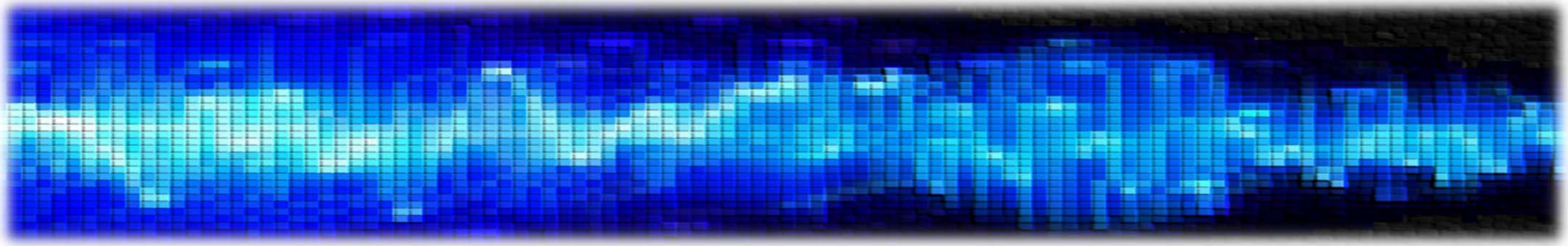
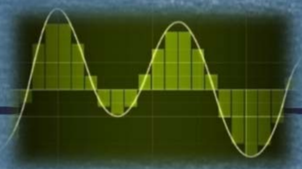
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η



- Κρουστική Απόκριση
- Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

Τι περιέχει το ΗΥ215?

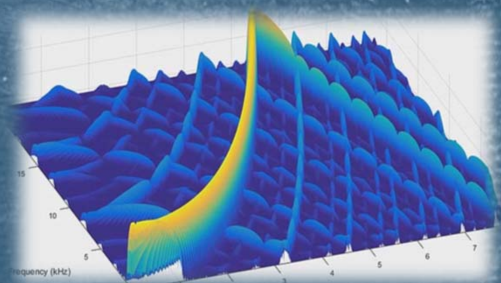


1^{o} Κομμάτι

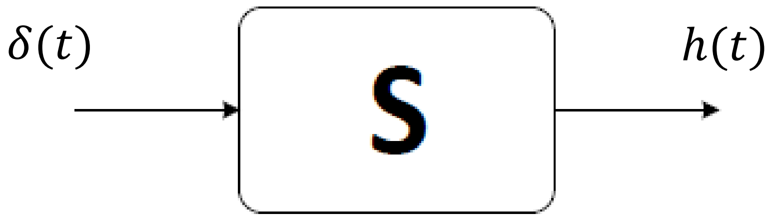
- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία
- Συστήματα Διακριτού χρόνου & ιδιότητες



- Γνωρίσαμε την απόκριση μηδενικής εισόδου ως την έξοδο του συστήματος που οφείλεται αποκλειστικά στις αρχικές συνθήκες
  - Θεωρώντας την είσοδο μηδενική
- Ας προχωρήσουμε στην **απόκριση μηδενικής κατάστασης**, η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από την (μη-μηδενική) **είσοδο** του συστήματος
- Σκεφτείτε πόσες πιθανές είσοδοι υπάρχουν σε ένα σύστημα!
- Θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε την έξοδο για κάθε είσοδο με έναν ενιαίο τρόπο
- Προς αυτήν την κατεύθυνση θα εισάγουμε την έννοια της **κρουστικής απόκρισης (impulse response)**
- Η κρουστική απόκριση είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα
  - …απουσία αρχικών συνθηκών για $t = 0^-$
- Συμβολισμός: $h(t)$



- Εμείς ήδη γνωρίζουμε τον τρόπο εύρεσης της απόκρισης μηδενικής εισόδου
  - Ας τον εκμεταλλευτούμε! ☺
- Η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που «ζει» μόνο για $t = 0$, και μετά εξαφανίζεται!
  - Άρα επιδρά στο σύστημα ακαριαία, και μετά εξαφανίζεται
- Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η συνάρτηση Δέλτα γεννά νέες «αρχικές» συνθήκες στο σύστημα!
- Οι «αρχικές» αυτές συνθήκες υπάρχουν για $t = 0^+$ και θα είναι της μορφής

$$h(0^+), h'(0^+), \dots, h^{(N-1)}(0^+)$$

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι τιμές των νέων αυτών «αρχικών» συνθηκών είναι

$$\begin{gathered} h(0^+) = 0 \\ h'(0^+) = 0 \\ \vdots \\ h^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N} \end{gathered}$$

- Μπορούμε να λύσουμε ξανά την ομογενή εξίσωση με αυτές τις συνθήκες!! ☺

- Αν έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t)$$

λύνουμε την ομογενή εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} h(t) = 0$$

με «αρχικές» συνθήκες

$$h(0^+) = 0$$
$$h'(0^+) = 0$$
$$\vdots$$
$$h^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N}$$

- Ας το δούμε σε ένα παράδειγμα

- **Παράδειγμα**

Ο Έστω το σύστημα

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t)}$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 3\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) = \delta(t)$$

0^+: $\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 3\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) = 0$

$h(0^+) = 0$

$h'(0^+) = \frac{1}{a_N} = 1$

Χαρ. Εξ. $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \begin{cases} \rightarrow \lambda_1 = -1 \\ \rightarrow \lambda_2 = -2 \end{cases}$

$h(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

$h(0^+) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 \Rightarrow c_1 = 1$

$h'(0^+) = -c_1 - 2c_2 = 1 \Rightarrow c_2 - 2c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -1$

$h(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$

- Θυμηθείτε ότι όταν ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις βρίσκεται σε αρχική ηρεμία (== μηδενικές αρχικές συνθήκες), τότε αυτό είναι **γραμμικό**
  - Επίσης, μπορεί κανείς να δείξει ότι είναι και **χρονικά αμετάβλητο**

- **Έτσι, ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) αν και μόνο αν οι αρχικές του συνθήκες είναι μηδενικές**
  - …εννοώντας τις αρχικές συνθήκες για $t = 0^-$

- Τα παραπάνω μας βοηθούν να γενικεύσουμε το προηγούμενο παράδειγμα για ένα σύστημα της μορφής

$$S: \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_k \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

1. Βρίσκουμε την κρουστική απόκριση $h_o(t)$ του συστήματος

$$S_o: \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t) \rightarrow h_o(t)$$

2. Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος S δίνεται ως

$$h(t) = \sum_{k=0}^{M} \frac{d^k}{dt^k} b_k h_o(t)$$

λόγω γραμμικότητας

- **Παράδειγμα**

$y_{zi}(t) = \underbrace{\sum_{\ell=1}^{r} c_\ell t^{\ell-1} e^{\lambda_1 t}} + \sum_{k=r+1}^{N} c_k e^{\lambda_k t}$ (περ. λ_1 πολλ. r)

Ο Έστω το σύστημα

ΓΧΑ

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 9y(t) = \boxed{9x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t)}$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$

