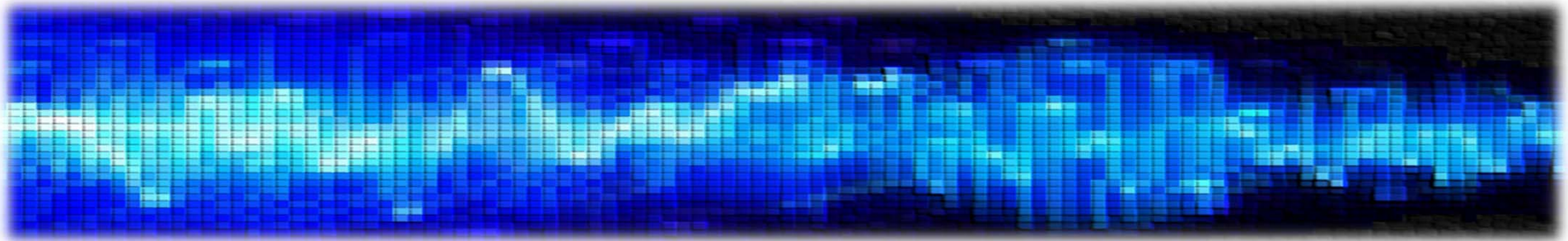

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

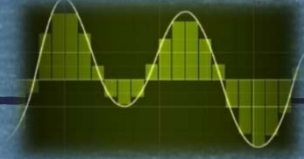
ΔΙΑΛΕΞΗ 5^Η



- Ο χώρος της συχνότητας



Τι περιέχει το ΗΥ215?



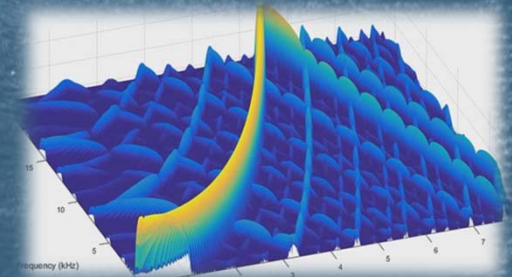
1^ο Κομμάτι

- ▶ Μιγαδικοί αριθμοί
- ▶ Σήματα - Συστήματα
- ▶ Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- ▶ Σειρές Fourier
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier



2^ο Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Laplace
- ▶ Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- ▶ Τυχαία Σήματα
- ▶ Δειγματοληψία
- ▶ Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες



- Έχουμε μια πολύ καλή εικόνα για το πώς λειτουργούν τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου
- Παρ' όλα αυτά, θέλουμε περισσότερα! 😊
- Δεν ξέρουμε **γιατί** τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
 - Δηλ. δεν ξέρουμε γιατί μια δεδομένη είσοδος παράγει τη συγκεκριμένη έξοδο
- Δεν μπορούμε να **σχεδιάσουμε** συστήματα που να συμπεριφέρονται όπως θέλουμε εμείς
- Βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση μπορούν να γίνουν αν στρέψουμε την προσοχή μας στο **χώρο της συχνότητας**
- Στην προσπάθειά μας αυτή, θα ξεφύγουμε από την αναπαραστάσεις πλάτους-χρόνου που έχουμε δει ως τώρα...
- Θα περάσουμε σε αναπαραστάσεις **πλάτους-συχνότητας!**
- Ποιες είναι αυτές οι αναπαραστάσεις? Θα το δούμε άμεσα...

- Όπως η συνάρτηση Δέλτα έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των συστημάτων στο χώρο του χρόνου...
- ...έτσι και το μιγαδικό εκθετικό σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$, $A > 0$ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στο χώρο της συχνότητας
- Αν βάλουμε ένα τέτοιο σήμα ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) Ae^{j(2\pi f_0(t-\tau) + \phi)} d\tau \\ &= Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \\ &= H(f_0) (Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}) \\ &= H(f_0) x(t)\end{aligned}$$

με

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

ένα σταθερό μιγαδικό αριθμό που εξαρτάται από το f_0 , δηλ. από τη συχνότητα εισόδου

- Το αποτέλεσμα

$$y(t) = H(f_0)x(t)$$

με $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$ και


$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

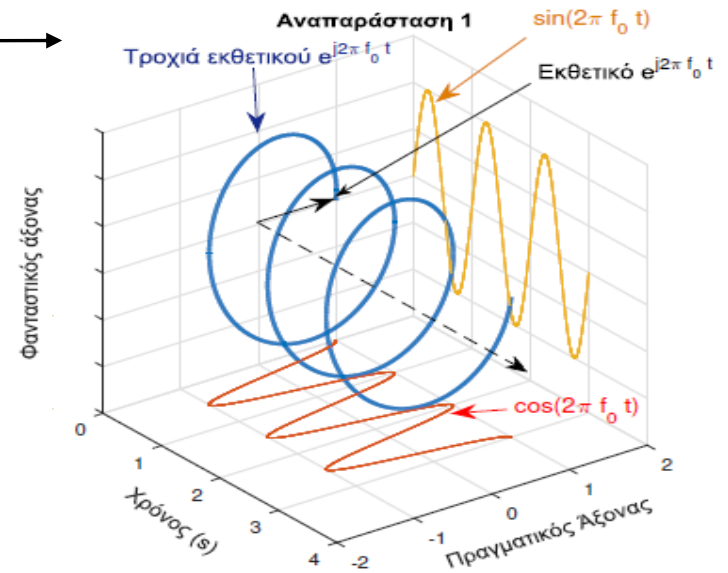
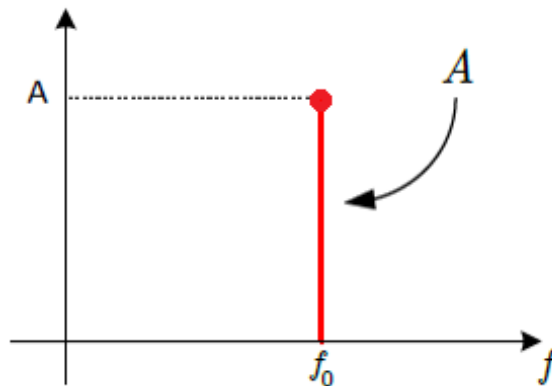
$$\cos \theta = \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2j}e^{j\theta} - \frac{1}{2j}e^{-j\theta}$$

είναι πολύ σημαντικό!

