ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

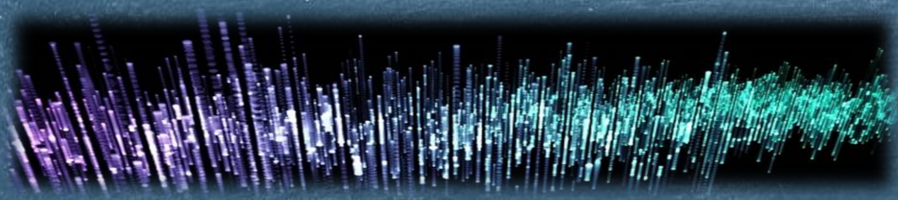
ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η

- Σειρές Fourier

Τι περιέχει το ΗΥ215?

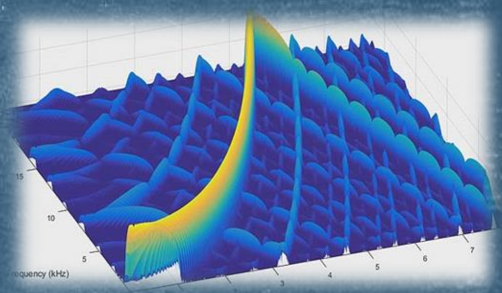
$1^{ο}$ Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



$2^{ο}$ Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία

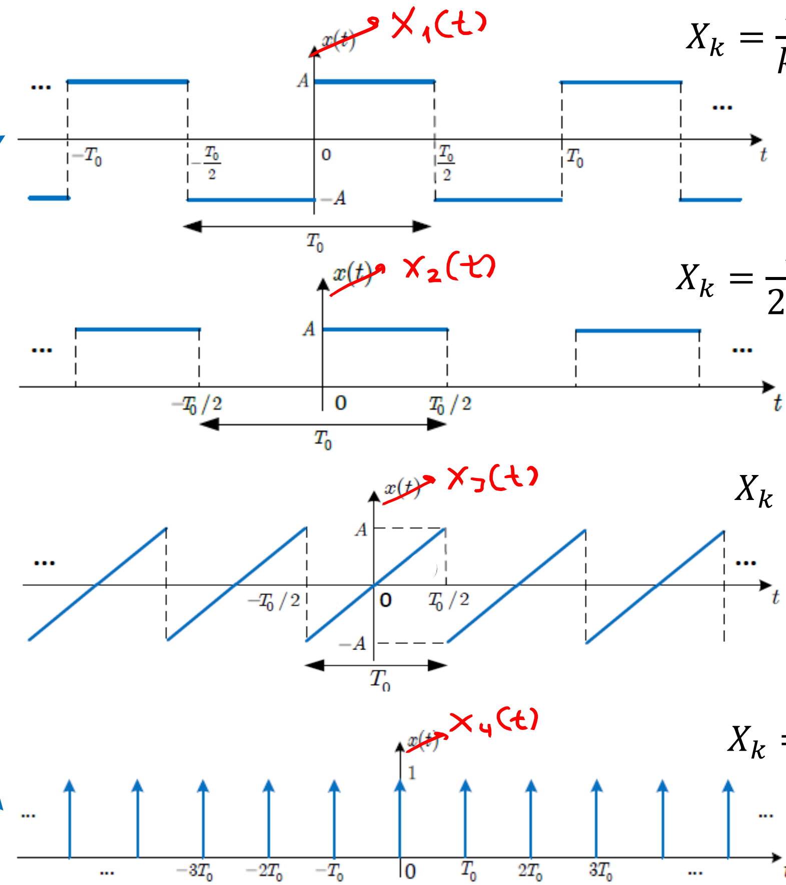


- **«Γνωστές» Σειρές Fourier**

- Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις παρακάτω σειρές Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στις ιδιότητες που ακολουθούν

Συνήθεις Σειρές Fourier

Περιοδικό σήμα
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \frac{2A}{T_0}t, \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$



$$X_k = \frac{A}{k\pi}(1-(-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$

$$X_k = \frac{A}{2k\pi}(1-(-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$

$$X_k = \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}, \forall\, k$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 **y(t) περιοδικό με περίοδο T_0**	X_k Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X^*_{-k}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$ $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$j2\pi k f_0 X_k$ $(j2\pi k f_0)^n X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k\rvert = \lvert X_{-k}\rvert, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 y(t) περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$

Απόδειξη:

