# ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

## ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η

- Σειρές Fourier

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα (Reminder)**

Ορθογωνιότητα στο $\mathbb{C}$:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt = 0$$

- Χρησιμοποιώντας διαδικασίες όπως αυτές που είδαμε, μπορεί κανείς να δείξει ότι:

1. Το σύνολο $\mathbb{E}$ έχει στοιχεία ορθογώνια μεταξύ τους:

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j2\pi (k-l) f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

2. Το σύνολο $\mathbb{E}$ είναι πλήρες όταν $N \to +\infty$, υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος

- Άρα το σύνολο

$$\mathbb{E} = \left\{ e^{j2\pi k f_0 t} \right\}_{k=-\infty}^{+\infty}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

αποτελεί βάση του χώρου

- Οπότε

Ισότητα υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος!

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Ποιά είναι όμως επιτέλους αυτά τα $X_k$????

- **Σειρές Fourier**

- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0$ μπορεί να γραφεί ως

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}}$$

η οποία σχέση ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές $X_k$ ονομάζονται **συντελεστές Fourier,** αποτελούν το **εσωτερικό γινόμενο σε μια περίοδο μεταξύ του περιοδικού σήματος και των μελών της οικογένειας** $\mathbb{E}$, και δίνονται από τη σχέση

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0}\langle x(t), e^{j2\pi k f_0 t}\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt} \in \mathbb{C}$$

- Η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να περιγράψει **και μιγαδικά** περιοδικά σήματα

- Για **πραγματικά** σήματα, οι συντελεστές είναι συζυγώς συμμετρικοί ως προς $k$

$$\boxed{X_{-k} = X_k^*}$$

- Ας το δείξουμε

- **Σειρές Fourier**

$$X_{-k} = X_k^*$$

$$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi(-k)f_0t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi kf_0t}dt \quad (1)$$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt\right]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left(x(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt\right)^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi kf_0t}dt$$

- Όμως το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό, άρα $x(t) = x^*(t)$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt\right]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi kf_0t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi kf_0t}dt \quad (2)$$

- Από τις σημειωμένες σχέσεις, ισχύει το ζητούμενο.

- **Σειρές Fourier**

- Όταν το σήμα είναι πραγματικό, μπορούμε να γράψουμε την **τριγωνομετρική Σειρά Fourier** ως:

$$\boxed{x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)}$$

με $|X_k|$ το μέτρο και $\phi_k$ τη φάση του $k$ −οστού συντελεστή

$$X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \overset{X_{-k} = X_k^*}{=} X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$X_k^* = |X_k|e^{-j\phi_k}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

- **Σειρές Fourier**

$$\boxed{e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left[ e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

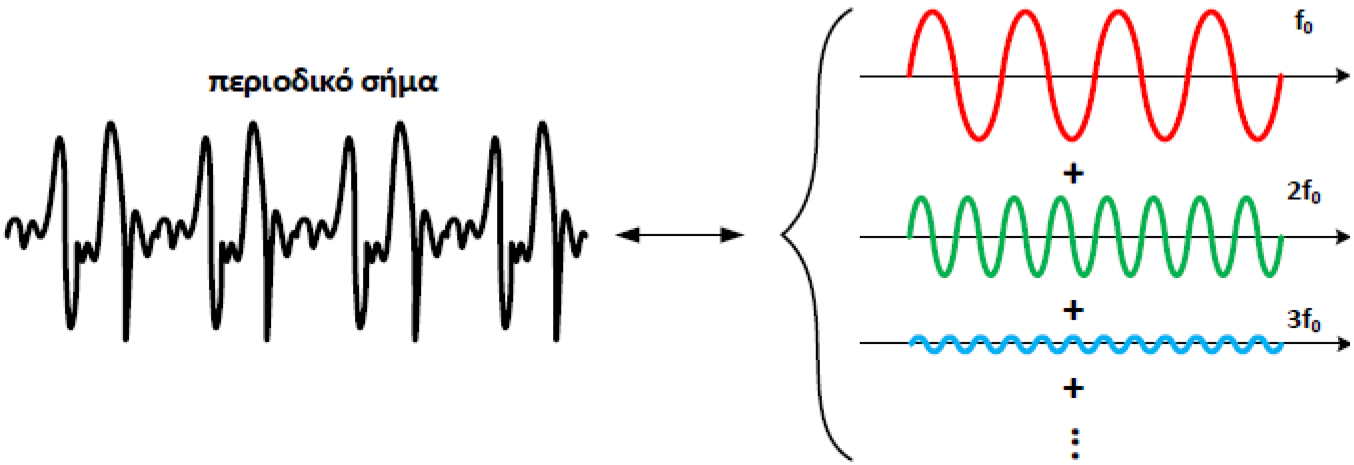
$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left[ e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \right]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- **Προσοχή:** η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα
  - … και πολλές φορές στην πράξη δεν είναι απλό (ή και «κομψό») να εξαχθεί από την εκθετική Σειρά Fourier