- Μας λέει ότι ένα μιγαδικό σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$ περνά «όπως είναι» στην έξοδο του συστήματος και απλά πολλαπλασιάζεται με μια μιγαδική σταθερά $H(f_0)$!
 - Η οποία βέβαια μπορεί να αλλάζει το πλάτος και τη φάση της εισόδου! 😊
- Ξέρουμε ότι τέτοια σήματα σχετίζονται στενά με ημιτονοειδή σήματα
 - Μέσω της σχέσης του [Euler](#)
- Και για μη ημιτονοειδή σήματα?
- Δε θα ήταν πολύ βολικό να μπορούμε να εκφράσουμε **κάθε** σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων συγκεκριμένων συχνοτήτων?
 - Τότε θα βρίσκαμε την έξοδο ΓΧΑ συστημάτων για τέτοιες εισόδους πολύ εύκολα!!
- Ας ξεκινήσουμε μελετώντας αρχικά μόνο περιοδικά σήματα

- Έστω το γνωστό μας σήμα $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$, $A \in \mathbb{R}_+$
- Το μιγαδικό αυτό σήμα αποτελείται από μια μόνο συχνότητα f_0 και περίοδο T_0
- Θυμηθείτε: 
- Οπότε:



- Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σήμα

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi), \quad A > 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

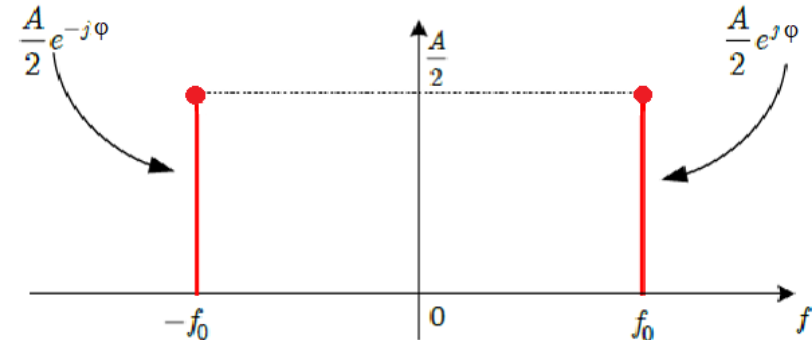
το οποίο γράφεται (Euler) ως:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \boxed{\frac{A}{2} e^{j\varphi}} e^{j2\pi f_0 t} + \boxed{\frac{A}{2} e^{-j\varphi}} e^{-j2\pi f_0 t}$$

- Οπότε η αναπαράστασή του

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t}$$

θα είναι



- Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$x(t) = X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_1^* e^{-j2\pi f_0 t}$$

με τους συντελεστές $X_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi}$, $X_1^* = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$, $A > 0$ να ονομάζονται **phasors** (φάσορες)

- ... οι οποίοι είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί για πραγματικά σήματα (όπως το $\cos(\cdot)$)
- Η παραπάνω αναπαράσταση ονομάζεται **φάσμα (spectrum)**
- Είναι προτιμότερο το μέτρο του φάσορα να σχεδιάζεται σε μια γραφική παράσταση ενώ η φάση του σε μια άλλη
 - Στο **φάσμα πλάτους** σχεδιάζουμε το μέτρο του φάσορα
 - ...και στο **φάσμα φάσης** τη φάση του φάσορα