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \to Z_k = ?$$

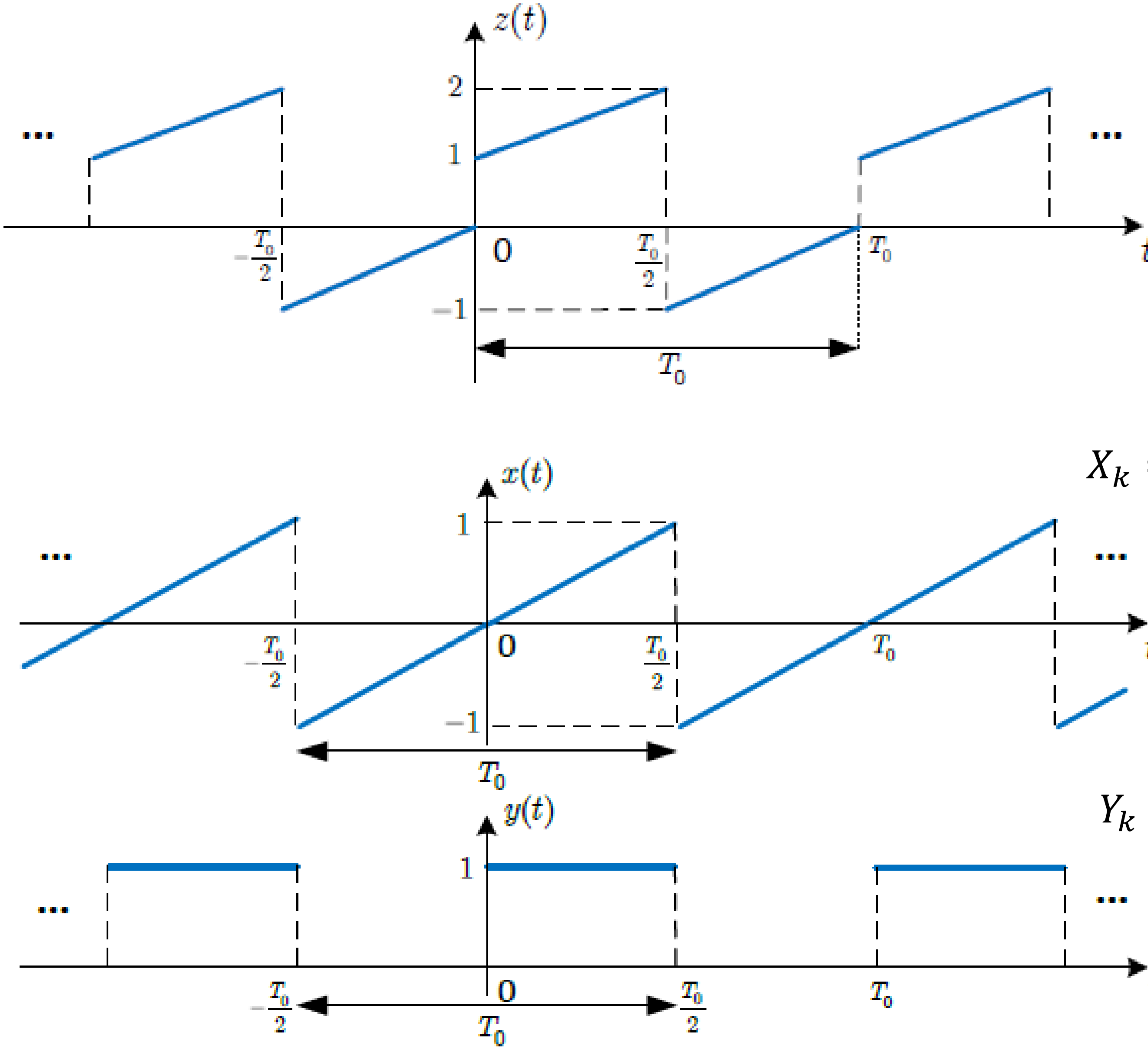
$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int z(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int \left(Ax(t) + By(t)\right) e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int Ax(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int By(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}A\int x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}B\int y(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= AX_k + BY_k$$

