ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η

- Σειρές Fourier

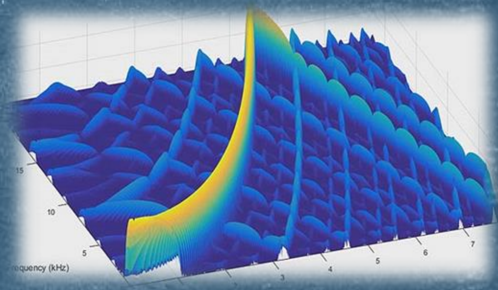
Τι περιέχει το HY215?

1^{o} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



- **Σειρές Fourier**
- Ένα **περιοδικό** σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία σχέση ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές X_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier** και δίνονται από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$x(t)$

- Για **πραγματικά** σήματα, οι συντελεστές είναι συζυγώς συμμετρικοί ως προς k

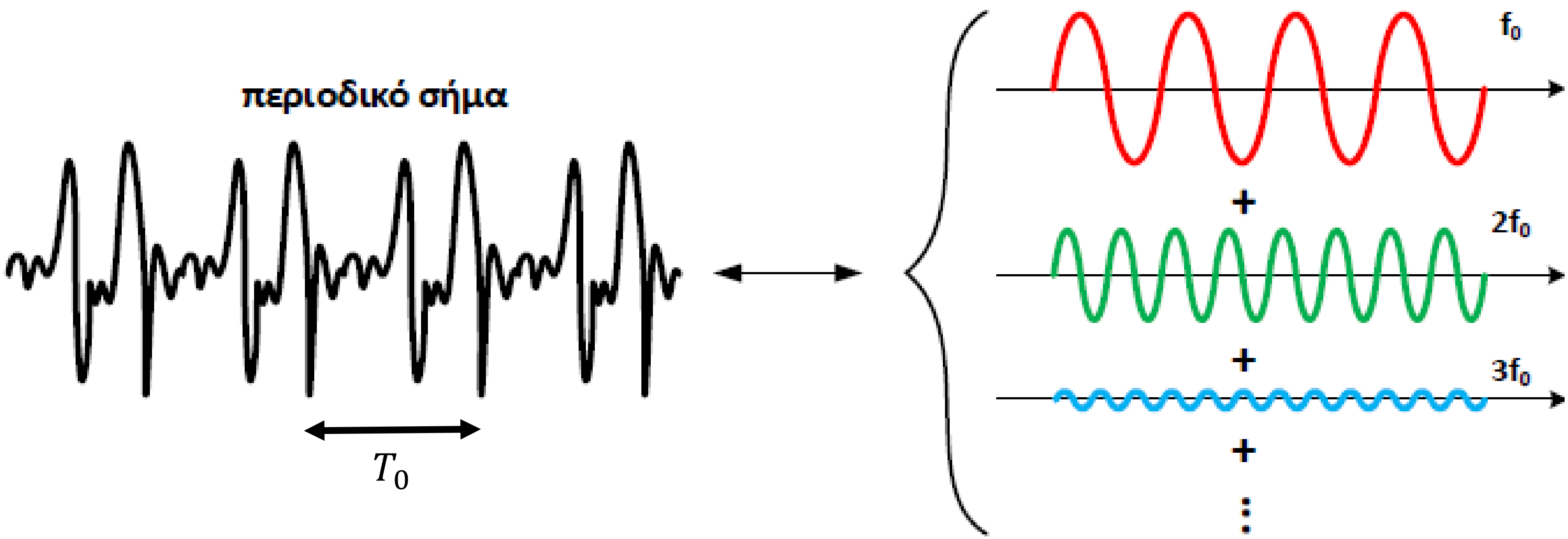
$$X_{-k} = X_k^*$$

- **Τριγωνομετρική σειρά Fourier** (ξανά, μόνο για **πραγματικά** σήματα):