• Παράδειγμα

○ Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

$$\pm \frac{1}{j} = \mp j = e^{\mp j\frac{\pi}{2}}$$

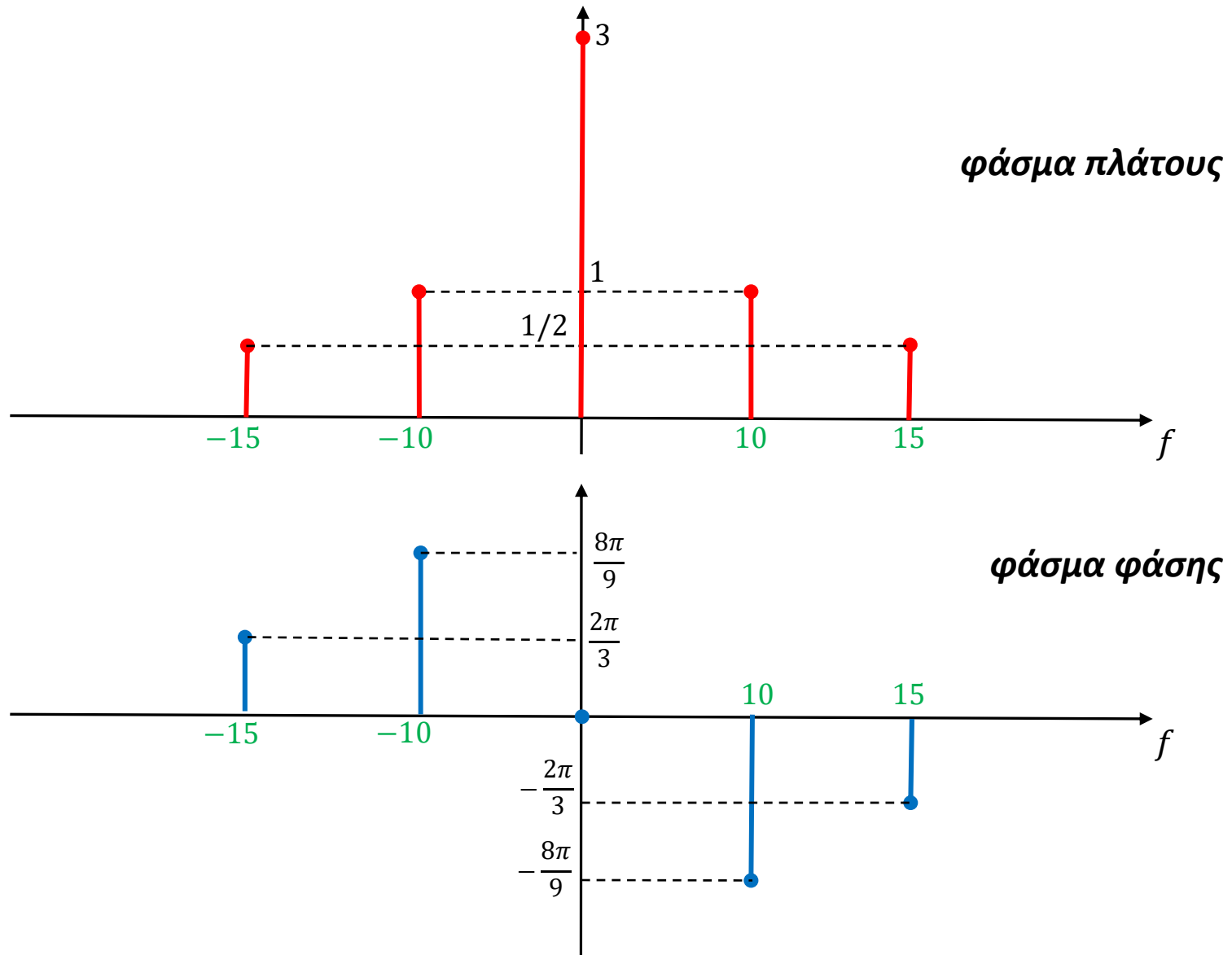
$$x(t) = 3 - 2 \cos\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{9}\right) + \sin\left(2\pi 15t - \frac{\pi}{6}\right)$$

αφού ελέγξετε αν είναι περιοδικό

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 + 2 \cos\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{9} - \pi\right) + \cos\left(2\pi 15t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 3 e^{j0t} + 2 \cos\left(2\pi 10t - \frac{8\pi}{9}\right) + \cos\left(2\pi 15t - \frac{2\pi}{3}\right) = \\ &= 3 e^{j0t} + 2 \left(\frac{1}{2} e^{-j\frac{8\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{8\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 15t} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{j2\pi/3} \right) \cdot e^{-j2\pi 15t} + e^{j8\pi/9} e^{-j2\pi 10t} + 3 \cdot e^{j0t} + \\ &+ e^{-j8\pi/9} \cdot e^{j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi/3} \cdot e^{j2\pi 15t} \end{aligned}$$

Euler

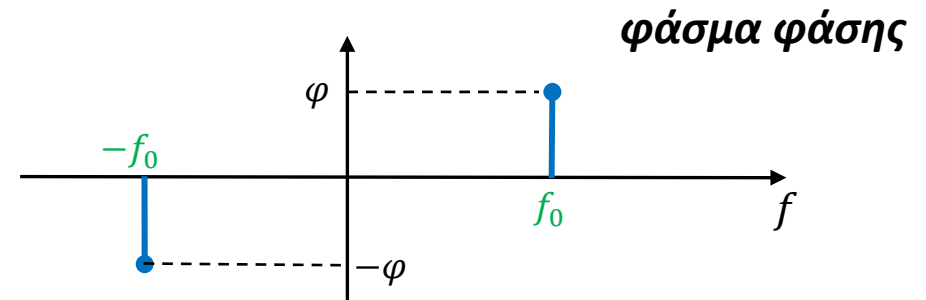
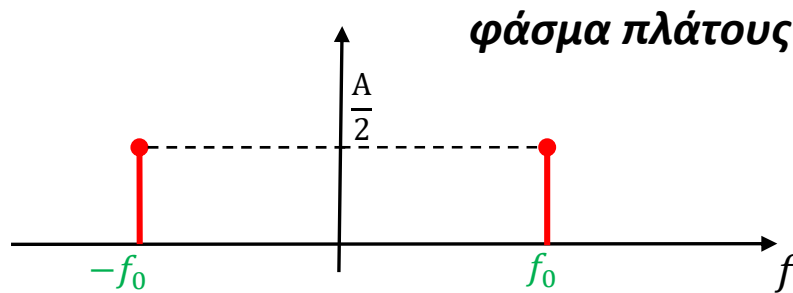
• Παράδειγμα



• Ο χώρος της συχνότητας

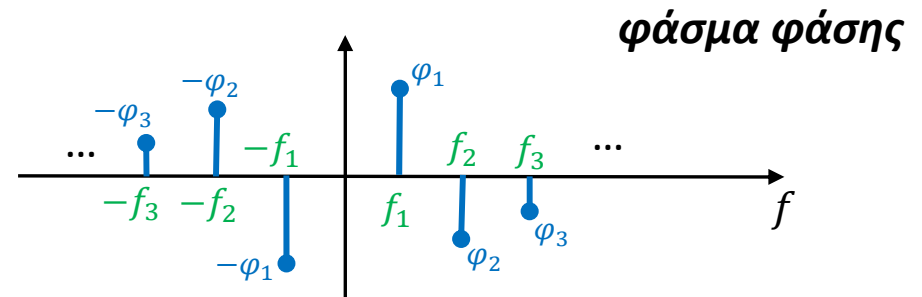
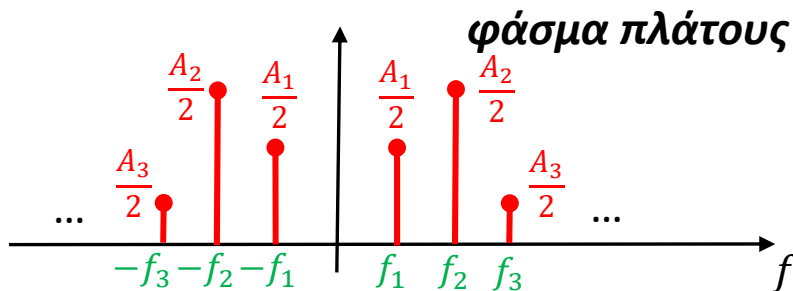
• Συνοπτικά