- **Ιδιότητες**



$$Z_k = ?$$

$$Z_k = X_k + Y_k$$

$$X_k = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$

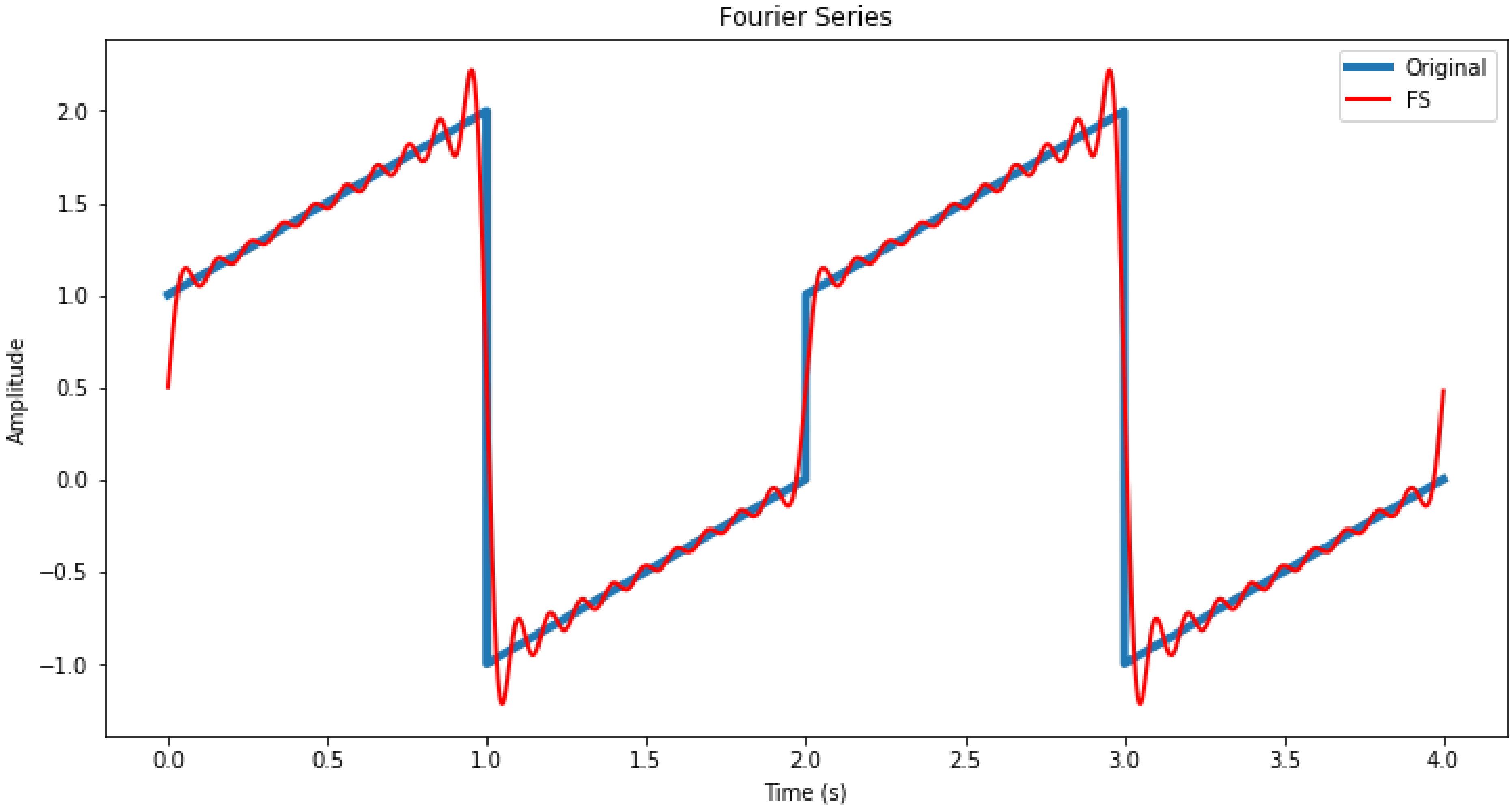
$$Y_k = \frac{1}{2\pi k}\left(1 - (-1)^k\right)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$

- **Python κώδικας**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Parameters
A = 2
T0 = 2
f0 = 1/T0
N = 20
k = np.arange(-N,0,1, dtype=float)
k = np.concatenate((k, np.arange(1,N+1,1, dtype=float)))

# Ground truth
dt = 0.001
t1 = np.arange(0,T0/2, dt)
t2 = np.arange(T0/2, T0, dt)
z1 = 1 + t1
z2 = -2 + t2
z = np.concatenate((z1,z2))
z = np.concatenate((z,z))
t = np.arange(0, 2*T0, dt)

t = np.expand_dims(t,1)
k = np.expand_dims(k,1)
```

```
# Fourier Coefficients
Xk = 1/(np.pi*k) * np.power(-1,k) * np.exp(1j*np.pi/2.0)
E = np.exp(1j*2*np.pi*f0*np.multiply(t, k.T))
x = Xk.T @ E.T