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

REMINDER

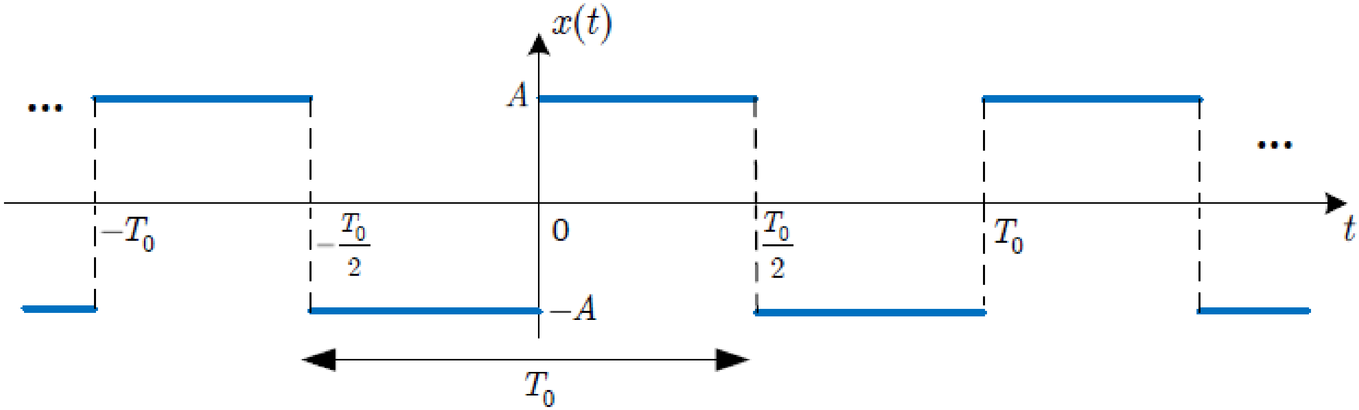
- **Σειρές Fourier**



REMINDER

- **Παράδειγμα:**

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$