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t}, \quad A > 0$$



• Γενικότερα

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi f_k t} \right]$$



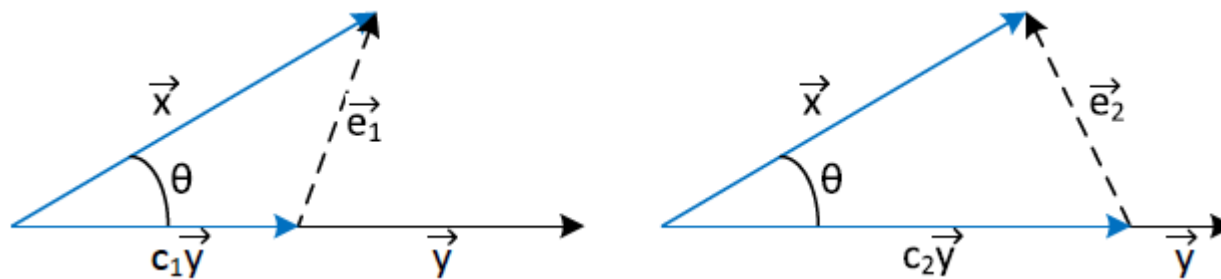
- Κάθε πραγματικό σήμα που αναλύεται φασματικά έχει τις ακόλουθες συμμετρίες:
 - a) Άρτια συμμετρία στο φάσμα πλάτους του
 - b) Περιττή συμμετρία στο φάσμα φάσης του
- Η συμμετρία προκύπτει από τη συζυγία των φασόρων
- Επίσης παρατηρήστε ότι οι συχνότητες των ημιτόνων του παραδείγματος ήταν *ακέραιες πολλαπλάσιες* της θεμελιώδους συχνότητας
 - Έτσι οι φάσορες μπορούν να γραφούν ως X_k , με k το αντίστοιχο ακέραιο πολλαπλάσιο της θεμελιώδους συχνότητας
 - Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι φάσορες μπορούσαν να γραφούν ως
$$X_2, X_{-2} = X_2^*, X_3, X_{-3} = X_3^*$$
 - Οι $X_1, X_{-1} = X_1^*$ ήταν μηδενικοί
 - Δεν υπήρχε φασματικό περιεχόμενο στη συχνότητα $f = 5$ Hz, παρ' όλο που αυτή είναι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος!
- Η ανάλυση περιοδικών σημάτων που γράφονται ως άθροισμα ημιτόνων είναι σχετικά απλή
- Ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία

- **Ερώτημα:** μπορούμε να γράψουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων?
 - Αν μπορούμε, τότε τα προηγούμενα γενικεύονται για κάθε περιοδικό σήμα
 - Η εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο είναι τετριμμένη!

- **Εναλλακτική διατύπωση:** μπορούμε να προσεγγίσουμε όσο καλά θέλουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?

• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

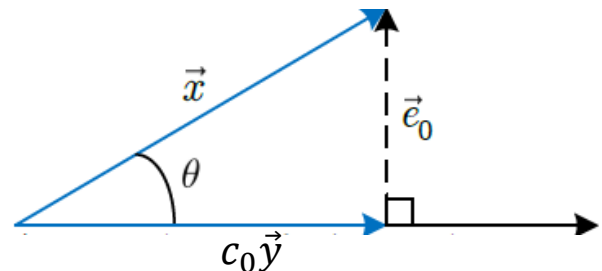
- Για να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα θα ήταν πιο βολικό να θυμηθούμε μερικές ιδιότητες των διανυσμάτων
- Έστω διανύσματα \vec{x}, \vec{y} όπως στο σχήμα



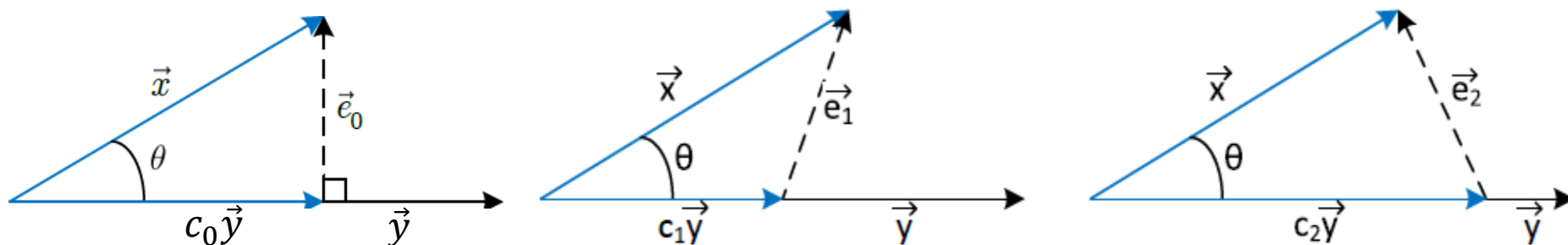
και \vec{e}_i διανύσματα σφάλματος, με την έννοια ότι το $\vec{e}_i = \vec{x} - c_i\vec{y}$ είναι το διάνυσμα που πρέπει να προσθέσουμε στο $c_i\vec{y}$ για να πάρουμε το διάνυσμα \vec{x} , δηλ.

$$\vec{x} = c_i\vec{y} + \vec{e}_i \quad \rightsquigarrow \quad \vec{e}_i = \vec{x} - c_i\vec{y}$$