Yk = 1/(2*np.pi*k) * (1 - np.power(-1,k)) * np.exp(-1j*np.pi/2.0)
y = Yk.T @ E.T

# x(t) + y(t)
z_FS = x + y
Z0 = 1/2
z_FS = Z0 + z_FS

plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(t,z, linewidth=4)
plt.title('Fourier Series')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.plot(t, z_FS.T, 'r', linewidth=2)
plt.legend(['Original', 'FS'])
```

- **Ιδιότητες**
- **Python κώδικας**



• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	**Περιοδικό σήμα**	**Συντελεστές Fourier**
	$\mathbf{x(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$

<u>Απόδειξη:</u>

$$z(t) = x(t-t_0) \rightarrow Z_k = ?$$

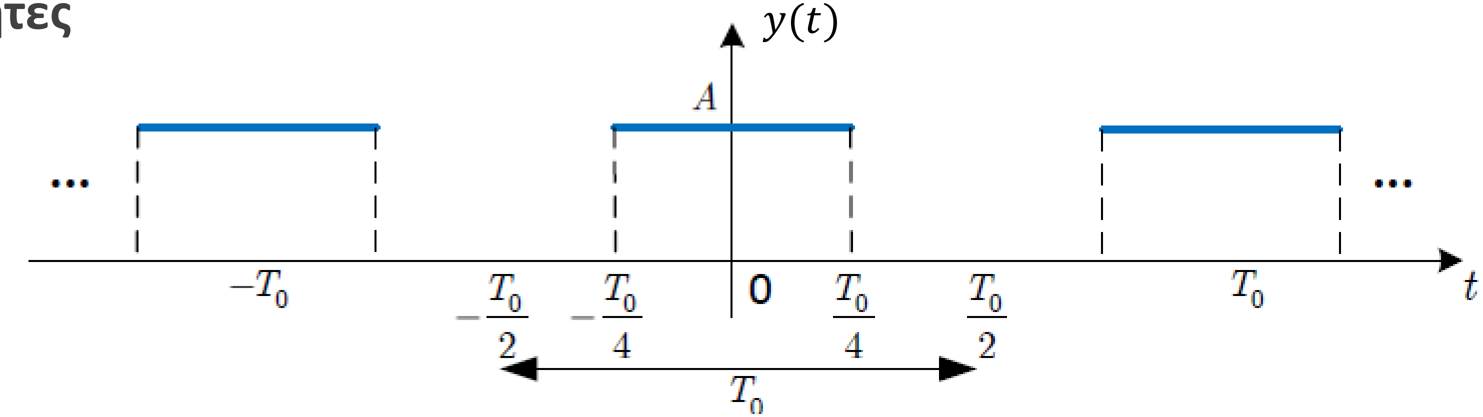
$$\left.\begin{array}{c} Z_k = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int x(t-t_0)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ u = t - t_0 \Rightarrow du = dt \end{array}\right\} = \frac{1}{T_0}\int x(u)e^{-j2\pi k f_0 (u+t_0)}du$$

$$= \frac{1}{T_0}\int x(u)e^{-j2\pi k f_0 u}e^{-j2\pi k f_0 t_0}du$$

$$= e^{-j2\pi k f_0 t_0}\left[\frac{1}{T_0}\int x(u)e^{-j2\pi k f_0 u}du\right]$$

$$= e^{-j2\pi k f_0 t_0}X_k$$

- **Ιδιότητες**



Αναγνωρίζαμε ότι το παρακάτω σήμα είναι το $x_2(t)$ (στη "λίστα" με τα δοσμένα σήματα), το οποίο $x_2(t)$ έχει Σ Fourier

$$X_{2_k} = \frac{1}{2\pi k}\left(1-(-1)^k\right) e^{-j\frac{\pi}{2}}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Το $y(t)$ είναι το $x_2(t)$ μετατοπισμένο κατά $\frac{T_0}{4}$ αριστερά, δηλ.

$$y(t) = x_2\left(t + \frac{T_0}{4}\right) \longleftrightarrow Y_k = X_{2_k} e^{-j2\pi k f_0\left(-\frac{T_0}{4}\right)}$$

$$= X_{2_k} e^{j\pi k \frac{\overbrace{f_0 T_0}^{1}}{2}} = X_{2_k} e^{j\frac{\pi k}{2}}$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	**Περιοδικό σήμα**	**Συντελεστές Fourier**
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 **y(t) περιοδικό με περίοδο T_0**	X_k Y_k
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}

<u>Απόδειξη:</u>