$\boxed{S_0}$: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3$

$h_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} = c_1 \cdot e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}, \quad t>0$

Αρχ. Συνθήκες

$h(0^+) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$\dot h(0^+) = 1 \Rightarrow \left(c_2 e^{-3t} + c_2 t (-3) e^{-3t}\right)\Big|_0 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

$$\boxed{h_0(t) = t \cdot e^{-3t} u(t)}$$

$h(t) = 9 h_0(t) + 2\frac{d}{dt} h_0(t) = 9te^{-3t}u(t) + 2\frac{d}{dt}\left\{t e^{-3t} u(t)\right\} =$

$= 9te^{-3t}u(t) + 2\left(e^{-3t}u(t) + t\left(e^{-3t}u(t)\right)'\right\} \Rightarrow$

Παράδειγμα

$$\Rightarrow h(t) = 9te^{-3t}u(t) + 2\left(e^{-3t}u(t) + t\cdot\underbrace{\left(e^{-3t}u(t)\right)'}_{f'g+f\cdot g'}\right) \Rightarrow$$

$$\left(e^{-3t}u(t)\right)' = -3e^{-3t}u(t) + e^{-3t}\underbrace{u'(t)}_{\delta(t)}$$

$$\Rightarrow h(t) = 9te^{-3t}u(t) + 2e^{-3t}u(t) + 2t(-3)e^{-3t}u(t) + \underbrace{\cancel{2t\cdot e^{-3t}\delta(t)}}_{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = 3te^{-3t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)}$$

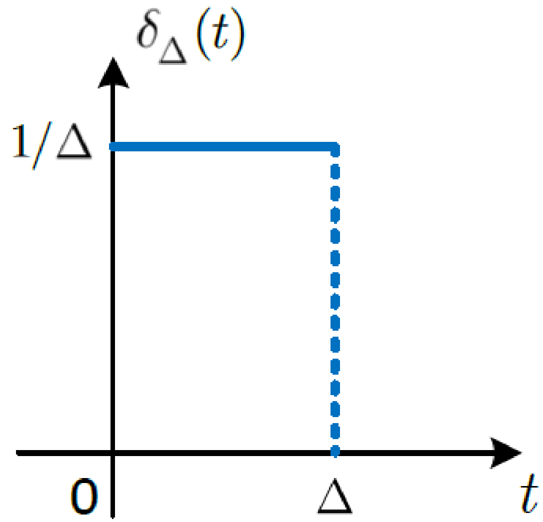
$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

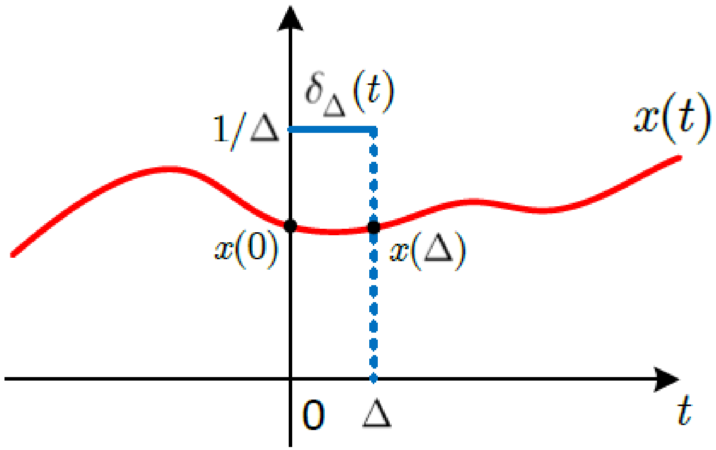
- Ας δούμε τώρα πως η κρουστική απόκριση μας χρησιμεύει στην εύρεση της εξόδου μηδενικής κατάστασης
  - Θυμίζετε ότι η απόκριση μηδενικής κατάστασης εξαρτάται αποκλειστικά από την είσοδο
- Αφού γνωρίζουμε την απόκριση του συστήματος για είσοδο μια συνάρτηση Δέλτα, θα ήταν πολύ χρήσιμο αν μπορούσαμε να γράψουμε κάθε είσοδο ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα! ☺
- Έτσι, θα χρησιμοποιούσαμε την ιδιότητα της γραμμικότητας και της χρονικής μετατόπισης για να βρούμε την έξοδο για κάθε είσοδο!
- Ας δούμε αν αυτό είναι εφικτό…
- Ας ξεκινήσουμε με μια προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα

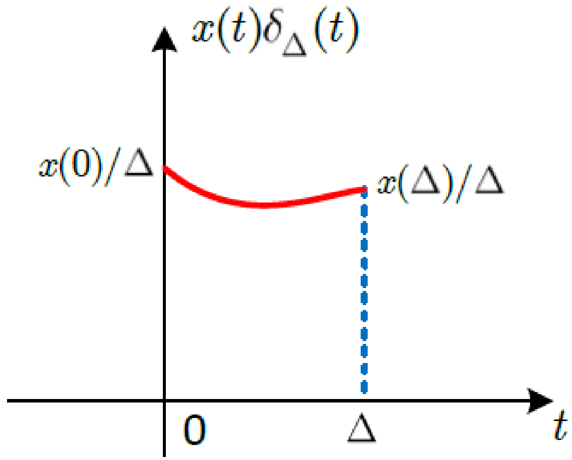
$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \le t \le \Delta \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

και σχηματικά



- Ας αναπαραστήσουμε το γινόμενο $x(t)\delta_\Delta(t)$ για ένα τυχαίο σήμα $x(t)$





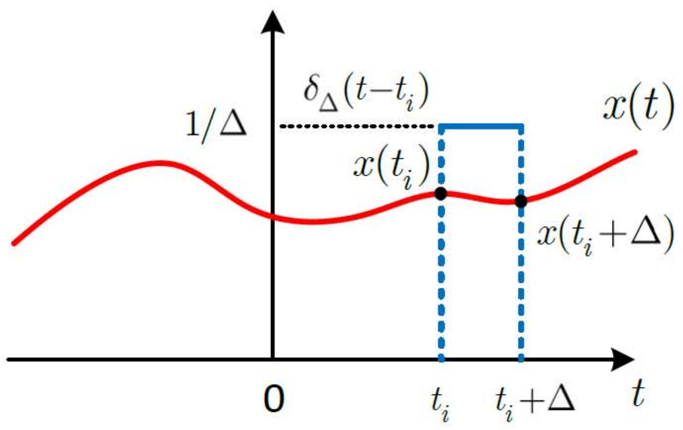
- Θεωρώντας τώρα το Δ ως πολύ μικρό, τέτοιο ώστε το τμήμα του σήματος που αποκόπτεται να θεωρείται σχεδόν σταθερό, μπορούμε να γράψουμε ότι