- Γνωρίζετε ότι το μικρότερο διάνυσμα σφάλματος είναι αυτό που είναι κάθετο στο διάνυσμα \vec{y}



• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα



- Τα διανύσματα $c_i \vec{y}$ αποτελούν **προσεγγίσεις** του διανύσματος \vec{x} από το διάνυσμα \vec{y}
- Αν λοιπόν θέλαμε να γράψουμε $\vec{x} = c_i \vec{y} + \vec{e}_i \approx c_i \vec{y}$, ποια σταθερά c_i θα ήταν καλύτερη για αυτήν την προσέγγιση?
 - Η διαίσθηση μας – και τα μαθηματικά 😊 – λέει τη σταθερά c_0 , αφού το διάνυσμα σφάλματος της, \vec{e}_0 , είναι αυτό με το μικρότερο μήκος
- Ποια είναι η σταθερά c_0 όμως?
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε

$$\cos \theta = \frac{c_0 |\vec{y}|}{|\vec{x}|} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2} |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y}$$

με $\vec{x} \cdot \vec{y}$ το εσωτερικό γινόμενο των δυο διανυσμάτων

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Γιατί να μην εφαρμόσουμε την ίδια τακτική σε σήματα (αντί για διανύσματα)? 😊
- Έστω ένα σήμα $x(t)$ που θέλουμε να το προσεγγίσουμε με ένα σήμα $y(t)$, σε ένα διάστημα $t_1 < t < t_2$
- Με όμοιο σκεπτικό με πριν, ποιο είναι το **βέλτιστο** c – με κάποια έννοια – για το οποίο $x(t) \approx cy(t)$ στο διάστημα αυτό?
- Ας ορίσουμε τη **συνάρτηση σφάλματος** (όμοια με το διάνυσμα σφάλματος) ως

$$e(t) = x(t) - cy(t)$$

- Θα θέλαμε η συνάρτηση σφάλματος να είναι όσο γίνεται «μικρότερη»...
 - Αλλά με ποια έννοια «μικρότερη»?
- Ένας βολικός τρόπος είναι να ζητήσουμε η συνάρτηση σφάλματος να έχει την **ελάχιστη ενέργεια**

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt$$

- **Πρόβλημα βελτιστοποίησης - optimization!**

- Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα
- Ενέργεια σφάλματος

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - cy(t))^2 dt$$

- Για να βρούμε το βέλτιστο c θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{dc} E_e = 0$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt$$

με

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt$$

και

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt = \langle x, y \rangle$$

να ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο**
των σημάτων $x(t), y(t)$

$$c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2} |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt = \frac{1}{E_y} \langle x, y \rangle$$

• Παράδειγμα

○ Έστω $y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ -1, & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$ και $x(t) = \sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση του $y(t)$ από το $x(t)$

Θέλουμε το βέλτιστο c : $y(t) \approx c x(t)$, $c = \frac{1}{E_x} \int_{t_1=0}^{t_2=2\pi} x(t)y(t) dt$

Είναι $E_x = \int_{t_1=0}^{t_2=2\pi} x^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2t)}{2} \right) dt$

$$= \dots = \pi \Rightarrow \boxed{E_x = \pi}$$

Άρα $c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overbrace{x(t)y(t)}^{<x,y>} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \sin(t) dt$