- **Σειρές Fourier**

- Η Σειρά Fourier αναλύει ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους ημίτονα με συχνότητες $kf_0$




- Εναλλακτικά, αναλύει ένα οποιοδήποτέ περιοδικό σήμα (πραγματικό ή μη) με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους μιγαδικά εκθετικά σήματα με συχνότητες $kf_0$

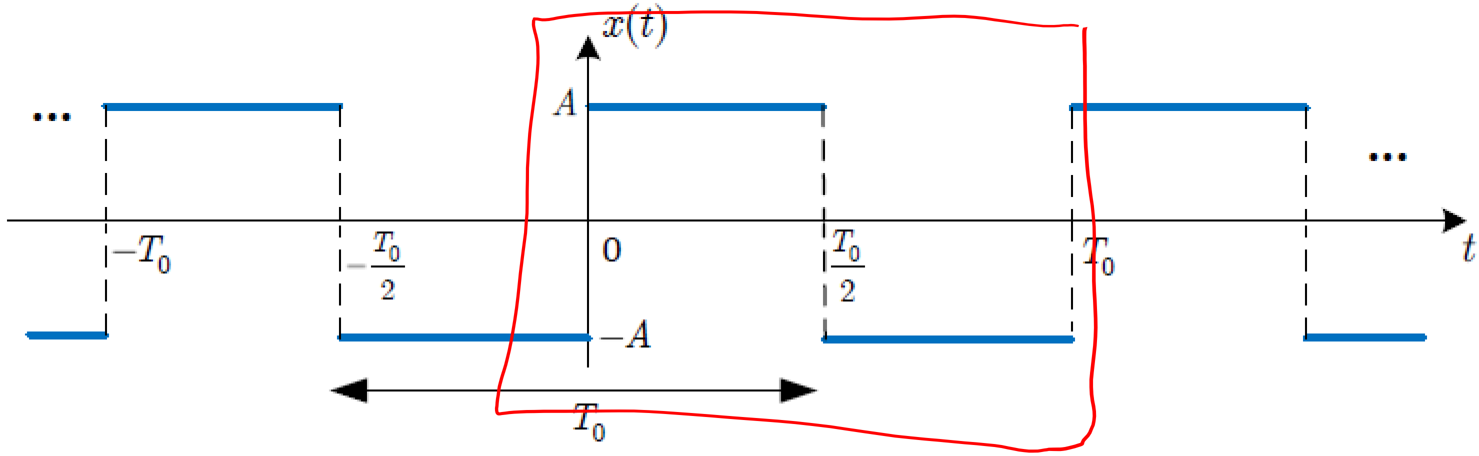
- Σημειώστε ότι η τιμή του συντελεστή για $k = 0$ υπολογίζεται συνήθως ξεχωριστά ως

$$\boxed{X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt}$$

- **Παράδειγμα:**

  ○ Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t < \dfrac{T_0}{2} \\ -A, & \dfrac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$