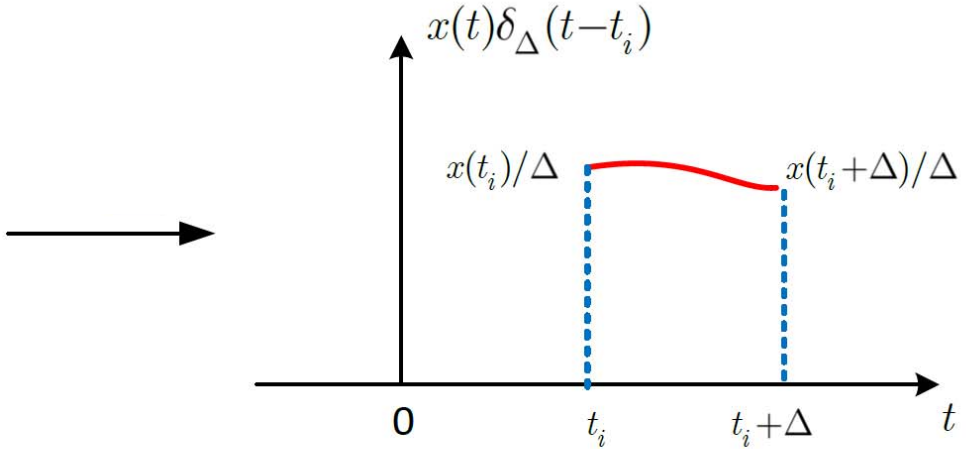
$$\Delta x(t)\delta_\Delta(t) \approx \Delta x(0)\delta_\Delta(t)$$

- Αν $\Delta \to 0$ τότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται σε ισότητα

$$\lim_{\Delta\to 0} \Delta x(t)\delta_\Delta(t) = x(0)\delta(t)$$

- Ας συνεχίσουμε με το γινόμενο $x(t)\delta_\Delta(t - t_i)$





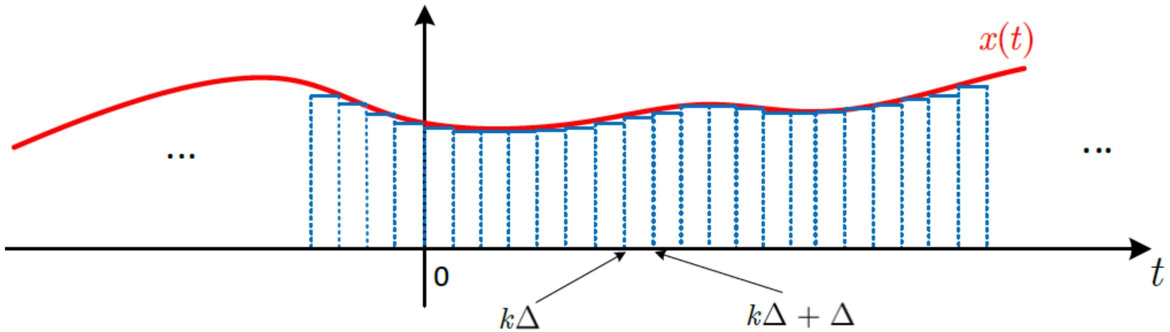
- Όμοια

$$\Delta x(t)\delta_\Delta(t - t_i) \approx \Delta x(t_i)\delta_\Delta(t - t_i)$$

- Αν $\Delta \to 0$ τότε

$$\lim_{\Delta\to 0} \Delta x(t)\delta_\Delta(t - t_i) = x(t_i)\delta(t - t_i)$$

- Μπορούμε να συνεχίσουμε για όλο το σήμα $x(t)$



- Αθροίζοντας όλα τα παραπάνω τμήματα έχουμε

$$\hat{x}_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)$$

με $\hat{x}_\Delta(t)$ μια προσέγγιση του αρχικού σήματος $x(t)$ η οποία εξαρτάται από την τιμή του Δ

- Όταν $\Delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}_\Delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta) = x(t)$$

- Το παραπάνω όριο αποτελεί το άθροισμα Riemann και μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Πέτυχαμε να γράψουμε ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα (ολοκλήρωμα) μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα, με καθεμιά να έχει εμβαδό $x(\tau)$!

- Το ολοκλήρωμα

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

είναι πολύ σημαντικό και η πράξη που εκτελεί ονομάζεται **συνέλιξη** μεταξύ του $x(t)$ και του $\delta(t)$

- Η πράξη αυτή συμβολίζεται με τον τελεστή $*$: $x(t) * \delta(t)$

- Η πράξη της συνέλιξης μπορεί να οριστεί μεταξύ οποιωνδήποτε σημάτων:

$$c(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Πώς βοηθά λοιπόν η σχέση που βρήκαμε για την εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?

- Θυμηθείτε ότι το σύστημά μας είναι ΓΧΑ!

- Δείτε την παρακάτω ακολουθία:

a) κρουστική απόκριση :

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

b) χρονική αμεταβλητότητα:

$$\delta(t-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$$

c) γραμμικότητα:

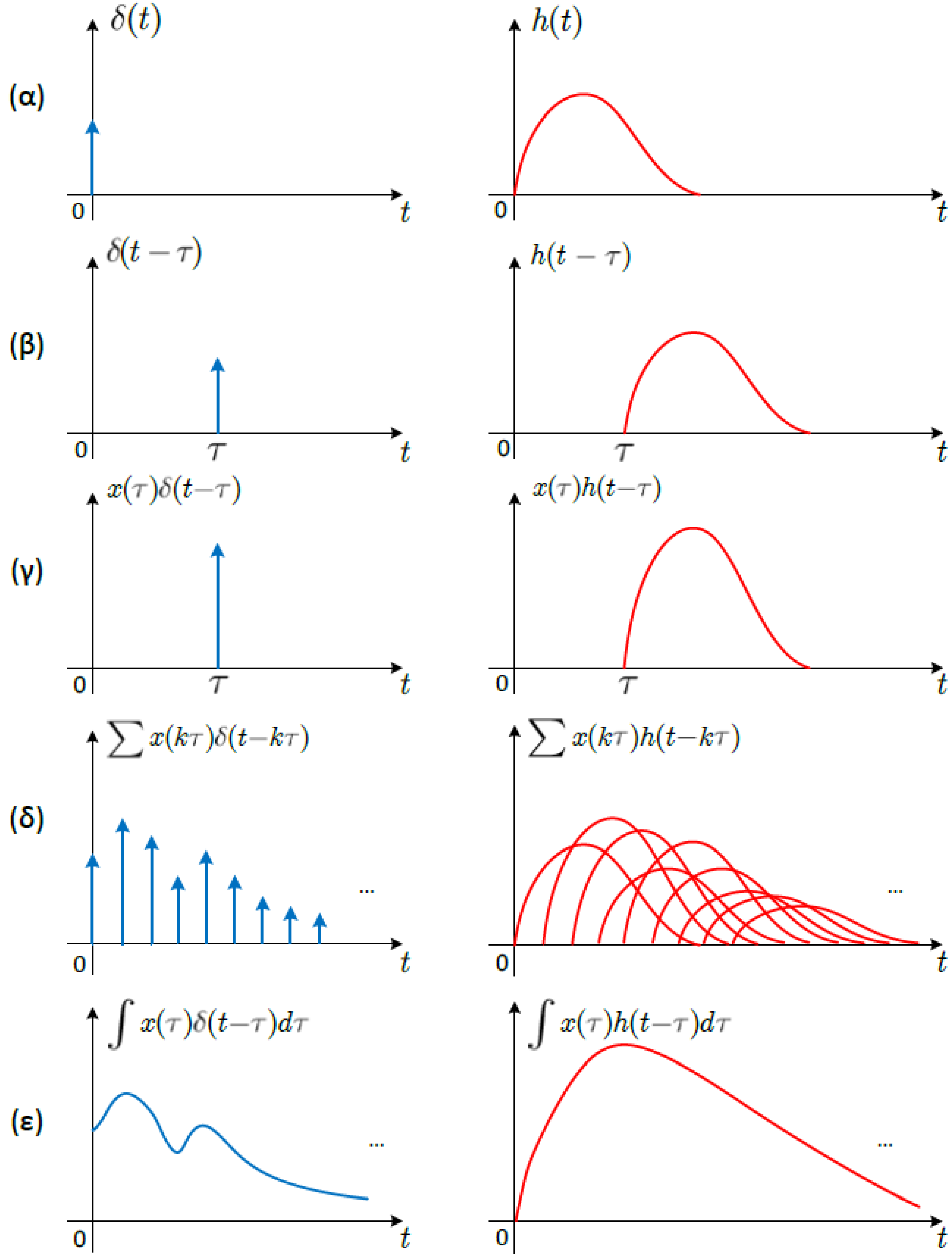
$$x(\tau)\delta(t-\tau) \rightarrow x(\tau)h(t-\tau)$$

d) γραμμικότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

e) απόκριση μηδενικής κατάστασης:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$



(α)
$\delta(t)$
$h(t)$
(β)
$\delta(t-\tau)$
$h(t-\tau)$
(γ)
$x(\tau)\delta(t-\tau)$
$x(\tau)h(t-\tau)$
(δ)
$\sum x(k\tau)\delta(t-k\tau)$
$\sum x(k\tau)h(t-k\tau)$
(ε)
$\int x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
$\int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
0
τ
t
...

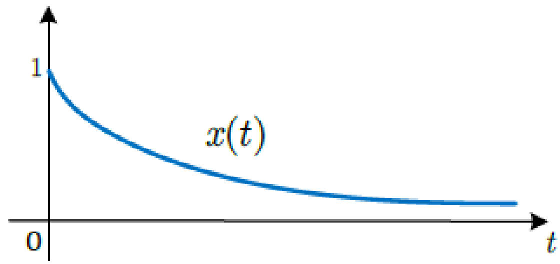
- Ας εξετάσουμε την πράξη της συνέλιξης
- Η συνέλιξη έχει ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες

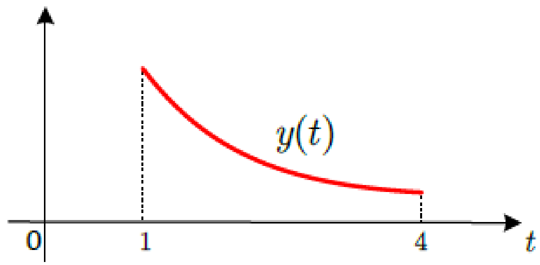
Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)),\ \ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \Re \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \Re \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

- Όλες αποδεικνύονται με τον ορισμό της συνέλιξης
- Η συνέλιξη φημίζεται για τη δυσκολία της ως πράξη
- Ας δούμε πόσο απλή είναι τελικά

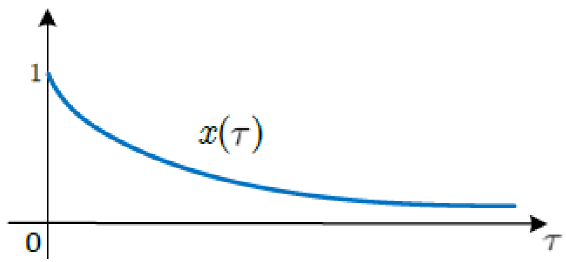
- **Συνέλιξη**

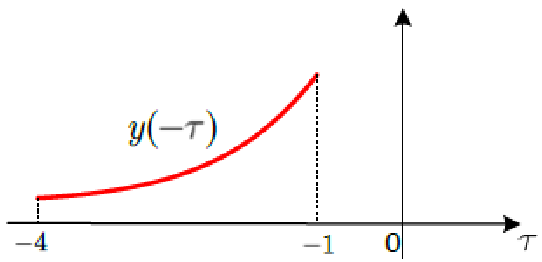
- Έστω δυο σήματα $x(t), y(t)$ των οποίων ζητούμε τη συνέλιξη $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$



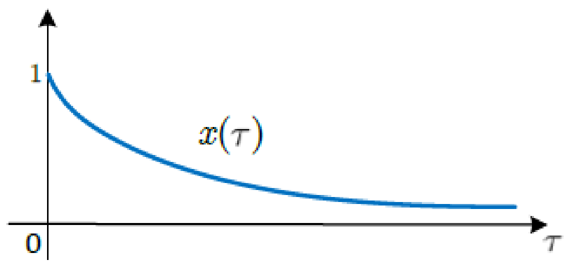


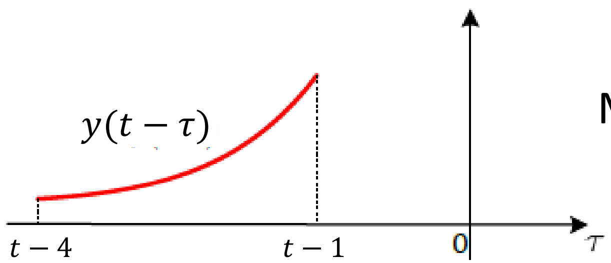
- Η πράξη της συνέλιξης ζητά ένα εκ των δυο σημάτων να υποστεί **χρονική αντιστροφή** και στη συνέχεια **χρονική μετατόπιση**
  - Έστω ότι το $y(t)$ θα είναι αυτό το σήμα