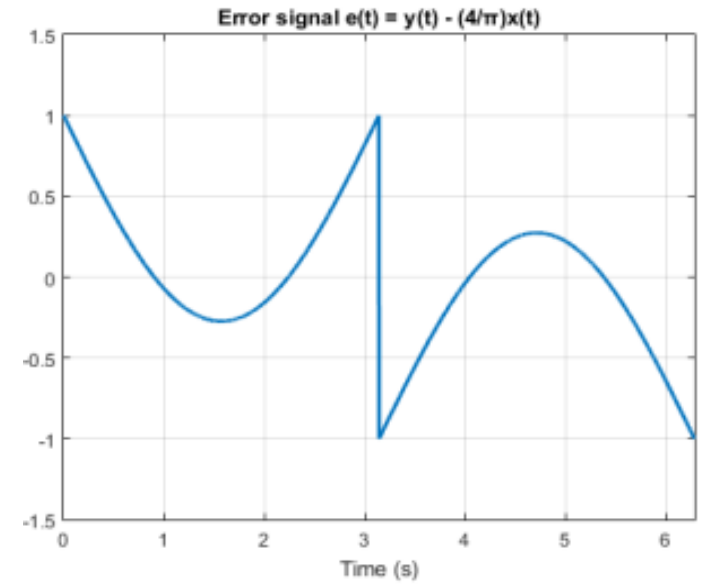
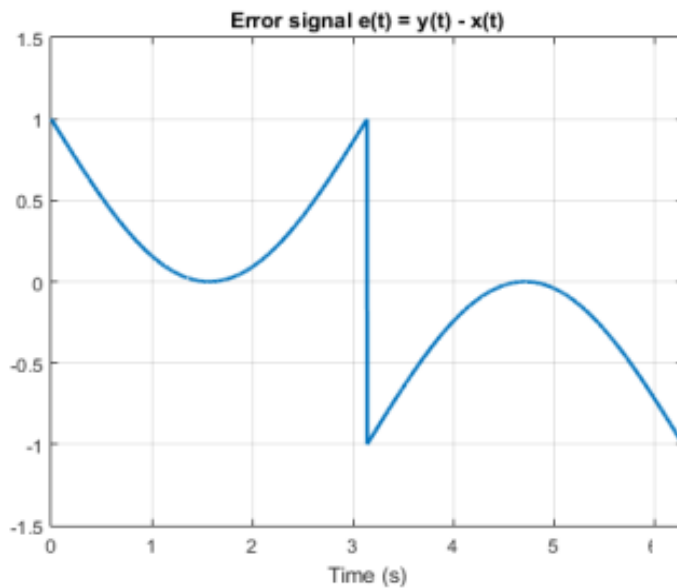
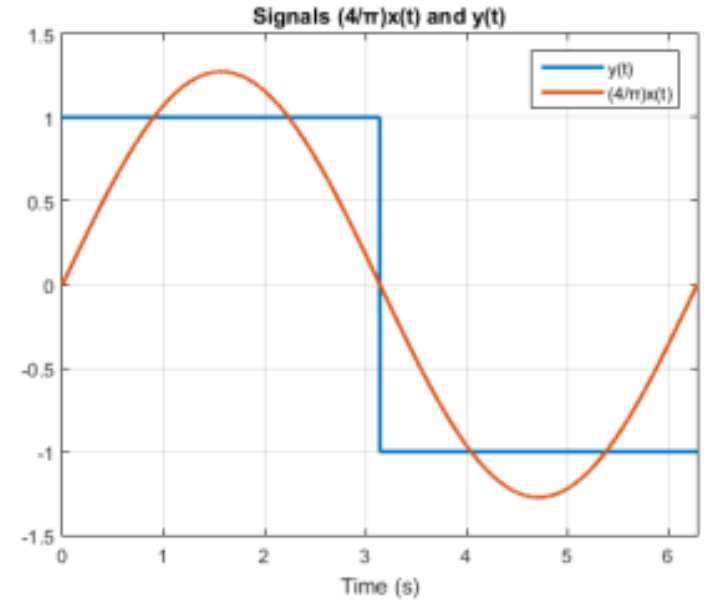
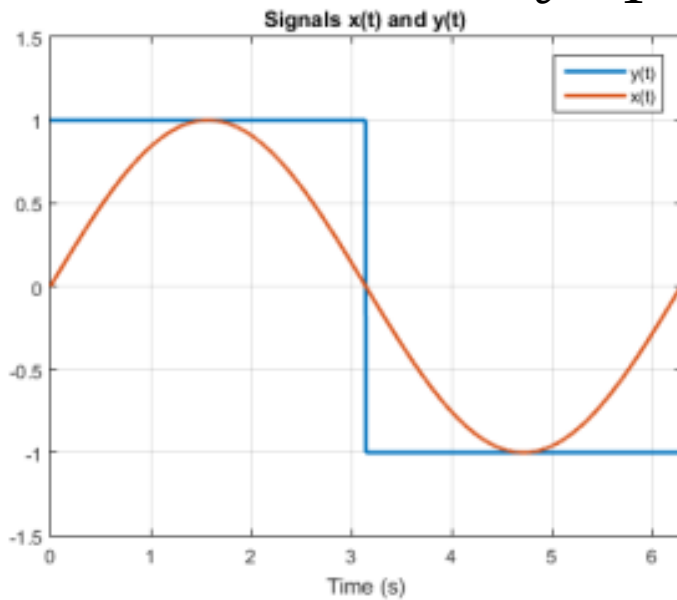
$$= \dots = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \boxed{c = \frac{4}{\pi}}$$