$$z(t) = x(-t) \rightarrow Z_k = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_k = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} x(-t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ u = -t \Rightarrow du = -dt \end{array}\right\} = -\frac{1}{T_0}\int_0^{-T_0} x(u)e^{j2\pi k f_0 u}du$$

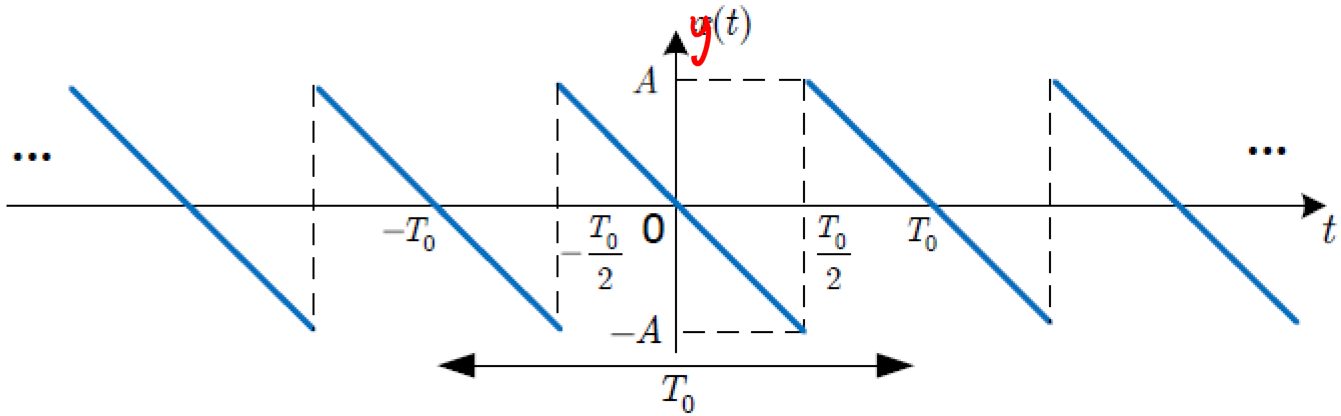
$u_1 = 0 \ , \ u_2 = -T_0$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)e^{j2\pi k f_0 u}du$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)e^{-j2\pi(-k) f_0 u}du$$

$$= X_{-k}$$

• **Ιδιότητες**



Αναγνωρίζουμε ότι το $y(t)$ παραπάνω αποτελεί χρονική αναστροφή του "γνωστού" σήματος $x_3(t)$, δηλ. $y(t) = x_3(-t)$

Το $x_3(t)$ έχει συντ. Fourier

$$X_{3_k} = \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Άρα από την ιδιότητα της χρονικής αναστροφής

$$e^{-j\pi} = -1$$

$$Y_k = X_{3_k}\Big|_{k:=-k} = \frac{A}{-k\pi}(-1)^{-k} e^{j\frac{\pi}{2}} = -\frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{A}{\pi k}(-1)^k e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad \forall k$$

- **Ιδιότητες**

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 $y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$, $a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a

Απόδειξη:

$\frac{1}{\frac{T_0}{a}}$

$$z(t) = x(at)\,, a > 0 \to Z_k = ?$$

$$Z_k = \frac{1}{T_0/a}\int_0^{T_0/a} x(at)e^{-j2\pi k a f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(u)e^{-j2\pi k f_0 u}du = X_k$$

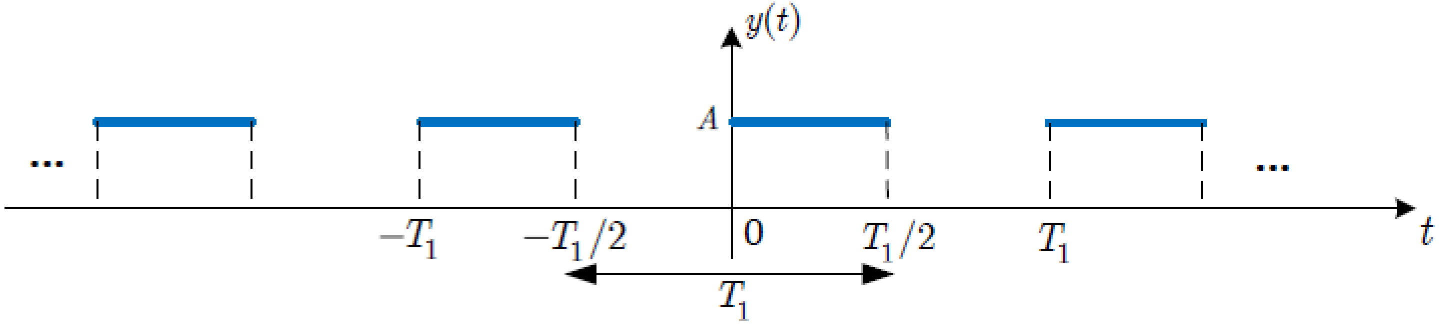
$$u = at \Rightarrow du = adt$$

$u_1 = 0\,,\ u_2 = T_0$

Π.χ.

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases} \Rightarrow x_{T_0}(at) = \begin{cases} at, & 0 < at < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < at < T_0 \end{cases} = \begin{cases} at, & 0 < t < \frac{T_0}{2a} \\ 0, & \frac{T_0}{2a} < t < \frac{T_0}{a} \end{cases}$$

• Ιδιότητες



Αναγνωρίζαμε ότι το y(t) παραπάνω αποτελεί χρονική στάθμιση του $x_2(t)$ από τη "γνωστή λίστα" περιοδικών σημάτων.

Άρα