Αντιστροφή

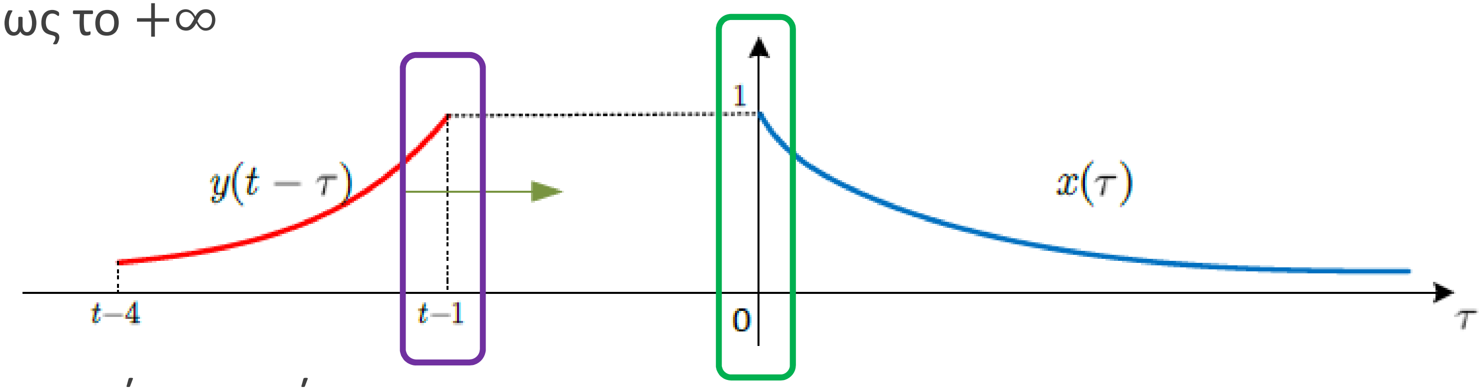




Μετατόπιση

- **Συνέλιξη**

- Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau'\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t-\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t-1<0 \Rightarrow t<1$$

και

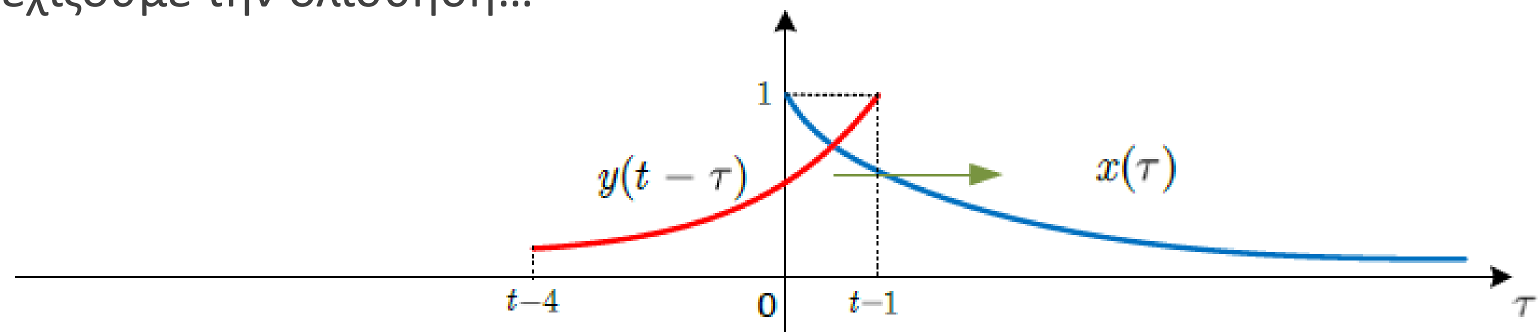
$$c(t)=0$$

αφού τα δυο σήματα δε «ζουν» σε κοινό διάστημα

- Αυτό θα πάψει να συμβαίνει όταν το $y(t-\tau)$ πλησιάσει το $x(\tau)$ έτσι ώστε το δεξί «άκρο» του περάσει το $t=0$…
  - …που είναι το αριστερό «άκρο» του $x(\tau)$

- **Συνέλιξη**

- Συνεχίζουμε την ολίσθηση…



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 4 < 0 \text{ και } t - 1 > 0 \Rightarrow 1 < t < 4$$