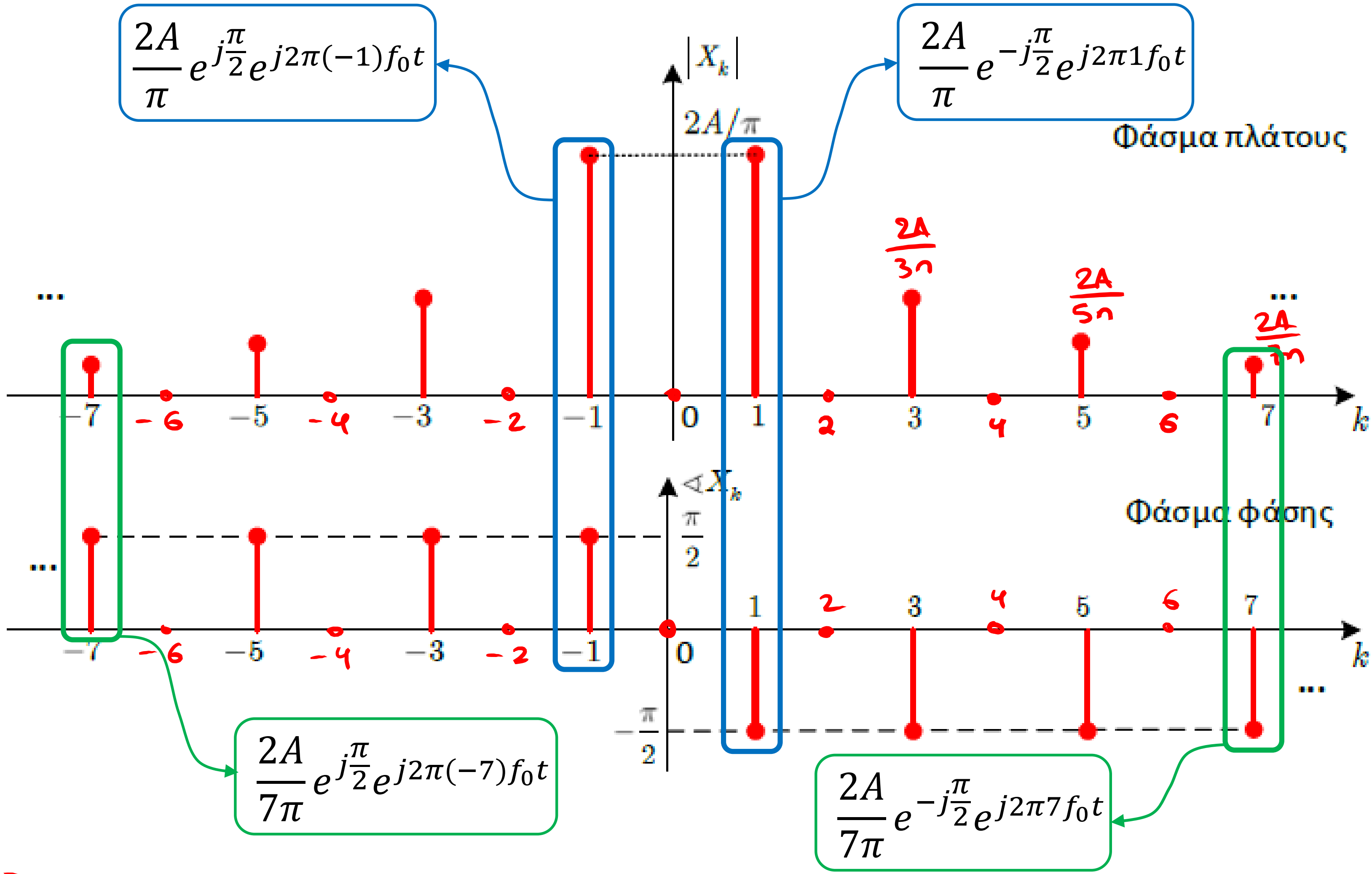
$$X_0 = 0, \qquad X_k = \frac{2A}{j\pi k} = \frac{2A}{\pi k} e^{-\frac{j\pi}{2}}, \qquad k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o$$