$$Y_k = X_{2k}, \quad \text{αλλά} \quad T_1 \neq T_0$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$\mathbf{x(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$

<u>Απόδειξη:</u>

$$z(t) = \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow Z_k = ?$$

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{dx(t)}{dt}\, e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,\frac{d}{dt}e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

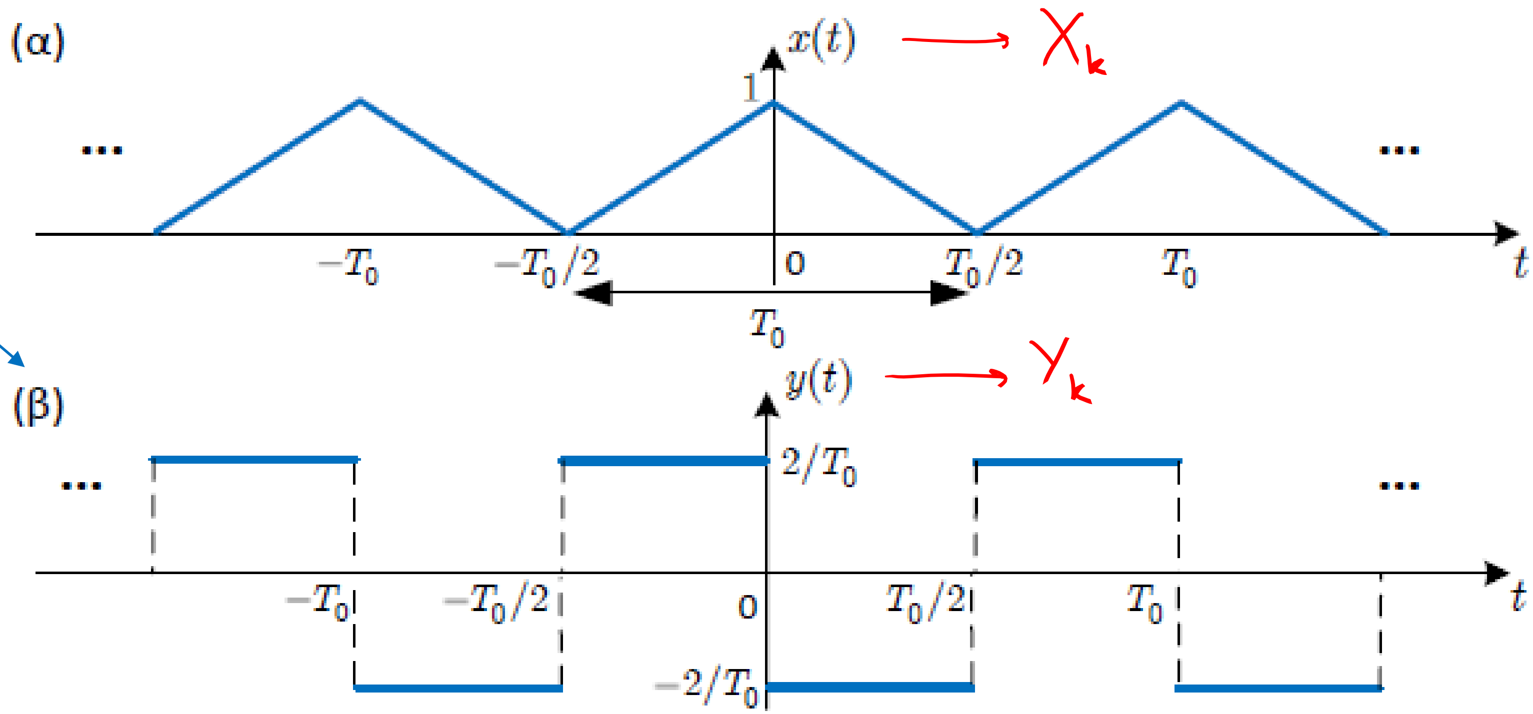
$$= \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)(-j2\pi k f_0)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} + j2\pi k f_0\left[\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{T_0}x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} + j2\pi k f_0 X_k = \frac{1}{T_0}\underbrace{\big(x(0) - x(T_0)\big)}_{0} + j2\pi k f_0 X_k = j2\pi k f_0 X_k$$

- **Ιδιότητες**

$\frac{d}{dt}x(t)$



Αναγνωρίζουμε ότι το $y(t)$ είναι το σήμα $x_1(t)$ με αντίθετο πλάτος, δηλ. $y(t) = -x_1(t)$, με $A = \frac{2}{T_0}$.

Άρα $Y_k = -X_{1k} = -\frac{\frac{2}{T_0}}{2\pi k}\left(1-(-1)^k\right)e^{-j\frac{\pi}{2}}, \ \forall\, k$

Θέλουμε να βρούμε τα X_k του περιοδ. τριγωνικού παλμού.

• **Ιδιότητες**

Από τις ιδιότητες παραγώγισης / ολοκλήρωσης

$$Y_k = j2\pi k f_0 X_k \Rightarrow X_k = \frac{Y_k}{j2\pi k f_0}$$

Οπότε

$$X_k = \frac{1}{j2\pi k f_0}\left(\frac{1}{\pi k T_0}\left((-1)^k - 1\right)e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \dots$$

$$= \frac{1}{\pi^2 k^2}\left(1-(-1)^k\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

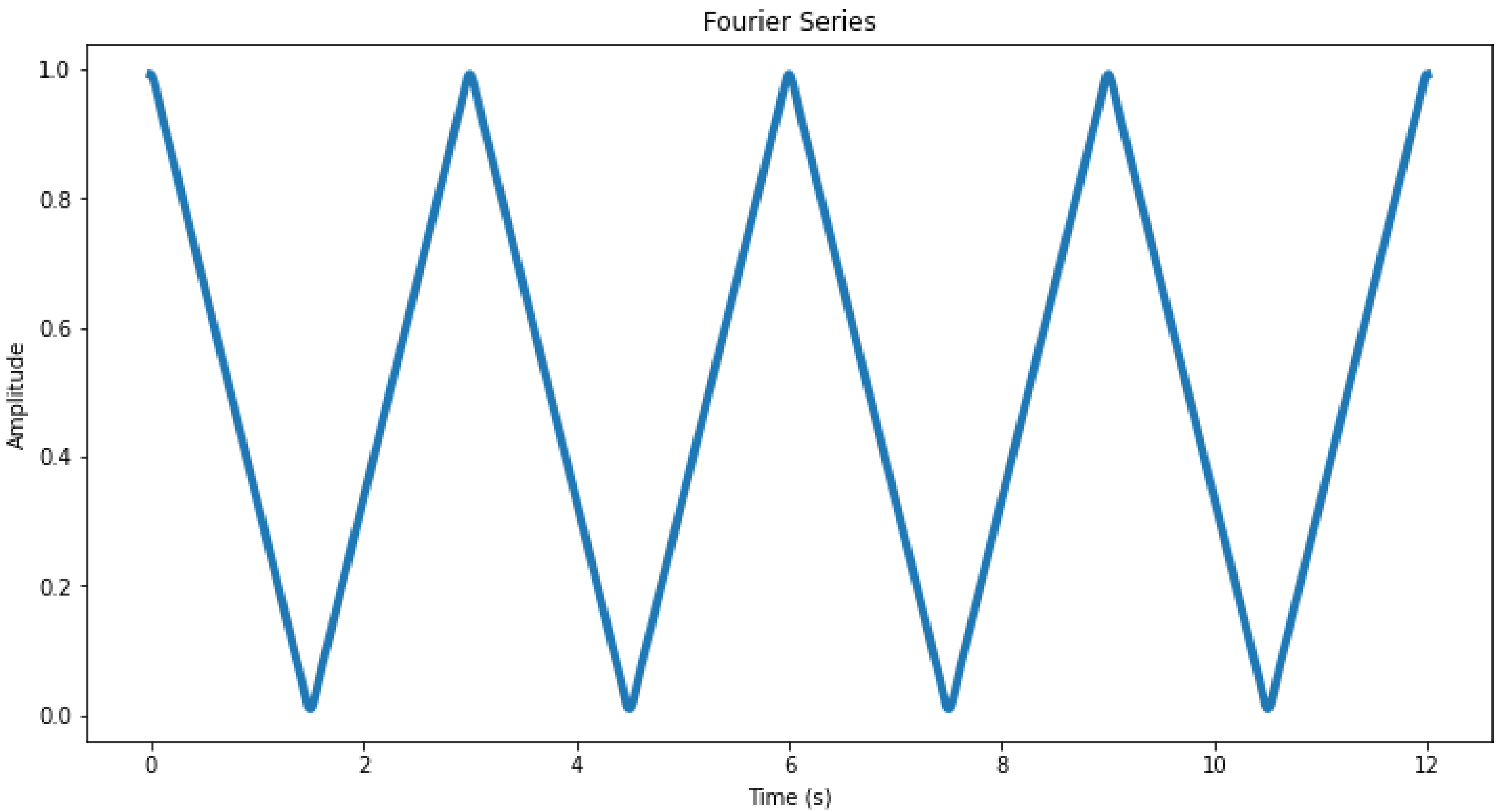
Σημείωση:

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \longrightarrow (j2\pi k f_0)^n X_k$$

- **Ιδιότητες**
- **Python κώδικας**

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Parameters
A = 1
T0 = 3
f0 = 1/T0
N = 21
k = np.arange(-N,0,2, dtype=float)
k = np.concatenate((k, np.arange(1,N+2,2, dtype=float)))

# Ground truth
dt = 0.001
t = np.arange(0, 4*T0, dt)

t = np.expand_dims(t,1)
k = np.expand_dims(k,1)