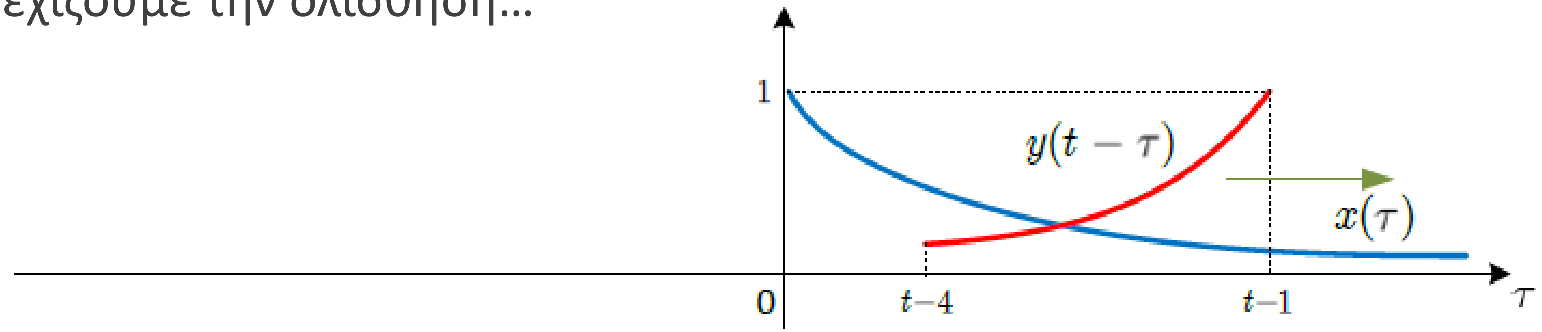
και

$$c(t) = \int_0^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(1, 4)$

- Υπάρχει μια ακόμα περίπτωση…

- **Συνέλιξη**
- Συνεχίζουμε την ολίσθηση…



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t-4>0 \Rightarrow t>4$$

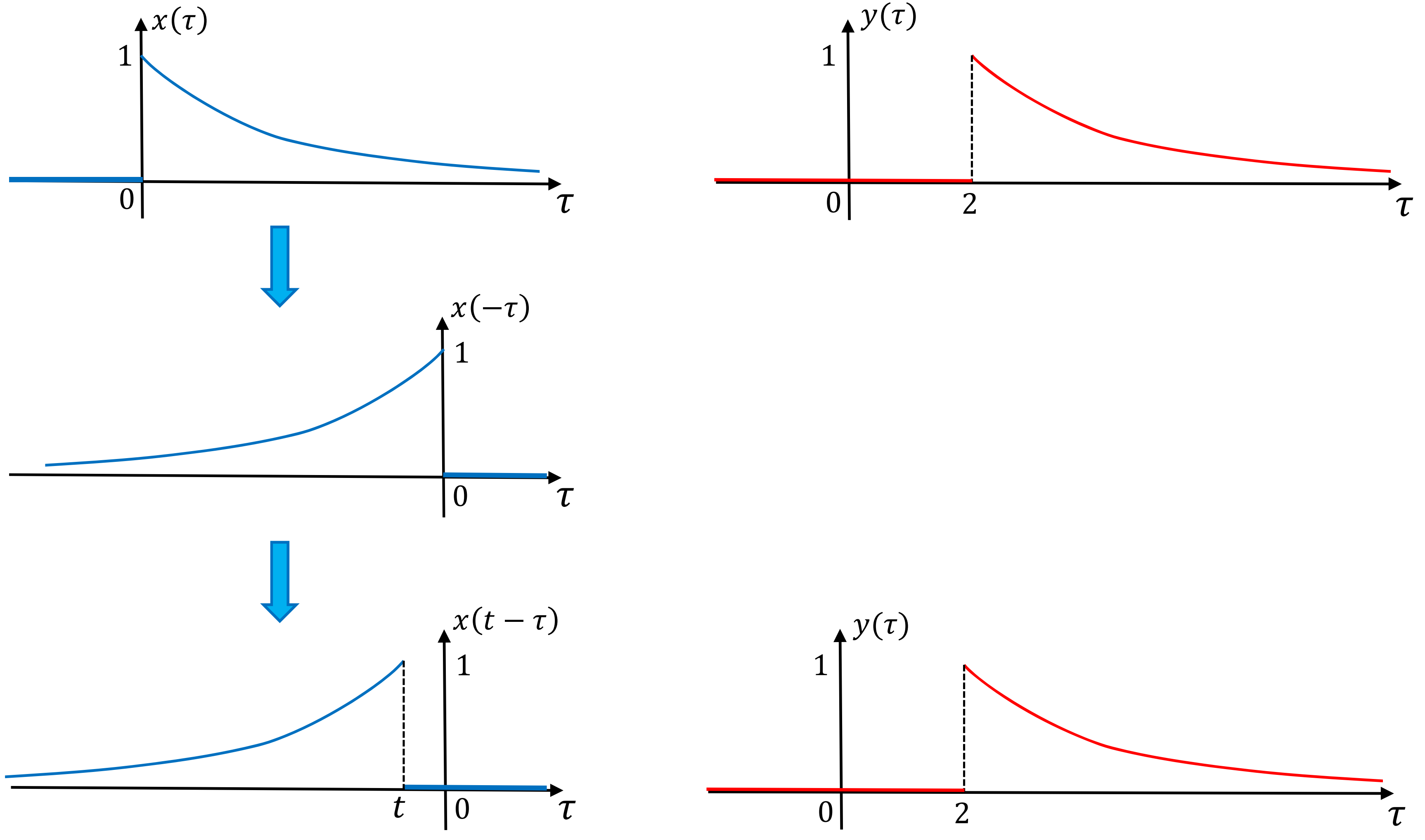
και

$$c(t)=\int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(4,+\infty)$
- Άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν
- Η λύση που περιγράφηκε ονομάζεται **γραφική λύση συνέλιξης**

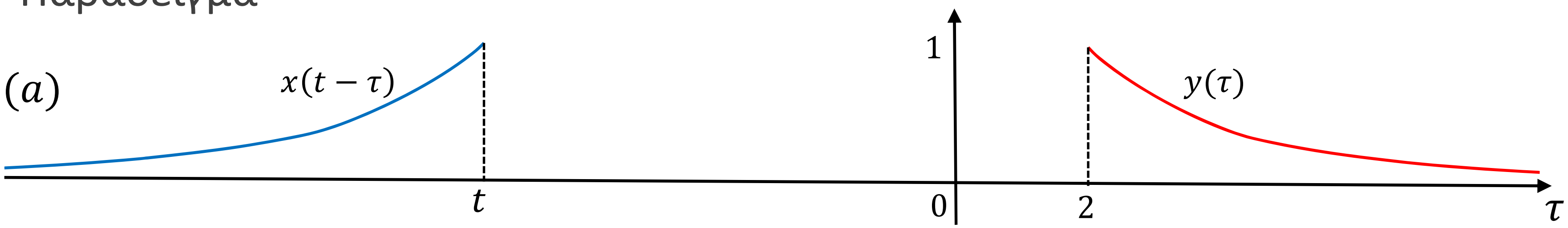
- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

Ο Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t), \;\; y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$

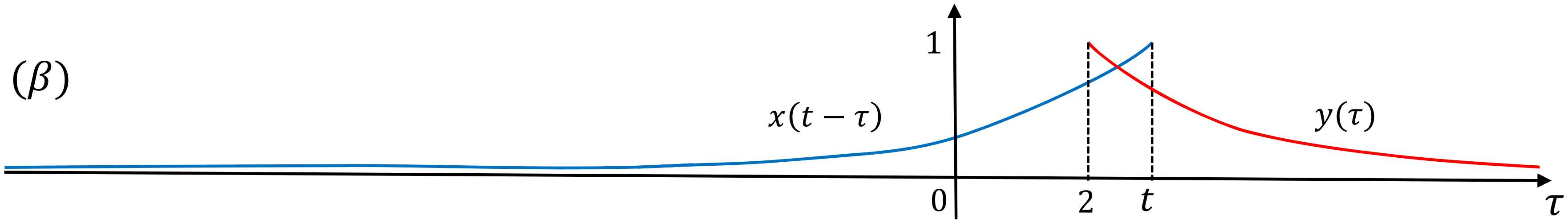


- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

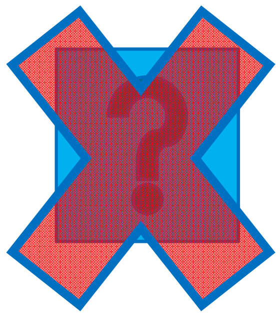
(a)



(β)



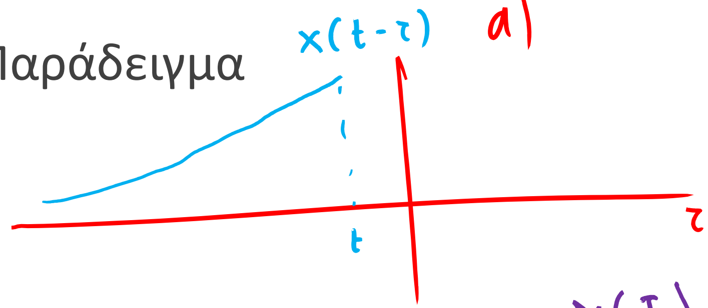
(γ)

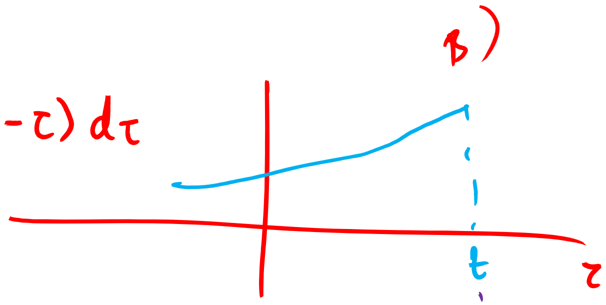


- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

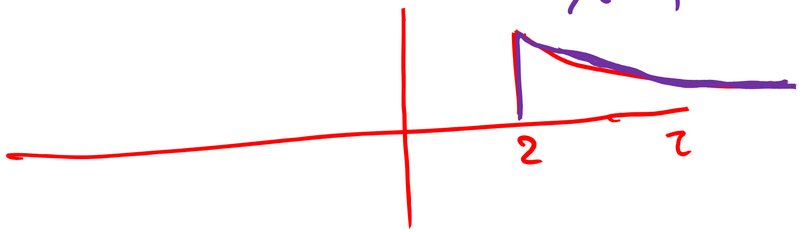
$x(t) = e^{-t} u(t)$

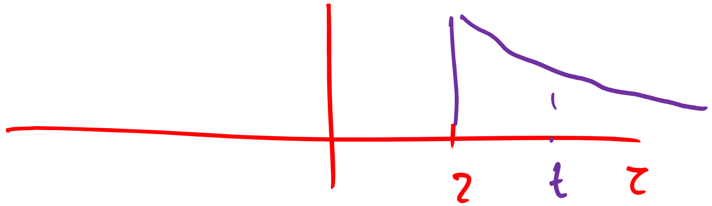
$$C_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$