Είναι

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} A\,dt + \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} (-A)\,dt = \frac{1}{T_0} At\Big|_{t=0}^{t=\frac{T_0}{2}} +$$

$$+ (-A)t \cdot \frac{1}{T_0}\Big|_{t=\frac{T_0}{2}}^{t=T_0} = \frac{1}{T_0} A\left(\frac{T_0}{2} - 0\right) - \frac{A}{T_0}\left(T_0 - \frac{T_0}{2}\right) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{X_0 = 0}$$

- Παράδειγμα:

$$e^{\pm j2\pi k} = \left(e^{\pm j2\pi}\right)^k = 1^k = 1$$

$$f_0 T_0 = 1$$

Είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} A e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt + \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} (-A) e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

$$\int e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at} + c$$

$$= \frac{A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt - \frac{A}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

$$= \frac{A}{T_0}\left(\frac{1}{-j2\pi k f_0}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{t=0}^{t=\frac{T_0}{2}} - \frac{A}{T_0}\left(\frac{1}{-j2\pi k f_0}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{t=\frac{T_0}{2}}^{t=T_0}$$

$$= -\frac{A}{j2\pi k \underbrace{f_0 T_0}}\left(e^{-j\cancel{2}\pi k \overbrace{f_0 T_0}\frac{}{\cancel{2}}} - 1\right) + \frac{A}{j2\pi k \underbrace{f_0 T_0}}\left(e^{-j2\pi k \overbrace{f_0 T_0}} - e^{-j\cancel{2}\pi k \overbrace{f_0 T_0}\frac{}{\cancel{2}}}\right)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi k}\left(e^{-j\pi k} - 1\right) + \frac{A}{j2\pi k}\left(e^{-j2\pi k} - e^{-j\pi k}\right)$$

$$= \frac{A}{j2\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k} + \underbrace{e^{-j2\pi k}}_{1} - e^{-j\pi k}\right)$$

$$= \frac{A}{j2\pi k}\left(2 - e^{-j\pi k} - e^{-j\pi k}\right)$$

- Παράδειγμα:

$$e^{\pm j\pi k} = \left(e^{\pm j\pi}\right)^k = \cos(\pi k) = (-1)^k$$

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{A}{j2\pi k}\left(2 - e^{-j\pi k} - e^{-j\pi k}\right)$$

$$= \frac{A}{j\cancel{2}\pi k}\left(\cancel{2} - \cancel{2}e^{-j\pi k}\right) = \frac{A}{j\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k}\right)$$

$$= \frac{A}{j\pi k}\left(1 - (-1)^k\right) = \frac{A}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right)e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad \forall\ k \neq 0$$

$$= \begin{cases} 0, & k \text{ άρτια} \\ \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k \text{ περιττά} \end{cases}$$

. Οπότε θα έχουμε

Εκθετική Σ.F.

$$x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \underbrace{\frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{X_k,\ k \text{ περιττά}} e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{2A}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \frac{1}{k} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j2\pi k f_0 t}$$

Επίσης,

$$x(t) = \cancel{X_0}^{\,0} + \sum_{k=1, \text{περιττά}}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \frac{4A}{\pi k} \cos\left(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Παράδειγμα:

Βρήκαμε ότι $X_k = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $k$ περιττά, $X_0 = 0$

Η πολική μορφή θα είναι

$$X_k = |X_k| e^{j\varphi_k} = \frac{2A}{\pi |k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \; k \text{ περιττά}, \; X_0 = 0$$

$-\infty < k < +\infty$, άρα θέλουμε $|\cdot|$.