# Fourier Coefficients
Xk = 2/(np.pi**2 * k**2)
E = np.exp(1j*2*np.pi*f0*np.multiply(t, k.T))
x = Xk.T @ E.T

X0 = 1/2
x_FS = X0 + x

plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(t,x_FS.T, linewidth=4)
plt.title('Fourier Series')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

- **Ιδιότητες**
- **Python κώδικας**



• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$\mathbf{x(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2$

Απόδειξη:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l^* e^{-j2\pi l f_0 t}\right)} dt$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$$
$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \sum rest$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k X_k^* + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* e^{j2\pi(k-l)f_0 t}\right] dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k X_k^* \int_0^{T_0} dt + \frac{1}{T_0}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt$$

0 [ορθογωνιότητα]

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 + \frac{1}{T_0}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt \qquad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

- **Ιδιότητες**

$$X_{-k} = X_k^* \Rightarrow |X_k| = |X_{-k}^*|$$

- Έστω το αναπτυγμένο σε σειρά Fourier πραγματικό σήμα

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{2}{j\pi k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

α) Πόση είναι η μέση ισχύς του?

β) Δείξτε ότι το ποσοστό της συνολικής μέσης ισχύος που είναι κατανεμημένο στους 4 πρώτους όρους της τριγωνομετρικής σειράς Fourier (μαζί με το σταθερό όρο) είναι ~85%.

α) $P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt \overset{\text{Parseval}}{=\!=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = |X_0|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} |X_k|^2$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \left|\frac{2}{j\pi k}\right|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{|2|^2}{|j|^2 |\pi k|^2} = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2}$