$y(\tau) = e^{-(\tau-2)} u(\tau-2)$





α) $t < 2$ $\quad C_{xy}(t) = 0$

β) $t > 2$

$$C_{xy}(t) = \int_2^t e^{-(\tau-2)}\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau = \int_2^t e^{-\tau} e^{+2} e^{-t} e^{+\tau}\, d\tau$$

$$= e^{2-t} \int_2^t d\tau = e^{-(t-2)}\, \tau\Big|_2^t = e^{-(t-2)}\,(t-2)$$

- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

$$u(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ 1 & \tau > 0 \end{cases}$$

Ο Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t)$, $y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ με την **αλγεβρική** μέθοδο

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau-2)} u(\tau-2)\; e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$u(\tau-2) = \begin{cases} 0 & \tau-2<0 \\ 1 & \tau-2>0 \end{cases} \to \begin{cases} 0 & \tau<2 \\ 1 & \tau>2 \end{cases} \qquad u(\tau-2)\,u(t-\tau)=1 \quad \boxed{2<\tau<t}$$

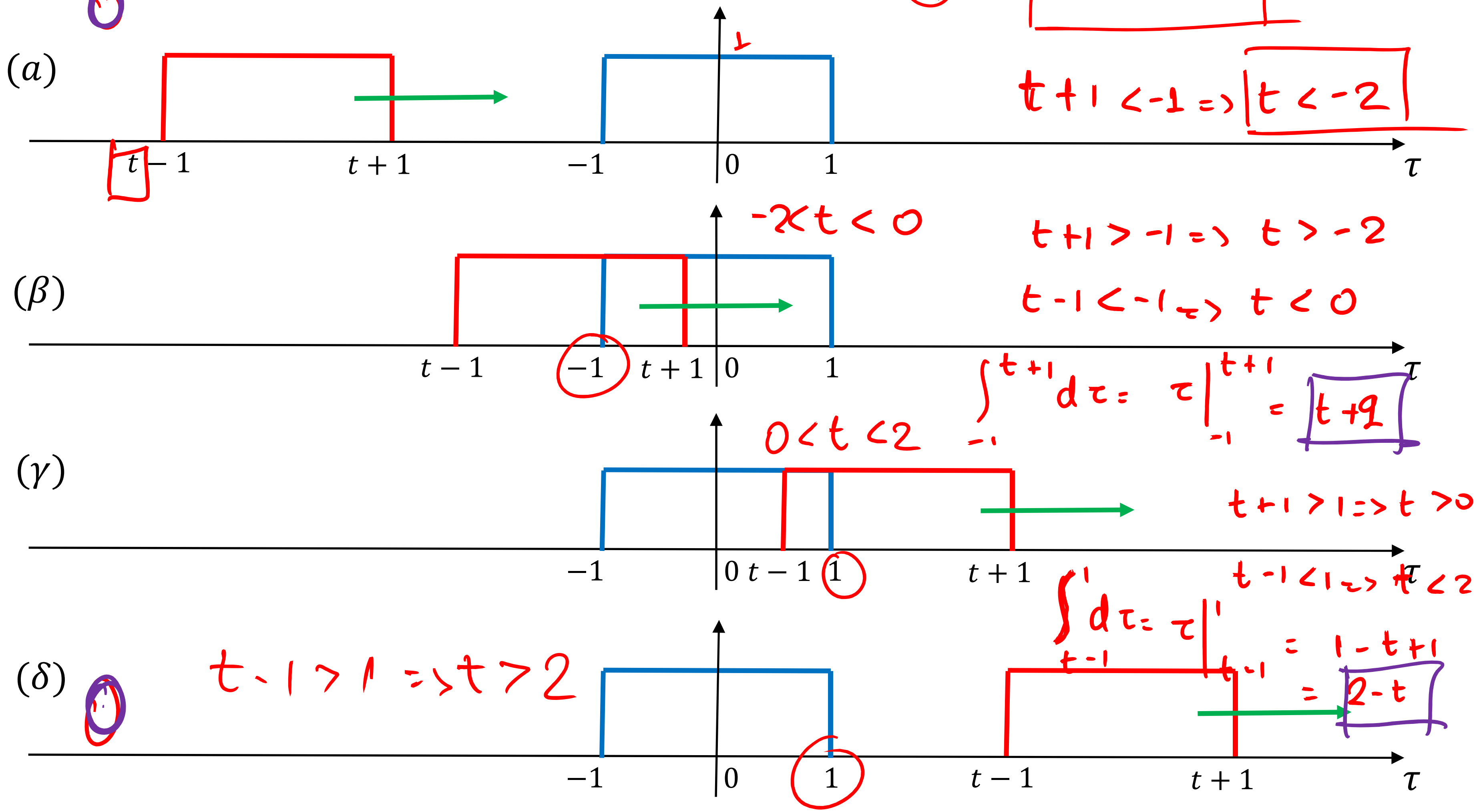
$$u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & t-\tau<0 \\ 1 & t-\tau>0 \end{cases} \to \begin{cases} 0 & \tau>t \\ 1 & \tau<t \end{cases}$$

$$= \int_{2}^{t} e^{-\tau+2}\, e^{-t} \cdot e^{+\tau}\, d\tau = e^{-(t-2)}\, \tau \Big|_{2}^{t} = e^{-(t-2)}(t-2)$$