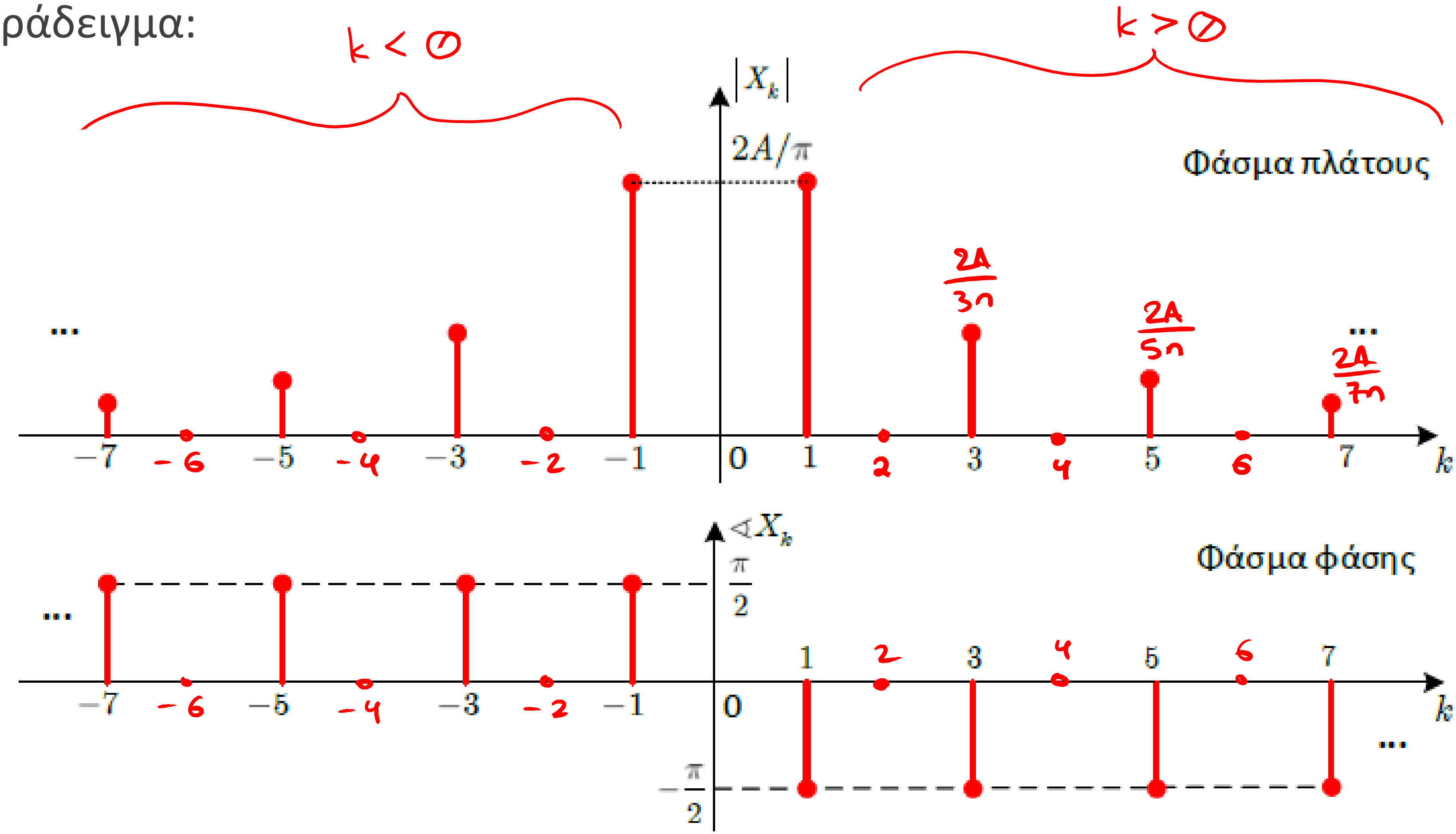
Ας σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους και φάσης. Ο πιο εύκολος τρόπος είναι να σχεδιάσουμε τα φάσματα για $k \geq 0$, και μετά λόγω άρτιας* και περιττής* συμμετρίας αντίστοιχα (πλάτος και φάση), να σχεδιάσουμε τα φάσματα για $k < 0$

Άρα για $k \geq 0$,

$$|X_k| = \begin{cases} 0, & k = 0, \; k \text{ άρτια} \\ \frac{2A}{\pi k}, & k \text{ περιττά} \end{cases}, \quad \varphi_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \; k \text{ άρτια} \\ -\frac{\pi}{2}, & k \text{ περιττά} \end{cases}$$

* $x(t) \in \mathbb{R}$ !