$= \frac{1}{4} + 4\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \rightsquigarrow ?$ 1

• **Ιδιότητες**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Είναι $\displaystyle\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{k^2}$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 2\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Άρα η (1) θα δώσει $P_x = \frac{1}{4} + \frac{4}{\cancel{\pi^2}} \cdot \frac{\cancel{\pi^2}}{3} = \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = \frac{3}{12} + \frac{16}{12} = \frac{19}{12}$

β) Θέλαμε την ισχύ του $x_{k=[0,4]}(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{3} \underbrace{2|X_k|}_{A_k} \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$.

Ξέραμε ότι ένα σήμα

$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$$

έχει μέση ισχύ $P_x = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k^2}{2}$, άρα αντίστοιχα θα έχουμε

$$P_x^{k=0,1,2,3} = X_0^2 + \sum_{k=1}^{3} \frac{(2|X_k|)^2}{2} = \frac{1}{16} + \sum_{k=1}^{3} 2|X_k|^2 = \frac{1}{16} + \sum_{k=1}^{3} 2\left|\frac{2}{j\pi k}\right|^2$$

- **Ιδιότητες**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$= \frac{1}{16} + \sum_{k=1}^{3} \frac{8}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{16} + \frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{8}{\pi^2} 1.36111 \simeq 1.3533$$

Η συνολική μέση ισχύς ισούται με $\frac{19}{12} \simeq 1.5833$. Άρα στους πρώτους τέσσερις όρους της τριγωνομετρικής σειράς Fourier (το X_0 συμπεριλαμβανομένου) αντιστοιχεί το $\frac{1.3533}{1.5833} \simeq 0.854 \rightsquigarrow 85\%$ της συνολικής μέσης ισχύος του περιοδικού σήματος.

Άρα αν αποθηκεύσαμε τους 7 συντελεστές Fourier X_k, για $k=-3,\dots,3$, που αντιστοιχούν στους 4 πρώτους όρους της τριγωνομετρικής σειράς Fourier, αποθηκεύσαμε το $\sim 85\%$ της συνολικής μέσης ισχύος του περιοδικού σήματος.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