για $2<t$

- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

Ο Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ και $\boxed{y(t) = x(t)}$



- **Συνέλιξη**

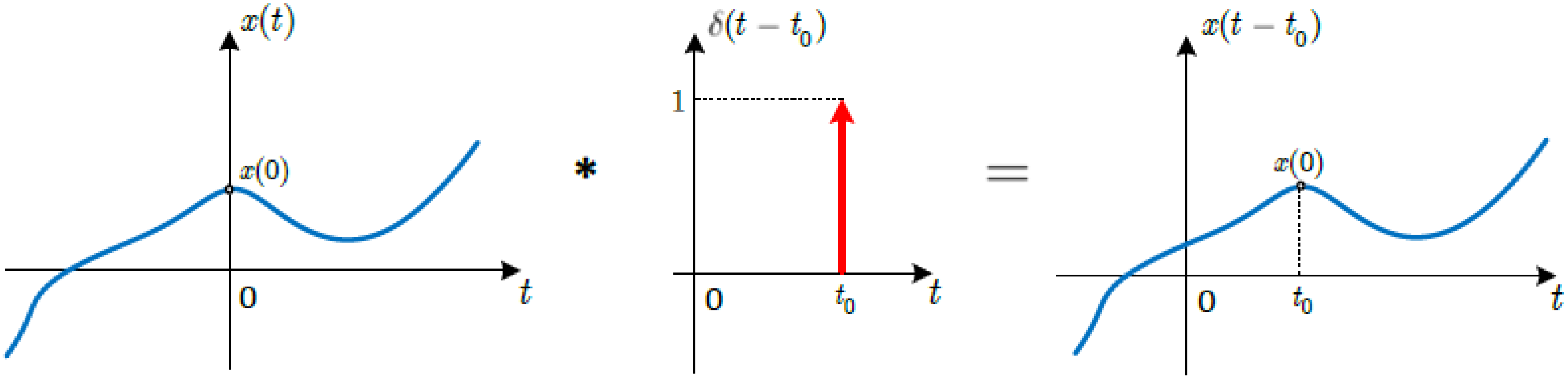
- Συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα

- Από τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα έχουμε ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα της μορφής

$$A\delta(t - t_0), \qquad A \in \Re$$

δίνει το ίδιο σήμα μετατοπισμένο κατά t_0 και πολλαπλασιασμένο με $A \in \Re$, δηλ.

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau - t_0)d\tau = x(t - t_0)$$



- **Συνολική Απόκριση Συστήματος**

- Με βάση τα προηγούμενα, η συνολική έξοδος ενός συστήματος που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις με αρχικές συνθήκες δίνεται ως

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t} \right) u(t) + x(t) * h(t)$$

αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι απλές

- Αν το **σύστημα είναι ΓΧΑ**, τότε η έξοδος δίνεται **μόνο** από την απόκριση μηδενικής κατάστασης

$$y(t) = y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

- Κατά κανόνα ενδιαφερόμαστε για ΓΧΑ συστήματα
  - Κάποιες πολύ λίγες φορές θα εξετάζουμε και τις αρχικές συνθήκες του συστήματος

- **Ευστάθεια Συστήματος**
- Γνωρίζετε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές αν

$$|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re_+$$

- Προφανώς αυτή η έξοδος $y(t)$ μπορεί να είναι είτε η συνολική, είτε κάποια από τις επιμέρους
- Ξέρουμε ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου περιλαμβάνει σήματα της μορφής

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Για αυτά πρέπει υποχρεωτικά $\boldsymbol{\lambda_i < 0}$ ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές
- Ξέρουμε ότι η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος
- Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει

$$|y_{zs}(t)| < B_y \Rightarrow |y_{zs}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau) h(t-\tau)| d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)| d\tau < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau$$

- **Ευστάθεια Συστήματος**
- Η σχέση

$$|y_{zs}(t)| < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

ισχύει μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})| \boldsymbol{dt} < +\infty$$

- Η σχέση αυτή μας λέει ότι η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι **απολύτως ολοκληρώσιμη** και αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη** για την **ευστάθεια** του συστήματος!
- Η συνθήκη αυτή μπορεί να ιδωθεί υπό το πρίσμα των συναρτήσεων που δημιουργούν την κρουστική απόκριση:

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Ξανά λοιπόν πρέπει να ισχύει $\boldsymbol{\lambda_i} < \boldsymbol{0}$ για να είναι το σύστημα ευσταθές!
  - …αφού το εμβαδόν της $|h(t)|$ πρέπει να είναι πεπερασμένο

- **Αιτιατότητα Συστήματος**

- Η αιτιατότητα ενός συστήματος έχει να κάνει με τη σχέση αιτίου-αποτελέσματος
  - Ένα σύστημα παράγει εξόδους μόνο αν υπάρχει κάποιο «αίτιο»-είσοδος που το διεγείρει

- Προφανώς ένα σύστημα που έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες δεν μπορεί να είναι αιτιατό...
  - ... αφού παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί από μια είσοδο! ☺

- Η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με αυτό που ονομάζουμε «**κατάσταση αρχικής ηρεμίας**» του συστήματος

- Μπορούμε να βρούμε μια συνθήκη για ένα ΓΧΑ σύστημα που να σχετίζει την κρουστική του απόκριση με την αιτιατότητα (ή μη) του?
  - Ναι!

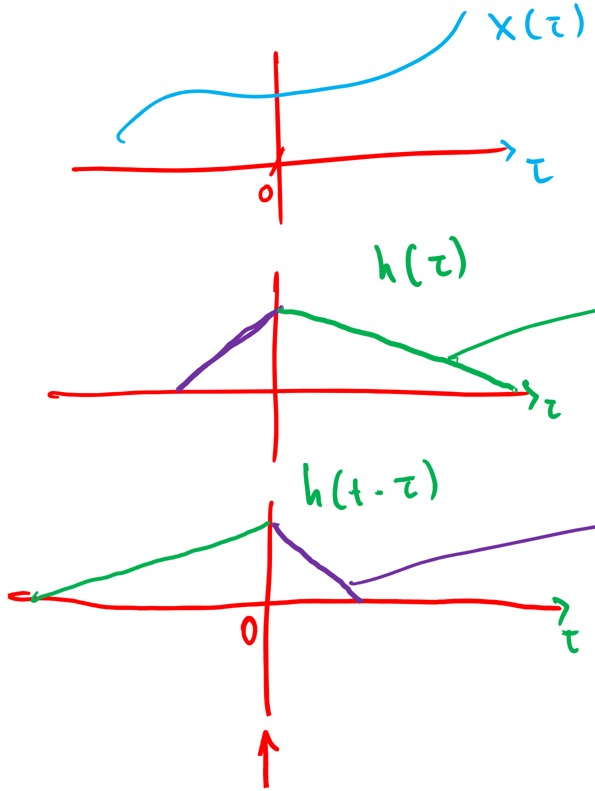
- Σκεφτείτε ότι όταν εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε η έξοδος είναι η κρουστική του απόκριση $h(t)$

- Η είσοδος εμφανίζεται για $t = 0$, άρα η έξοδος πρέπει να υπάρξει για $t \geq 0$ αν το σύστημα είναι αιτιατό

- Άρα ένα σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$\boxed{h(t) = 0, \qquad t < 0}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



$y[0]$

Αιτιατό:

$h(t) = 0, \; t < 0$

Αλγεβρικά.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x(\tau) \boxed{h(-\tau)}\, d\tau + \quad (1)$$

$$\underbrace{\int_{0}^{\infty} x(\tau) \boxed{h(-\tau)}\, d\tau}_{\text{μελλοντικές στιγμές του } x(t)} \quad (2)$$

Θέλω το (2) να είναι μηδέν για αιτιατό σύστημα. Άρα

$h(t) = 0 \; , \; t < 0$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