- Παράδειγμα:



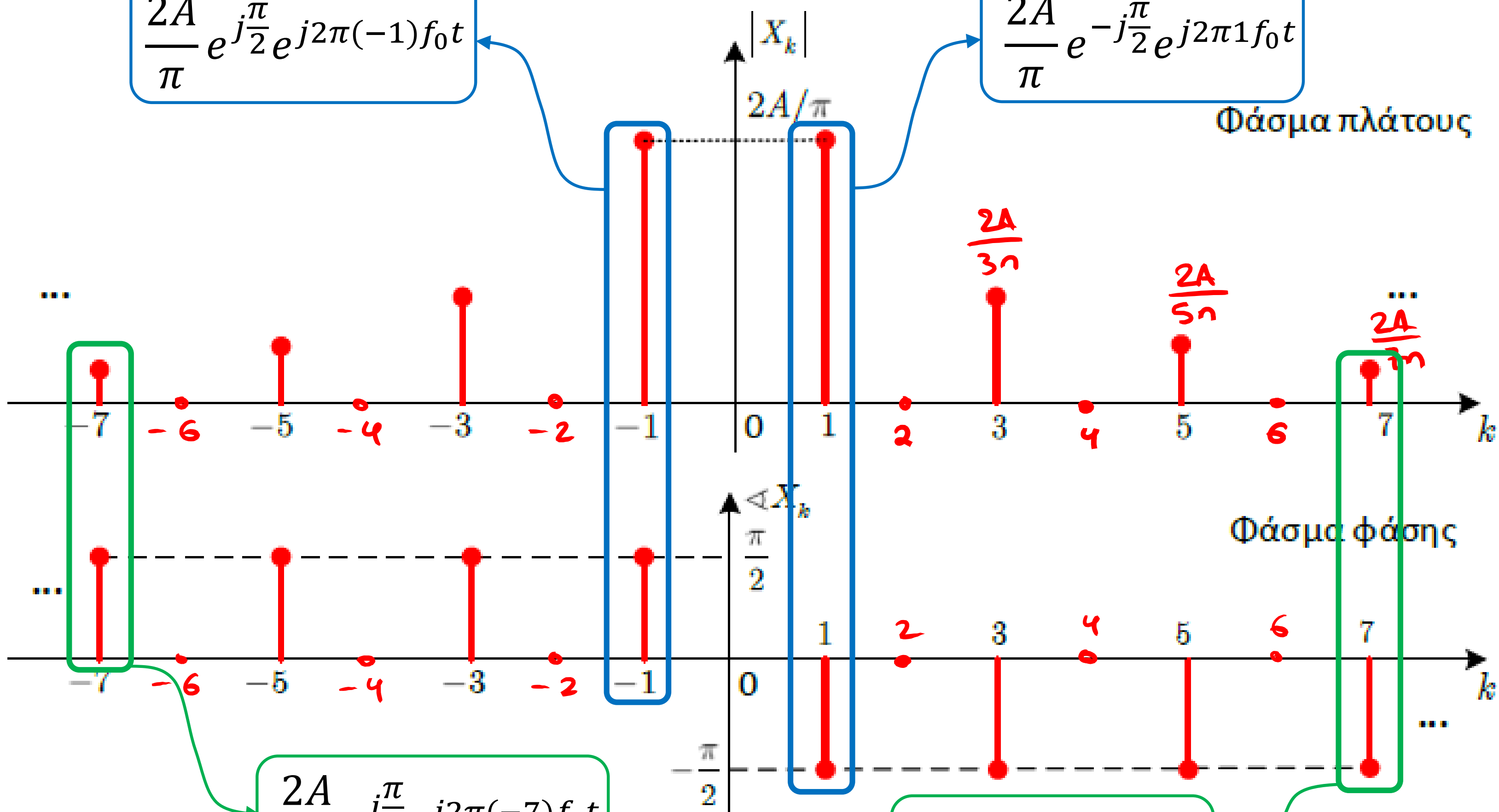

- Προτιμούμε να **αναπαριστούμε τον οριζόντιο άξονα σε «διακριτές συχνότητες $kf_0$»** αντί ως ένα συνεχή άξονα του $f$, όπως κάναμε στα αρχικά παραδείγματα
  - Χρησιμοποιούμε **το δείκτη $k$** της θεμελιώδους συχνότητας **για βαθμονόμηση του άξονα**
- Οι συχνότητες ονομάζονται **αρμονικές**

