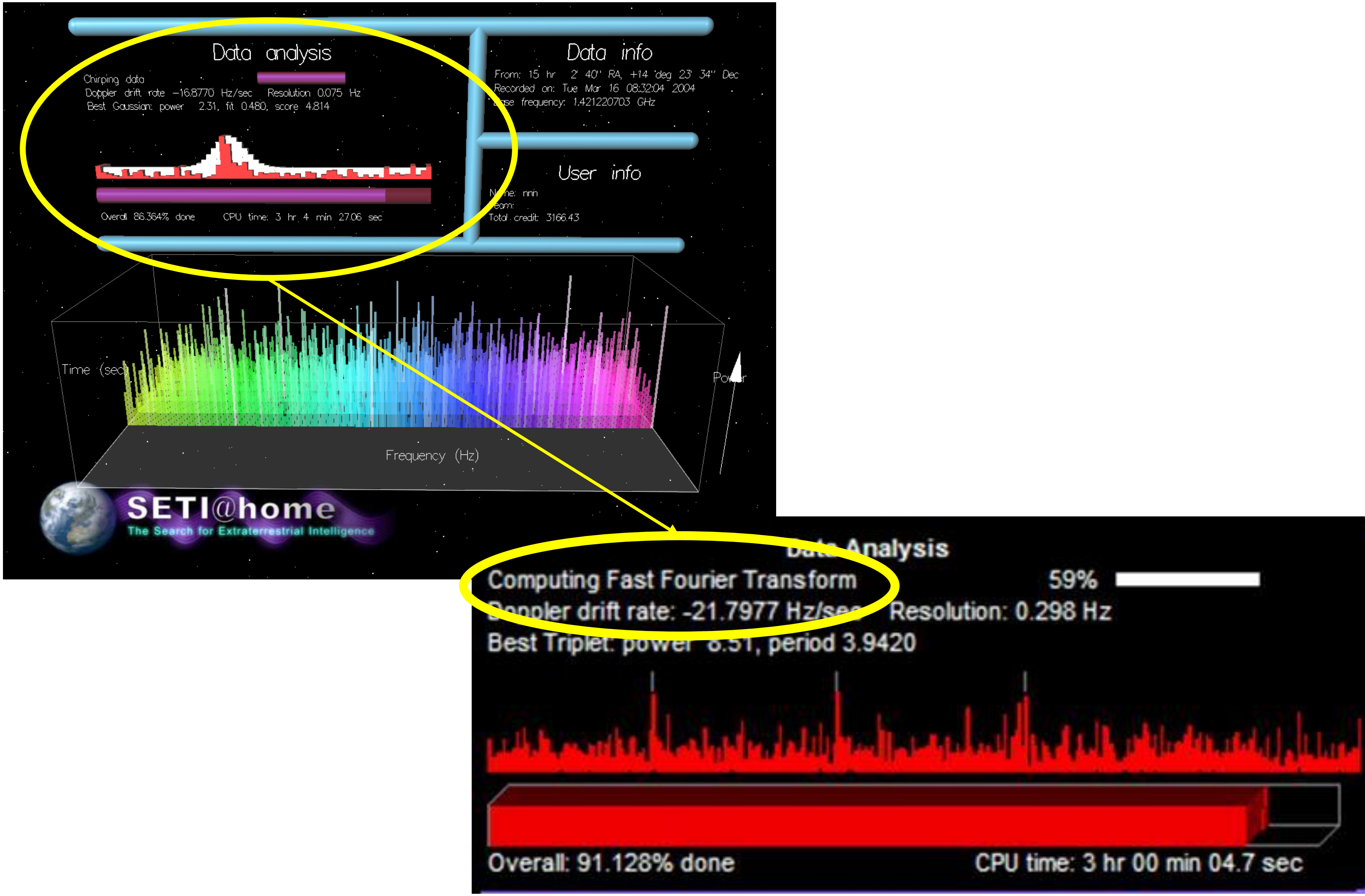
  - Το σήμα $x(t)$ αρκεί να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους ασυνέχειες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους μέγιστα και ελάχιστα σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
  - Δεν είναι αναγκαία συνθήκη
- Επίσης αν

$$\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}^{E_x} < +\infty$$

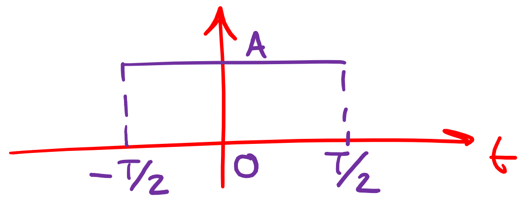
τότε το σήμα έχει μετασχ. Fourier

- **Κάθε σήμα που παράγεται στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση έχει μετ. Fourier**

- **Μετασχηματισμός Fourier – Μια Εφαρμογή**



- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**



$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \mathrm{sinc}(x)$$

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του γνωστού σήματος $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, $A > 0$.

Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= A\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{A}{-j2\pi f}\, e^{-j2\pi f t}\Big|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f}\left(e^{-j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}} - e^{+j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}}\right) = \frac{A}{-j2\pi f}\left(e^{-j\pi f T} - e^{+j\pi f T}\right)$$

$\underline{\text{Euler}}$

$$= \frac{A}{\cancel{-j2}\pi f}\left(\cancel{-2j}\sin(\pi f T)\right) = \frac{A}{\pi f}\sin(\pi f T) = AT\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

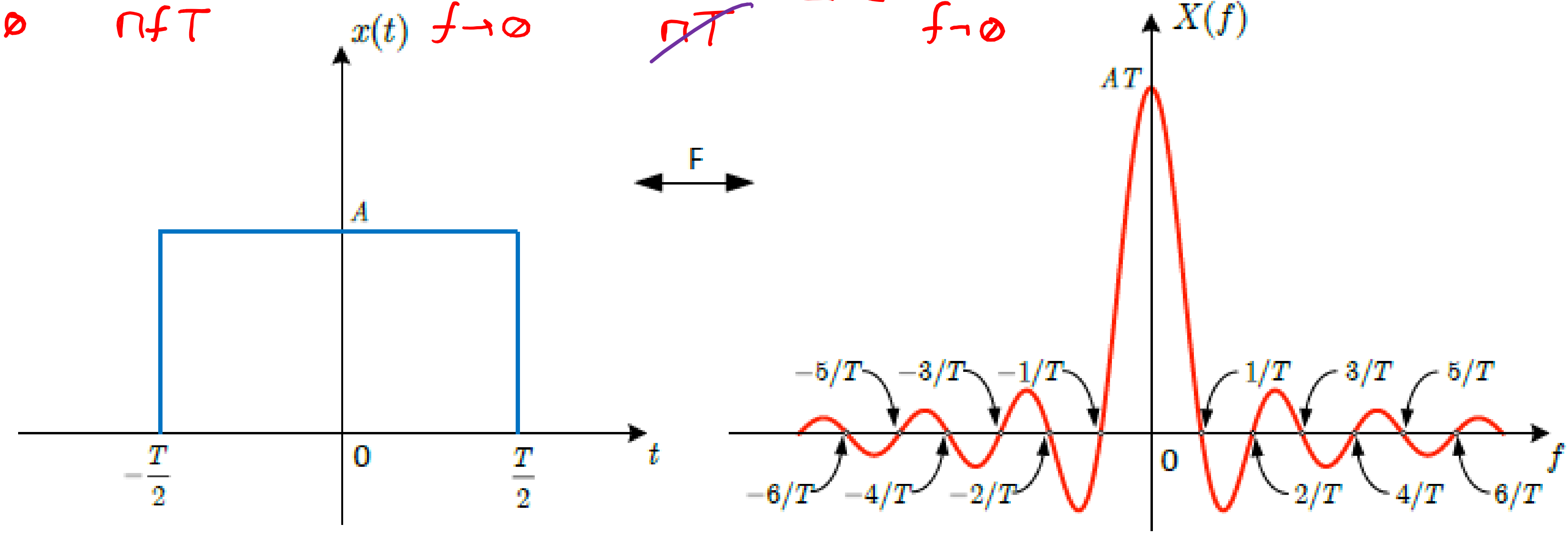
Η συνάρτηση sinc(x) είναι άρτια και πραγματική συνάρτηση του x.