$$x(t) = \sum_{\substack{k=1,\\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o}}^{+\infty} \frac{4A}{\pi k} \cos\left(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{\substack{k=1,\\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o}}^{+\infty} \frac{4A}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 t)$$

REMINDER

- Παράδειγμα:

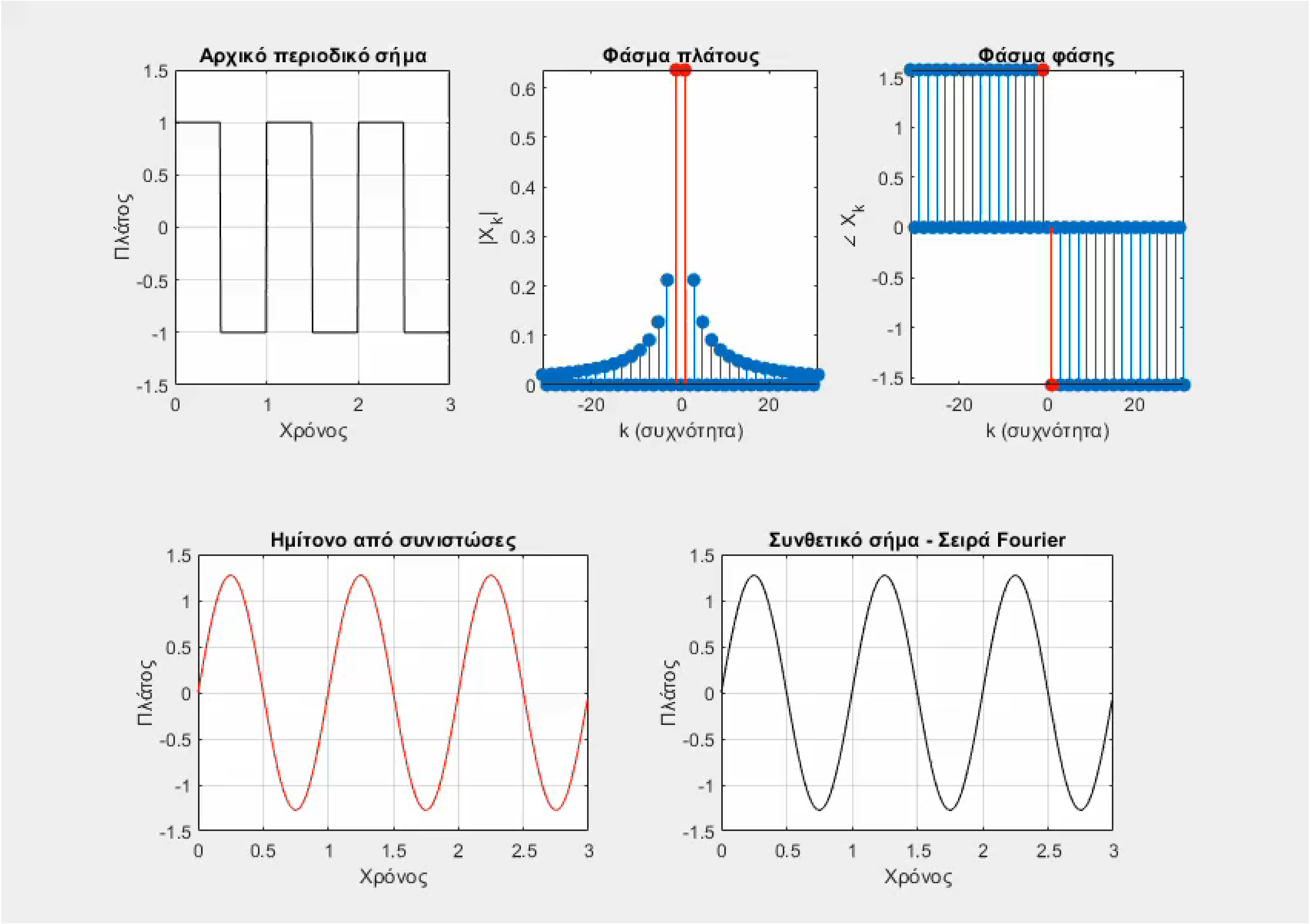
1 $\boxed{e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)}$