Άρα $y(t) \approx \frac{4}{\pi} x(t)$

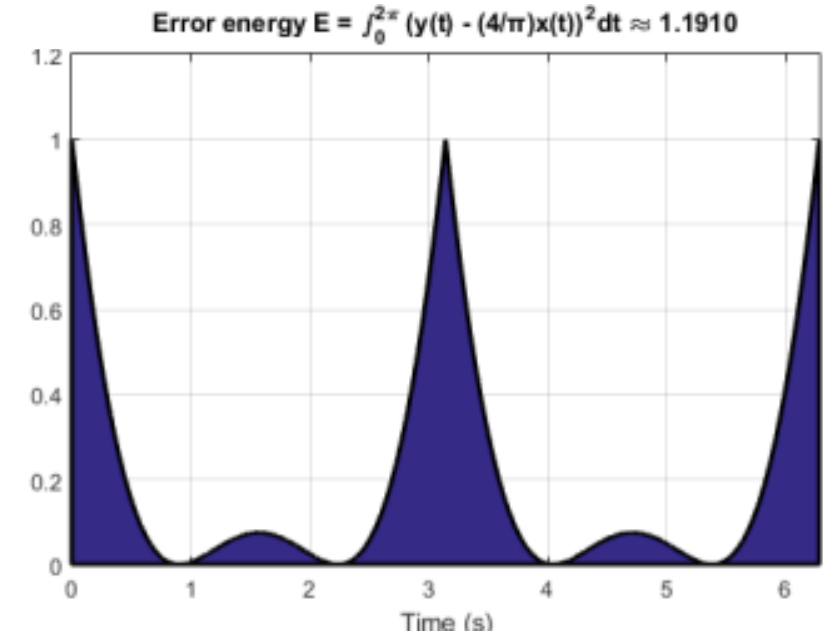
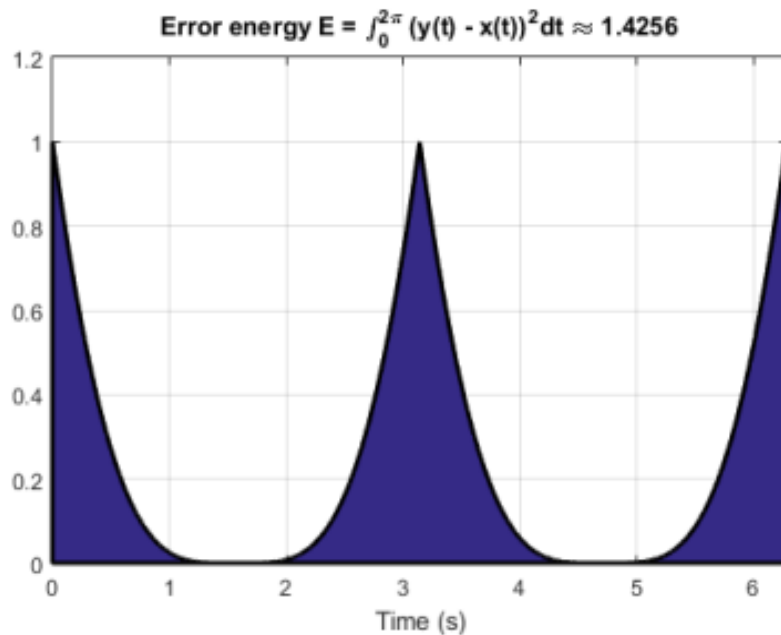
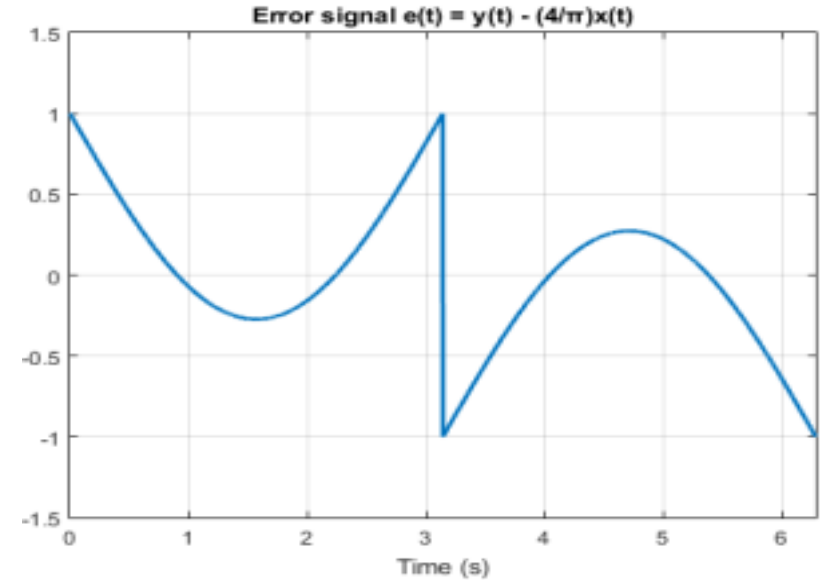
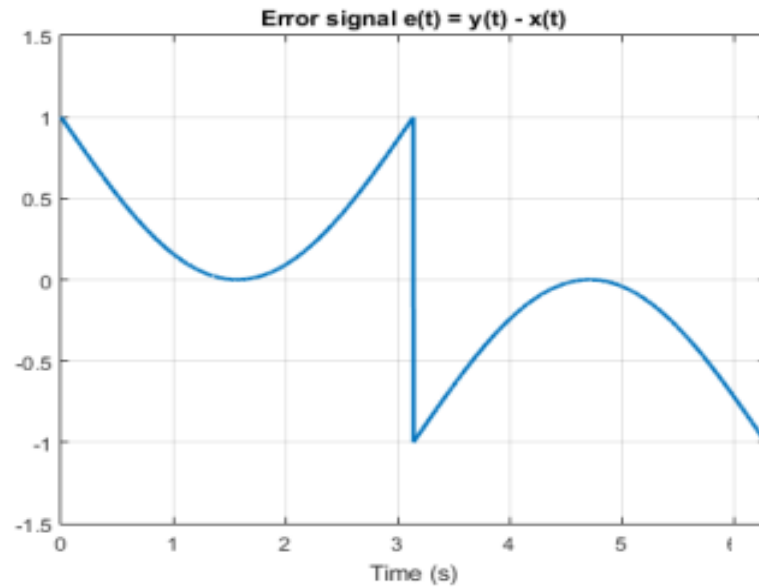
• Παράδειγμα

$c = 1$

$c = \frac{4}{\pi}$



• Παράδειγμα



• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

- Γιατί να μείνουμε μόνο σε ένα σήμα προσέγγισης $cy(t)$?
- Αν χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση του τύπου

$$y(t) \approx c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_N x_N(t) = \sum_{k=1}^N c_k x_k(t)$$

- Αναμένουμε ότι η ενέργεια σφάλματος θα γίνεται όλο και μικρότερο όσο προσθέτουμε όρους $x_i(t)$
 - Αρκεί οι όροι να είναι «κατάλληλοι»

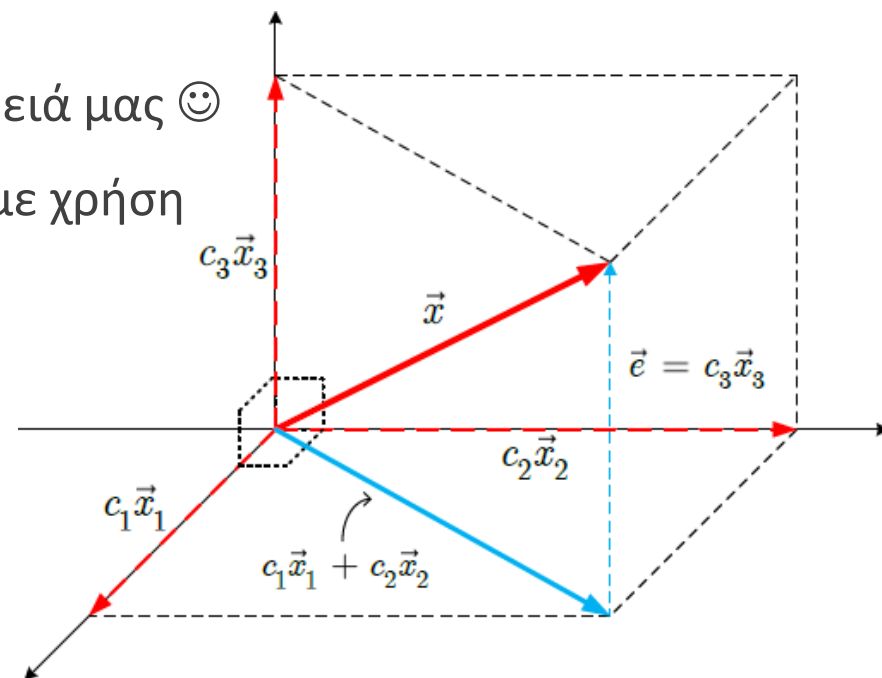
- Ξανά, τα διανύσματα θα τρέξουν προς βοήθειά μας 😊

- Ένα διάνυσμα στον 3D-χώρο περιγράφεται με χρήση τριων διανυσμάτων

- Ένα για το μήκος
- Ένα για το πλάτος
- Ένα για το ύψος

$$\vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + c_3 \vec{x}_3$$

- Πλήρης και ακριβής αναπαράσταση!