- Παράδειγμα:

1 $\boxed{e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)}$

$$\frac{2A}{\pi} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi(-1)f_0 t}$$

$$\frac{2A}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi 1 f_0 t}$$




$$\frac{2A}{7\pi} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi(-7)f_0 t}$$

$$\frac{2A}{7\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi 7 f_0 t}$$

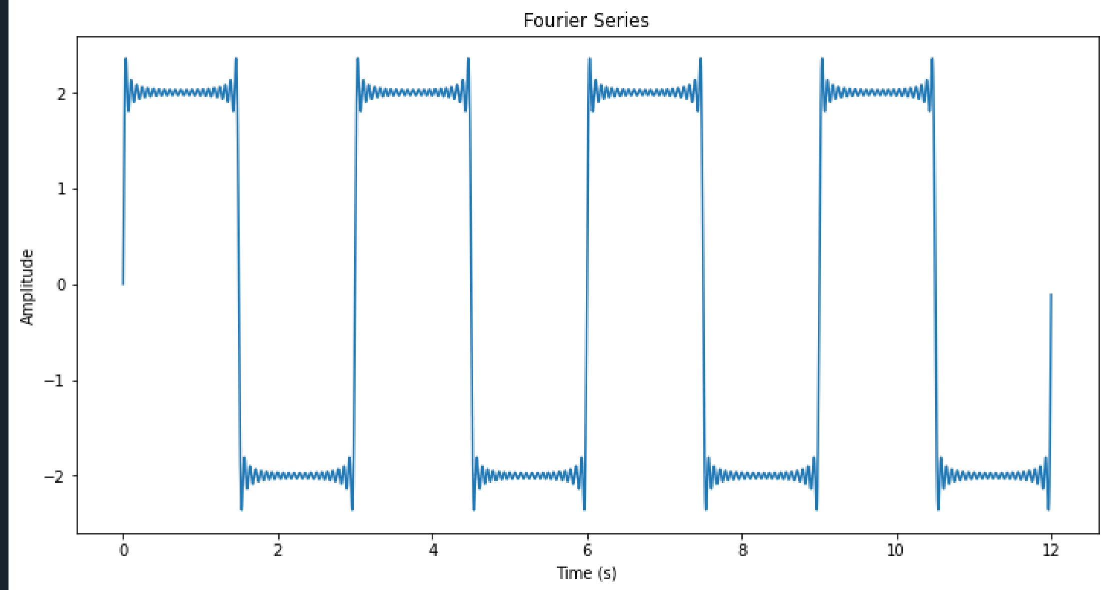
$$x(t) \overset{1}{=} \frac{4A}{\pi}\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4A}{7\pi}\cos\left(2\pi 7 f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

- **Σειρές Fourier**

- **Python code**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Parameters
A = 2
T0 = 3
f0 = 1/T0
N = 41
k = np.arange(-N,N+2,2)

# Time axis
dt = 0.001
t = np.arange(0, 4*T0, dt)

# Fourier Coefficients
Xk = (2.0*A/(np.pi*k)) * np.exp(-1j*np.pi/2.0)
X0 = 0

# Synthesis
x = np.zeros(t.shape)

for i in range(0,len(k)):
    x = x + Xk[i]*np.exp(1j*2*np.pi*k[i]*f0*t)

x = x + X0
plt.plot(t,x)
plt.title('Fourier Series')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

$$\sum_{\substack{k=-41 \\ k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}}}^{41} X_k\, e^{j\frac{2\pi k}{3}t}$$



# Συνεχίζεται... ☺