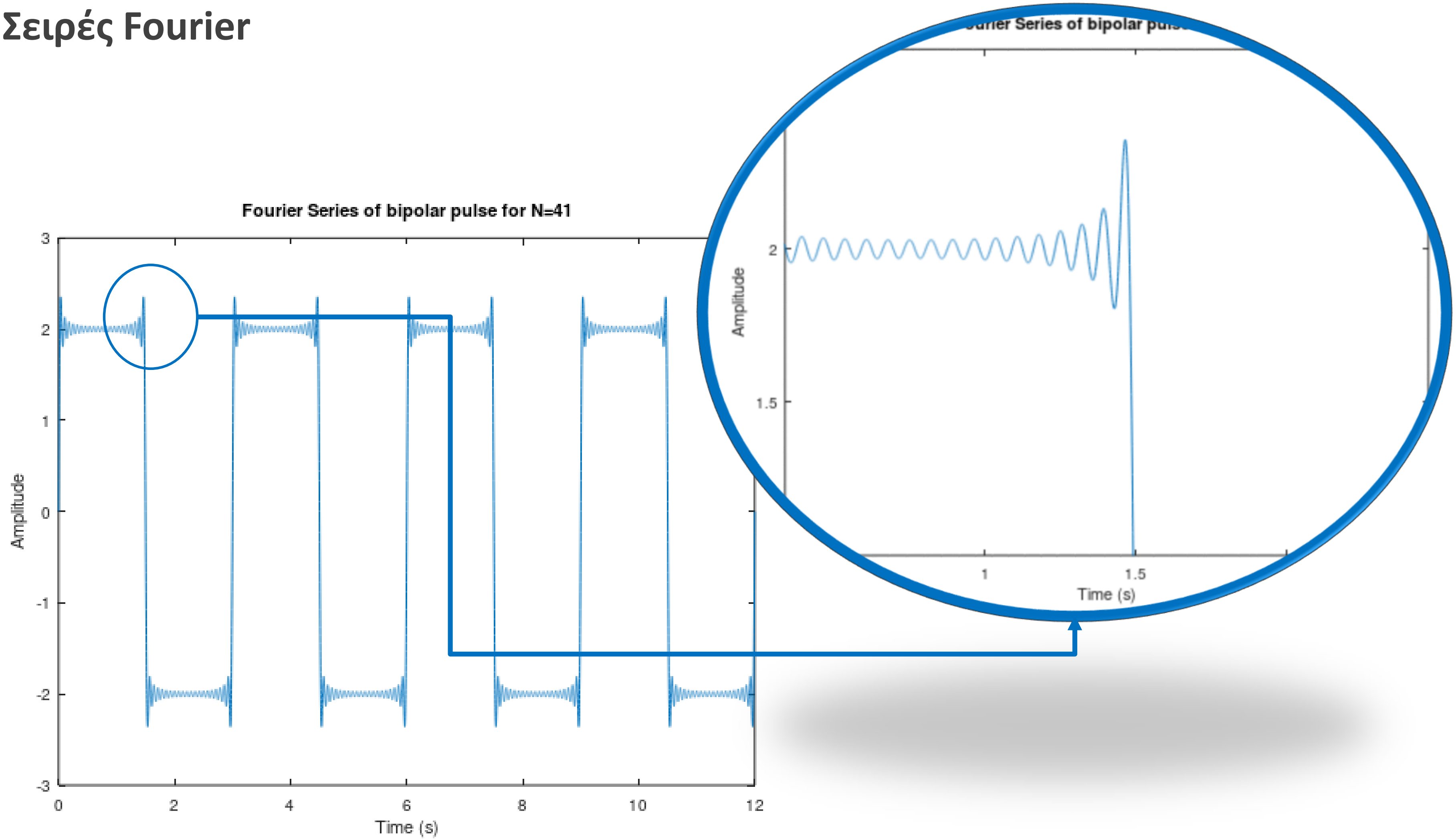
$$x(t) \overset{1}{=} \frac{4A}{\pi}\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4A}{7\pi}\cos\left(2\pi 7 f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

REMINDER

• Σειρές Fourier



- **Σειρές Fourier**



- **Φαινόμενο Gibbs**

- **Σειρές Fourier**
- **Φαινόμενο Gibbs**
- Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει λόγω των ασυνεχειών του αρχικού σήματος - και μόνο παρουσία αυτών - ακόμα κι αν πράγματι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν!
- Συγκεκριμένα, ο Gibbs έδειξε ότι η Σειρά Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή του περιοδικού σήματος σε κάθε σημείο…
  - …εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, όπου συγκλίνει στη μέση τιμή των τιμών του περιοδικού σήματος $x(t)$ εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας t_0:

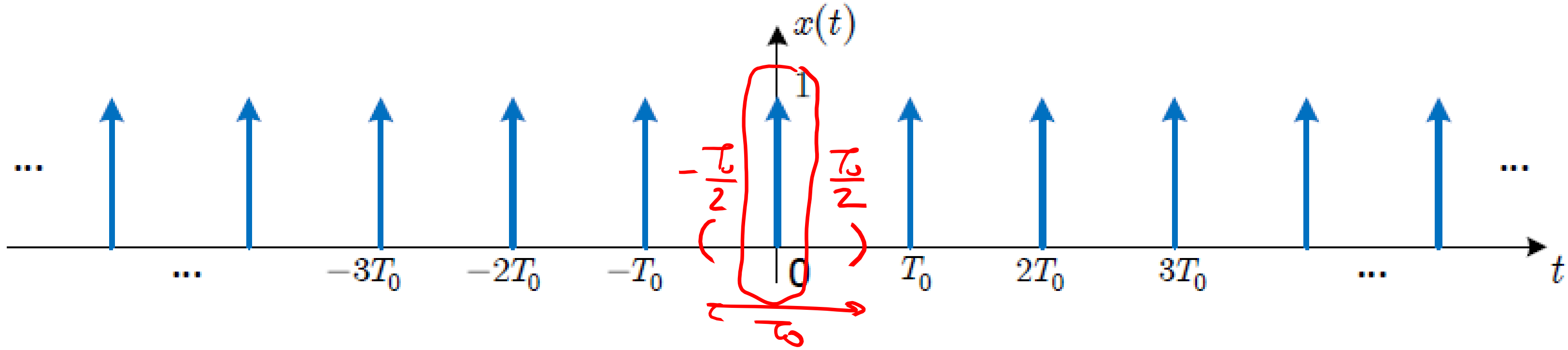
$$\frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$$

- Η Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων χωρίς ασυνέχειες λέγεται ότι συγκλίνει **ομοιόμορφα** σε όλα τα σημεία της περιόδου του περιοδικού σήματος
- Ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών Fourier επιτρέπει στην ενέργεια σφάλματος να τείνει στο μηδέν όσο αυξάνει το πλήθος των ημιτόνων, και ταυτόχρονα να υπάρχουν σημεία όπου η διαφορά της Σειράς Fourier με το περιοδικό σήμα να **μην** είναι μηδενική (μη ομοιόμορφη σύγκλιση)

- **Παράδειγμα:**
  - Υπολογίστε τη Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm t_0) f(t) dt = f(\mp t_0)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



Είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1 \cdot \delta(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 t}}_{f(t)} dt = \frac{1}{T_0} \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 \cdot 0}}_{e^0 = 1} = \frac{1}{T_0}, \forall k$$

- Παράδειγμα:

Δείξαμε ότι $X_k = \frac{1}{T_0}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$

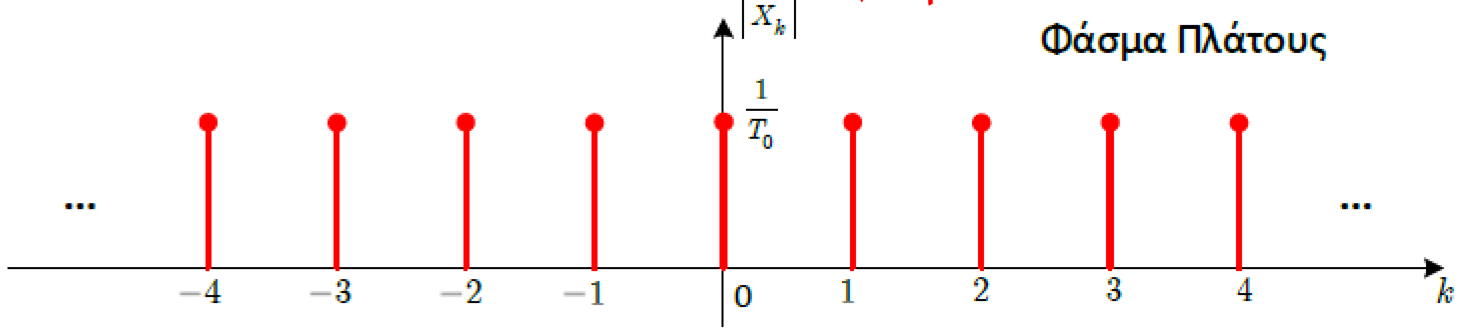
Επειδή $T_0 > 0$, $X_k \in \mathbb{R}_+$, άρα $X_k = \frac{1}{T_0} e^{j0}$, οπότε