Σημεία μηδενισμού: $X(f)=0 \Leftrightarrow AT\dfrac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(\pi f T)=0=\sin(k\pi) \Rightarrow \cancel{\pi} f T = k\cancel{\pi},\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow f=\dfrac{k}{T},\ k\in\mathbb{Z}$. Στο $f=0$, $\dfrac{0}{0}$ απροσδιοριστία.

$$\lim_{f\to 0}\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{f\to 0}\frac{\cancel{\pi T}\cos(\pi f T)}{\cancel{\pi T}} = \lim_{f\to 0}\cos(\pi f T)=1.$$



- **Μετασχηματισμός Fourier**

$X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(fT)$

- Παράδειγμα:

$|X(f)| = |AT\,\mathrm{sinc}(fT)| = AT\,|\mathrm{sinc}(fT)|$. ← μέτρο

$A > 0$

$T > 0$

$\varphi_x(f) = \tan^{-1}\dfrac{\mathrm{Im}\{X(f)\}}{\mathrm{Re}\{X(f)\}} = \tan^{-1}\dfrac{0}{AT\,\mathrm{sinc}(fT)} = \tan^{-1}(0)$

$= k\pi \xrightarrow{k=0} 0$

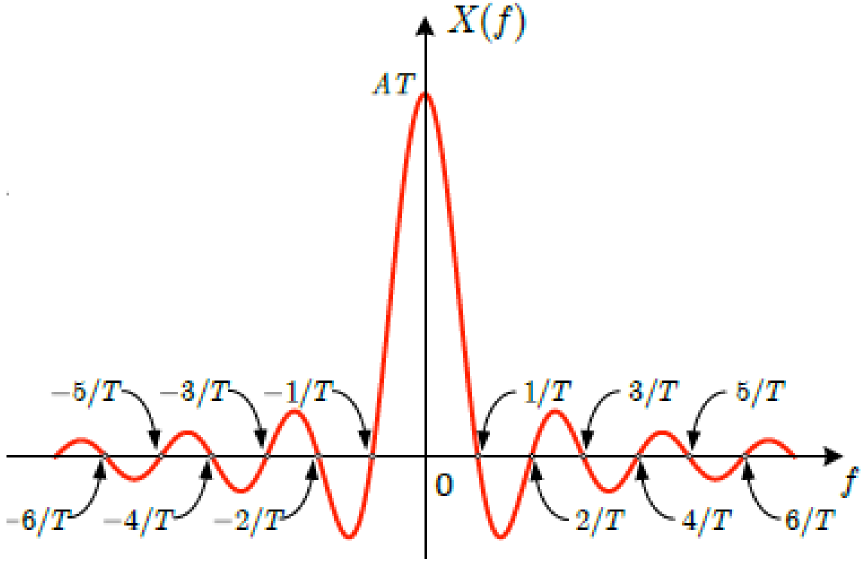
$\xrightarrow{k=1} \pi$ ← φάση

$\xrightarrow{k=-1} -\pi$

Σύμβαση: αν $f>0$ και $X(f)<0$ τότε $\varphi(f)=\pi$

αν $f<0$ και $X(f)<0$ τότε $\varphi(f)=-\pi$

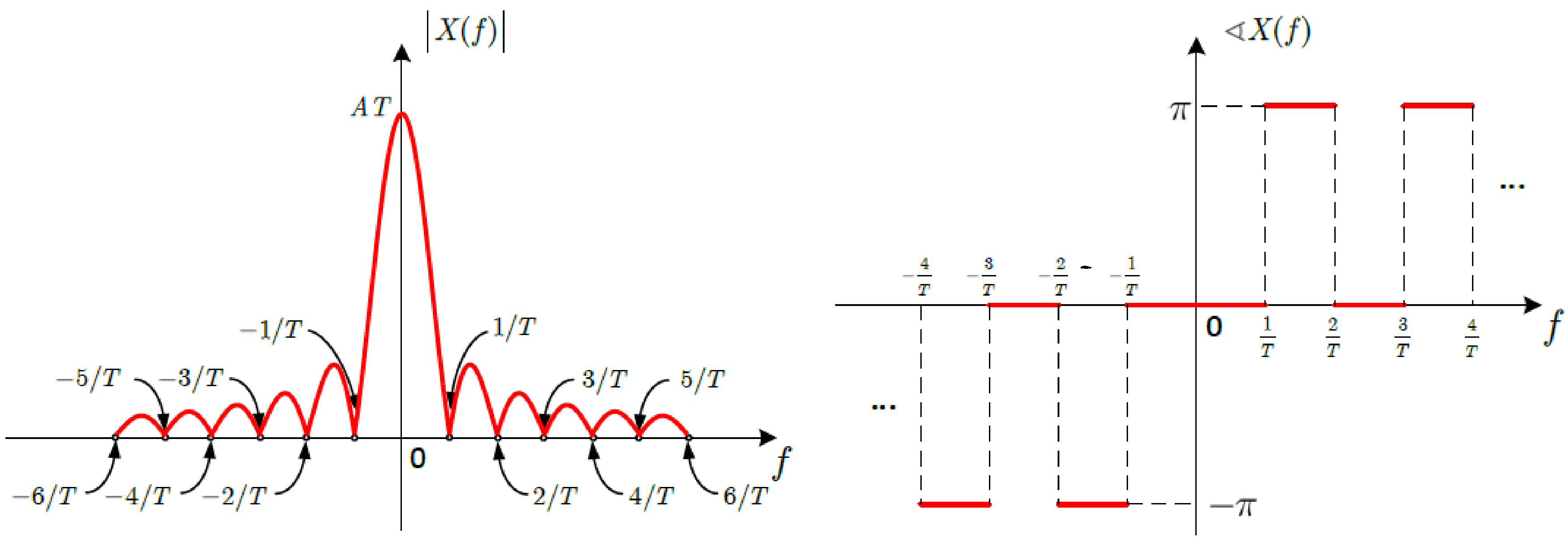
αν $X(f)>0$, τότε $\varphi=0$



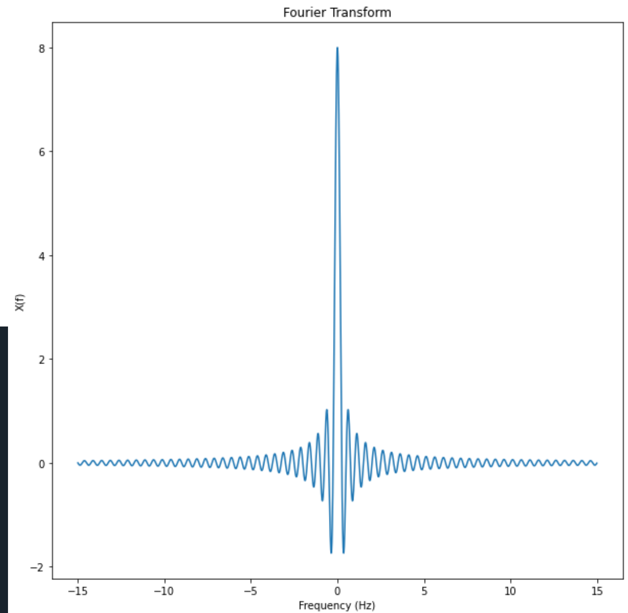
- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

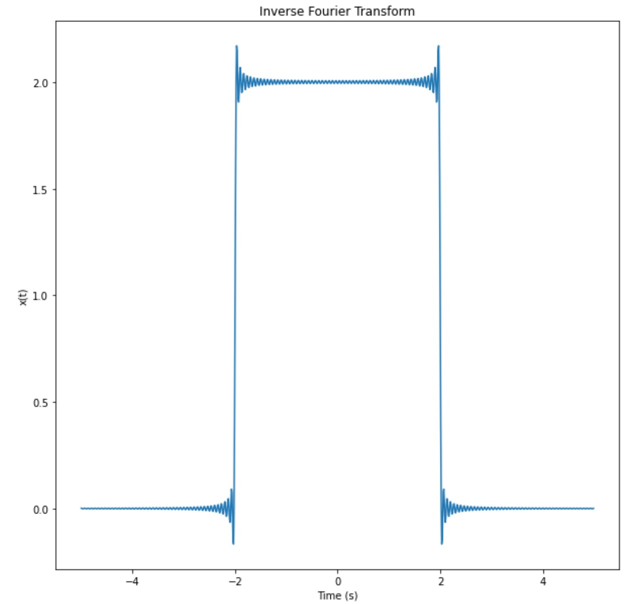
$$|X(f)| = A\,T\left|\mathrm{sinc}(fT)\right|$$

$$\sphericalangle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{(1+l)}{T} < f < \frac{(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{(2+l)}{T} < f < -\frac{(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} < |f| < \frac{(l+1)}{T} \end{cases}$$



- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Κώδικας Python

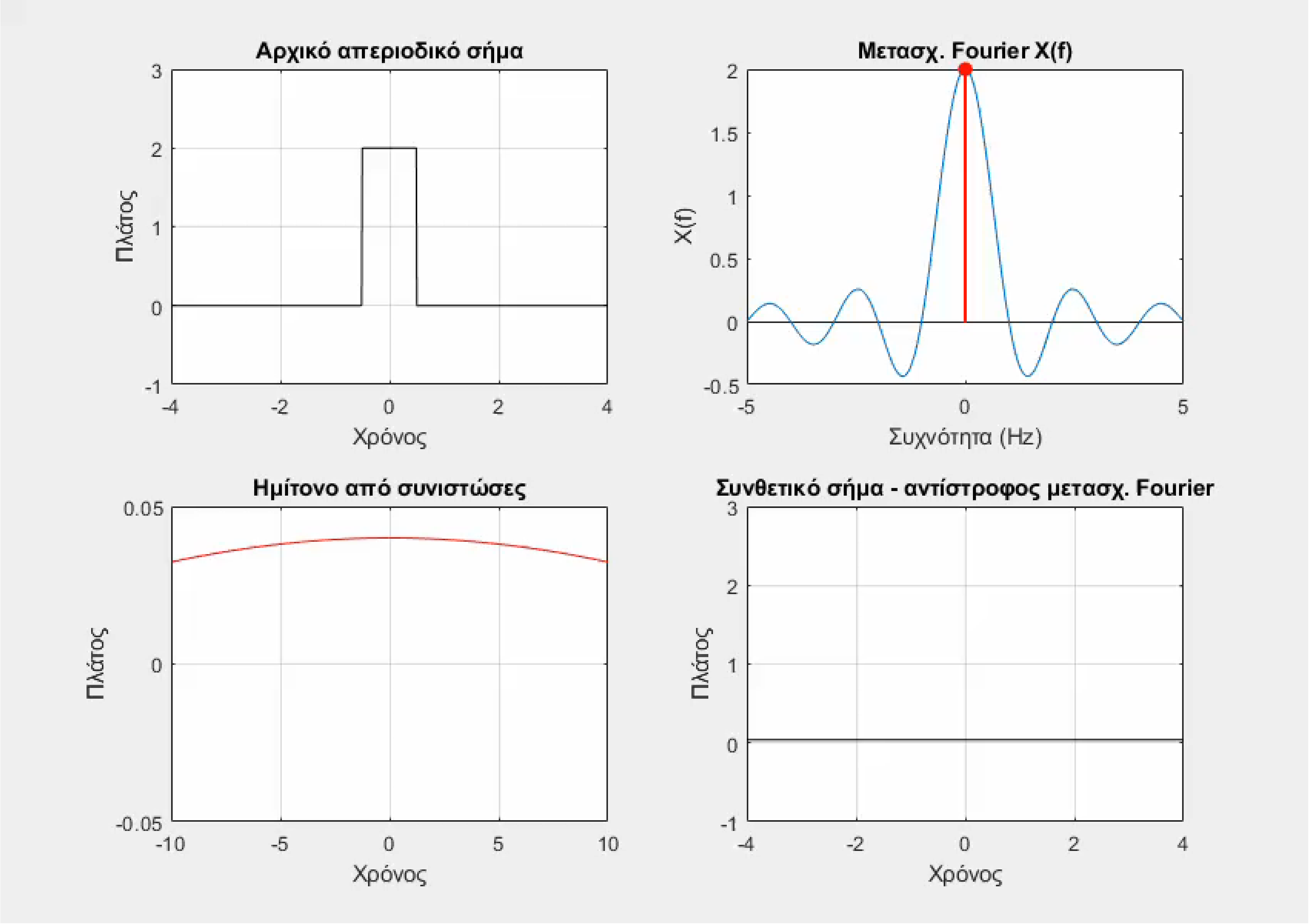





```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Πλάτος παλμού
A = 2
# Διάρκεια παλμού (-2 ως 2)
T = 4
# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου
t = np.arange(-5, 5, dt)
# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνοτήτων
f = np.arange(-15, 15, df)
# Μετασχηματισμός Fourier
X = A*T*np.sinc(f*T)
# Αρχικοποίηση
x = np.zeros(t.shape)
# For loop για αντίστροφο μετασχ. Fourier
for i in range(1, len(f)):
    x = x + X[i]* np.exp(1j*2*np.pi*f[i]*t)

# Κανονικοποίηση
x = df*x
```

```
# Γραφήματα
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(f, X)
plt.grid
plt.xlabel('Frequency (Hz)')
plt.ylabel('X(f)')
plt.title('Fourier Transform')

plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t, x.real)
plt.grid
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('x(t)')
plt.title('Inverse Fourier Transform')
```

• Μετασχηματισμός Fourier



Συνεχίζεται... ☺