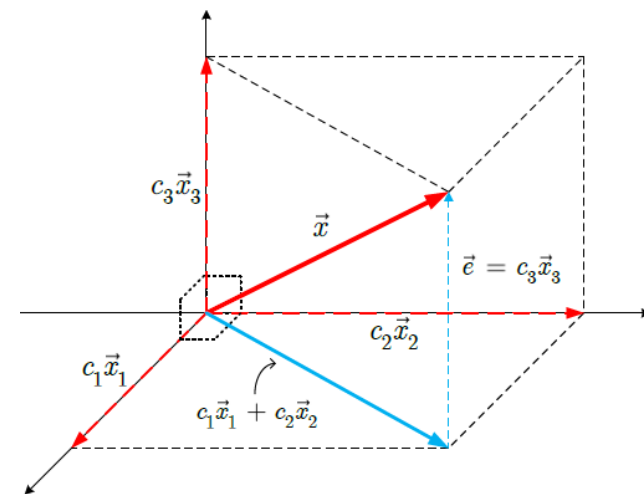
• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

- Αν χρησιμοποιήσουμε δυο αντί για τρία διανύσματα για την περιγραφή του διανύσματος \vec{x} τότε θα έχουμε σφάλμα

- Έστω ότι δεν περιλαμβάνουμε το $c_3\vec{x}_3$
- Αυτό θα είναι το διάνυσμα σφάλματος

- Διάνυσμα σφάλματος:

$$\vec{e} = \vec{x} - (c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) = c_3\vec{x}_3$$



- **Ερώτηση:** ποια είναι τα κατάλληλα διανύσματα ώστε να περιγράψουμε το διάνυσμα \vec{x} πλήρως και ακριβώς?

- Η διαίσθησή μας λέει ότι ένα τέτοιο σύνολο είναι το

$$x_1 = [1, 0, 0], \quad x_2 = [0, 1, 0], \quad x_3 = [0, 0, 1]$$

- Τι χαρακτηριστικά έχουν τα παραπάνω διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα?

• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

- Τι χαρακτηριστικά έχουν τα τρία προηγούμενα διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα?

Είναι **ορθογώνια** \rightarrow το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

- Από τη γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι ορθογωνιότητα συνεπάγεται **γραμμική ανεξαρτησία**
- Γραμμική ανεξαρτησία σημαίνει ότι κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων δυο

Αποτελούν ένα **πλήρες** σύνολο του 3D-χώρου

- Κανένα άλλο διάνυσμα δεν μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο με τα τρία παραπάνω

- Οι δυο αυτές ιδιότητες (γραμμ. ανεξαρτησία & πληρότητα) μας ονοματίζουν τα τρία αυτά διανύσματα ως **βάση** του 3D-χώρου

- Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός όλων των διανυσμάτων που αποτελούν τη βάση του χώρου **με μηδενικό σφάλμα**

- Πάμε στο χώρο των σημάτων τώρα... 😊



- **Ερώτημα:** μπορούμε να γράψουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων?
 - Αν μπορούμε, τότε τα προηγούμενα γενικεύονται για κάθε περιοδικό σήμα
 - Η εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο είναι τετριμμένη!

- **Εναλλακτική διατύπωση:** μπορούμε να προσεγγίσουμε όσο καλά θέλουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?

• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

- Ας επιλέξουμε ένα σύνολο από συζυγείς μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις, που έχουν συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους συχνότητας f_0
 - ...με $f_0 = 1/T_0$ τη θεμελιώδη συχνότητα του περιοδικού σήματος που θέλουμε να προσεγγίσουμε
- Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο από $2N + 1$ συζυγή μιγαδικά εκθετικά σήματα

$$\mathbb{E} = \left\{ e^{j2\pi k f_0 t} \right\}_{k=-N}^N, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Ας προσεγγίσουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ σε μια περίοδό του $[0, T_0)$ ως ένα άθροισμα $2N + 1$ τέτοιων σημάτων με συντελεστές X_k (δε χρησιμοποιούμε τώρα τη γραφή c_k):

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Συνάρτηση σφάλματος

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Ζητούνται τα X_k που δίνουν την **ελάχιστη ενέργεια σφάλματος**
- **Βελτιστοποίηση (ξανά ☺)**

• Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα

- Χρησιμοποιώντας διαδικασίες όπως αυτές που είδαμε, μπορεί κανείς να δείξει ότι:

1. Το σύνολο \mathbb{E} έχει στοιχεία ορθογώνια μεταξύ τους:

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

2. Το σύνολο \mathbb{E} είναι πλήρες όταν $N \rightarrow +\infty$, υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος

- Άρα το σύνολο

$$\mathbb{E} = \left\{ e^{j2\pi k f_0 t} \right\}_{k=-\infty}^{+\infty}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

αποτελεί βάση του χώρου

- Οπότε

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Ποιά είναι όμως επιτέλους αυτά τα X_k ????

Ορθογωνιότητα στο \mathbb{C} :

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt = 0$$

Ισότητα υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος!

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