το φάσμα πλάτους είναι $\frac{1}{T_0}$, $\forall k$ και το φάσμα φάσης

θα είναι 0 για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{j2\pi k f_c t} = \frac{1}{T_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \cdot \frac{1}{T_0} \cos(2\pi k f_c t + 0)$$

$$= \frac{1}{T_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{T_0} \cos(2\pi k f_0 t)$$

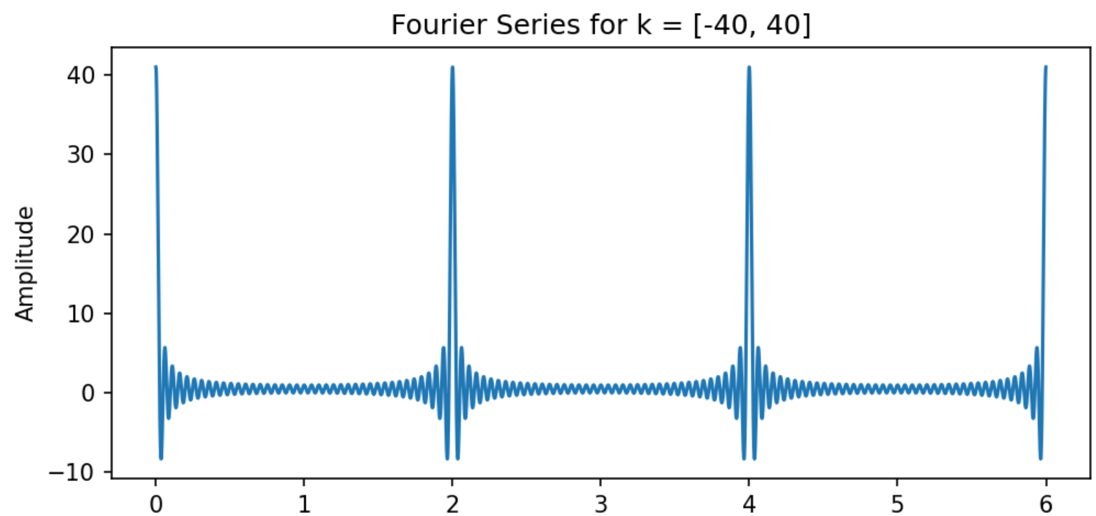


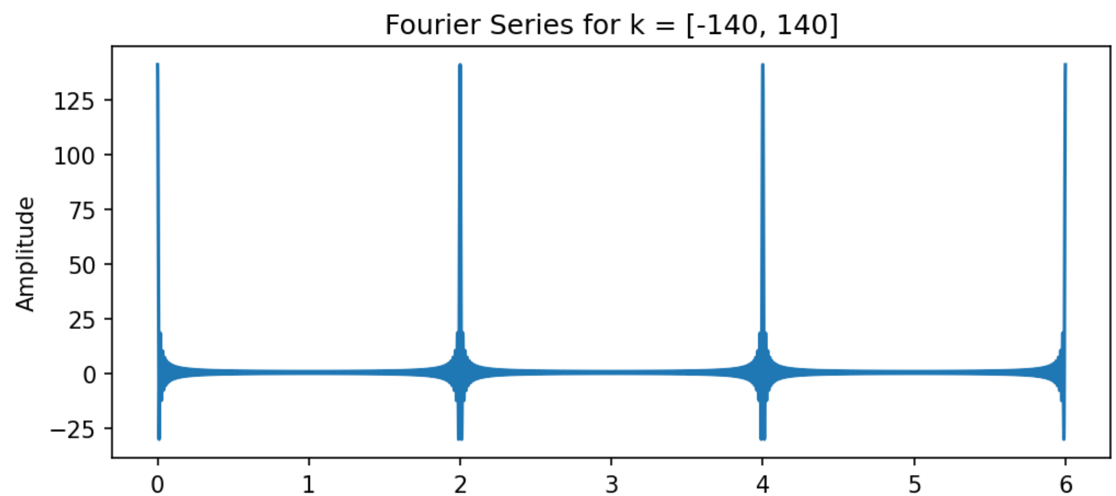
- **Σειρές Fourier**

- **Python code**

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameters
T0 = 2
f0 = 1/T0
N = 40
k = np.arange(-N, N+1, 1)

# Time axis
dt = 0.0001
t = np.arange(0, 3*T0, dt)

# Fourier Coefficients
X0 = 1/T0
Xk = 1/T0 * np.ones(k.shape)

# Synthesis
x = np.zeros(t.shape)

for i in range(0, len(k)):
    x = x + Xk[i] * np.exp(1j*2*np.pi*k[i]*f0*t)

# Adding the constant X0
x = x + X0

# Figures
plt.figure()
plt.plot(t, x)
plt.title('Fourier Series for k = [-40, 40]')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()
```

$$\sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{2} e^{j\pi k t}$$



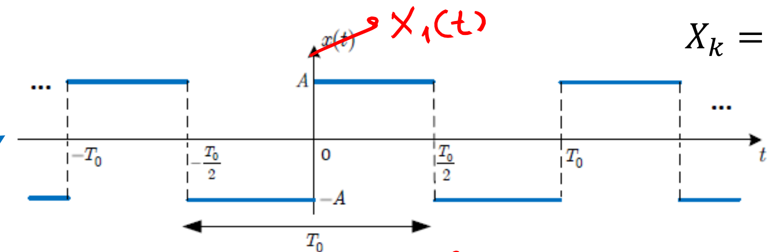


• «Γνωστές» Σειρές Fourier

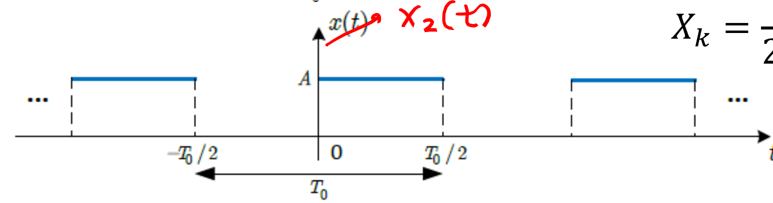
• Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις παρακάτω σειρές Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στις ιδιότητες που ακολουθούν

Συνήθεις Σειρές Fourier

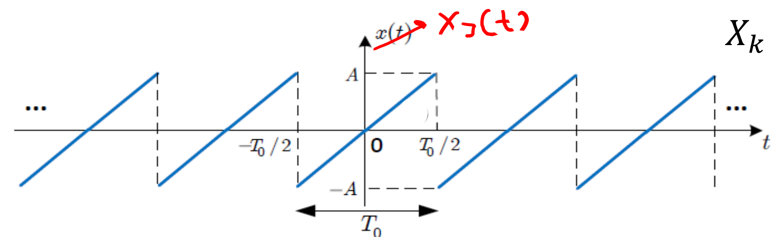
Περιοδικό σήμα
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \frac{2A}{T_0}t, \; -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$



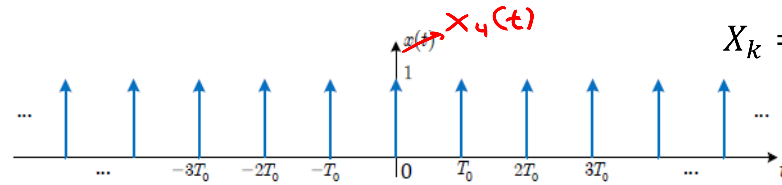
$$X_k = \frac{A}{k\pi}(1 - (-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$



$$X_k = \frac{A}{2k\pi}(1 - (-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$



$$X_k = \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$



$$X_k = \frac{1}{T_0}, \forall k$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 **y(t) περιοδικό με περίοδο T_0**	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X^*_{-k}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$ $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$j2\pi k f_0 X_k$ $(j2\pi k f_0)^n X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k \rvert = \lvert X_{-k} \rvert, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} \lvert x(t) \rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k \rvert^2$

Συνεχίζεται... ☺